Werk

Titel: Über die Verbiegbarkeit der Rinnen. II.

Autor: Rembs, Eduard

Jahr: 1960

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0073|log54

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

REMBS, E.
Math. Zeitschr. 73, 330—332 (1960)

Über die Verbiegbarkeit der Rinnen. II

OSKAR PERRON zum 80. Geburtstag am 7. Mai 1960

Von
EDUARD REMBS

Im ersten Teil dieser Arbeit [Math. Z. **71**, 89—93 (1959)] war die Frage unbeantwortet geblieben, ob es zu einer konvexen geschlossenen Rinne isometrische Flächen gibt, bei denen der parabolischen Kurve der Rinne eine geschlossene Raumkurve entspricht.

Diese Frage kann ich auch jetzt nicht vollständig beantworten*), möchte aber einen Sonderfall angeben, in dem man zum Ziel kommt. Vielleicht läßt sich der allgemeine Fall ähnlich erledigen.

Ich knüpfe an die Fußnote S. 91 an, deren Bezeichnungen ich beibehalte, will aber noch zweierlei voraussetzen, nämlich 1. daß die parabolische Kurve der Rinne stetig gekrümmt ist und 2. daß auf ihr für die Krümmung K zwar gilt $K=0$, aber nicht gleichzeitig in einem Punkt $K_x=0$, $K_y=0$. Diese Voraussetzung ist z.B. für die Rinnen eines gewöhnlichen Torus erfüllt.

Man denke sich das von der parabolischen Kurve der Rinne berandete Ebenenstück auf einen Zylinder verbogen, dessen Erzeugenden parallel der x-Achse sind und der so beschaffen ist, daß die Abbildung schlicht und eineindeutig in die x, y-Ebene projizierbar wird. Auch soll das Ebenenstück bei der Abwicklung keine Drehung um die z-Achse erfahren. Man betrachte den zylindrischen Streifen S_1, in den der ebene parabolische Streifen S der Rinne übergeht. Es soll gezeigt werden, daß durch S_1 sich keine zu der Rinne isometrische Fläche legen läßt. Es ergibt sich nämlich, daß die zweiten Ableitungen ϱ, σ, τ längs S_1 zwar überall eindeutig und stetig zu bestimmen sind, die Gleichungen für die dritten Ableitungen aber zu einem Widerspruch führen. Nach der Formel der Fußnote ist

$$\varrho : \sigma : \tau : 1 = \pi'^2 : \pi' \varkappa' : \varkappa'^2 : (\pi' x' + \varkappa' y').$$

Auf S_1 ist aber überall $\pi=0$, also $\varrho=\sigma=0$. Wir betrachten insbesondere einen Punkt P, in dem die Streifenkurve von einer Erzeugenden berührt wird. In P ist bei den gemachten Annahmen $y'=0$ und, da $\varkappa$ ein Extremum hat, auch $\varkappa'=0$. Der Streifen ist in P Schmiegstreifen, ein Fall der in Satz 4 der Arbeit ausgeschlossen war. Man kann aber auch in P τ eindeutig und stetig machen, indem man nach DE L'HOSPITAL

$$\tau = \lim \frac{\varkappa'}{y'} = \frac{\varkappa''}{y''}$$

setzt; in P ist $y'' \neq 0$, $\tau=0$ oder $\neq 0$ je nach Vorgabe von $\varkappa$.

*) Vgl. aber die Zufügungen 2 und 3 am Schluß.

Wir gehen zu den dritten Ableitungen über, die folgendermaßen heißen mögen:

$$\varrho_x, \varrho_y = \sigma_x, \sigma_y = \tau_x, \tau_y.$$

Zu ihrer Bestimmung aus den Vorgaben $\pi, \varkappa$ und den schon bestimmten Werten ϱ, σ, τ haben wir 5 Gleichungen, zunächst die zwei, die man durch Differenzieren der partiellen Differentialgleichung nach x und y erhält, wenn man dann noch $p = q = rt - s^2 = \pi = \varrho = \sigma = 0$ setzt. Sie lauten

$$\tau\varrho_x - rs\varkappa\tau + (\varkappa^2 - 1)(rt - s^2)_x = 0, \tag{1}$$

$$\tau\varrho_y - rt\varkappa\tau + (\varkappa^2 - 1)(rt - s^2)_y = 0. \tag{2}$$

Dazu kommen die 3 Gleichungen

$$\varrho_x x' + \varrho_y y' = \varrho' = 0, \tag{3}$$

$$\sigma_x x' + \sigma_y y' = \sigma' = 0, \tag{4}$$

$$\tau_x x' + \tau_y y' = \tau'. \tag{5}$$

Sei $\tau \neq 0$. Solange $y' \neq 0$ ist, bestimmen diese Gleichungen die 4 dritten Ableitungen, (1) und (2) ϱ_x und ϱ_y im Einklang mit (3). Es ist ja $sx' + ty' = q' = 0$ und

$$(rt - s^2)_x x' + (rt - s^2)_y y' = (rt - s^2)' = 0. \tag{6}$$

(4) und (5) liefern σ_y und τ_y.

Wir betrachten wieder einen Punkt P. In ihm sei insbesondere $\tau \neq 0$. Wegen $rx' + sy' = p' = 0$ ist für $y' = 0$ auch $r = 0$, und aus (4) folgt, daß $\sigma_x = \varrho_y = 0$ ist. Wenn nicht schon $\varkappa^2 \neq 1$ ist, kann man das durch Drehung des Zylinders um die x-Achse erreichen. Dann würde aus (2) folgen

$$(rt - s^2)_y = 0. \tag{7}$$

Nun ist nach (6) $(rt - s^2)_x = 0$ für $y' = 0$ und also $K_x = 0$. Aber die Gl. (7) ist unmöglich, da in keinem Punkte gleichzeitig $K_x = 0$ und $K_y = 0$ sein sollte. Somit kommen wir zu einem Widerspruch.

Ist in P $\tau = 0$, so führt die Gl. (2) allein schon zu demselben Widerspruch. Durch den zylindrischen Streifen läßt sich keine zu der Rinne isometrische Fläche legen.

Zufügungen bei der Korrektur: 1. Die Bedingung 2 für die Fläche kann überraschenderweise in eine solche für die parabolische Kurve umgewandelt werden, dieselbe Bedingung übrigens, die auch beim Starrheitsbeweis eine Rolle spielte. Wir führen solche Parameter ein, daß auf der parabolischen Kurve M und N nebst allen Ableitungen beliebig hoher Ordnung nach v verschwinden, während $L \neq 0$ ist. Auf der Kurve sei ferner $F = 0$. Die Bedingung 2 ist dann mit $N_u \neq 0$ auf der Kurve identisch. Nach Codazzi ist aber $N_u + \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} L = 0$, woraus folgt $\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} \neq 0$. *Das besagt* (Bianchi-Lukat 2. Aufl., S. 147), *daß die geodätische Krümmung der parabolischen Kurve, die im vorliegenden Fall identisch ist mit der gewöhnlichen Krümmung, nirgends verschwinden soll.* 2. Wie zu vermuten war, gestaltet sich der Beweis im

allgemeinen Fall auch nach dem oben vorgezeichneten Schema. Unter dem allgemeinen Fall verstehe ich dabei, daß man den Streifen S_1 erhält, indem man das von der parabolischen Kurve berandete ebene Gebiet auf eine beliebige abwickelbare Fläche ohne Drehung um die z-Achse verbiegt, natürlich auf ein singularitätenfreies Stück. Wir können annehmen, daß die abwickelbare Fläche (Kegel oder Torse) die x, y-Ebene längs der x-Achse, die Erzeugende ist, berührt und der Punkt P, in dem der Streifen S_1 Schmiegstreifen ist, auf der x-Achse liegt, die von der parabolischen Kurve berührt wird. Jetzt ist auf S_1 $\pi \neq 0$, aber in P ist $\pi = \varkappa = y' = 0$. Außerdem ist bei Annäherung an die x-Achse auf der Fläche in jedem Fall $\pi/\varkappa = 0$. (Im Fall der Torse verwendet man zum Beweis die kanonische Darstellung der Gratlinie.) Auf der parabolischen Kurve aber haben π und $\varkappa$ in P beide Extrema, da sie auf der x-Achse verschwinden, in der Umgebung außer im oben behandelten zylindrischen Fall aber nicht. Somit müssen, wenn wir sie als Funktionen der von P aus gemessenen Bogenlänge s der Kurve nehmen, die ersten nicht verschwindenden Ableitungen von gerader Ordnung sein. Daher muß $\pi'/\varkappa'$ mindestens wie s^2 verschwinden. Wir bestimmen wieder nach DE L'HOSPITAL den Wert von $\tau = \varkappa'^2 : (\pi' x' + \varkappa' y')$ in P. Man erhält $\tau = \varkappa''/y''$ wegen $(\pi'/\varkappa')' = 0$. Jetzt wird die Gleichung $\varkappa' = \sigma x' + \tau y'$, aus der noch $\sigma = 0$ in P folgt, differenziert: $\varkappa'' = \sigma' x' + \sigma x'' + \tau' y' + \tau y''$. Aber in P ist $\sigma = \tau' = x'' = y' = 0$ und, wie gerade gezeigt wurde, $\varkappa'' = \tau y''$, so daß man $\sigma' = 0$ erhält und damit wieder die Gl. (4), jetzt nicht in s identisch, aber doch in P gültig, wonach der Schluß wie oben verläuft. *Durch keinen Streifen, den man durch Verbiegen des geschlossenen ebenen parabolischen Streifens einer Rinne auf eine beliebige abwickelbare Fläche bei Mitverbiegen des umschlossenen Ebenenstücks erhält, läßt sich eine zu der geschlossenen Rinne isometrische Fläche legen, wenn die Krümmung der parabolischen Kurve der Rinne nirgends verschwindet.* Das Ergebnis des Beweises könnte natürlich auch als ein allgemeinerer lokaler Satz formuliert werden. 3. Der vorstehende Beweis gilt mit leichten Änderungen für alle zu einem ebenen geschlossenen Streifen isometrischen Streifen S_1, auf denen Stellen mit stationärer Streifennormale ξ so wie P vorkommen, auch wenn die Streifenkurve nirgends die zugehörige Erzeugende der abwickelbaren Streifenfläche berührt, sondern alle Erzeugenden schneidet. Anders verhält es sich mit den zu S isometrischen Streifen mit $\xi' \neq 0$ in allen Punkten. Als Beispiel diene ein Streifen, der auf einem durchweg gleichsinnig gekrümmten Kegel vom Sektorwinkel bei Abwicklung 2π mit Durchdringungslinien liegt, der ferner die Kegelspitze umschließt und alle Erzeugenden schneidet; der Streifen selbst braucht sich nicht zu durchdringen. Es gibt auch Streifen S_1 mit überall $\xi' \neq 0$, in die ein geschlossener konvexer ebener Streifen ohne Zerschneiden stetig verbogen werden kann. Durch Streifen mit $\xi' \neq 0$ aber muß sich nach der Theorie von CAUCHY, der bewiesenen lokalen Eindeutigkeit und dem Heine-Borelschen Theorem eine zu einer geschlossenen Rinne isometrische Fläche legen lassen.

Berlin-Friedenau, Begasstraße 7

(Eingegangen am 6. August 1959)