Werk

Titel: 2. Eigenwertprobleme mit zwei Parametern.

Jahr: 1960

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0074|log57

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Schließlich wählen wir positive Zahlen j_k $(k=1, 2, 3, \ldots)$ so groß, daß für $k \to \infty$

$$\min\{j_k - |\operatorname{Im} \lambda_n| \mid \operatorname{Re} \lambda_n < (k+a)^2\} \to +\infty,$$

$$\int\limits_{(\operatorname{Im} \lambda = \pm j_k,\, r_k \leq \operatorname{Re} \lambda \leq (k+a)^2)} S_2(\lambda)\, |d\lambda| = O\left(\frac{1}{k} \log k\right),$$

und daß für $k \to \infty$

$$\max\{S_2(\lambda) \mid \operatorname{Im} \lambda = \pm j_k,\ r_k \leqq \operatorname{Re} \lambda \leqq (k+a)^2\} \to 0.$$

Das ist nach Hilfssatz 2 möglich.

Wir wählen dann für hinreichend große k $(\geqq k_0)$ als $\mathfrak{C}_k$ das Rechteck, das durch die 4 Endpunkte der vorstehend notierten Integrationsstrecken gebildet wird. Diese $\mathfrak{C}_k$ erfüllen dann nach Konstruktion sämtliche Behauptungen unseres Satzes; man wird dabei noch, falls nötig, $\mathfrak{C}_1 = \cdots = \mathfrak{C}_{k_0-1} = \mathfrak{C}_{k_0}$ setzen.

ZUSATZ. Hilfssatz 2 gilt ebenso, wenn man überall

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad \text{durch} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

und

$$(n \to \pm\infty) \quad \text{durch} \quad (n \to +\infty)$$

ersetzt.

Hilfssatz 3 gilt entsprechend, wenn man ersetzt (in Voraussetzungen und Behauptungen)

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{durch} \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$n \to \pm\infty \quad \text{durch} \quad n \to +\infty,$$

$$\vartheta \text{ nicht ganz} \quad \text{durch} \quad \vartheta \neq -1, -2, -3, \ldots.$$

Hilfssatz 4 gilt entsprechend, wenn man überall

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{durch} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$n \to \pm\infty \quad \text{durch} \quad n \to +\infty,$$

$$n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \quad \text{durch} \quad n_1, n_2 = 0, 1, 2, \ldots$$

$$|n| \leqq k \quad \text{durch} \quad n \leqq k$$

ersetzt.

Das ist unmittelbar zu sehen.

2. Eigenwertprobleme mit zwei Parametern

21. VORAUSSETZUNGEN, VORBEMERKUNGEN.

$\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, $\mathfrak{R}_3, \ldots$ seien komplexe lineare Räume. Abgesehen von den Bezeichnungen n, m, k, s für ganze Zahlen schreiben wir die Elemente dieser Räume mit kleinen lateinischen Buchstaben und die komplexen Zahlen mit

kleinen griechischen Buchstaben. Man habe für die genannten Räume

$$\mathfrak{R}_1 \supseteqq \mathfrak{R}_2 \supseteqq \mathfrak{R}_3 \supseteqq \cdots \supseteqq \mathfrak{R}. \tag{1}$$

Im Raume $\mathfrak{R}_s$ $(s=1, 2, 3, \ldots)$ sei eine Norm $\|f\|_s$ erklärt, bezüglich der $\mathfrak{R}_s$ zu einem Banach-Raum wird. Es gelte für $f \in \mathfrak{R}_{s+1}$

$$\|f\|_s \leqq \|f\|_{s+1} \qquad (s=1, 2, 3, \ldots). \tag{2}$$

Schließlich gelte

$$\mathfrak{R} = \bigcap_{s=1}^{\infty} \mathfrak{R}_s. \tag{3}$$

Eine Folge $f_n \in \mathfrak{R}$ heißt Cauchy-Folge, wenn sie innerhalb jedes Banach-Raumes $\mathfrak{R}_s$ Cauchy-Folge ist; wir schreiben ebenso

$$f_n \to f \qquad (\in \mathfrak{R}),$$

wenn dies innerhalb jedes $\mathfrak{R}_s$ gilt. Wegen (2), (3) ist dann $\mathfrak{R}$ perfekt: zu jeder Cauchy-Folge f_n aus $\mathfrak{R}$ gibt es ein f aus $\mathfrak{R}$ mit $f_n \to f$.

$\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ seien (perfekte!) Unterräume von $\mathfrak{R}$.

Für $u \in \mathfrak{U}$, $v \in \mathfrak{U}^*$ sei ein bilineares Funktional (u, v) erklärt. (u, v) ist also eine komplexe Zahl; man hat

$$(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, v) = \alpha_1 (u_1, v) + \alpha_2 (u_2, v),$$

$$(u, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 (u, v_1) + \alpha_2 (u, v_2).$$

Dies Funktional sei beschränkt: mit einer Konstanten $\varkappa > 0$ gilt stets

$$|(u, v)| \leqq \varkappa \|u\|_s \|v\|_s \qquad (s=1, 2, 3, \ldots). \tag{4}$$

Weiter möge das Funktional in recht scharfer Weise nichttrivial sein: Gilt für ein $v \in \mathfrak{U}^*$

$$(u, v) = 0$$

mit allen $u \in \mathfrak{U}$, so ist $v = 0$.

F und G seien in der von $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^*$ aufgespannten Linearmannigfaltigkeit erklärte lineare Operatoren, die $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ invariant lassen:

$$F\mathfrak{U} \subseteqq \mathfrak{U}, \qquad F\mathfrak{U}^* \subseteqq \mathfrak{U}^*, \qquad G\mathfrak{U} \subseteqq \mathfrak{U}, \qquad G\mathfrak{U}^* \subseteqq \mathfrak{U}^*. \tag{5}$$

Bezüglich des bilinearen Funktionals seien F und G symmetrisch:

$$(Fu, v) = (u, Fv), \qquad (Gu, v) = (u, Gv). \tag{6}$$

G sei beschränkt: im Definitionsbereich gelte mit Konstanten $\gamma_s > 0$

$$\|Gf\|_s \leqq \gamma_s \|f\|_s \qquad (s=1, 2, 3, \ldots). \tag{7}$$

F habe die etwas schwächere Eigenschaft: im Definitionsbereich gelte mit Konstanten $\varphi_s > 0$

$$\|Ff\|_s \leqq \varphi_s \|f\|_{s+1} \qquad (s=1, 2, 3, \ldots). \tag{8}$$

Danach sind F und G in $\mathfrak{R}$ stetig: aus $f_n \to f$ folgt $Ff_n \to Ff$, $Gf_n \to Gf$.

Wir betrachten nun die zweiparametrige Eigenwertaufgabe

$$(9)\qquad \begin{cases} F y + \lambda y + \mu G y = 0, & y \in \mathfrak{U}, \quad y \neq 0, \\ F y^* + \lambda y^* + \mu G y^* = 0, & y^* \in \mathfrak{U}^*, \quad y^* \neq 0. \end{cases}$$

Bestehen diese Gleichungen, so nennen wir (λ, μ) Eigenwertpaar, y, y^* zugehörige Eigenlösungen.

Für diese Eigenwertaufgabe legen wir die folgenden Voraussetzungen zugrunde:

① Es gibt eine ganze Funktion, $\Delta(\lambda, \mu)$, zweier komplexer Variablen, derart, daß $\Delta(\lambda, \mu) = 0$ für das Bestehen einer der Gln. (5) notwendig, für das Bestehen beider Gln. (5) (mit geeigneten y, y^*) hinreichend ist.

Wenn also eine der Gln. (5) gilt, so ist mit geeignetem y bzw. y^* auch die andere erfüllt.

② Zu jedem Eigenwertpaar (λ_0, μ_0) gibt es zwei Funktionen $y(\lambda, \mu)$, $y^*(\lambda, \mu)$ mit Werten aus $\mathfrak{R}$, die für (λ, μ) in einer Umgebung von (λ_0, μ_0) holomorph[4]) sind, derart daß für ein Eigenwertpaar (λ, μ) aus dieser Umgebung

$$y = \eta \cdot y(\lambda, \mu), \qquad y^* = \eta^* \cdot y^*(\lambda, \mu),$$
$$\eta \neq 0, \qquad \eta^* \neq 0$$

die Gesamtheit der zugehörigen Eigenlösungen darstellt.

Jedes Eigenwertpaar ist danach einfach.

③ Zu $\mu = 0$ gibt es abzählbar unendlich viele verschiedene Eigenwerte

$$(10)\qquad \lambda_n = P_2(n) + O(1).$$

Dabei ist P_2 ein Polynom vom Grade 2. n durchläuft entweder $0, 1, 2, \ldots$ oder $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Für je zwei verschiedene solche n_1, n_2 gilt

$$(11)\qquad P_2(n_1) \neq P_2(n_2).$$

y_n, y_n^* seien Eigenlösungen zu $(\lambda_n, 0)$. Sie bilden ein Biorthogonalsystem:

$$(12)\qquad (y_n, y_m^*) = \delta_{nm}.$$

(Dabei läßt sich $(y_n, y_m^*) = 0$ $(n \neq m)$ in bekannter Weise mit (6) folgern; nur die Möglichkeit der Normierung $(y_n, y_n^*) = 1$ wird also gefordert.)

---

[4]) Das bedeutet: für jeden Banach-Raum $\mathfrak{R}_s$ $(s = 1, 2, 3, \ldots)$ ist z.B. $y(\lambda, \mu)$ eine in der Umgebung von (λ_0, μ_0) holomorphe Funktion in $\mathfrak{R}_s$. Entsprechend definieren wir holomorphe Funktionen einer Variablen in $\mathfrak{R}$. Bezüglich der einfachsten Sätze über analytische Funktionen von einer oder zwei Variablen mit Werten in einem Banach-Raum vergleiche man etwa HILLE-PHILLIPS, Functional Analysis and Semi-Groups, S. 92ff, New York 1957. Bei Beachtung der vorstehenden Definitionen übertragen sich diese Sätze weitgehend fast unmittelbar auf analytische Funktionen in $\mathfrak{R}$, insbesondere Integralsatz, Integralformel, Satz über die Laurent-Entwicklung, Residuensatz. Dazu ist die Konvergenzdefinition in $\mathfrak{R}$ heranzuziehen.

Die y_n bilden innerhalb $\mathfrak{R}$ eine Basis von $\mathfrak{U}$; d.h.: jedes f aus $\mathfrak{U}$ ist — Konvergenz in $\mathfrak{R}$ —

$$f = \sum_n (f, y_n^*)\, y_n \tag{13}$$

entwickelbar; dabei sei mit $\sum_n$ im Falle $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ gemeint

$$\sum_n = \lim_{k \to \infty} \sum_{|n| \leqq k}.$$

Mit Konstanten $\alpha_s > 0$ gelte für jedes $s = 1, 2, 3, \ldots$

$$\sum_n \|(f, y_n^*)\, y_n\|_s^2 \leqq \alpha_s^2 \|f\|_s^2. \tag{14}$$

④ Die Eigenwerte λ_n zu $\mu = 0$ sind einfache Nullstellen von $\Delta(\lambda, \mu)$.

⑤ Die inhomogene Gleichung

$$F z + \lambda z + \mu G z = f \tag{15}$$

ist, falls (λ, μ) nicht Eigenwertpaar, für jedes f aus $\mathfrak{U}$ durch ein z aus $\mathfrak{U}$ (eindeutig) lösbar. $\Delta(\lambda, \mu)\, z(\lambda, \mu)$ ist eine ganze Funktion von λ, μ (vgl. Anm. [4]).

22. Grundlagen der Theorie.

Wir betrachten zunächst die Lösung der inhomogenen Aufgabe (15) für $\mu = 0$ und behaupten

Satz 1. *Für*

$$\lambda \neq \lambda_n, \qquad f \in \mathfrak{U}$$

wird

$$F z + \lambda z = f, \qquad z \in \mathfrak{U}$$

durch

$$z = R(\lambda, 0)\, f = \sum_n \frac{(f, y_n^*)}{\lambda - \lambda_n}\, y_n \tag{16}$$

gelöst.

Es gilt[5])

$$\|R(\lambda, 0)\, f\| \leqq S_2(\lambda)^{\frac{1}{2}}\, \alpha \|f\|, \tag{17}$$

wenn

$$S_2(\lambda) = \sum_n |\lambda - \lambda_n|^{-2}$$

gesetzt wird.

Beweis. z existiert nach Voraussetzung ⑤ und kann nach ③, (13) entwickelt werden:

$$z = \sum_n (z, y_n^*)\, y_n.$$

Aus

$$F z + \lambda z = f, \qquad z \in \mathfrak{U}, \qquad f \in \mathfrak{U}$$

$$F y_n^* + \lambda_n y_n^* = 0, \qquad y_n^* \in \mathfrak{U}^*$$

[5]) Hier und im folgenden lassen wir bei Abschätzungen, die für jede Norm $\| \; \|_s$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, gelten, bei $\| \; \|_s$, α_s, γ_s den Index s fort.

folgt nun mit (6) durch Multiplikation der ersten Gleichung von hinten mit y_n^* und der zweiten von vorn mit z:

$$(\lambda - \lambda_n)(z, y_n^*) = (f, y_n^*),$$

also (16). Die Abschätzung (17) ergibt sich dann aus (14) und (16) mit der Schwarzschen Ungleichung für Reihen:

$$\begin{aligned} \|z\|^2 &\leqq \Big(\sum_n \Big\|\frac{(f, y_n^*)}{\lambda - \lambda_n} y_n\Big\|\Big)^2 \\ &\leqq \sum_n |\lambda - \lambda_n|^{-2} \sum_n \|(f, y_n^*)\, y_n\|^2 \\ &\leqq S_2(\lambda)\, \alpha^2 \|f\|^2. \end{aligned}$$

Satz 1 zieht eine wichtige Folgerung nach sich:

SATZ 2. *Für jedes Eigenwertpaar λ, μ gilt*

$$S_2(\lambda)^{-\frac{1}{2}} \leqq \alpha\gamma|\mu|.$$

(Dabei sei

$$S_2(\lambda_n)^{-\frac{1}{2}} = 0$$

verabredet.)

BEWEIS. Mit einem $y \neq 0, \in \mathfrak{U}$ ist

$$F y + \lambda y = -\mu G y.$$

Wir brauchen nur $\lambda \neq \lambda_n$ zu betrachten. Dann wird mit Satz 1 und (7)

$$0 < \|y\| \leqq S_2(\lambda)^{\frac{1}{2}} \alpha \|-\mu G y\| \leqq S_2(\lambda)^{\frac{1}{2}} \alpha\gamma|\mu|\, \|y\|.$$

Dieser Satz 2 liefert nun zusammen mit den Voraussetzungen ①, ③ und ④ schon den Hauptsatz über die Gesamtheit der Eigenwertpaare:

SATZ 3. *Für jedes n läßt sich $\Delta(\lambda, \mu) = 0$ um $\lambda = \lambda_n$, $\mu = 0$ (implizite Funktion!) durch eine Potenzreihe*

$$\lambda_n(\mu) = \lambda_n + \lambda_{n1}\mu + \lambda_{n2}\mu^2 + \cdots$$

auflösen. Mit geeigneten positiven Konstanten C, D gilt für die Konvergenzradien ϱ_n und die Koeffizienten λ_{nk} $(k = 1, 2, 3, \ldots)$

$$\varrho_n \geqq C(1 + |n|),$$

$$|\lambda_{nk}| \leqq D^k (1 + |n|)^{-(k-1)}.$$

Daher ist für jedes μ bei $n \to \pm\infty$ bzw. $n \to \infty$

$$\lambda_n(\mu) = \lambda_n + \lambda_{n1}\mu + \cdots + \lambda_{nk}\mu^k + O(n^{-k}).$$

Die erhaltenen Funktionselemente lassen sich — Verzweigungsstellen endlicher Ordnung zugelassen — längs jedes Weges der komplexen μ-Ebene analytisch fortsetzen. Man erhält so in den $(\lambda_n(\mu), \mu)$ die Gesamtheit der Eigenwertpaare.

Die Spurpunkte der Verzweigungsstellen besitzen keinen endlichen Häufungspunkt. Zieht man z. B. von jedem Verzweigungsspurpunkt μ_0 (natürlich $\neq 0$) den Schnitt (bezüglich 0) radial nach ∞ und rechnet den Schnitt jeweils zu einem bestimmten Ufer, so sind hierdurch (Verbot der Überschreitung der Schnitte bei analytischer Fortsetzung) die Funktionen $\lambda_n(\mu)$ in der μ-Ebene eindeutig definiert.

Die „Ausnahmewerte" μ_0, für die einmal

$$\lambda_{n_1}(\mu_0) = \lambda_{n_2}(\mu_0) \qquad (n_1 \neq n_2)$$

im eben definierten Sinne wird, (darunter sind natürlich die Verzweigungsspurpunkte) haben keinen endlichen Häufungspunkt.

Beweis. Die Auflösbarkeit durch Potenzreihen um $\lambda = \lambda_n$, $\mu = 0$ folgt aus dem Satz über implizite Funktionen wegen der Voraussetzung ④.

Für alles weitere gehen wir davon aus, daß in der komplexen λ-Ebene jede Punktmenge

$$S_2(\lambda) \geqq \delta > 0$$

in abzählbar viele getrennte kompakte Mengen zerfällt. Das liefern sofort die Überlegungen des Abschnitts **1**.

Diese zeigen insbesondere, daß mit einer Konstanten $K > 0$ auf dem Kreise

$$|\lambda - \lambda_n| = \frac{d_n}{2}$$

die Abschätzung

$$S_2(\lambda) \leqq K^2(|n| + 1)^{-2}$$

gilt. Dann liefert aber Satz 2, daß für

$$|\mu| < \frac{1}{K\alpha\gamma}(|n| + 1)$$

unmöglich

$$|\lambda - \lambda_n| = \frac{d_n}{2}$$

sein kann.

Damit folgen die übrigen Aussagen des Satzes in fast wörtlicher Übereinstimmung auf Grund von Schlußweisen aus früheren Arbeiten des Verfassers[6]). Insbesondere ist

$$\varrho_n \geqq \frac{1}{K\alpha\gamma}(|n| + 1)$$

und für

$$|\mu| < \varrho_n$$

stets

$$|\lambda_n(\mu) - \lambda_n| < \frac{c}{2}(|n| + 1),$$

[6]) Vgl.: Über Eigenwertprobleme mit zwei Parametern. Math. Nachr. **6**, 109—124 (1951). Verbesserte Konvergenz- und Fehlerabschätzungen für die Störungsrechnung. J. angew. Math. Mech. **33**, H. 8/9 (1953); oder auch: Zur Störungstheorie der Spektralzerlegung. Math. Ann. **133**, 219—234 (1957).

also ($k=1, 2, 3, \ldots$)

$$|\lambda_{nk}| \leqq \frac{c}{2}(K\alpha\gamma)^k (|n|+1)^{-(k-1)};$$

dabei ist $c>0$ eine Konstante mit

$$d_n \leqq c(|n|+1).$$

Im folgenden nennen wir ein μ, das nicht Ausnahmewert ist, auch „normal". Für ein normales μ sind alle $\lambda_n(\mu)$ gemäß Satz 3 verschieden und einfache Nullstellen von $\Delta(\lambda, \mu)$.

Wir ziehen nun noch Voraussetzung ② über die Eigenlösungen heran. Wir bilden zu $(\lambda_n(\mu_0), \mu_0)$ die Funktionen $y(\lambda, \mu)$, $y^*(\lambda, \mu)$. Dann sind

$$\hat{y}_n(\mu) = y(\lambda_n(\mu), \mu), \qquad \hat{y}_n^*(\mu) = y^*(\lambda_n(\mu), \mu)$$

für μ in einer Umgebung von μ_0 zugleich mit $\lambda_n(\mu)$ holomorphe Eigenlösungen zu $(\lambda_n(\mu), \mu)$. Speziell hat man um $\mu=0$ Potenzreihenentwicklungen

$$\hat{y}_n(\mu) = \hat{y}_{n0} + \mu\hat{y}_{n1} + \mu^2\hat{y}_{n2} + \cdots,$$
$$\hat{y}_n^*(\mu) = \hat{y}_{n0}^* + \mu\hat{y}_{n1}^* + \mu^2\hat{y}_{n2}^* + \cdots.$$

Nach ② kann durch Multiplikation mit von μ unabhängigem Zahlfaktor

$$\hat{y}_{n0} = y_n, \qquad \hat{y}_{n0}^* = y_n^*$$

erreicht werden, was im folgenden angenommen sei. Wegen der Perfektheit von $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ gehören die Koeffizienten $\hat{y}_{nk}$ bzw. $\hat{y}_{nk}^*$ zu $\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{U}^*$. Wegen der Stetigkeit von F und G in $\mathfrak{R}$ können diese Operatoren auf die Potenzreihen gliedweise angewandt werden. So folgt mit Koeffizientenvergleich speziell

$$F\hat{y}_{n1} + \lambda_n\hat{y}_{n1} = -\lambda_{n1}y_n - Gy_n.$$

Beachtet man daneben

$$Fy_n^* + \lambda_n y_n^* = 0,$$

multipliziert mit y_n^* von hinten bzw. mit $\hat{y}_{n1}$ von vorn, so folgt

SATZ 3*. *Die Koeffizienten von μ in den Potenzreihen $\lambda_n(\mu)$ sind*

$$\lambda_{n1} = -(Gy_n, y_n^*).$$

Wir erhalten weiter bezüglich der — bis auf Zahlfaktor $\neq 0$ bestimmten — Eigenlösungen $\hat{y}_n(\mu), \hat{y}_n^*(\mu)$ zu $(\lambda_n(\mu), \mu)$:

SATZ 4. *Ist $\lambda_{n_1}(\mu_0) \neq \lambda_{n_2}(\mu_0)$, so gilt*

$$(\hat{y}_{n_1}(\mu_0), \hat{y}_{n_2}^*(\mu_0)) = 0;$$

ist $\lambda_{n_1}(\mu_0) = \lambda_{n_2}(\mu_0)$ mit $n_2 \neq n_1$, so gilt

$$(\hat{y}_{n_1}(\mu_0), \hat{y}_{n_1}^*(\mu_0)) = 0;$$

ist $\lambda_n(\mu) \neq \lambda_m(\mu)$ für alle $m \neq n$, so gilt

$$(\hat{y}_n(\mu), \hat{y}_n^*(\mu)) \neq 0.$$

BEWEIS. Die erste Aussage folgt aus

$$F\hat{y}_{n_1}(\mu) + \lambda_{n_1}(\mu)\hat{y}_{n_1}(\mu) + \mu G\hat{y}_{n_1}(\mu) = 0,$$
$$F\hat{y}^*_{n_2}(\mu) + \lambda_{n_2}(\mu)\hat{y}^*_{n_2}(\mu) + \mu G\hat{y}^*_{n_2}(\mu) = 0$$

durch Multiplikation mit $\hat{y}^*_{n_2}(\mu)$ von hinten bzw. mit $\hat{y}_{n_1}(\mu)$ von vorn.

Die zweite Aussage folgt aus der ersten durch Grenzübergang. Für $\mu \neq \mu_0$ in einer gewissen Umgebung von μ_0 ist sicher $\lambda_{n_1}(\mu) \neq \lambda_{n_2}(\mu)$, also $(\hat{y}_{n_1}(\mu), \hat{y}^*_{n_2}(\mu)) = 0$. Nach der obigen Konstruktion auf Grund von ② können $\hat{y}_{n_1}(\mu), \hat{y}^*_{n_2}(\mu)$ zumindest mit $\hat{y}_{n_1}(\mu) \to \hat{y}_{n_1}(\mu_0)$, $\hat{y}^*_{n_2}(\mu) \to \hat{y}^*_{n_1}(\mu_0)$ gewählt werden. Mit der durch (4) gesicherten Stetigkeit des bilinearen Funktionals folgt daraus die Behauptung.

Zum Beweise der letzen Aussage muß Voraussetzung ⑤ herangezogen werden. Wir betrachten bei festem μ für irgendein f aus $\mathfrak{U}$ die Lösung $z(\lambda, \mu)$ von (15) als Funktion von λ in Umgebung von $\lambda_n(\mu)$. $\lambda_n(\mu)$ ist einfache Nullstelle von $\Delta(\lambda, \mu)$. Nach dem zweiten Teil der Voraussetzung ⑤ hat also $z(\lambda, \mu)$ bei $\lambda = \lambda_n(\mu)$ höchstens einen einfachen Pol und kann in eine Laurent-Reihe entwickelt werden[7]:

$$z(\lambda, \mu) = (\lambda - \lambda_n(\mu))^{-1} z_{-1} + z_0 + (\lambda - \lambda_n(\mu)) z_1 + \cdots.$$

Wegen der Perfektheit von $\mathfrak{U}$ gehören mit $z(\lambda, \mu)$ auch $z_{-1}, z_0, z_1, \ldots$ zu diesem Unterraum. F und G können wegen ihrer Stetigkeit gliedweise angewandt werden. So hat man mit Koeffizientenvergleich

$$F z_{-1} + \lambda_n(\mu) z_{-1} + \mu G z_{-1} = 0,$$
$$F z_0 + \lambda_n(\mu) z_0 + \mu G z_0 = f - z_{-1}.$$

Die erste Gleichung zeigt

$$z_{-1} = \zeta \hat{y}_n(\mu),$$

die zweite ergibt durch die bekannte Kombination mit

$$F\hat{y}^*_n(\mu) + \lambda_n(\mu)\hat{y}^*_n(\mu) + \mu G\hat{y}^*_n(\mu) = 0$$

die Gleichung

$$(f, \hat{y}^*_n(\mu)) = \zeta(\hat{y}_n(\mu), \hat{y}^*_n(\mu)).$$

Wegen $\hat{y}^*_n(\mu) \neq 0$ gibt es nach der anfangs gemachten Voraussetzung über das bilineare Funktional ein f aus $\mathfrak{U}$ mit $(f, \hat{y}^*_n(\mu)) \neq 0$, also muß auch $(\hat{y}_n(\mu), \hat{y}^*_n(\mu)) \neq 0$ sein. Wir vermerken noch

$$z_{-1} = \frac{(f, \hat{y}^*_n(\mu))}{(\hat{y}_n(\mu), \hat{y}^*_n(\mu))} \hat{y}_n(\mu).$$

Nun folgt leicht

SATZ 5. *Sei μ_0 ein normaler Wert. Dann gibt es Eigenlösungen $y_n(\mu)$, $y^*_n(\mu)$ zu $(\lambda_n(\mu), \mu)$, die je in einer entsprechenden Umgebung von μ_0 holomorph*

[7]) Vgl. Anm. [4]), S. 446.

sind und ein normiertes Biorthogonalsystem bilden:

$$\left(y_n(\mu), y_n^*(\mu)\right) = \delta_{nm}.$$

Dazu brauchen wir bei Beachtung der letzen Aussage von Satz 4 nur mit je in einer Umgebung von μ_0 holomorphen $\hat{y}_n(\mu)$, $\hat{y}_n^*(\mu)$ zu bilden

$$y_n(\mu) = \left(\hat{y}_n(\mu), \hat{y}_n^*(\mu)\right)^{-\frac{1}{2}} \hat{y}_n(\mu),$$
$$y_n^*(\mu) = \left(\hat{y}_n(\mu), \hat{y}_n^*(\mu)\right)^{-\frac{1}{2}} \hat{y}_n^*(\mu).$$

Dem Schluß des Beweises von Satz 4 entnehmen wir weiter noch

SATZ 6. *Die Lösung der inhomogenen Aufgabe* (15), *die wir*

$$z(\lambda, \mu) = R(\lambda, \mu) f$$

schreiben, besitzt für normales μ nur die einfachen Pole $\lambda = \lambda_n(\mu)$ mit den Residuen

$$\left(f, y_n^*(\mu)\right) y_n(\mu).$$

23. ENTWICKLUNGSSÄTZE.

Wir geben zuerst ein negatives Resultat:

SATZ 7. *Nicht jedes f aus $\mathfrak{U}$ kann nach den Eigenlösungen $\hat{y}_n(\mu_0)$ zu einem Ausnahmewert μ_0 entwickelt werden.*

BEWEIS. Sei etwa $\lambda_m(\mu_0)$ mehrfache Nullstelle von $\Delta(\lambda, \mu_0)$, so gilt nach Satz 4

$$\left(\hat{y}_n(\mu_0), \hat{y}_m^*(\mu_0)\right) = 0$$

für alle n. Aus

$$f = \sum_n \varphi_n \hat{y}_n(\mu_0)$$

würde daher

$$\left(f, \hat{y}_m^*(\mu_0)\right) = 0$$

folgen. Das kann wegen $\hat{y}_m^*(\mu_0) \neq 0$ nach einer unserer Annahmen nicht für alle f aus $\mathfrak{U}$ gelten.

Unser Ziel ist nun der Beweis eines Entwicklungssatzes für normale μ. Dazu drücken wir den in Satz 6 eingeführten Operator $R(\lambda, \mu)$ durch $R(\lambda, 0)$, G und μ aus.

SATZ 8[8]). *Seien ϱ, ω positive Konstanten,*

$$\omega > \alpha \gamma \varrho.$$

Dann ist für

$$|\mu| \leqq \varrho, \qquad S_2(\lambda)^{-\frac{1}{2}} \geqq \omega$$

bei absolut gleichmäßig konvergenter Reihe

$$R(\lambda, \mu) f = R(\lambda, 0) f + \sum_{p=1}^{\infty} R(\lambda, 0) \left(-\mu G R(\lambda, 0)\right)^p f.$$

[8]) Man beachte die Verabredung von Anm. [5]), S. 447.

Es ist dort

$$\|R(\lambda,\mu)f - R(\lambda,0)f\| \leqq S_2(\lambda)\frac{\alpha^2\gamma\varrho}{1-\varrho\alpha\gamma\omega^{-1}}\|f\|.$$

Beweis. Wegen (7) und Satz 1 ist für $p \geqq 1$

$$\|R(\lambda,0)\left(-\mu G R(\lambda,0)\right)^p f\| \leqq S_2(\lambda)\alpha^2\gamma\varrho(\varrho\alpha\gamma\omega^{-1})^{p-1}\|f\|.$$

Daher ist die Reihe absolut gleichmäßig konvergent. Daß $R(\lambda,\mu)f$ ihre Summe ist, folgt aus

$$z = R(\lambda,\mu)f,$$
$$Fz + \lambda z = f - \mu G z,$$
$$z = R(\lambda,0)f + R(\lambda,0)(-\mu G z)$$

durch Iteration.

Satz 8 und die Abschätzungen von Abschnitt 1 liefern nun zunächst

Satz 9. *μ sei normaler Wert. Dann kann jedes f aus $\mathfrak{U}$ in die Reihe*[9])

$$f = \sum_n \left(f, y_n^*(\mu)\right) y_n(\mu)$$

entwickelt werden. Man hat

$$\left\|\sum_{|n|\leqq k}\left\{\left(f, y_n^*(\mu)\right) y_n(\mu) - (f, y_n^*)\, y_n\right\}\right\| = \|f\| O\left(\frac{1}{k}\log k\right),$$

$$\left\|\left(f, y_n^*(\mu)\right) y_n(\mu) - (f, y_n^*)\, y_n\right\| = \|f\| O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Mit einer Konstanten $\alpha(\mu) > 0$ gilt daher

$$\sum_n \left\|\left(f, y_n^*(\mu)\right) y_n(\mu)\right\|^2 \leqq \alpha(\mu)^2 \|f\|^2.$$

Beweis. Wir setzen $\varrho = |\mu|$ und wählen ein $\omega > \alpha\gamma\varrho$. Wir betrachten dann die Kurven $\mathfrak{C}_k$ von 1, Hilfssatz 4[10]). Wegen der dort notierten Eigenschaft (4) ist auf $\mathfrak{C}_k$ sicher $S_2(\lambda)^{-\frac{1}{2}} \geqq \omega$ für alle hinreichend großen k. Da für $|\tilde{\mu}| \leqq \varrho$ und ein $\lambda = \lambda_n(\tilde{\mu})$ nach Satz 2

$$S_2(\lambda)^{-\frac{1}{2}} \leqq \alpha\gamma|\tilde{\mu}| < \omega$$

gilt, werden für jedes n die Zahlen λ_n und $\lambda_n(\mu)$ von den $\mathfrak{C}_k$ mit hinreichend großem k zugleich umschlossen oder nicht.

Betrachten wir nun für diese k

$$\text{(a)} \qquad \frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{C}_k}\left(R(\lambda,\mu) - R(\lambda,0)\right) f\, d\lambda.$$

Dies ist wegen des Residuensatzes und Satz 6 gleich der Summe

$$\sum_n^{(k)}\left[\left(f, y_n^*(\mu)\right) y_n(\mu) - (f, y_n^*)\, y_n\right],$$

[9]) Wie bei (13) ist hier im Falle $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $\sum_n = \lim_{k\to\infty}\sum_{|n|\leqq k}$ zu interpretieren.

[10]) Im Falle der Numerierung $n = 0, 1, 2, \ldots$ ist der Zusatz am Schluß von 1 heranzuziehen.

wobei $\sum_n^{(k)}$ die Summe über diejenigen n bedeutet, für die λ_n (und $\lambda_n(\mu)$) von $\mathfrak{C}_k$ umschlossen wird.

Andererseits kann nun der Integrand in (a) gemäß Satz 8, letze Zeile, abgeschätzt werden. Bis auf den von k unabhängigen Faktor

$$\frac{1}{2\pi}\,\frac{\alpha^2\gamma\varrho}{1-\varrho\alpha\gamma\omega^{-1}}\,\|f\|$$

kann also der Ausdruck (a) der Norm nach durch

$$\oint_{\mathfrak{C}_k} S_2(\lambda)\,|d\lambda|$$

abgeschätzt werden. Dies ist nun nach **1**, Hilfssatz 4 [11]), $O\left(\frac{1}{k}\log k\right)$ bei $k\to\infty$.

Damit ist zunächst

$$\text{(b)}\qquad \left\|\sum_n^{(k)}\left[(f,y_n^*(\mu))\,y_n(\mu)-(f,y_n^*)\,y_n\right]\right\| = \|f\|\;O\left(\frac{1}{k}\log k\right).$$

Weiter betrachten wir nun die Folge der

$$\max\left\{S_2(\lambda)\;|\;|\lambda-\lambda_n|=\frac{d_n}{2}\right\},$$

die nach **1**, Hilfssatz 3 [12]), $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ sind, also für hinreichend große $|n|$ sicher $\leqq\omega^{-2}$.

Dann gilt wieder — wie eben —: Der Kreis

$$\mathfrak{K}_n=\left\{\lambda\;|\;|\lambda-\lambda_n|=\frac{d_n}{2}\right\}$$

umschließt von allen λ_m, $\lambda_m(\mu)$ genau das Paar λ_n, $\lambda_n(\mu)$.

Nun gilt $\frac{d_n}{2}\leqq\frac{c}{2}(|n|+1)$, also

$$\oint_{\mathfrak{K}_n} S_2(\lambda)\;|d\lambda|=O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Wie oben schließt man damit wegen des Residuensatzes, Satz 6 und Satz 8

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\oint_{\mathfrak{K}_n}\left(R(\lambda,\mu)-R(\lambda,0)\right)f\,d\lambda\right\|=\|(f,y_n^*(\mu))\,y_n(\mu)-(f,y_n^*)\,y_n\|=\|f\|\,O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Dies ist schon die dritte Aussage von Satz 9. Nach ihr ist

$$\sum_n\|(f,y_n^*(\mu))\,y_n(\mu)-(f,y_n^*)\,y_n\|^2\leqq\hat{\alpha}(\mu)^2\,\|f\|^2,$$

[11]) Vgl. Anm. [10]), S. 453.
[12]) Vgl. Anm. [10]), S. 453.

also mit (14)

$$\sum_n \|(f, y_n^*(\mu))\, y_n(\mu)\|^2 \leqq (\alpha + \hat{\alpha}(\mu))^2 \|f\|^2;$$

das ist mit

$$\alpha(\mu) = \alpha + \hat{\alpha}(\mu)$$

die letzte Aussage von Satz 9. Die zweite Aussage ergibt sich nun aus (b) wegen der dritten Aussage und der Eigenschaft (2) der Kurven $\mathfrak{C}_k$ in **1**, Hilfssatz 4 [13]). Diese zweite Aussage liefert schließlich die erste Aussage, also den Entwicklungssatz, zusammen mit (13).

24. Potenzreihen und Asymptotik von Eigenlösungen.

Wir betrachten, wie oben beim Beweise von Satz 9, die Kreise $\mathfrak{K}_n$, die für hinreichend große $|n|$ genau λ_n, $\lambda_n(\mu)$ umschließen. Wir können dann die Reihe von Satz 8 über $\mathfrak{K}_n$ gliedweise integrieren; wir setzen dabei speziell $f = y_n$:

$$(y_n, y_n^*(\mu))\, y_n(\mu) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{K}_n} R(\lambda, \mu)\, y_n\, d\lambda = y_n + \sum_{p=1}^{\infty} \mu^p\, y_{np}$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{K}_n} R(\lambda, 0)\, y_n\, d\lambda + \sum_{p=1}^{\infty} \mu^p \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{K}_n} R(\lambda, 0)\, (-G R(\lambda, 0))^p\, y_n\, d\lambda.$$

Wir können nun

$$\|R(\lambda, 0)\, (-G R(\lambda, 0))^p\, y_n\| \leqq \gamma^p\, \alpha^{p+1}\, S_2(\lambda)^{\frac{p+1}{2}}\, \|y_n\|$$

abschätzen, was also auf $\mathfrak{K}_n$ gemäß **1**, Hilfssatz 3 [13]), für jedes $p = 1, 2, \ldots$ bei $n \to \infty$

$$= \|y_n\|\, O(n^{-p-1})$$

ist. Damit folgt

$$\|y_{np}\| = \|y_n\|\, O(n^{-p}) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

und mit entsprechender Abschätzung des Reihenrestes:

Satz 10. *Die μ-Potenzreihe*

$$(y_n, y_n^*(\mu))\, y_n(\mu) = y_n + \sum_{p=1}^{\infty} \mu^p\, y_{np}$$

ist zugleich asymptotische Reihe für $n \to \pm\infty$: bei festem μ und k hat man für $n \to \pm\infty$ stets

$$\|(y_n, y_n^*(\mu))\, y_n(\mu) - y_n - \mu\, y_{n1} - \cdots - \mu^k\, y_{nk}\| = \|y_n\|\, O(n^{-k-1}).$$

25. Bemerkung.

Ist μ normaler Wert, so sind für $F + \mu G$ an Stelle von F wieder die Voraussetzungen von **21** gegeben. Bei den Forderungen ①, ②, ⑤ ist das trivial; ④ ist erfüllt, da μ normaler Wert ist. ③ schließlich ist in den Sätzen 3, 5 und 9 gegeben.

[13]) Vgl. Anm. [10]), S. 453.

26. EINE MODIFIKATION.

Wir nehmen im folgenden an:

Bezüglich $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{U}^* = \mathfrak{U}$, (u, v), F, G mögen die Annahmen von **21** bis einschließlich (8) erfüllt sein.

Es seien nun $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ (in $\mathfrak{R}$) perfekte Unterräume von $\mathfrak{U}$, derart daß für $u_1 \in \mathfrak{U}_1$, $u_2 \in \mathfrak{U}_2$ stets

$$(*) \qquad (u_1, u_2) = (u_2, u_1) = 0.$$

Für $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ an Stelle von $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^*$ mögen ebenfalls die genannten Annahmen gegeben sein. Ferner sollen für die beiden Eigenwertprobleme (9) mit $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ an Stelle von $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^*$ je die Voraussetzungen ① bis ⑥ gelten. Dabei seien jedoch — mit geänderter Bezeichnung —

$$\lambda_n = n^2 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

die Eigenwerte zu $\mu = 0$ im Falle $\mathfrak{U}_1$ und

$$\lambda_{-n} = n^2 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

die Eigenwerte zu $\mu = 0$ im Falle $\mathfrak{U}_2$; entsprechend seien

$$y_n = y_n^* \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

bzw.

$$y_{-n} = y_{-n}^* \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

die zugehörigen Eigenlösungen. Analog numerieren wir die $\lambda_n(\mu)$, $y_n(\mu)$.

Es gelte nun: Jedes $f \in \mathfrak{U}$ ist entwickelbar

$$\text{(a)} \qquad f = (f, y_0)\, y_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(f, y_n)\, y_n + (f, y_{-n})\, y_{-n} \right]$$

mit

$$\text{(b)} \qquad \|(f, y_0)\, y_0\|_s^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \|(f, y_n)\, y_n + (f, y_{-n})\, y_{-n}\|_s^2 \leqq \tilde{\alpha}_s^2 \|f\|_s^2 \qquad (s = 1, 2, 3, \ldots).$$

Dann behaupten wir:

SATZ 11. *Ist μ normaler Wert sowohl bezüglich der Eigenwertaufgabe für $\mathfrak{U}_1$ als auch bezüglich der für $\mathfrak{U}_2$, so ist jedes f aus $\mathfrak{U}$ auch entwickelbar*

$$f = \big(f, y_0(\mu)\big)\, y_0(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\big(f, y_n(\mu)\big)\, y_n(\mu) + \big(f, y_{-n}(\mu)\big)\, y_{-n}(\mu) \right].$$

BEWEIS. Wir können wegen (*) in den Voraussetzungen ③, (14) für $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{U}_2$ $\alpha = \tilde{\alpha}$ annehmen.

Wir dehnen nun die Definition von $R(\lambda, \mu) f$ aus auf alle $f \in \mathfrak{U}$. Zunächst bilden wir für $\lambda \neq \lambda_n$

$$R(\lambda, 0)\, f = \frac{(f, y_0)\, y_0}{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(f, y_n)\, y_n + (f, y_{-n})\, y_{-n}}{\lambda - n^2}.$$

Das ist nach unserer Annahme (b) für $f \in \mathfrak{U}$ konvergent und wir haben[14])

$$\|R(\lambda, 0) f\| \leqq \Big(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - n^2|^{-2}\Big)^{\frac{1}{2}} \tilde{\alpha} \|f\|.$$

Wir bilden dann weiter zunächst

$$R(\lambda, \mu) f = R(\lambda, \mu) f_1 + R(\lambda, \mu) f_2$$

für die

$$f = f_1 + f_2, \qquad f_1 \in \mathfrak{U}_1, \qquad f_2 \in \mathfrak{U}_2.$$

Es gilt wieder, wie in Satz 8,

$$(\overset{*}{*}) \qquad R(\lambda, \mu) f = R(\lambda, 0) f + \sum_{p=1}^{\infty} R(\lambda, 0) \big(-\mu G R(\lambda, 0)\big)^p f$$

mit

$$({}_*{}^*{}_*) \qquad \|R(\lambda, \mu) f - R(\lambda, 0) f\| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - n^2|^{-2} \frac{\tilde{\alpha}^2 \gamma \varrho}{1 - \tilde{\alpha} \gamma \varrho \omega^{-1}} \|f\|,$$

falls

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda - n^2|^{-2}\Big)^{-\frac{1}{2}} \geqq \omega, \qquad \omega > \tilde{\alpha} \gamma \varrho, \qquad |\mu| = \varrho.$$

$(\overset{*}{*})$ wählen wir nun für beliebiges $f \in \mathfrak{U}$ und die angegebenen Paare λ, μ als Definition von $R(\lambda, \mu) f$; $({}_*{}^*{}_*)$ bleibt dabei gültig.

Nun ziehen wir die Kurven $\mathfrak{C}_k$ von **1**, Hilfssatz 4 (mit Zusatz) heran[15]). Wir betrachten

$$\text{(c)} \qquad \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathfrak{C}_k} \big(R(\lambda, \mu) f - R(\lambda, 0) f\big)\, d\lambda$$

für ein $f \in \mathfrak{U}$. Das ist für hinreichend große k möglich, da dann die Paare $\lambda \in \mathfrak{C}_k$, μ die obige Definition von $R(\lambda, \mu) f$ zulassen. (c) ist danach auch gewiß $O\left(\frac{1}{k} \log k\right)$ für $k \to \infty$.

Andererseits behaupten wir nun, daß (c) gleich

$$\text{(d)} \qquad \big(f, y_0(\mu)\big)\, y_0(\mu) - (f, y_0)\, y_0 + \sum_{1 \leq |n| \leq k} \Big(\big(f, y_n(\mu)\big)\, y_n(\mu) - (f, y_n)\, y_n\Big)$$

wird. Dies gilt nämlich zunächst für die $f = f_1 + f_2$ mit $f_1 \in \mathfrak{U}_1$, $f_2 \in \mathfrak{U}_2$, da dort

$$R(\lambda, \mu) f = R(\lambda, \mu) f_1 + R(\lambda, \mu) f_2,$$

und da für $f = f_1$, $f = f_2$ die entsprechenden Darstellungen gemäß der obigen Theorie bezüglich $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ gelten. Nun hängen aber die Ausdrücke (c) und (d) innerhalb $\mathfrak{U}$ stetig von f ab; das folgt für (c) aus $({}_*{}^*{}_*)$ und für (d) aus Voraussetzung (4) für (u, v). Weiter kann nach Annahme (a) jedes $f \in \mathfrak{U}$ erhalten werden in der Form

$$f_\nu \to f \qquad (\nu \to \infty)$$

$$f_\nu = f_{1\nu} + f_{2\nu}, \qquad f_{1\nu} \in \mathfrak{U}_1, \qquad f_{2\nu} \in \mathfrak{U}_2;$$

---

[14]) Vgl. Anm. [5]), S. 447.

[15]) Wir können sie hier so wählen, daß sie genau die λ_n, $\lambda_n(\mu)$ mit $|n| \leqq k$ umschließen.