Werk

Titel: Eigentliche holomorphe Abbildungen.

Autor: Remmert, Reinhold; Stein, Karl

Jahr: 1960

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0073|log34

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

REMMERT, R., u. K. STEIN
Math. Zeitschr. 73, 159–189 (1960)

Eigentliche holomorphe Abbildungen

Von
REINHOLD REMMERT und KARL STEIN

Das Studium der biholomorphen Abbildungen hat in der Funktionentheorie mehrerer Veränderlichen lange eine dominierende Rolle gespielt. Neuerdings gewinnen jedoch allgemeinere, auch dimensionserniedrigende Abbildungen in steigendem Maße an Interesse. Im Zusammenhang mit Untersuchungen über komplexe Mannigfaltigkeiten und komplexe Räume ist insbesondere die Klasse der eigentlichen holomorphen Abbildungen in den Vordergrund getreten, und es hat sich gezeigt, daß diese Abbildungen recht bemerkenswerte Eigenschaften besitzen. In der vorliegenden Arbeit sollen eigentliche holomorphe Abbildungen komplexer Räume systematisch betrachtet werden. Wir sind bestrebt, dabei auch Fragestellungen zu diskutieren, die für biholomorphe Abbildungen geläufig sind, und auf Beziehungen zur klassischen Abbildungstheorie einzugehen.

In § 1 wird zunächst an die grundlegenden Begriffsbildungen erinnert; einige wichtige Aussagen werden angegeben. Im nächsten Paragraphen wird sodann gezeigt, daß sich jede eigentliche holomorphe Abbildung eines zusammenhängenden normalen komplexen Raumes in natürlicher Weise faktorisieren läßt: Jede solche Abbildung gestattet eine im wesentlichen eindeutig bestimmte Darstellung als Produkt spezieller eigentlicher holomorpher Abbildungen, nämlich einer maximalen Abbildung, einer Überlagerungsabbildung und einer quasi injektiven Abbildung[1]). Über maximale sowie über quasi injektive und injektive Abbildungen sind an anderer Stelle Resultate mitgeteilt worden, auf die hier nur hingewiesen wird (vgl. [29], [36], [37]).

In den folgenden Abschnitten werden vor allem Überlagerungsabbildungen weiter betrachtet; insbesondere wird die Frage behandelt, wann zu vorgegebenen zusammenhängenden normalen komplexen Räumen X, Y gleicher Dimension eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$ existiert. Jede derartige Abbildung τ besitzt einen positiven Abbildungsgrad $\mathfrak{g}(\tau)$; biholomorphe Abbildungen sind durch $\mathfrak{g}(\tau)=1$ charakterisiert. Es werden topologische und analytische Bedingungen für die Existenz einer Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$ angegeben (§ 3, Satz 5, 7 und 8).

In § 4 werden Fortsetzungs- und Konvergenzeigenschaften holomorpher Überlagerungsabbildungen diskutiert. Damit im Zusammenhang werden einige Fälle besprochen, in denen holomorphe Überlagerungsabbildungen eines komplexen Raumes auf sich stets biholomorph sind.

§ 5 enthält Aussagen, bei welchen das Randverhalten eigentlicher holomorpher Abbildungen eine Rolle spielt. Für den Sonderfall biholomorpher

[1]) Zu diesen Begriffen vgl. § 2.

Abbildungen stehen verschiedene Resultate dieses und des folgenden Paragraphen zu Sätzen aus der Dissertation von W. ROTHSTEIN [32] aus dem Jahre 1935 in naher Beziehung; die Betrachtungen in diesen Abschnitten wurden durch die Rothsteinschen Untersuchungen angeregt und schließen an sie an. — Als Verallgemeinerung eines bekannten Satzes von H. POINCARÉ ergibt sich, daß ein beschränktes Zylindergebiet des C^2 niemals eigentlich und holomorph in eine Hyperkugel eines Zahlenraumes beliebiger (endlicher) Dimension abgebildet werden kann. Weiter wird gezeigt, daß jede holomorphe Überlagerungsabbildung eines beschränkten Zylindergebietes des C^2 auf ein Gebiet der gleichen Art kartesisches Produkt von holomorphen Überlagerungsabbildungen der Komponenten ist.

§ 6 beschäftigt sich mit holomorphen Überlagerungsabbildungen von Polyedergebieten des C^2 (ein Polyedergebiet in einem komplexen Raum X ist definiert als zusammenhängende Komponente des offenen Kernes eines analytischen Polyeders in X mit gewissen weiteren Eigenschaften). In einem solchen Gebiet A sind in natürlicher Weise Zerlegungen bestimmt, die als die charakteristischen Zerlegungen von A bezeichnet werden. Jede holomorphe Überlagerungsabbildung von A auf ein Polyedergebiet $^*A$ ordnet den charakteristischen Zerlegungen von A gewisse der charakteristischen Zerlegungen von $^*A$ zu (Satz 14). Der Fall, daß A und $^*A$ euklidische Polyedergebiete im C^2 sind, wird ausführlicher behandelt (unter einem euklidischen Polyedergebiet im C^n wird das Innere einer konvexen Zelle verstanden); es zeigt sich, daß, wenn die „Stufen" von A und $^*A$ nicht kleiner als 3 sind, jede holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: A \to {}^*A$ die Beschränkung einer affinen Abbildung ist. Insbesondere ergibt sich, daß solche euklidischen Polyedergebiete im allgemeinen, d.h. wenn sie keine speziellen Symmetrien aufweisen, außer der Identität keine holomorphen Überlagerungsabbildungen auf sich gestatten. Derartige Gebiete sind daher einfache Beispiele für „starre" Holomorphiegebiete vom topologischen Typus der Hyperkugel.

§ 1. Holomorphe Abbildungen

1.1. Unter einem komplexen Raum X wird in dieser Arbeit stets ein komplexer Raum im Sinne von SERRE verstanden (vgl. [35], ferner [15]); alle auftretenden Räume seien nichtleer und endlich-dimensional. Die (komplexe) Dimension von X im Punkte x wird mit $d_x(X)$ bezeichnet, die Dimension von X schlechthin mit $d(X)$; die topologische Dimension von X ist dann $2d(X)$. Sei M eine nichtleere lokal-analytische Menge in X. M besitzt in jedem Punkte $x \in X$ eine mit $d_x(M)$ bezeichnete (komplexe) Dimension; unter der (komplexen) Codimension von M in x wird die Zahl $c_x(M) := d_x(X) - d_x(M)$ verstanden. Als Dimension bzw. Codimension von M schlechthin sind die Zahlen $d(M) := \max_{x \in M} d_x(M)$ bzw. $c(M) := \min_{x \in M} c_x(M)$ definiert. M heißt rein-d-dimensional bzw. rein-c-codimensional, wenn stets $d_x(M) = d$ bzw. $c_x(M) = c$ für alle $x \in M$ ist; gilt nur $d_x(M) \geqq d\,(d_x(M) \leqq d)$ bzw. $c_x(M) \geqq c\,(c_x(M) \leqq c)$, so heißt M mindestens (höchstens) d-dimensional bzw. mindestens (höchstens) c-codimensional.

Eine stetige Abbildung $\tau: X \to Y$ des komplexen Raumes X in den komplexen Raum Y heißt *holomorph*, wenn folgendes gilt: Ist g eine holomorphe Funktion in einer offenen Menge $V \subset Y$, so ist die Funktion $g \circ \tau$ holomorph in $\tau^{-1}(V) \subset X$.

Die Fasern $\tau^{-1}(\tau(x))$, $x \in X$, einer holomorphen Abbildung $\tau: X \to Y$ sind stets analytische Mengen in X. Zusammenhängende Faserkomponenten heißen *Niveaumengen*. Unter dem *(lokalen) Rang* $r_x(\tau)$ von τ im Punkte $x \in X$ wird die Codimension von $\tau^{-1}(\tau(x))$ in x verstanden; die Zahl $r(\tau) := \max_{x \in X} r_x(\tau)$ heißt der *Rang* von τ schlechthin. Der Punkt $x \in X$ gehört zur *Entartungsmenge* $E(\tau)$ von τ, wenn es in jeder Umgebung von x Punkte x' mit $r_{x'}(\tau) > r_x(\tau)$ gibt. Gilt stets $r_x(\tau) = d_x(X)$ — insbesondere ist dann $E(\tau)$ leer — so heißt τ (im strengen Sinne) *nirgends entartet* [2]).

Das Bild $\tau(X)$ von X unter einer holomorphen Abbildung $\tau: X \to Y$ ist im allgemeinen keine lokal-analytische Menge in Y. Ist jedoch die Topologie von X abzählbar, so besitzt das Bild $\tau(X)$ als topologischer Unterraum von Y eine topologische Dimension im Sinne von [*20*]. Es gilt:

Satz 1. *Ist $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung vom Range r eines komplexen Raumes X mit abzählbarer Topologie in einen beliebigen komplexen Raum Y, so ist $\tau(X)$ ein topologisch-$2r$-dimensionaler metrisierbarer Unterraum von Y mit abzählbarer Topologie.*

Den Beweis stützen wir auf folgenden, weiter unten bewiesenen

Hilfssatz. Unter den Voraussetzungen von Satz 1 *ist $\tau(X)$ die Vereinigung von abzählbar vielen höchstens topologisch-$2r$-dimensionalen kompakten Mengen K_ν mit abzählbarer Topologie; wenigstens eine Menge K_ν ist topologisch-$2r$-dimensional.*

Hieraus ergibt sich zunächst, daß der Unterraum $\tau(X) \subset Y$ eine abzählbare Topologie besitzt. Dann ist aber $\tau(X)$ als regulärer Raum auch normal und nach URYSOHN metrisierbar (vgl. etwa N. BOURBAKI, Topologie générale, Chap. IX, § 4; dort insbesondere p. 67, Exerc. 5, 6, 7). Aus dem "Sum Theorem for Dimension n" (vgl. [*20*], p. 30) folgt schließlich, daß $\tau(X)$ ein topologisch-$2r$-dimensionaler Raum ist.

Beweis des Hilfssatzes. Wir führen vollständige Induktion nach der komplexen Dimension $d(X)$; der Induktionsbeginn $d(X) = 0$ ist trivial. Die Behauptung sei für komplexe Räume X mit $d(X) < d$, $d \geqq 1$, bewiesen. Es genügt dann, sie für irreduzible komplexe Räume X mit $d(X) = d$ zu beweisen. Sei $E := E(\tau)$ die Entartungsmenge von τ; E ist entweder leer oder eine höchstens (komplex)-$(d-1)$-dimensionale analytische Menge in X (vgl. [*30*], Satz 18). Zu jedem Punkt $x \in X - E$ gibt es beliebig kleine relativ-kompakte offene Umgebungen U in $X - E$, so daß $\tau(U)$ jeweils eine rein (komplex)-r-dimensionale lokal-analytische Menge in Y ist ([*30*], Satz 19). Man kann

[2]) Der Term *nirgends entartet* wird hier wie in [*14*] und [*15*] benutzt; in [*30*] wurde hiervon abweichend jede holomorphe Abbildung τ mit leerem $E(\tau)$ nirgends entartet genannt.

daher insbesondere eine Umgebung U^* von x so wählen, daß $\overline{\tau(U^*)}$ eine topologisch-$2r$-dimensionale kompakte Menge in $\tau(X-E)$ mit abzählbarer Topologie ist. Offenbar läßt sich $X-E$ mit abzählbar vielen derartigen U^* überdecken; demnach ist $\tau(X-E)$ die Vereinigung von abzählbar vielen topologisch-$2r$-dimensionalen kompakten Mengen mit abzählbarer Topologie.

Ist nun E leer, so ist alles bewiesen. Ist E nichtleer, so werde auf E die natürliche komplexe Struktur induziert; E wird dann zu einem komplexen Raum mit $0 \leqq d(E) \leqq d-1$, und die Beschränkung $\tau|E =: \tau' : E \to Y$ von τ auf E wird eine holomorphe Abbildung mit $r(\tau') \leqq r-2$. Da E ebenfalls eine abzählbare Topologie besitzt, ist nach Induktionsannahme $\tau'(E)$ die Vereinigung von abzählbar vielen höchstens topologisch-$(2r-4)$-dimensionalen kompakten Mengen mit abzählbarer Topologie. Wegen $\tau(X) = \tau(X-E) \cup \tau'(E)$ ist damit aber auch die Behauptung des Hilfssatzes für X als richtig nachgewiesen.

1.2. Eine stetige Abbildung eines lokal-kompakten Raumes R in einen lokal-kompakten Raum R' heißt *eigentlich*, wenn das Urbild jeder kompakten Menge in R' eine kompakte Menge in R ist[3]).

Es sei $\tau : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung vom Range r des komplexen Raumes X in den komplexen Raum Y, derart, daß $\tau(X)$ eine lokal-analytische Menge in Y ist. Diese letzte Voraussetzung ist sicher erfüllt, wenn τ eigentlich ist, in diesem Falle ist $\tau(X)$ sogar eine analytische Menge in Y (vgl. [*30*], Satz 23). Die Menge $\tau(X)$ werde als geringter Unterraum von Y aufgefaßt, sie ist dann ein komplexer Raum Y_0 der Dimension $d(Y_0) = r$. Es bezeichne $\iota : Y_0 \to Y$ die Injektion von Y_0 in Y, ferner seien (X^*, ξ) bzw. (Y_0^*, η) Normalisierungen von X bzw. Y_0[4]). Man hat eine holomorphe Abbildung $\tau_0 : X \to Y_0$ mit $\tau = \iota \circ \tau_0$. Wir beweisen, daß unter einer geeigneten weiteren Voraussetzung über τ die Abbildung τ zu einer holomorphen Abbildung $\tau_0^* : X^* \to Y_0^*$ geliftet werden kann.

Satz 2. *Die holomorphe Abbildung $\tau : X \to Y$ sei so beschaffen, daß jede irreduzible Komponente von X vermöge τ auf eine irreduzible Komponente von $\tau(X) = Y_0$ abgebildet wird. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte holomorphe Abbildung $\tau_0^* : X^* \to Y_0^*$, so daß $\tau_0 \circ \xi = \eta \circ \tau_0^*$, also $\tau \circ \xi = \iota \circ \eta \circ \tau_0^*$. Es gilt $r(\tau_0^*) = r(\tau)$, $\overline{\tau_0^*(X^*)} = Y_0^*$. Ist τ eigentlich, so ist τ_0^* eigentlich und surjektiv.*

Beweis. Bezeichnen wir mit N die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von $\tau(X) = Y_0$, so ist die durch Beschränkung von η bestimmte Abbildung $'\eta : Y_0^* - \overset{-1}{\eta}(N) \to Y_0 - N$ biholomorph. Durch die Gleichung $'\tau_0^*(x^*) := {}'\eta^{-1} \circ \tau_0 \circ \xi(x^*)$, $x^* \in X^* - \overbrace{(\tau_0 \circ \xi)}^{-1}(N)$, wird daher eine holomorphe Abbildung

$$'\tau_0^* : X^* - \overbrace{(\tau_0 \circ \xi)}^{-1}(N) \to Y_0^*$$

---

[3]) Die Bezeichnung *eigentliche Abbildung* schließt an den von N. BOURBAKI verwendeten Term *application propre* an. In der Literatur wird auch die Bezeichnung *kompakte Abbildung* benutzt (vgl. [*19*]).

[4]) Zum Begriff der Normalisierung vgl. [*15*], §§ 6 und 7.

definiert. Da τ jede irreduzible Komponente von X auf eine ebensolche von $\tau(X)$ abbildet, ist $\tau_0^{-1}(N)$ eine nirgends dichte analytische Menge in X. Daher ist $\widehat{(\tau_0 \circ \xi)^{-1}}(N)$ eine analytische Menge in X^*, die den normalen komplexen Raum X^* nirgends zerlegt. Da $\eta \circ {}'\tau_0^* : X^* - \widehat{(\tau_0 \circ \xi)^{-1}}(N) \to Y_0$ zu der holomorphen Abbildung $\tau_0 \circ \xi : X^* \to Y_0$ fortsetzbar ist, so folgt aus [*36*], Hilfssatz 2 (man setze: $R_0 = X^*$, $M_0 = \widehat{(\tau_0 \circ \xi)^{-1}}(N)$, $R_1 = Y_0^*$, $R_2 = Y_0$, ${}'F_{01} = {}'\tau_0^*$, $F_{12} = \eta$), daß ${}'\tau_0^*$ in eindeutiger Weise zu einer stetigen Abbildung $\tau_0^* : X^* \to Y_0^*$ fortsetzbar ist. τ_0^* ist auf Grund des für normale komplexe Räume gültigen Riemannschen Satzes über hebbare Singularitäten holomorph. Nach Konstruktion gilt: $\tau_0 \circ \xi = \eta \circ \tau_0^*$. Die Gleichung $r(\tau) = r(\tau_0^*)$ ist trivial, da die Fasern von ξ und η stets endliche Punktmengen sind. Aus der Identität $\overline{Y_0^* - \eta^{-1}(N)} = Y_0^*$ folgt unmittelbar $\overline{\tau_0^*(X^*)} = Y_0^*$.

Es ist evident, daß τ_0^* eigentlich und surjektiv ist, wenn τ eigentlich ist[5]).

Bemerkung. Ist τ nicht eigentlich, so ist τ_0^* im allgemeinen auch nicht surjektiv.

Die Fasern $\tau^{-1}(\tau(x))$ einer holomorphen Abbildung $\tau : X \to Y$ zerfallen in eindeutiger Weise in endlich oder unendlich viele Niveaumengen. Die Anzahl $\mathfrak{f}_x(\tau)$ der Niveaumengen der Faser $\tau^{-1}(\tau(x))$ nennen wir die *Faserzahl von τ in x*; die Zahl $\mathfrak{f}(\tau) := \sup_{x \in X} \mathfrak{f}_x(\tau)$ werde die *Faserzahl von τ* schlechthin genannt.

Man beweist leicht:

Ist in Satz 2 die Abbildung τ_0^* surjektiv, so gilt:

$$\max\left(\mathfrak{f}(\eta), \mathfrak{f}(\tau_0^*)\right) \leqq \mathfrak{f}(\tau \circ \xi) \leqq \mathfrak{f}(\eta) \cdot \mathfrak{f}(\tau_0^*).$$

Einfache Beispiele zeigen, daß diese Ungleichung nicht verschärft werden kann.

Ein komplexer Raum Y erzeugt in jedem Punkt $y \in Y$ endlich viele analytische Primkeime. Ihre Anzahl $k(y)$ heißt die *Keimzahl von Y in y*; die Zahl $k(Y) := \sup_{y \in Y} k(y)$ heißt die *Keimzahl von Y* schlechthin. Ist (Y^*, η) eine Normalisierung von Y, so gilt: $\mathfrak{f}_{y^*}(\eta) = k_{\eta(y^*)}(Y)$ für alle $y^* \in Y^*$, also $\mathfrak{f}(\eta) = k(Y)$.

Die Keimzahl $k(Y)$ kann unendlich sein, selbst dann, wenn Y irreduzibel ist. Daraus folgt, daß auch die Faserzahl einer eigentlichen holomorphen Abbildung $\tau : X \to Y$ bei irreduziblem X unendlich sein kann.

Eine holomorphe Abbildung $\tau : X \to Y$ heißt *einfach*, wenn alle ihre Fasern zusammenhängend sind, d.h. wenn gilt: $\mathfrak{f}(\tau) = 1$. Ist X lokal-irreduzibel und (X^*, ξ) eine Normalisierung von X, so ist dann auch $\tau \circ \xi$ einfach. Kann τ überdies zu einer surjektiven Abbildung τ_0^* gemäß Satz 2 geliftet werden, so folgt weiter: $\mathfrak{f}(\tau_0^*) = \mathfrak{f}(\eta) = 1$. Der Bildraum $\tau(X)$ hat also die Keimzahl 1, so daß sich insbesondere ergibt:

---

[5]) Aus dem Beweis ist ersichtlich, daß τ stets dann in eindeutiger Weise zu einer holomorphen Abbildung τ_0^* geliftet werden kann, wenn $\tau^{-1}(N)$ nirgends dicht in X liegt.

Ist $\tau: X \to Y$ eine einfache eigentliche holomorphe Abbildung vom Range r und ist X irreduzibel und lokal-irreduzibel, so ist $\tau(X)$ ein r-dimensionaler irreduzibler und lokal-irreduzibler abgeschlossener komplexer Unterraum von Y.

§ 2. Faktorisierung eigentlicher holomorpher Abbildungen

2.1. In diesem Paragraphen beschreiben wir drei spezielle Typen von eigentlichen holomorphen Abbildungen. Wir werden zeigen, daß jede eigentliche holomorphe Abbildung eines komplexen Raumes X in kanonischer Weise als Produkt derartiger „reiner" Abbildungen darstellbar ist, wenn X als zusammenhängend und normal vorausgesetzt wird.

Es sei zunächst an die folgende Redeweise erinnert (vgl. [37]; X, Y, Y_0 seien beliebige komplexe Räume): Sind $\tau: X \to Y$ und $\tau_0: X \to Y_0$ holomorphe Abbildungen, so heißt τ_0 *abhängig von* τ, wenn für die durch τ und τ_0 bestimmte holomorphe Abbildung $(\tau, \tau_0): x \to (\tau(x), \tau_0(x))$ von X in $Y \times Y_0$ gilt: $r_x((\tau, \tau_0)) = r_x(\tau)$ für alle $x \in X$. τ und τ_0 heißen *verwandt*, wenn τ_0 von τ und τ von τ_0 abhängig ist. Offenbar sind τ und τ_0 genau dann verwandt, wenn sie dieselben Niveaumengen besitzen.

Definition 1 *(Maximale Abbildung): Eine surjektive holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ heißt maximal, wenn sie jede von τ abhängige holomorphe Abbildung $\tau_0: X \to Y_0$ majorisiert, d. h. wenn zu τ_0 stets eine holomorphe Abbildung $\sigma_0: Y \to Y_0$ mit $\tau_0 = \sigma_0 \circ \tau$ existiert.*

In [36] und [38] wird bewiesen:

Ist X ein normaler komplexer Raum, so existiert zu jeder eigentlichen holomorphen Abbildung $\tau: X \to Y$ eine mit τ verwandte maximale eigentliche holomorphe Abbildung $\alpha: X \to X'$ auf einen normalen komplexen Raum X'. Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit oder reindimensional mit $d(X) \leqq r(\tau) + 1$, so ist α einfach.

Das Paar (α, X') heißt eine *komplexe Basis zur Abbildung* τ; es ist bis auf „analytische Äquivalenz" eindeutig bestimmt.

Definition 2 *(Gleichartig surjektive Abbildung, Überlagerungsabbildung): Eine eigentliche, nirgends entartete surjektive holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$, welche jede irreduzible Komponente von X auf eine irreduzible Komponente von Y abbildet, heißt gleichartig surjektiv. Sind insbesondere X, Y normale komplexe Räume, so heißt eine gleichartig surjektive holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ eine Überlagerungsabbildung.*

Es ist klar, daß eine gleichartig surjektive holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ — wegen $r_x(\tau) = d_x(X)$ für alle $x \in X$ — jede irreduzible Komponente von X auf eine irreduzible Komponente von Y der *gleichen Dimension* abbildet.

Die Bezeichnung *Überlagerungsabbildung* wird durch den folgenden Satz gerechtfertigt.

Satz 3. *Ist $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung, so ist (X, τ, Y) eine analytische Überlagerung von Y.*

Zum Begriff der analytischen Überlagerung eines normalen komplexen Raumes sei auf [*15*] (dort insbesondere § 2 und § 11) sowie auf [*36*] verwiesen.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß in Y eine nirgends dichte analytische Menge A existiert, derart, daß $\tau^{-1}(A)$ in X nirgends dicht liegt und $X-\tau^{-1}(A)$ vermöge τ lokal-topologisch auf $Y-A$ abgebildet wird (vgl. [*15*]); dabei darf vorausgesetzt werden, daß $d_x(X)\geqq 1$ für alle $x\in X$ — und damit auch $d_y(Y)\geqq 1$ für alle $y\in Y$ — gilt. — Sei M bzw. N die Menge der nichtgewöhnlichen Punkte von X bzw. Y. Entweder ist M bzw. N leer oder eine mindestens 2-codimensionale analytische Menge in X bzw. Y (vgl. [*25*]; [*12*], Exp. IX); entsprechendes gilt dann, da die Überlagerungsabbildung τ nirgends entartet ist, für die Menge $N_1:=\tau^{-1}(N)$ in X. Insbesondere liegt die Menge $M_1:=M\cup N_1$ in X nirgends dicht. Ist $x^{(0)}$ irgendein Punkt von $X-M_1$ und $y^{(0)}:=\tau(x^{(0)})$ sein Bildpunkt vermöge τ, so gilt $y^{(0)}\in Y-N$ und $d_{x^{(0)}}(X)=d_{y^{(0)}}(Y)=:n\geqq 1$; sind $x_1,\ldots,x_n$ bzw. $y_1,\ldots,y_n$ lokale komplexe Koordinaten in je einer geeigneten offenen zusammenhängenden Umgebung U von $x^{(0)}$ bzw. V von $y^{(0)}$, so wird τ in U durch ein System holomorpher Funktionen $y_\nu=\varphi_\nu(x_1,\ldots,x_n)$, $\nu=1,\ldots,n$, beschrieben. Die Funktionaldeterminante der φ_ν ist in U nicht identisch Null, da τ nirgends entartet ist, und sie verschwindet genau in denjenigen Punkten $x\in U$, in denen τ nicht lokal topologisch abbildet. Bezeichnet nun L die Menge aller derjenigen Punkte von X, in denen τ nicht lokal-topologisch ist, so folgt, daß L entweder leer oder eine rein 1-codimensionale analytische Menge in $X-M_1$ ist. Die abgeschlossene Hülle $\overline{L}$ von L in X ist dann entweder leer oder nach einem Satz über die Fortsetzung analytischer Mengen (vgl. [*31*], Satz 13 und [*28*], Satz 10) eine rein 1-codimensionale analytische Menge in X. Mithin ist $\overline{L}\cup M_1$ eine nirgends dichte analytische Menge in X und infolgedessen $A:=\tau(\overline{L}\cup M_1)$ eine nirgends dichte analytische Menge in Y. Offenbar ist A eine Menge der gesuchten Art.

Satz 3 ist damit bewiesen.

Definition 3 (Quasi injektive Abbildung): Eine nirgends entartete holomorphe Abbildung $\tau: X\to Y$, die in einer offenen und überall in X dichten Menge eineindeutig ist, heißt quasi injektiv.

Es gilt nun der folgende Faktorisierungssatz:

Satz 4. Ist X ein zusammenhängender normaler komplexer Raum und $\tau: X\to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung, so existieren zusammenhängende normale komplexe Räume $'X$ und $^*Y$ sowie holomorphe, mit τ gleichrangige Abbildungen $\alpha: X\to {}'X$, $\beta: {}'X\to {}^*Y$, $\gamma: {}^*Y\to Y$ mit folgenden Eigenschaften:

0) *Es gilt $\tau=\gamma\circ\beta\circ\alpha$.*

1) *α ist eigentlich, mit τ verwandt und maximal.*

2) *β ist eine Überlagerungsabbildung.*

3) *γ ist eigentlich und quasi injektiv.*

Die Faktorisierung von τ als Produkt solcher Abbildungen ist eindeutig bis auf Äquivalenz in einem naheliegenden Sinne.

Beweis. Sei $(\alpha, {}'X)$ eine komplexe Basis zu $\tau: X \to Y$. Es gibt dann eine holomorphe Abbildung $\varphi: {}'X \to Y$, derart, daß $\tau = \varphi \circ \alpha$ gilt; mit τ sind auch α und φ eigentlich. $\varphi({}'X) = \tau(X)$ ist eine irreduzible analytische Menge in Y, sie werde als komplexer Unterraum Y_0 von Y aufgefaßt. Sei $({}^*Y, \eta)$ eine Normalisierung von $Y_0 := \varphi({}'X) = \tau(X)$, ferner $\iota: Y_0 \to Y$ die Injektion von Y_0 in Y. Es werde $\gamma := \iota \circ \eta$ gesetzt; η und ι sind wieder eigentlich. Nach Satz 2 gibt es eine holomorphe und offenbar eigentliche Abbildung $\beta: {}'X \to {}^*Y$, so daß $\varphi = \gamma \circ \beta$ ist. Die Abbildungen α, β, γ haben die verlangten Eigenschaften.

Sind andererseits ${}'X_1$, ${}^*Y_1$ zusammenhängende normale komplexe Räume und $\alpha_1: X \to {}'X_1$, $\beta_1: {}'X_1 \to {}^*Y_1$, $\gamma_1: {}^*Y_1 \to Y$ Abbildungen mit den geforderten Eigenschaften, bezeichnet ferner $\eta_1: {}^*Y_1 \to Y_0 = \gamma_1({}^*Y_1) = \tau(X)$ diejenige Abbildung, für welche $\gamma_1 = \iota \circ \eta_1$ gilt, so ist notwendig das Paar $(\alpha_1, {}'X_1)$ eine komplexe Basis zu τ und das Paar $({}^*Y_1, \eta_1)$ eine Normalisierung des komplexen Unterraumes $Y_0 = \gamma_1({}^*Y_1) = \tau(X) \subset Y$. Da Normalisierungen komplexer Räume und — im Falle der Existenz — komplexe Basen zu holomorphen Abbildungen bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt sind, ist auch die eindeutige Bestimmtheit der Faktorisierung von τ als Produkt von Abbildungen der beschriebenen Art bis auf Äquivalenz klar, w.z.b.w.

2.2. In diesem Abschnitt sei X stets ein zusammenhängender normaler komplexer Raum.

Wir nennen eine eigentliche holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ *rein*, wenn bei einer Faktorisierung von τ gemäß Satz 4 zwei der Faktoren α, β, γ biholomorph sind. Zum Beispiel ist jede einfache eigentliche surjektive holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ rein und maximal.

Es kann unter geeigneten weiteren Voraussetzungen über X vorkommen, daß jede eigentliche surjektive holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ — falls auch Y als normal vorausgesetzt wird — eine Überlagerungsabbildung, also rein ist. Sicher trifft dies zu, wenn jede kompakte analytische Menge in X nulldimensional ist. Das ist u.a. für alle K-vollständigen komplexen Räume X der Fall[6]), insbesondere für Gebiete des C^n.

Auch wenn X nicht nur nulldimensionale kompakte analytische Mengen enthält, ist es möglich, daß jede nichtkonstante holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ in einen zusammenhängenden normalen komplexen Raum eine Überlagerungsabbildung ist. Es läßt sich zeigen, daß dies jedenfalls dann eintritt, wenn X und Y als kompakt und gleichdimensional vorausgesetzt werden und X hinreichend viele Holomorphismen (d.h. biholomorphe Abbildungen auf sich) zuläßt. Zur präzisen Formulierung der Aussage seien einige Bezeichnungen eingeführt. Es sei G die Holomorphismengruppe von X; G ist, versehen mit der CO-Topologie[7]), eine topologische Gruppe (wird X überdies als kompakte komplexe Mannigfaltigkeit vorausgesetzt, so ist G sogar eine

[6]) Zum Begriff des K-vollständigen Raumes vgl. [13].

[7]) Unter CO-Topologie wird die Topologie der kompakten Konvergenz (compact-open topology) verstanden: Sei $K \subset X$ kompakt, $U \subset X$ offen, dann heißt die Menge $\{g: g \in G, g(K) \subset U\}$ offen in G. Die Gesamtheit dieser Mengen erzeugt die CO-Topologie von G.

komplexe Liesche Gruppe, vgl. [6]). G_0 sei die zusammenhängende Komponente der Identität von G; die Gruppe $I(x_0) := \{g : g \in G_0,\ g(x_0) = x_0\}$ werde die *Isotropiegruppe* von $x_0 \in X$ genannt. Dann gilt:

Der komplexe Raum X sei kompakt und habe außerdem die folgende Eigenschaft:

(a) *Sind x_0, x_0' beliebige verschiedene Punkte in X, so gibt es außer X keine weitere analytische Menge in X, die x_0 und alle Punkte $g x_0'$, $g \in I(x_0)$, enthält.*

Dann ist jede holomorphe Abbildung $\tau : X \to Y$ von X in einen beliebigen komplexen Raum Y konstant oder überall vom Range $d(X)$ (d.h. nirgends entartet).

Dies ergibt sich aus dem folgenden

Satz (A. BLANCHARD [5], p. 160). *Der komplexe Raum X sei kompakt. Ist $\tau : X \to Y$ eine holomorphe Abbildung von X in einen beliebigen komplexen Raum Y, so ist jede Abbildung $\tau \circ g$, $g \in G_0$, mit τ verwandt.*

Wir skizzieren der Vollständigkeit halber zunächst den Beweis dieses Satzes. Man muß zeigen, daß τ und $\tau \circ g$, $g \in G_0$, dieselben Niveaumengen haben. Dazu genügt es offenbar zu beweisen, daß jede Niveaumenge N von τ vermöge eines beliebigen $g \in G_0$ auf eine Niveaumenge N_g von τ abgebildet wird. Nun folgt $g(N) = N_g$ bereits, wenn $g(N) < N_g$, $g \in G_0$, bewiesen wird. Diese Inklusion braucht schließlich nur für Elemente g aus einer geeigneten Umgebung U der Identität verifiziert zu werden, da jedes solche U bereits G_0 erzeugt.

Sei nun $\tau(N) = y_0 \in Y$; sei W eine Umgebung von y_0, so daß eine holomorphe und injektive Abbildung φ von W in einen Zahlenraum C^r geeigneter Dimension existiert. Ist dann V eine in W enthaltene relativ-kompakte Umgebung von y_0, so ist $\tau^{-1}(V)$ eine Umgebung von N, die relativ-kompakt in $\tau^{-1}(W)$ liegt. Durch $U := \{g : g \in G,\ g(\tau^{-1}(V)) < \tau^{-1}(W)\}$ wird daher eine Umgebung U der Identität von G definiert. Wir betrachten nun für jedes $g \in U$ die holomorphe Abbildung $\varphi \circ \tau \circ g : N \to C^r$. Da N kompakt und zusammenhängend ist, besteht $(\varphi \circ \tau \circ g)(N)$ aus einem einzigen Punkt. Aus der Injektivität von φ folgt dann, daß auch $(\tau \circ g)(N) = \tau(g(N))$ einpunktig ist. Mithin ist $g(N)$ in einer Niveaumenge von τ enthalten, q.e.d.

Nunmehr folgt die oben formulierte Aussage: Ist τ nicht überall vom lokalen Range $d(X)$, so gibt es eine mindestens 1-dimensionale Niveaumenge N von τ. Sind dann x_0, $x_0' \in N$ zwei verschiedene Punkte, so gilt $g x_0' \in N$ für alle $g \in I(x_0)$, da nach dem Satz von A. BLANCHARD sicher $g(N) = N$ ist. Nach Voraussetzung ist also $N = X$, mithin ist τ konstant.

Anmerkung. Die Bedingung (a) *ist sicher dann erfüllt, wenn $I(x_0)$ für alle $x_0 \in X$ transitiv auf $X - \{x_0\}$ wirkt.* — Hieraus ergibt sich unmittelbar:

Jede nicht konstante holomorphe Abbildung $\tau : P^n \to Y$ des n-dimensionalen komplex-projektiven Raumes P^n in einen zusammenhängenden n-dimensionalen normalen komplexen Raum Y ist eine Überlagerungsabbildung.

Als spezielle Folgerung sei hierzu erwähnt: *Jede holomorphe Abbildung* $\tau: P^n \to \overset{m}{\underset{\mu=1}{\times}} P^{k_\mu}$ *mit* $k_\mu < n$, $\mu = 1, \ldots, n$, *ist konstant.* — Denn die holomorphe Abbildung $\pi_\mu \circ \tau: P^n \to P^{k_\mu}$, wo π_μ die Projektion von $\overset{m}{\underset{\mu=1}{\times}} P^{k_\mu}$ auf P^{k_μ} bezeichnet, ist nach obiger Aussage notwendig konstant.

2.3. Die in diesem Abschnitt auftretenden komplexen Räume X, Y seien stets als zusammenhängend und normal vorausgesetzt.

Jede holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$ besitzt einen ganzzahligen *Abbildungsgrad* $\mathfrak{g}(\tau)$, der als die Blätterzahl der analytischen Überlagerung (X, τ, Y) definiert werden kann (diese Erklärung steht in Einklang mit den in der Topologie geläufigen Definitionen des Abbildungsgrades stetiger Abbildungen, vgl. [*18*], [*24*], [*27*], [*34*]). $\mathfrak{g}(\tau)$ stimmt also mit der Faserzahl $\mathfrak{f}(\tau)$ überein. Es ist stets $\mathfrak{g}(\tau) \geqq 1$, und $\mathfrak{g}(\tau) = 1$ gilt genau dann, wenn τ biholomorph ist.

Auch wenn nicht vorausgesetzt wird, daß X und Y gleiche Dimension haben, läßt sich einer eigentlichen holomorphen Abbildung $\tau: X \to Y$ ein Abbildungsgrad $\mathfrak{g}(\tau)$ zuordnen: Ist $\tau = \gamma \circ \beta \circ \alpha$ eine Faktorisierung von τ gemäß Satz 4, so sei $\mathfrak{g}(\tau) := \mathfrak{g}(\beta)$ gesetzt. Ist X eine komplexe Mannigfaltigkeit, so gilt wieder $\mathfrak{g}(\tau) = \mathfrak{f}(\tau)$, da in diesem Fall (vgl. [*36*]) die maximale Abbildung α einfach ist.

Der Abbildungsgrad holomorpher Überlagerungsabbildungen verhält sich multiplikativ: Sind $\tau: X \to Y$ und $\sigma: Y \to Z$ derartige Abbildungen, so gilt $\mathfrak{g}(\sigma \circ \tau) = \mathfrak{g}(\sigma) \cdot \mathfrak{g}(\tau)$.

Es sei f eine im komplexen Raum X definierte holomorphe Funktion. Ist $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung vom Abbildungsgrad $\mathfrak{g}(\tau) =: b$, und werden die in bezug auf die analytische Überlagerung (X, τ, Y) über einem Punkt $y \in Y$ gelegenen (nach ihrer Vielfachheit gezählten) b Punkte von X mit $\hat{y}^{(1)}, \ldots, \hat{y}^{(b)}$ bezeichnet, so sei

$$P(w; f, \tau) := \left(w - f(\hat{y}^{(1)})\right) \cdot \cdots \cdot \left(w - f(\hat{y}^{(b)})\right) \equiv w^b + a_1 \cdot w^{b-1} + \cdots + a_b$$

gesetzt. Die a_β, $\beta = 1, \ldots, b$, lassen sich als holomorphe Funktionen in Y auffassen; $a_\beta =: a_\beta(y)$ heiße die β-te elementarsymmetrische Funktion von f bezüglich τ. Für in X meromorphe Funktionen f ist $P(w; f, \tau)$ entsprechend zu erklären, die elementarsymmetrischen Funktionen $a_\beta(y)$ von f bezüglich τ sind dann in Y meromorph. — Die Abbildung τ induziert einen (injektiven) Homomorphismus $\overset{*}{\tau}: \mathfrak{K}(Y) \to \mathfrak{K}(X)$ des Körpers $\mathfrak{K}(Y)$ der in Y meromorphen Funktionen in den Körper $\mathfrak{K}(X)$ der in X meromorphen Funktionen. $\mathfrak{K}(X)$ kann also, da jede Funktion $f \in \mathfrak{K}(Y)$ jeweils das Polynom b-ten Grades $P(w; f, \tau)$ annuliert, als endlich-algebraische Erweiterung von $\mathfrak{K}(Y)$ betrachtet werden, und zwar ist der Körpergrad $[\mathfrak{K}(X) : \mathfrak{K}(Y)]$ ein Teiler von b. Ebenso kann der Ring $\mathfrak{J}(X)$ der in X holomorphen Funktionen als ein ganzer Ring endlichen Grades über dem Ring $\mathfrak{J}(Y)$ der in Y holomorphen Funktionen mit $[\mathfrak{J}(X) : \mathfrak{J}(Y)] \leqq b$ angesehen werden.

Wir vermerken:

Sind $\tau_i: X_i \to Y_i$ holomorphe Überlagerungsabbildungen zwischen zusammenhängenden normalen komplexen Räumen, $i=1, 2$, und sind $\mu: X_2 \to X_1$, $\nu: Y_2 \to Y_1$ eigentliche holomorphe Modifikationsabbildungen, für die gilt: $\tau_1 \circ \mu = \nu \circ \tau_2$, so bestehen die folgenden Gleichungen:

$$1)\ \mathfrak{g}(\tau_1) = \mathfrak{g}(\tau_2),$$
$$2)\ [\mathfrak{K}(X_1):\mathfrak{K}(Y_1)] = [\mathfrak{K}(X_2):\mathfrak{K}(Y_2)],$$
$$3)\ [\mathfrak{J}(X_1):\mathfrak{J}(Y_1)] = [\mathfrak{J}(X_2):\mathfrak{J}(Y_2)].$$

Zum Begriff der Modifikation komplexer Räume vgl. [*4*], [*14*].

Die Gleichung 1) ist evident. 2) und 3) ergeben sich sofort aus der Tatsache, daß die Abbildungen ν, μ Körperisomorphismen $\overset{*}{\nu}: \mathfrak{K}(Y_1) \to \mathfrak{K}(Y_2)$, $\overset{*}{\mu}: \mathfrak{K}(X_1) \to \mathfrak{K}(X_2)$ und analog Ringisomorphismen induzieren, die zusammen mit den von den Abbildungen $\overset{*}{\tau}_1$, $\overset{*}{\tau}_2$ induzierten injektiven Körper- bzw. Ringhomomorphismen $\overset{*}{\tau}_1$, $\overset{*}{\tau}_2$ der Gleichung $\overset{*}{\tau}_2 \circ \overset{*}{\nu} = \overset{*}{\mu} \circ \overset{*}{\tau}_1$ genügen.

Wir notieren ferner:

Ist $\tau: C^n \to C^n$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung, die durch ein System

$$w_\nu = P_\nu(z_1, \ldots, z_n), \qquad \nu = 1, \ldots, n,$$

von homogenen Polynomen P_ν beschrieben werden kann, so gilt: $\mathfrak{g}(\tau) = \prod_{\nu=1}^{n} \operatorname{grad} P_\nu$.

Diese Aussage folgt unmittelbar aus dem Bézoutschen Theorem (vgl. [*26*], p. 292).

Beispiel. Durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} w_1 &= -(z_1 + \cdots + z_n) \\ w_2 &= z_1 z_2 + z_1 z_3 + \cdots + z_{n-1} z_n \\ &\vdots \\ w_n &= (-1)^n z_1 \ldots z_n \end{aligned}$$

wird eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: C^n \to C^n$ mit $\mathfrak{g}(\tau) = n!$ definiert.

2.4. Die surjektiven und quasi injektiven eigentlichen holomorphen Abbildungen können in einfacher Weise charakterisiert werden. Es gilt:

Eine surjektive eigentliche holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ ist genau dann quasi injektiv, wenn die zugehörige holomorphe Abbildung $\tau_0^*: X^* \to Y_0^*$ (vgl. *Satz* 2) *biholomorph ist.*

In der Tat! Ist τ_0^* biholomorph, so ist trivial, daß τ quasi injektiv ist. Ist umgekehrt τ quasi injektiv, so ist auch τ_0^* quasi injektiv und eigentlich. Das Tripel (X^*, τ_0^*, Y_0^*) ist mithin eine einblättrige analytische Überlagerung von Y_0^*. Das bedeutet aber, daß τ_0^* biholomorph abbildet.

Es folgt unmittelbar: *Jede surjektive und quasi injektive eigentliche holomorphe Abbildung $\tau: X \to Y$ zwischen lokal-irreduziblen Räumen ist bijektiv.*

Für holomorph vollständige komplexe Räume X, Y ist die Frage nach der Existenz injektiver eigentlicher holomorpher Abbildungen $\tau: X \to Y$ von Wichtigkeit. Es läßt sich zeigen (vgl. [*29*]):

Jeder holomorph-vollständige lokal-irreduzible Raum X läßt sich in einen Zahlenraum C^N, wo N hinreichend groß ist, einbetten, d.h. es gibt eine holomorphe eigentliche injektive Abbildung $\tau: X \to C^N$.

§ 3. Überlagerungsabbildungen

3.1. In diesem und den weiteren Paragraphen werden vor allem die folgenden Probleme in besonderen Fällen studiert. Vorgegeben sind zwei zusammenhängende normale komplexe Räume X, Y gleicher Dimension. a) Wann läßt sich X gleichartig surjektiv auf Y abbilden, d.h. wann kann X als analytische Überlagerung von Y realisiert werden? Wie weit kann man den Abbildungsgrad $g(\tau)$ einer solchen Abbildung τ, d.h. die Blätterzahl, vorschreiben? Offenbar liegt das Hauptproblem der klassischen Abbildungstheorie vor, wenn $g(\tau) = 1$ vorgeschrieben wird. Wann tritt nur dieser Fall auf? b) Auf wieviele Arten läßt sich gegebenenfalls X als analytische Überlagerung von Y darstellen?

Die vorstehenden Fragen interessieren auch für den Fall $X = Y$. Wann ist insbesondere X „starr" in bezug auf holomorphe Überlagerungsabbildungen auf sich? Zu diesen Problemen soll eine Reihe von Aussagen angegeben werden, die zum Teil ältere, auf den Fall $g(\tau) = 1$ bezugnehmende Aussagen umfassen.

3.2. Zur Frage a) läßt sich sogleich eine auf H. HOPF [*18*] zurückgehende notwendige topologische Bedingung aussprechen. Alle auftretenden komplexen Räume X, Y seien zusammenhängend und normal, es gelte $d(X) = d(Y)$. Mit $p_\nu(X)$ bzw. $p_\nu(Y)$ werde die ν-te Bettische Zahl von X bzw. Y bezeichnet.

Satz 5. *Sind X und Y komplexe Mannigfaltigkeiten, so gibt es höchstens dann eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$, wenn der Divisionshomologiering $D(X)$ einen zum Divisionshomologiering $D(Y)$ dimensionstreu isomorphen Unterring enthält. Werden X und Y nicht als singularitätenfrei vorausgesetzt, so ist für die Existenz einer holomorphen Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$ wenigstens notwendig, daß $p_\nu(X) \geqq p_\nu(Y)$ für alle ν ist.*

Für den Fall kompakter topologischer Mannigfaltigkeiten und stetiger Abbildungen mit von 0 verschiedenem Abbildungsgrad wurde die entsprechende Aussage von H. HOPF bewiesen ([*18*], p. 81). Später hat DE RHAM ([*27*], p. 97) den Fall beliebiger, nicht notwendig kompakter differenzierbarer Mannigfaltigkeiten der Klasse C^∞ behandelt. Der Beweis von Satz 5 kann im Rahmen der Topologie mit klassischen Methoden erbracht werden; wir verzichten hier auf die Durchführung.

Als elementare Folgerung aus Satz 5 ergibt sich z.B., daß der Einheitskreis nicht gleichartig surjektiv in einen Kreisring und eine kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht p nicht gleichartig surjektiv in eine

kompakte Riemannsche Fläche vom Geschlecht $q>p$ abbildbar ist[8]). Eine Verschärfung dieser letzten Aussage erhält man übrigens wie bekannt (vgl. [24]) unmittelbar aus der Hurwitzschen Formel

$$2p-2=\mathfrak{g}(\tau)\cdot(2q-2)+v,$$

worin $\tau: X\to Y$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung der kompakten Riemannschen Fläche X vom Geschlecht p in die kompakte Riemannsche Fläche Y vom Geschlecht q bezeichnet und v die Verzweigungszahl von τ ist; aus ihr folgt

$$p\geqq\mathfrak{g}(\tau)\cdot(q-1)+1,$$

insbesondere also $p\geqq q$ wegen $\mathfrak{g}(\tau)\geqq 1$. Ferner ist

$$\mathfrak{g}(\tau)\leqq\frac{p-1}{q-1}\quad\text{für}\quad q>1,$$

so daß in diesem Fall der Abbildungsgrad nach oben durch p, q beschränkt ist. Ist z.B. $p=rq$ mit $1\leqq r<q$, so ergibt sich, daß X höchstens r-blättrig Y analytisch überlagert werden kann; insbesondere folgt im Falle $p=q>1$, daß eine holomorphe Abbildung $\tau: X\to Y$ notwendig biholomorph oder konstant ist.

Auch im Falle 2-dimensionaler projektiv-algebraischer Räume sind die Möglichkeiten der Existenz holomorpher Überlagerungsabbildungen sehr eingeschränkt. An Stelle der Hurwitzschen Formel kann man sich z.B. auf eine von E. KÄHLER [22] hergeleitete Relation beziehen, um einschränkende Bedingungen zu finden.

Wenn auch eine Riemannsche Fläche im allgemeinen nicht eigentlich und holomorph in eine weitere vorgegebene Riemannsche Fläche abbildbar ist, so finden sich doch in speziellen Fällen, in der Literatur verstreut, positive Aussagen. Bekanntlich gestattet jede kompakte Riemannsche Fläche X vom Geschlecht p eine holomorphe Abbildung τ in die Riemannsche Zahlenkugel P vom Abbildungsgrad $p+1$. Nach A. BRILL und M. NOETHER [7] gilt sogar: *Ist* $p\equiv 0(2)$, *so gibt es ein* $\tau: X\to P^1$ *mit* $\mathfrak{g}(\tau)\leqq\frac{p}{2}+1$; *ist* $p\equiv 1(2)$, *so gibt es ein* $\tau: X\to P^1$ *mit* $\mathfrak{g}(\tau)\leqq\frac{p+1}{2}+1$.

Ferner hat L. AHLFORS (vgl. [1], p. 124) gezeigt:

Ist X eine von $k\geqq 1$ geschlossenen analytischen Kurven berandete Riemannsche Fläche vom Geschlecht p, so gibt es eine eigentliche holomorphe Abbildung τ von X in den Einheitskreis vom Abbildungsgrad $\mathfrak{g}(\tau)\leqq 2p+k$. Für jede solche Abbildung gilt $\mathfrak{g}(\tau)\geqq k$.

---

[8]) Für $p=0$ folgt speziell: Ist die Zahlenkugel P^1 einer Riemannschen Fläche Y analytisch überlagert, so ist auch Y eine Zahlenkugel. Das ist der klassische Satz von LÜROTH, der besagt, daß jeder Unterkörper eines Körpers $C(x)$ in einer Unbestimmten x über C, der von C verschieden ist, eine rein transzendente Erweiterung von C ist.

Jede holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$ zwischen zusammenhängenden normalen komplexen Räumen induziert einen (im allgemeinen nicht injektiven) Homomorphismus $\hat{\tau}: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \tau(x_0))$ der Fundamentalgruppen ($x_0 \in X$ sei ein beliebig gewählter Bezugspunkt). Ist $j(\tau)$ der Index der Untergruppe $\hat{\tau}(\pi_1(X, x_0))$ von $\pi_1(Y, \tau(x_0))$, so gehört zu $\hat{\tau}(\pi_1(X, x_0))$ eine $j(\tau)$-blättrige unverzweigte unbegrenzte Überlagerung (X', φ, Y) von Y, derart, daß die Fundamentalgruppe des komplexen Raumes X' zu $\hat{\tau}(\pi_1(X, x_0))$ isomorph ist (φ ist eine holomorphe lokal-topologische Abbildung). Die Abbildung τ läßt sich dann zu einer Abbildung $\tau': X \to X'$ liften, die offenbar holomorph und wegen $\tau = \varphi \circ \tau'$ eigentlich und mit τ verwandt, also nirgends entartet ist; τ' ist demnach eine holomorphe Überlagerungsabbildung. Es folgt, daß auch φ eine holomorphe Überlagerungsabbildung ist, und zwar ist $\mathfrak{g}(\varphi) = j(\tau)$. Mithin ist $j(\tau)$ endlich, und es gilt $\mathfrak{g}(\tau) = j(\tau) \cdot \mathfrak{g}(\tau')$. Hierin ist eine weitere notwendige Bedingung für die Existenz von holomorphen Überlagerungsabbildungen $\tau: X \to Y$ — insbesondere zu vorgeschriebenem $\mathfrak{g}(\tau)$ — enthalten (vgl. hierzu [*18*], p. 86). Wird etwa $\mathfrak{g}(\tau)$ als Primzahl p vorgeschrieben, so ist $j(\tau) = p$ oder $j(\tau) = 1$; entweder muß dann $\pi_1(X, x_0)$ zu einer Untergruppe vom Index p von $\pi_1(Y, \tau(x_0))$ isomorph sein, oder $\pi_1(Y, \tau(x_0))$ ist notwendig zu einer Faktorgruppe von $\pi_1(X, x_0)$ isomorph. — Eine andere Folgerung ist z.B.: Ist X einfachzusammenhängend und existiert eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$, so ist die Ordnung der Fundamentalgruppe von Y endlich und ein Teiler von $\mathfrak{g}(\tau)$; sind überdies X und Y Riemannsche Flächen, so sind X und Y konform äquivalent.

3.3. In diesem Abschnitt geben wir analytische Bedingungen für die Existenz einer holomorphen Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$ an.

Ist $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung mit $\mathfrak{g}(\tau) =: b$, so werde jeder holomorphen Abbildung $\varphi: X \to C^s(z_1, \ldots, z_s)$ eine „elementarsymmetrische Abbildung $\varepsilon_\varphi: Y \to C^{sb}(\zeta_1, \ldots, \zeta_{sb})$ bezüglich τ" wie folgt zugeordnet: Wird φ durch die Zuordnung

$$x \to (z_1, \ldots, z_s) = \big(f_1(x), \ldots, f_s(x)\big), \qquad x \in X,$$

gegeben und ist jeweils $a_\beta^{(\sigma)}(y)$ ($\beta = 1, \ldots, b$; $\sigma = 1, \ldots, s$) die β-te elementarsymmetrische Funktion der holomorphen Funktion f_σ bezüglich τ (vgl. 2.3), so sei ε_φ definiert durch die Zuordnung

$$y \to (\zeta_1, \ldots, \zeta_b, \ldots, \zeta_{(s-1)\cdot b+1}, \ldots, \zeta_{sb}) = \big(a_1^{(1)}(y), \ldots, a_b^{(1)}(y), \ldots, a_1^{(s)}(y), \ldots, a_b^{(s)}(y)\big).$$

Wir beweisen zunächst:

Satz 6. Ist $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung und $\varphi: X \to C^s$ eine beliebige holomorphe Abbildung, so gilt für jeden Punkt $x \in X$:

$$r_x(\varphi) \leqq r_{\tau(x)}(\varepsilon_\varphi).$$

Beweis. Sei $x \in X$ irgendein Punkt. Wir bezeichnen mit E bzw. F die Faser von φ bzw. ε_φ durch x bzw. $\tau(x)$ und haben dann lediglich zu zeigen:

$d_x(E) \geqq d_{\tau(x)}(F)$. Es seien (Y_1, η) bzw. (X_1, ξ) Normalisierungen von F bzw. $\overset{-1}{\tau}(F)$, ferner ι bzw. ι_1 die Injektionen von F in Y bzw. von $\overset{-1}{\tau}(F)$ in X. Die Abbildung $\varphi \circ \iota_1 \circ \xi : X_1 \to C^s$ wird durch die in X_1 holomorphen Funktionen $f_\sigma \circ \iota_1 \circ \xi$ beschrieben, wenn mit f_σ wie oben die φ definierenden holomorphen Funktionen bezeichnet sind ($\sigma = 1, \ldots, s$). Ist

$$P(w; f_\sigma, \tau) = w^b + \sum_{\beta=1}^{b} a_\beta^{(\sigma)} w^{b-\beta},$$

das zu f_σ gehörende Polynom (vgl. 2.3), so annulliert $f_\sigma \circ \iota_1 \circ \xi$ notwendig das Polynom

$$w^b + \sum_{\beta=1}^{b} (a_\beta^{(\sigma)} \circ \iota \circ \eta)\, w^{b-\beta}.$$

Da ε_φ gerade durch die sb in Y holomorphen Funktionen $a_\beta^{(\sigma)}$, $\beta = 1, \ldots, b$; $\sigma = 1, \ldots, s$, gegeben wird und F die Faser von ε_φ durch $\tau(x)$ ist, so sind alle Funktionen $a_\beta^{(\sigma)} \circ \iota \circ \eta$ auf Y_1 konstant. Daher ist jeweils $f_\sigma \circ \iota_1 \circ \xi$ eine holomorphe Funktion auf X_1, die nur endlich viele Werte annehmen kann. Das ist nur möglich, wenn $f_\sigma \circ \iota_1 \circ \xi$ auf jeder zusammenhängenden Komponente von X_1 konstant ist. Mithin bildet $\varphi \circ \iota_1 \circ \xi$ jede Komponente von X_1 auf einen einzigen Punkt im C^s ab. Dann ist aber jede zusammenhängende Komponente von $\overset{-1}{\tau}(F)$ in einer Faser von φ enthalten. Mithin umfaßt E die zusammenhängende Komponente von $\overset{-1}{\tau}(F)$ durch x. Hieraus folgt $d_x(E) \geqq d_{\tau(x)}(F)$, w.z.b.w.

Anmerkung. Im allgemeinen gilt: $r_{\tau(x)}(\varepsilon_\varphi) > r_x(\varphi)$. Gilt jedoch $r_x(\varphi) = d(X)$, so folgt $r_x(\varphi) = r_{\tau(x)}(\varepsilon_\varphi)$, da $d(X) = d(Y)$ und $r_{\tau(x)}(\varepsilon_\varphi) \leqq d(Y)$.

Satz 6 gestattet einfache Anwendungen. Ist X irgendein komplexer Raum, so sei mit $m(X)$ bzw. $m_b(X)$ die Maximalzahl analytisch unabhängiger holomorpher Funktionen bzw. analytisch unabhängiger beschränkter holomorpher Funktionen in X bezeichnet.

Dann gilt:

Satz 7. Es gibt höchstens dann eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau : X \to Y$, *wenn* $m(X) = m(Y)$ *und* $m_b(X) = m_b(Y)$.

Beweis. Es sei $\tau : X \to Y$ eine Überlagerungsabbildung . Da τ einen injektiven Homomorphismus des Ringes der in Y holomorphen Funktionen in den Ring der in X holomorphen Funktionen induziert, so folgt sofort: $m(X) \geqq m(Y)$, $m_b(X) \geqq m_b(Y)$. Aus Satz 6 ergibt sich aber: $m(X) \leqq m(Y)$ bzw. $m_b(X) \leqq m_b(Y)$ (man beachte, daß ε_φ eine beschränkte Abbildung ist, wenn φ beschränkt ist). Damit ist Satz 7 bereits bewiesen.

Wir geben einfache Beispiele zu Satz 7.

1. Sind G^n bzw. G^m Gebiete des C^n bzw. C^m, so gibt es höchstens dann eine gleichartig surjektive holomorphe Abbildung von $G^n \times P^r$ in $G^m \times P^s$, wenn $n = m$ ist.

2. Der Einheitskreis läßt sich nicht eigentlich holomorph in die Gaußsche Zahlenebene abbilden. — Dagegen gibt es eigentliche holomorphe Abbildungen des Einheitskreises in den C^2 [9]). Weiter gibt es singularitätenfreie „hyperbolische" Kurven im C^2. Nach einer mündlichen Mitteilung von E. CALABI besitzt z. B. die durch die Gleichung $e^z = \operatorname{tg} w + \frac{1}{\cos w}$ im $C^2(w, z)$ gegebene komplexe Untermannigfaltigkeit den Einheitskreis als universelle Überlagerung.

3. Es gibt komplexe Mannigfaltigkeiten X^n vom topologischen Typus des Innern der $2n$-dimensionalen Zelle mit $m(X^n) = 0$; kein Gebiet des C^n ist eigentlich und holomorph in eine solche Mannigfaltigkeit X^n abbildbar. Beispiele für Mannigfaltigkeiten X^n dieser Art sind von E. CALABI und B. ECKMANN [8] angegeben worden. Auf dem folgenden einfachen Wege gelangt man zu weiteren Beispielen: Es sei P_∞^{n-1} eine $(n-1)$-dimensionale Ebene des P^n; P_∞^{n-1} werde als unendlich ferne Ebene in bezug auf den $C^n := P^n - P_\infty^{n-1}$ aufgefaßt. Sei $x_0 \in P_\infty^{n-1}$ irgendein Punkt. Wir legen um x_0 eine abgeschlossene Hyperkugel H (bzgl. einer lokalen komplexen Karte) und bilden H topologisch so auf sich ab, daß der Rand ∂H punktweise festbleibt und das Bild S des Ebenenstücks $\overset{\circ}{H} \cap P_\infty^{n-1}$ punktfremd zu $\overset{\circ}{H} \cap P_\infty^{n-1}$ ist. Dann ist $X^n := P^n - \left((P_\infty^{n-1} - (H \cap P_\infty^{n-1})) \cup S\right)$ eine komplexe Mannigfaltigkeit vom topologischen Typ des Innern der $2n$-dimensionalen Zelle. Es gilt notwendig $m(X^n) = 0$. Ist nämlich f in X^n holomorph, so folgt mit Hilfe eines klassischen Satzes von F. HARTOGS, daß f in jeden Punkt von S eindeutig holomorph fortsetzbar ist und somit im $C^n = P^n - P_\infty^{n-1}$ holomorph ist. Da überdies f in $\overset{\circ}{H} \cap P_\infty^{n-1}$ holomorph ist, ergibt sich mittels des Kontinuitätssatzes die Holomorphie von f auf der ganzen unendlich fernen Ebene P_∞^{n-1}. Mithin ist f im P^n holomorph und daher konstant.

4. Das Gebiet $X := \{(w, z) : |w|^\alpha |z|^\beta < 1;\ \alpha, \beta > 0, \text{ ganz}\} \subset C^2(w, z)$ läßt sich nicht gleichartig surjektiv auf das Gebiet $Y := \{(w, z) : |w|^\gamma |z|^\delta < 1;\ \gamma, \delta > 0, \gamma \cdot \delta^{-1} \text{ irrational}\} \subset C^2(w, z)$ abbilden und umgekehrt. — Der Beweis wird erbracht sein, wenn wir zeigen: $m_b(X) \geqq 1$, $m_b(Y) = 0$. Sicher gilt $m_b(X) \geqq 1$; denn $f(w, z) := w^\alpha z^\beta$ ist in X beschränkt und nicht konstant. In Y ist dagegen jede holomorphe beschränkte Funktion konstant, was sich folgendermaßen einsehen läßt: Sei f eine beschränkte holomorphe Funktion in Y. Wir betrachten die durch die Gleichung

$$w^\gamma z^\delta = 1 - \varepsilon, \qquad 0 < \varepsilon < 1,$$

---

[9]) Schon 1931 hat H. CARTAN [Sur les variétés définis par une relation entière; Bull. Sci. Math. **55**, 47–64 (1931), vgl. insb. p. 63] nach einer Idee von VALIRON eine eigentliche holomorphe Abbildung des Einheitskreises in den C^2 angegeben; der Nachweis stützt sich auf Sätze von FATOU über Funktionalgleichungen. — Übrigens läßt sich zeigen, daß jede nichtkompakte Riemannsche Fläche eigentlich in den C^3 abbildbar ist; ob auch in den C^2, bleibt offen.

in Y gegebene Menge M_ε. Diese Menge ist nicht analytisch in Y. Bezeichnet jedoch $(D, \pi, C^2 - \{(w, z) : wz = 0\})$ die universelle Überlagerung von $C^2 - \{(w, z) : wz = 0\}$, wobei wir uns D mit der von π induzierten natürlichen komplexen Struktur versehen denken, so ist $\hat{M}_\varepsilon := \overset{-1}{\pi}(M_\varepsilon)$ eine analytische Menge in D. Jede irreduzible Komponente von $\hat{M}_\varepsilon$ ist analytisch isomorph zur Gaußschen Zahlenebene. Daher ist $f \circ \pi$ auf $\hat{M}_\varepsilon$ konstant. Mithin ist f auf M_ε und dann auch auf der abgeschlossenen Hülle $\overline{M}_\varepsilon$ von M_ε in Y konstant. $\overline{M}_\varepsilon$ wird aber durch die Gleichung $|w|^\gamma |z|^\delta = 1 - \varepsilon$ beschrieben und ist folglich topologisch-3-dimensional. Daraus folgt, daß f in ganz Y konstant ist.

Wir bemerken noch:

Satz 8. *Ist $\tau : X \to Y$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung, so gelten folgende Aussagen:*

a) *X ist genau dann K-vollständig, wenn Y es ist.*

b) *X ist genau dann holomorph-konvex, wenn Y es ist.*

c) *X ist genau dann konvex bezüglich q-dimensionaler analytischer Mengen, wenn Y es ist*[10]).

d) *Ist X holomorph-separabel, so auch Y.*

e) *X ist genau dann holomorph-vollständig, wenn Y es ist.*

f) *X ist genau dann projektiv-algebraisch, wenn Y es ist.*

Der Beweis von a) folgt unmittelbar aus der Anmerkung zu Satz 6; die Beweise von b) und d) ergeben sich direkt, e) folgt nach H. GRAUERT [*12*] aus a) und b); zum Beweise von c) ziehe man den allgemeinen Projektionssatz für analytische Mengen [*28*] heran. Der Beweis von f) ist tiefliegend und wird in [*16*] gegeben.

Die in 3.1. gestellte Frage b) wird in Spezialfällen in den folgenden Paragraphen behandelt. Hier sei lediglich noch auf den besonders einfachen Fall der holomorphen Überlagerungsabbildungen des Einheitskreises auf sich eingegangen. Es gilt:

Jede eigentliche holomorphe Abbildung τ des Einheitskreises $\{z : |z| < 1\}$ der z-Ebene in sich wird durch eine holomorphe Funktion $f(z)$ der Gestalt

$$f(z) = e^{i\vartheta} \prod_{\beta=1}^{b} \frac{z - z^{(\beta)}}{\overline{z}^{(\beta)} z - 1}, \quad \vartheta \text{ reell}, \ |z^{(\beta)}| < 1, \ \beta = 1, \ldots, b,$$

vermittelt und umgekehrt; dabei ist b der Abbildungsgrad von τ.

Funktionen $f(z)$ der angegebenen Art werden als *Einheitsfunktionen vom Grade b* bezeichnet, *Einheitsfunktionen vom Grade* 0 sind die Konstanten vom Betrage 1 (vgl. [*9*], p. 12).

Daß jede Einheitsfunktion $f(z)$ vom Grade $b \geqq 1$ eine eigentliche holomorphe Abbildung τ des Einheitskreises in sich mit $\mathfrak{g}(\tau) = b$ definiert, ist klar.

[10]) Wir nennen einen komplexen Raum X konvex bzgl. q-dimensionaler analytischer Mengen, wenn es eine Ausschöpfung von X durch eine Folge $\{K_\nu\}$ kompakter Mengen K_ν gibt, so daß folgendes gilt: Ist $x \in X - K_\nu$ ein beliebiger Punkt, so gibt es eine analytische Menge A in X mit $d_x(A) \geqq q$, die nicht in K_ν eindringt, $\nu = 1, 2, \ldots$.

Umgekehrt läßt sich jedenfalls jede solche Abbildung τ durch eine im Einheitskreis holomorphe Funktion $f(z)$ beschreiben. Ist $\{z^{(1)}, \ldots, z^{(b)}\}$, $b = \mathfrak{g}(\tau)$, die Urbildmenge des Nullpunktes (jedes Urbild ist gemäß seiner Vielfachheit gezählt), so hat $f(z)$ gerade in den Punkten $z^{(1)}, \ldots, z^{(b)}$ Nullstellen; der Quotient

$$\psi(z) := \frac{f(z)}{\prod_{\beta=1}^{b} \frac{z - z^{(\beta)}}{\bar{z}^{(\beta)} z - 1}}$$

ist daher im Einheitskreis holomorph und nullstellenfrei. Da τ eigentlich abbildet, strebt $|f(z)|$ stets gegen 1, wenn $|z|$ gegen 1 strebt. Gleiches trifft dann aber auch für $\psi(z)$ und $\frac{1}{\psi(z)}$ zu, es gilt also $|\psi(z)| \leqq 1$ und $\left|\frac{1}{\psi(z)}\right| \leqq 1$ für $|z| < 1$; mithin ist $|\psi(z)| \equiv 1$. $\psi(z)$ ist daher Einheitsfunktion vom Grade 0 und infolgedessen $f(z)$ Einheitsfunktion vom Grade b mit den Nullstellen $z^{(1)}, \ldots, z^{(b)}$.

§ 4. Fortsetzungs- und Konvergenzeigenschaften von Überlagerungsabbildungen

4.1. Sei Z ein zusammenhängender normaler komplexer Raum. Ein Tripel $\mathfrak{X} = \langle X, \xi, Z \rangle$ heißt ein *unverzweigtes Riemannsches Gebiet über Z*, wenn X ein zusammenhängender normaler komplexer Raum und $\xi: X \to Z$ eine holomorphe lokal-topologische Abbildung ist. Es ist stets eine *Holomorphiehülle* $H(\mathfrak{X}) = \langle {}'X, {}'\xi, Z \rangle$ von $\mathfrak{X}$ als unverzweigtes Riemannsches Gebiet über Z definiert, und es gibt eine natürliche holomorphe Abbildung $i: X \to {}'X$ mit $\xi = {}'\xi \circ i$. $H(\mathfrak{X})$ ist eindeutig bestimmt bis auf Äquivalenz in folgendem Sinne: Ist $\tilde{H}(\mathfrak{X}) = \langle {}'\tilde{X}, {}'\tilde{\xi}, Z \rangle$ eine weitere Holomorphiehülle von X und $\tilde{i}: X \to {}'\tilde{X}$ die zugehörige natürliche holomorphe Abbildung, so existiert eine biholomorphe Abbildung $\varphi: {}'X \to {}'\tilde{X}$, derart, daß $\tilde{i} = \varphi \circ i$ und ${}'\xi = {}'\tilde{\xi} \circ \varphi$ gilt. Äquivalente Holomorphiehüllen werden als gleich betrachtet, und es ist üblich, von *der* Holomorphiehülle $H(\mathfrak{X})$ zu sprechen. Ein besonderer Fall liegt vor, wenn X offener Teilraum von Z und ξ die Injektion von X in Z ist. Gilt außerdem für $H(\mathfrak{X}) = \langle {}'X, {}'\xi, Z \rangle$, daß ${}'\xi: {}'X \to Z$ eineindeutig ist, so kann ${}'X$ mit dem offenen Teilraum ${}'\xi({}'X)$ von Z identifiziert werden; es wird dann einfach ${}'X$ als die Holomorphiehülle von X bezeichnet [11]).

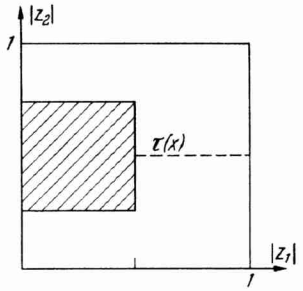
Es seien $\mathfrak{X} = \langle X, \xi, C^{n_1} \rangle$ und $\mathfrak{Y} = \langle Y, \eta, C^{n_2} \rangle$ unverzweigte Riemannsche Gebiete über dem C^{n_1} bzw. über dem C^{n_2}, ferner $H(\mathfrak{X}) = \langle {}'X, {}'\xi, C^{n_1} \rangle$ und $H(\mathfrak{Y}) = \langle {}'Y, {}'\eta, C^{n_1} \rangle$ die Holomorphiehüllen von $\mathfrak{X}$ bzw. $\mathfrak{Y}$; $i: X \to {}'X$ bzw. $j: Y \to {}'Y$ seien die zugehörigen natürlichen holomorphen Abbildungen. Ist $\tau: X \to Y$ irgendeine holomorphe Abbildung, so läßt sich τ in eindeutiger Weise zu einer holomorphen Abbildung ${}'\tau: {}'X \to {}'Y$ fortsetzen, d.h. es wird $j \circ \tau = {}'\tau \circ i$. Weiter gilt (vgl. H. KERNER [23]):

Sind $\mathfrak{X} = \langle X, \xi, C^n \rangle$ und $\mathfrak{Y} = \langle Y, \eta, C^n \rangle$ unverzweigte Riemannsche Gebiete über dem C^n und ist $\tau: X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung, so ist

[11]) Zum Begriff der Holomorphiehülle und ihrer Eigenschaften vgl. [3], [12], [21], [23] und [33].

auch $'\tau: {}'X \to {}'Y$ *eigentlich. Ferner ist* $'\tau({}'X - i(X)) = {}'Y - j(Y)$, *und die durch Beschränkung von* $'\tau$ *bestimmte Abbildung* $\tilde{\tau}: {}'X - i(X) \to {}'Y - j(Y)$ *ist ebenfalls eigentlich.*

In dieser Aussage ist wesentlich, daß $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ Riemannsche Gebiete gleicher Dimension sind. Gilt $d(Y) > d(X)$, so wird sie falsch, wie etwa folgendes Beispiel zeigt (vgl. Figur):



Es sei $\mathfrak{X} := \langle X, \xi, C^1(z_1)\rangle$ mit $X := \{z_1 : \frac{1}{2} < |z_1| < 1\}$, $\xi :=$ Injektion $X \to C^1(z_1)$; $\mathfrak{Y} := \langle Y, \eta, C^2(z_1, z_2)\rangle$ mit $Y := \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\} - \{(z_1, z_2) : |z_1| \leqq \frac{1}{2},\ \frac{1}{4} \leqq |z_2| \leqq \frac{3}{4}\}$, $\eta :=$ Injektion $Y \to C^2(z_1, z_2)$. $\tau: X \to Y$ sei die eigentliche holomorphe Abbildung $z_1 \to (z_1, \frac{1}{2})$. Da $'X = X$, $'Y = \{(z_1, z_2) : |z_1| < 1,\ |z_2| < 1\}$, so ist $'\tau: {}'X \to {}'Y$ nicht eigentlich.

4.2. Mit Hilfe der oben zitierten Aussage läßt sich in manchen Fällen nachweisen, daß der Abbildungsgrad einer eigentlichen holomorphen Abbildung 1 ist. So gilt:

Satz 9. *Es sei* X *ein beschränktes Holomorphiegebiet im* C^n, $n \geqq 2$, *und* K *eine kompakte, mindestens topologisch-*$(2n-1)$*-dimensionale Teilmenge von* X. *Dann ist jede holomorphe Überlagerungsabbildung* $\tau: X - K \to X - K$ *ein Holomorphismus von* $X - K$, *der durch Beschränkung eines Holomorphismus* $'\tau: X \to X$ *mit* $'\tau(K) = K$ *entsteht.*

Beweis. Mit Hilfe eines bekannten Satzes von HARTOGS-OSGOOD folgt zunächst, daß X die Holomorphiehülle von $X - K$ ist. Nach der in 4.1. zitierten Aussage ist τ somit zu einer holomorphen Überlagerungsabbildung $'\tau: X \to X$ fortsetzbar; es gilt $'\tau(K) = K$. Wir betrachten die Iterierten $'\tau^{(\nu)}$ der Abbildung $'\tau$, $\nu = 1, 2, \ldots$ (es ist gesetzt $'\tau^{(1)} := {}'\tau$, $'\tau^{(\nu)} := {}'\tau \circ {}'\tau^{(\nu-1)}$ für $\nu > 1$). Da X beschränkt ist, bilden die $'\tau^{(\nu)}$ eine normale Familie im Sinne von MONTEL. Infolgedessen gibt es eine Teilfolge $'\tau^{(\nu_j)}$ der $'\tau^{(\nu)}$, die kompakt gegen eine holomorphe Abbildung $\sigma: X \to \overline{X}$, $\overline{X} :=$ abgeschlossene Hülle von X in C^n, konvergiert [12]). Notwendig gilt $\sigma(K) \subset K$, wir behaupten überdies: $\sigma(K) = K$. Ist nämlich $z_0 \in K$ irgendein Punkt, so gibt es jedenfalls Punkte $z_{\nu_j} \in K$ mit $'\tau^{(\nu_j)}(z_{\nu_j}) = z_0$. Dann ist aber jeder Häufungspunkt $z^* \in K$ der Folge $\{z_{\nu_j}\}$ ein σ-Urbild von z_0, da die kompakte Konvergenz die stetige Konvergenz nach sich zieht.

Aus Satz 1 ergibt sich nun, da K mindestens topologisch-$(2n-1)$-dimensional ist: $r(\sigma) = n$. Dann folgt aus einem Satz von H. CARTAN ([*10*], théorème 4, p. 770), daß σ und $'\tau$ Holomorphismen von X sind. Wegen $'\tau(K) = K$ muß dann aber auch τ ein Holomorphismus von $X - K$ sein, w.z.b.w.

Aus Satz 9 folgt, da alle Holomorphismen von beschränkten eigentlichen Reinhardtschen Körpern im C^n linear sind:

---

[12]) Sind R, R_1 topologische Räume, so heißt eine Folge von Abbildungen $\varphi_\nu: R \to R_1$ kompakt konvergent gegen eine Abbildung $\varphi: R \to R_1$, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Ist $K \subset R$ kompakt, $U_1 \subset R_1$ offen und gilt $\varphi(K) \subset U_1$, so gilt $\varphi_\nu(K) \subset U_1$ für fast alle ν. — Vgl. auch [7]).

Ist D ein eigentlicher Reinhardtscher Körper, der relativ-kompakt in einem beschränkten Holomorphiegebiet $X \subset C^n$, $n \geqq 2$, liegt, so ist jede holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: X - \overline{D} \to X - \overline{D}$ linear.

Man kann diese Aussage benutzen, um Gebiete im C^n vom topologischen Typus des Innern der $2n$-dimensionalen Zelle zu konstruieren, die „starr" in bezug auf holomorphe Überlagerungsabbildungen auf sich sind. Ein solches Gebiet im $C^2(z_1, z_2)$ ist z. B.

$$X := \{(z_1, z_2) : (1 < |z_1|^2 + |z_2|^2 < 4\} - \big(\{(z_1, z_2) : z_1 = 0, \operatorname{Re} z_2 = 0, 1 < \operatorname{Im} z_2 < 2\} \cup$$
$$\cup \{(z_1, z_2) : \operatorname{Re} z_1 = 0, 1 < \operatorname{Im} z_1 < \tfrac{3}{2}, z_2 = 0\}\big).$$

Wir führen dies hier nicht näher aus, da wir in § 6 sogar zu Holomorphiegebieten mit der gleichen Eigenschaft gelangen werden.

4.3. Wir beschließen diesen Paragraphen mit einem einfachen Satz über konvergente Folgen von holomorphen Überlagerungsabbildungen.

Satz 10. *Es sei $\tau_\nu: X \to Y$ eine Folge von holomorphen Überlagerungsabbildungen, die kompakt gegen eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\tau: X \to Y$ konvergiert. Dann gilt für fast alle ν: $\mathfrak{g}(\tau_\nu) \geqq \mathfrak{g}(\tau)$. Ist X kompakt, so gilt sogar $\mathfrak{g}(\tau_\nu) = \mathfrak{g}(\tau)$ für fast alle ν.*

Beweis. Wir setzen $b := \mathfrak{g}(\tau)$. Es sei $y \in Y$ ein uniformisierbarer Punkt von Y mit b verschiedenen τ-Urbildern $x_1, \ldots, x_b \in X$; dann sind $x_1, \ldots, x_b$ uniformisierbare Punkte von X. Es lassen sich eine offene Umgebung V von y und paarweise disjunkte offene Umgebungen U_β von x, $\beta = 1, \ldots, b$, wählen, so daß jeweils $\tau(U_\beta) = V$ gilt und die durch Beschränkung von τ bestimmten Abbildungen $U_\beta \to V$ biholomorph sind. Die erste Behauptung „$\mathfrak{g}(\tau_\nu) \geqq b$ für fast alle ν" ist nun enthalten in folgender Aussage:

Jeder der Punkte x_β besitzt eine offene Umgebung $W_\beta \subset U_\beta$, derart, daß für fast alle ν und $\beta = 1, \ldots, b$ gilt: $\tau_\nu(W_\beta)$ ist eine in V enthaltene offene Umgebung von y, und die durch Beschränkung von τ_ν bestimmte Abbildung $W_\beta \to \tau_\nu(W_\beta)$ ist biholomorph.

Es genügt, hier den Fall $\beta = 1$ zu betrachten. Sei zunächst $'W_1$ eine Umgebung von x_1, die relativ-kompakt in U_1 liegt. Da $\tau(\overline{'W_1}) \subset V$, so gibt es ein ν_0, so daß $\tau_\nu(\overline{'W_1}) \subset V$ für alle $\nu \geqq \nu_0$. Ist V hinreichend klein gewählt, so kann man in U_1 bzw. V komplexe Koordinaten $u_1, \ldots, u_d$ bzw. $v_1, \ldots, v_d$, $d := d(X)$, mit $x_1 = (0, \ldots, 0)$, $y = (0, \ldots, 0)$ so einführen, daß $\tau | U_1$ durch die Gleichungen

$$v_1 = u_1, \ldots, v_d = u_d$$

beschrieben wird. Dann lassen sich für $\nu \geqq \nu_0$ wegen $\tau_\nu('W_1) \subset V$ die Abbildungen $\tau_\nu | 'W_1$ durch Gleichungen

$$v_1 = u_1 + a_1^{(\nu)}(u_1, \ldots, u_d), \ldots, v_d = u_d + a_d^{(\nu)}(u_1, \ldots, u_d),$$

mit in $'W_1$ holomorphen Funktionen $a_\delta^{(\nu)}(u_1, \ldots, u_d)$, $\delta = 1, \ldots, d$, $\nu \geqq \nu_0$, beschreiben. Jede Folge $\{a_\delta^{(\nu_0)}, a_\delta^{(\nu_0+1)}, \ldots\}$, $\delta = 1, \ldots, d$, konvergiert in $'W_1$ gleichmäßig gegen Null. Das folgende Lemma liefert nun eine gesuchte Umgebung W_1.

Lemma[13]. *In einer Umgebung A des Nullpunktes $0 \in C^d(z_1, \ldots, z_d)$ seien d Folgen holomorpher Funktionen $\{f_\delta^{(\nu)}(z_1, \ldots, z_d),\ \nu \geqq 1\}$ gegeben, derart, daß $\{f_\delta^{(\nu)}(z_1, \ldots, z_d),\ \nu \geqq 1\}$ in A gleichmäßig gegen z_δ konvergiert, $\delta = 1, \ldots, d$. Dann gibt es eine offene Umgebung $B < A$ von 0 und ein ν_0, so daß jedes Funktionensystem*

$$w_1 = f_1^{(\nu)}(z_1, \ldots, z_d), \ldots, w_d = f_d^{(\nu)}(z_1, \ldots, z_d), \qquad \nu \geqq \nu_0,$$

eine biholomorphe Abbildung φ_ν von B auf eine offene Menge $\varphi_\nu(B) \subset C^d(w_1, \ldots, w_d)$ mit $(0, \ldots, 0) \in \varphi_\nu(B)$ definiert.

Wir müssen noch zeigen, daß bei kompaktem X für fast alle ν gilt $\mathfrak{g}(\tau_\nu) = b$. Wäre etwa $\mathfrak{g}(\tau_\nu) > b$ für eine unendliche Folge ν_j, so könnte man eine Punktfolge $x_{\nu_j} \in X - \bigcup_{\beta=1}^{b} W_\beta$ finden, so daß $\tau_{\nu_j}(x_{\nu_j})$ gegen y konvergiert. Ist dann $\tilde{x}$ ein Häufungspunkt der Folge $\{x_{\nu_j}\}$, so müßte gelten: $y = \tau(\tilde{x})$ und also $\tilde{x} = x_{\beta_0}$ für ein gewisses $\beta_0 \in \{1, \ldots, b\}$. Das aber ist wegen $\tilde{x} \in X - \bigcup_{\beta=1}^{b} W_\beta$ unmöglich. — Satz 10 ist damit bewiesen.

Anmerkung. Ist X nicht kompakt, so gilt im allgemeinen $\mathfrak{g}(\tau_\nu) > \mathfrak{g}(\tau)$ für fast alle ν. $\mathfrak{g}(\tau_\nu)$ kann sogar unbeschränkt sein, wie das Beispiel der durch die Polynome $z + 2^{-\nu^3} z^\nu$, $\nu = 1, 2, \ldots$ definierten Überlagerungsabbildungen $\tau_\nu : C^1 \to C^1$ zeigt. Die τ_ν konvergieren kompakt gegen die Identität $i : C^1 \to C^1$ und es gilt: $\mathfrak{g}(\tau_\nu) = \nu$.

Unmittelbar aus Satz 10 folgt, wenn man die Gleichung $\mathfrak{g}(\tau^{(\nu)}) = \mathfrak{g}(\tau)^\nu$ beachtet:

Ist X kompakt und $\tau : X \to X$ eine holomorphe Überlagerungsabbildung, derart, daß die Iterierten $\tau^{(\nu)}$ kompakt gegen eine holomorphe Überlagerungsabbildung $\tilde{\tau} : X \to X$ konvergieren, so sind τ und $\tilde{\tau}$ biholomorph.

§ 5. Folgerungen aus Randeigenschaften eigentlicher holomorpher Abbildungen

5.1. In diesem Paragraphen sollen einige Aussagen bewiesen werden, die mit dem Randverhalten eigentlicher holomorpher Abbildungen $\tau : X \to Y$ zusammenhängen. Wir beschränken uns der Einfachheit halber auf den Fall, daß X ein Gebiet des C^2 ist, da hierbei schon manche der für den Allgemeinfall typischen Sachverhalte auftreten. — Die Betrachtungen dieses und des nächsten Paragraphen schließen an Untersuchungen von W. Rothstein über biholomorphe Abbildungen [*32*] an. Vgl. auch H. Behnke und E. Peschl [*2*] sowie K. H. Hedtfeld [*17*].

[13]) Wir verzichten darauf, den einfachen Beweis hier auszuführen. Vgl. auch [*3*], p. 86, Satz 53.

Es ist zweckmäßig, den folgenden Begriff einzuführen.

Definition 4. *Es sei B eine offene Menge eines lokal-kompakten Raumes R und $\tau: B \to {}^*R$ eine stetige Abbildung von B in einen topologischen Raum ${}^*R$. τ heißt eigentlich in einem Randpunkt $b_0 \in R$ von B, wenn gilt: Ist ${}^*K$ irgendeine kompakte Menge in ${}^*R$, so gibt es eine Umgebung $U(b_0) \subset R$, derart, daß $\tau^{-1}({}^*K) \cap U(b_0)$ leer ist.*

Bemerkung. Liegt B relativ-kompakt in R, so ist τ eigentlich schlechthin genau dann, wenn τ in allen Randpunkten von B eigentlich ist.

Wir beweisen nun

Satz 11. *Sei X ein Gebiet des C^2. Es gebe einen Randpunkt $x_0 \in C^2$ von X und eine biholomorphe Abbildung φ einer Umgebung $U(x_0) \subset C^2$ auf den Dizylinder*

$$D := \{(w, z) : |w| < 1, |z| < 1\} \quad \text{des} \quad C^2(w, z)$$

mit

$$\varphi(\partial X \cap U) = \{(w, z) : (w, z) \in D,\ \operatorname{Re} z = 0\},$$

$$\varphi(X \cap U) = \{(w, z) : (w, z) \in D,\ \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Ist dann $\tau: X \to Y$ eine eigentliche holomorphe Abbildung von X in ein beschränktes Gebiet Y eines $C^m(\eta_1, \ldots, \eta_m)$, so liegt in ∂Y eine eindimensionale lokal-analytische Menge des C^m [14]).

Die Voraussetzung über X besagt in anderen Worten, daß es auf dem Rande von X ein durch den Punkt x_0 hindurchgehendes „analytisches Hyperflächenstück" der topologischen Dimension 3 gibt.

Beweis. Bezeichnet $\check{\varphi}$ die Beschränkung der Abbildung φ^{-1} auf das Gebiet $'D := \{(w, z) : (w, z) \in D,\ \operatorname{Re} z > 0\}$, so ist $\tau \circ \check{\varphi} : {}'D \to Y$ eine holomorphe Abbildung, die durch Gleichungen

$$\eta_\mu = g_\mu(w, z), \qquad \mu = 1, \ldots, m,$$

gegeben werde. Sei $z^{(\nu)} \in \{z : |z| < 1,\ \operatorname{Re} z > 0\}$ irgendeine Punktfolge, die gegen einen Punkt z^* mit $|z^*| < 1$ und $\operatorname{Re} z^* = 0$ konvergiert; dann werden die m Funktionenfolgen

$$h_\mu^{(\nu)}(w) := g_\mu(w, z^{(\nu)}) \qquad (\mu = 1, \ldots, m;\ \nu = 1, 2, \ldots)$$

betrachtet. Alle Funktionen $h_\mu^{(\nu)}$ sind holomorph und beschränkt im Einheitskreis $\{w : |w| < 1\}$. Daher lassen sich nach MONTEL Teilfolgen $h_\mu^{(\nu_\eta)}(w)$ finden, die im Einheitskreis kompakt gegen holomorphe Funktionen $h_\mu(w)$, $\mu = 1, \ldots, m$, konvergieren. Wir behaupten, daß man so, wenn man von beliebigen Folgen $z^{(\nu)}$ der obigen Art ausgeht, nicht immer zu sämtlich konstanten Funktionen h_μ gelangt. Wäre dies doch der Fall, so würden die Ableitungen $\frac{d h_\mu^{(\nu)}}{dw}$ stets kompakt gegen Null konvergieren. Das aber hieße, daß jede der Funktionen $\frac{\partial g_\mu(w, z)}{\partial w}$ in allen auf $\partial' D$ gelegenen Punkten der Menge $\{w : |w| < 1\} \times$

[14]) Vgl. W. ROTHSTEIN [32], § 2, Satz 2 und 3.

$\{z: \mathrm{Re}\, z = 0\}$ die Randwerte Null hätte. Nach einer Verallgemeinerung eines Satzes von RADÓ (vgl. [4], Satz 1 mit Bemerkung p. 14) folgt daraus

$$\frac{\partial g_\mu}{\partial w} \equiv 0 \quad \text{für alle } \mu,$$

insbesondere also: $r(\tau \circ \check{\varphi}) \leqq 1$. Das aber ist nicht möglich, da τ als eigentliche Abbildung notwendig den Rang 2 hat und $\check{\varphi}$ biholomorph ist.

Wir denken uns nun die Folgen $z^{(\nu)}$ und r_j so gewählt, daß nicht alle Funktionen h_μ konstant werden. Da $\tau \circ \check{\varphi}$ eigentlich in allen Punkten des Randteiles

$$\{(w, z): (w, z) \in D, \mathrm{Re}\, z = 0\} < \partial' D$$

ist, muß die Punktmenge

$$M := \{(\eta_1, \ldots, \eta_m): \eta_\mu = h_\mu(w),\ |w| < 1\}$$

des $C^m(\eta_1, \ldots, \eta_m)$ in ∂Y liegen. M enthält aber eine lokal-analytische Menge der Dimension 1 [15]), q.e.d.

Folgerung. Ein Gebiet $X < C^2$ mit den in Satz 14 betrachteten Eigenschaften läßt sich niemals holomorph und eigentlich in eine Hyperkugel H^m eines C^m, $m \geqq 1$ abbilden. — Denn in ∂H^m gibt es bekanntlich keine lokal-analytischen Mengen des C^m, deren Dimension größer als Null ist.

Insbesondere gestattet ein beschränktes Zylindergebiet des C^2 keine eigentliche holomorphe Abbildung τ in eine Hyperkugel H^m (für $m = 2$ und $\mathfrak{g}(\tau) = 1$ ist dies eine bekannte Aussage von H. POINCARÉ). Es bleibt offen, ob eine Hyperkugel im C^2 holomorph und eigentlich auf einen Dizylinder im C^2 abbildbar ist.

5.2. Mit Hilfe einer ähnlichen Schlußweise wie im Beweise zu Satz 11 gewinnen wir weiter

Satz 12. Es sei $X = X_w \times X_z$ ein Zylindergebiet des $C^2(w, z)$; sei $\tau: X \to Y$ eine holomorphe Abbildung von X in ein beschränktes Zylindergebiet $Y = Y_{\eta_1} \times \cdots \times Y_{\eta_m}$ im $C^m(\eta_1, \ldots, \eta_m)$, die durch Gleichungen

$$\eta_\mu = g_\mu(w, z), \qquad \mu = 1, \ldots, m,$$

beschrieben werden möge. Es existiere ein Kontinuum $\mathfrak{C} < \partial X_z$, so daß τ in allen Punkten von $X_w \times \mathfrak{C}$ eigentlich ist. Dann gilt

$$\frac{\partial g_\mu(w, z)}{\partial w} \equiv 0$$

für wenigstens ein μ, $1 \leqq \mu \leqq m$.

Beweis. Wie im Beweise von Satz 11 sei $z^* \in \mathfrak{C}$ ein beliebiger Punkt und $z^{(\nu)} \in X_z$ irgendeine gegen z^* konvergierende Punktfolge. Jede der m Funktionenfolgen $h_\mu^{(\nu)}(w) := g_\mu(w, z^{(\nu)})$, $\mu = 1, \ldots, m$, besitzt dann eine Teilfolge $h_\mu^{(\nu_j)}(w)$,

[15]) M braucht nicht selbst schon eine lokal-analytische Menge des C^m zu sein.

die in X_w kompakt gegen je eine holomorphe Funktion $h_\mu(w)$ konvergiert. Durch die Gleichungen

$$\eta_\mu = h_\mu(w), \quad \mu = 1, \ldots, m,$$

wird eine holomorphe Abbildung $\tau_0: X_w \to C^m$ mit $\tau_0(X_w) \subset \overline{Y}$ definiert. Da τ nach Voraussetzung insbesondere in allen Punkten von $X_w \times \{z^*\} \subset \partial X$ eigentlich ist, gilt sogar $\tau_0(X_w) \subset \partial Y$. Dann muß aber wenigstens eine der Funktionen $h_\mu(w)$ konstant sein, denn für wenigstens ein μ muß $h_\mu(X_w) \subset \partial Y_{\eta_\mu}$ gelten. Ist etwa $h_{\mu_0}(w) \equiv \text{const}$, so folgt, daß die Funktionenfolge $\frac{dg_{\mu_0}(w, z^{(\nu_j)})}{dw}$ in X_w kompakt gegen Null konvergiert, da für $\mu = 1, \ldots, m$ die Folge der Ableitungen $\frac{dg_\mu(w, z^{(\nu_j)})}{dw}$ in X_w jeweils kompakt gegen $\frac{dh_\mu(w)}{dw}$ strebt. Es ergibt sich weiter, daß die Folge der Produkte $p^{(\nu_j)}(w) := \prod_{\mu=1}^{m} \frac{dg_\mu(w, z^{(\nu_j)})}{dw}$ in X_w kompakt gegen Null konvergiert. Gleiches kann nun auch für die Folge der Produkte $p^{(\nu)}(w) := \prod_{\mu=1}^{m} \frac{dg_\mu(w, z^{(\nu)})}{dw}$, wo die ursprüngliche Gesamtfolge $z^{(\nu)}$ zugrundegelegt ist, behauptet werden. Denn die soeben angewandte Schlußweise zeigt, daß jede Teilfolge der $p^{(\nu)}(w)$ eine weitere Teilfolge besitzt, die in X_w kompakt gegen Null konvergiert.

Da z^* beliebig auf $\mathfrak{C}$ gewählt wurde, muß die Funktion

$$\Psi(w, z) := \prod_{\mu=1}^{m} \frac{\partial g_\mu(w, z)}{\partial w}$$

so beschaffen sein, daß sie in allen Punkten von $X_w \times \mathfrak{C}$ die Randwerte Null hat. Nach der schon oben benutzten Verallgemeinerung eines Satzes von RADÓ gilt daher $\Psi(w, z) \equiv 0$, also auch $\frac{\partial g_\mu}{\partial w} \equiv 0$ für wenigstens ein μ, q.e.d.

Eine einfache Folgerung aus Satz 12 ist

Satz 13. Es seien $X = X_w \times X_z \subset C^2(w, z)$ und $X' = X_{w'} \times X_{z'} \subset C^2(w', z')$ beschränkte Zylindergebiete. Dann ist jede eigentliche holomorphe Abbildung $\tau: X \to X'$ ein kartesisches Produkt $\tau = \varphi \times \psi$ von eigentlichen holomorphen Abbildungen

$$\varphi: X_w \to X_{w'}, \quad \psi: X_z \to X_{z'}$$

oder

$$\varphi: X_w \to X_{z'}, \quad \psi: X_z \to X_{w'}.$$

In der Tat, ist τ gegeben durch $(w, z) \to (w', z') = (f_1(w, z), f_2(w, z))$, so hängt nach Satz 12 wenigstens eines der f_ν, $\nu = 1, 2$, nicht von w und wenigstens eines der f_ν nicht von z ab. Da die Funktionaldeterminante der f_ν nicht identisch verschwinden kann, muß also entweder gelten

$$f_1(w, z) \equiv \varphi(w), \quad f_2(w, z) \equiv \psi(z) \quad \text{oder} \quad f_1(w, z) \equiv \psi(z), \quad f_2(w, z) \equiv \varphi(w).$$

Daß φ und ψ eigentliche Abbildungen der Komponentengebiete von X in die Komponentengebiete von X' darstellen, ist klar.

Eine unmittelbare Übertragung von Satz 13 auf eigentliche holomorphe Abbildungen von direkten Produkten beschränkter Gebiete in Zahlenräumen höherer Dimension ist nicht möglich, wie einfache Beispiele zeigen. Es werden besondere Voraussetzungen über Randeigenschaften der Gebiete hinzutreten müssen. Wir gehen darauf nicht näher ein[16]).

§ 6. Überlagerungsabbildungen von Polyedergebieten

6.1. Wir betrachten in diesem Paragraphen Überlagerungsabbildungen von speziellen komplexen Räumen, den Polyedergebieten in Zahlenräumen, auf Räume der gleichen Art. Es wird sich zeigen, daß solche Abbildungen nur unter besonderen Voraussetzungen möglich sind.

Zunächst seien Bezeichnungen eingeführt.

a) Unter einem *analytischen Polyeder* P in einem komplexen Raum X wird eine kompakte Punktmenge von X mit folgender Eigenschaft verstanden: Es gibt eine offene Umgebung U von P und endlich viele in U holomorphe Funktionen $f_1, \ldots, f_k$, so daß ein Punkt $x_0 \in U$ genau dann zu P gehört, wenn gilt $|f_1(x_0)| \leqq 1, \ldots, |f_k(x_0)| \leqq 1$.

b) Ein *Polyedergebiet* A in einem rein n-dimensionalen komplexen Raum X ist eine zusammenhängende Komponente des offenen Kernes $\overset{\circ}{P}$ eines analytischen Polyeders P in X mit der folgenden Eigenschaft: Die Umgebung U von P und die Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ [vgl. a)] können so gewählt werden, daß für jedes $\varkappa = 1, \ldots, k$ die Menge $\{x : x \in U, |f_\varkappa(x)| = 1\} \cap \partial A$ die topologische Dimension $2n-1$ hat. — Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ mit dieser Eigenschaft heißen ein zu A gehörendes Funktionensystem.

Es ist klar, daß jedes Polyedergebiet in einem holomorph-vollständigen komplexen Raum X wieder ein holomorph-vollständiger komplexer Raum, also insbesondere ein Holomorphiegebiet in X ist.

c) Sei A ein Polyedergebiet in X und $\{f_1, \ldots, f_k\}$ ein zu A gehörendes Funktionensystem. Die Niveaumengen jeder Abbildung $f_\varkappa : A \to C^1$ $(\varkappa = 1, \ldots, k)$ bilden die Elemente je einer einfachen Zerlegung $Z_\varkappa = Z(f_\varkappa)$[17]) von A, die eine *charakteristische Zerlegung* von A heiße.

Zwei charakteristische Zerlegungen $Z_{\varkappa_0}$, $Z_{\varkappa_1}$ von A sind genau dann voneinander verschieden, wenn die zugehörigen Funktionen $f_{\varkappa_0}$, $f_{\varkappa_1}$ analytisch

---

[16]) Vgl. hierzu H. CARTAN [*11*]. Dort wird bewiesen, daß ein Holomorphismus eines direkten Produktes beschränkter Gebiete sich dann als kartesisches Produkt von Abbildungen der Komponentengebiete darstellen läßt, wenn der Holomorphismus in genügender Nähe der Identität liegt; Voraussetzungen über Randeigenschaften werden hierbei nicht benötigt.

[17]) Eine Zerlegung eines topologischen Raumes R heißt einfach, wenn die Elemente der Zerlegung zusammenhängende Mengen in R sind. — Vgl. auch [*36*].

unabhängig sind. Die Anzahl der charakteristischen Zerlegungen von A heiße die *Stufe* s von A; es gilt $s \leqq k$. Es läßt sich elementar zeigen, daß das System der verschiedenen charakteristischen Zerlegungen von A — insbesondere also die Stufe s — nur von A, nicht aber von der speziellen Wahl eines zu A gehörenden Funktionensystems $\{f_1, \ldots, f_k\}$ abhängt.

Beispiel. Jedes endliche konvexe euklidische Polyeder Q (d. h. jede konvexe Zelle) des $R^{2n}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ ist ein analytisches Polyeder im $C^n(z_1, \ldots, z_n)$, $z_\nu = x_\nu + i y_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$. Q kann durch Ungleichungen

$$|e^{a_{\varkappa 1} z_1 + \cdots + a_{\varkappa n} z_n + b_\varkappa}| \leqq 1, \qquad \varkappa = 1, \ldots, k \qquad (k \geqq 2n+1),$$

gegeben werden. Der offene Kern $\overset{\circ}{Q}$ von Q ist ein Polyedergebiet; $\overset{\circ}{Q}$ heiße ein *euklidisches Polyedergebiet*. Die charakteristischen Zerlegungen von $\overset{\circ}{Q}$ sind sämtlich „affin" (s. unten p. 186), die Stufe s von $\overset{\circ}{Q}$ ist, wie eine elementare Betrachtung ergibt, nicht kleiner als n. Ist Q insbesondere ein Simplex des $R^{2n}(x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$, so heiße $\overset{\circ}{Q}$ ein *Simplexgebiet* des $C^n(z_1, \ldots, z_n)$; für die Stufe s von $\overset{\circ}{Q}$ gilt dann $n+1 \leqq s \leqq 2n+1$, und einfache Beispiele lehren, daß s in diesem Fall jeden der Werte $n+1, \ldots, 2n+1$ annehmen kann.

6.2. Im folgenden betrachten wir der Einfachheit halber bevorzugt Polyedergebiete im C^2. Wir beweisen

Satz 14. *Gegeben seien ein Polyedergebiet A der Stufe s im $C^2(w, z)$ sowie ein Polyedergebiet $^*A$ der Stufe $^*s$ im $C^2(^*w, ^*z)$; $\tau: A \to {}^*A$ sei eine eigentliche holomorphe Abbildung (also eine Überlagerungsabbildung). Dann ist jeder charakteristischen Zerlegung Z_σ von A in natürlicher Weise eine charakteristische Zerlegung $^*Z_{^*\sigma}$ von $^*A$ zugeordnet, derart, daß jedes Element von Z_σ vermöge τ auf ein Element von $^*Z_{^*\sigma}$ abgebildet wird; verschiedenen Z_σ sind verschiedene $^*Z_{^*\sigma}$ zugeordnet* [18].

Bemerkung. Die Voraussetzung der Eigentlichkeit von τ ist wesentlich: Unter beliebigen holomorphen Abbildungen gehen Zerlegungen des Urbildraumes nicht in Zerlegungen des Bildraumes über (wohl aber entspricht umgekehrt jeder Zerlegung des Bildraumes eine Zerlegung des Urbildraumes).

Korollar zu Satz 14. *Für die Stufen s von A und $^*s$ von $^*A$ gilt $s \leqq {}^*s$.*

Zum Beweise von Satz 14 benutzen wir den

Hilfssatz 2. *Sei $X = X_w \times X_z$ ein Zylindergebiet des $C^2(w, z)$ und $\varphi: X \to {}^*A$ eine holomorphe Abbildung von X in ein Polyedergebiet $^*A$ des $C^2(^*w, ^*z)$; es existiere ein Kontinuum $\mathfrak{C} \subset \partial X_z$, so daß φ in allen Punkten von $X_w \times \mathfrak{C}$ eigentlich ist. Ist dann $\{^*f_1, \ldots, {}^*f_m\}$ ein zu $^*A$ gehöriges Funktionensystem, so hängt wenigstens eine der Funktionen $^*f_\mu \circ \varphi$, $\mu = 1, \ldots, m$, von der Variablen w nicht ab.*

Beweis. Durch die Gleichungen

$$\eta_\mu = {}^*f_\mu(^*w, ^*z), \qquad \mu = 1, \ldots, m,$$

[18] Für den Fall, daß τ biholomorph ist, vgl. W. ROTHSTEIN [32], § 4, dort insbesondere Satz 6 und 7.

wird eine holomorphe Abbildung $\tau: {}^*A \to E$ in den Polyzylinder

$$E := E_1 \times \cdots \times E_m, \quad E_\mu := \{\eta_\mu : |\eta_\mu| < 1\}, \quad \mu = 1, \ldots, m,$$

gegeben. Diese Abbildung ist offenbar eigentlich. Mithin ist die holomorphe Abbildung $\tau \circ \varphi: X \to E$ in allen Punkten von $X_w \times \mathfrak{C}$ eigentlich; Anwendung von Satz 12 liefert dann die Behauptung.

Zum Beweise von Satz 14 sei nun $\{f_1, \ldots, f_k\}$ ein zu A und $\{{}^*f_1, \ldots, {}^*f_m\}$ ein zu ${}^*A$ gehörendes Funktionensystem. Z_{σ_0} sei eine der charakteristischen Zerlegungen von A, die Elemente von Z_{σ_0} sind die Niveaumengen der holomorphen Abbildung $f_{\sigma_0}: A \to C^1$. Wir betrachten die Menge $H_{\sigma_0} := \{(w, z) : (w, z) \in \partial A, |f_{\sigma_0}(w, z)| = 1\} \subset C^2$, sie hat die topologische Dimension 3 [vgl. b), p. 183]. Auf H_{σ_0} läßt sich ein Punkt (w_0, z_0) wählen, derart, daß dort wenigstens eine der partiellen Ableitungen von f_{σ_0} von Null verschieden ist; sei etwa $\frac{\partial f_{\sigma_0}(w_0, z_0)}{\partial z} \neq 0$. Es gibt dann eine Umgebung U von (w_0, z_0), so daß durch die Zuordnung

$$w \to w' = w$$
$$z \to z' = f_{\sigma_0}(w, z)$$

eine biholomorphe Abbildung ϱ von U auf ein Zylindergebiet $X_{w'} \times D_{z'}$, definiert wird. In $D_{z'}$ ist sicher ein Bogen der Kreislinie $\{z' : |z'| = 1\}$ enthalten; es darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $X_{z'} := D_{z'} \cap \{z' : |z'| < 1\}$ ein Gebiet ist. Dann ist $N := \varrho^{-1}(X_{w'} \times X_{z'})$ eine in A enthaltene „einseitige Umgebung" von (w_0, z_0). Wir bezeichnen $X_{w'} \times X_{z'}$ mit X'; es sei ferner $\check{\varrho}: X' \to N$ die durch Beschränkung von ϱ^{-1} bestimmte Abbildung. Auf die Abbildung $\tau \circ \check{\varrho}: X' \to {}^*A$ ist nunmehr Hilfssatz 2 anwendbar: Wenigstens eine der Funktionen ${}^*f_\mu \circ (\tau \cdot \check{\varrho})$, etwa ${}^*f_{\mu_0} \circ (\tau \circ \check{\varrho})$, hängt also nur von der Variablen z' ab. Dies bedeutet, daß ${}^*f_{\mu_0} \circ \tau$ von f_{σ_0} in N analytisch abhängt, und hieraus folgt, daß diese Funktionen im gesamten Polyedergebiet A voneinander analytisch abhängen.

Wir behaupten nun, daß jedes Element der Zerlegung Z_{σ_0} vermöge τ auf ein Element der Zerlegung ${}^*Z_{\mu_0}$ abgebildet wird. — Wegen der soeben nachgewiesenen Abhängigkeit von ${}^*f_{\mu_0} \circ \tau$ und f_{σ_0} wird sicher jedes Element M von Z_{σ_0} in ein Element ${}^*M$ von ${}^*Z_{\mu_0}$ abgebildet. Da $\tau: A \to {}^*A$ eigentlich ist, ist $\tau(M)$ eine analytische Menge in ${}^*A$. Da τ nirgends entartet von Range 2 abbildet, ist $\tau(M)$ rein 1-dimensional und setzt sich somit aus gewissen der irreduziblen Komponenten von ${}^*M$ zusammen. Es muß dann aber sogar $\tau(M) = {}^*M$ gelten; dies ergibt sich auf einfache Art daraus, daß τ als nirgends entartete Abbildung insbesondere offen ist.

Jeder Zerlegung Z_σ ist demnach vermöge τ in natürlicher Weise eine Zerlegung ${}^*Z_{*\sigma}$ zugeordnet. Verschiedenen Z_{σ_1}, Z_{σ_2} müssen so notwendig verschiedene ${}^*Z_{*\sigma_1}$, ${}^*Z_{*\sigma_2}$ zugeordnet sein. Denn sind die Elemente von Z_{σ_i} bzw. ${}^*Z_{*\sigma_i}$, $i = 1, 2$, die Niveaumengen der Funktionen f_{σ_i} bzw. ${}^*f_{*\sigma_i}$, so hängen, wie bewiesen, die Funktionen f_{σ_i} und ${}^*f_{*\sigma_i} \circ \tau$ analytisch voneinander ab, andererseits sind f_{σ_1} und f_{σ_2} analytisch unabhängig. Hieraus ergibt sich, daß

auch ${}^*f_{*\sigma_1}$ und ${}^*f_{*\sigma_2}$ analytisch unabhängig und folglich ${}^*Z_{*\sigma_1}$ und ${}^*Z_{*\sigma_2}$ verschieden sind.

Damit ist der Satz bewiesen.

6.3. Durch Satz 14 wird die Möglichkeit, ein Polyedergebiet auf ein anderes eigentlich holomorph abzubilden, stark eingeschränkt. Als Beispiel sollen Überlagerungsabbildungen von euklidischen Polyedergebieten betrachtet werden. Hierbei benutzen wir die folgende Terminologie:

Eine einfache Zerlegung Z eines Gebietes $X \subset C^n$ heißt *affin*, wenn gilt:

a) Jedes Element E von Z ist ein $(n-1)$-dimensionales analytisches Ebenenstück, d.h. E ist eine zusammenhängende Komponente des Durchschnitts einer $(n-1)$-dimensionalen analytischen Ebene H des C^n mit X.

b) Zwei Elemente E, E' von Z sind parallel, d.h. sie sind in parallelen analytischen Ebenen H, H' enthalten.

Eine affine Zerlegung von X ist eindeutig bestimmt durch eine $(n-1)$-dimensionale „Richtung" des C^n. Wir nennen k affine Zerlegungen von X *unabhängig*, wenn die zugehörigen Richtungen unabhängig sind.

Nun gilt:

Satz 15. *Gegeben sei je ein Gebiet* $X \subset C^n(z_1, \ldots, z_n)$ *bzw.* ${}^*X \subset C^n({}^*z_1, \ldots, {}^*z_n)$, $n \geqq 2$. *Es seien* $Z_1, \ldots, Z_{n+1}$ *affine Zerlegungen von* X *und* ${}^*Z_1, \ldots, {}^*Z_{n+1}$ *affine Zerlegungen von* ${}^*X$; *je n der* Z_μ *bzw. je n der* ${}^*Z_\mu$ *seien unabhängig. Sei weiter* $\tau: X \to {}^*X$ *eine surjektive holomorphe Abbildung, die jeweils* Z_μ *in* ${}^*Z_\mu$, $\mu = 1, \ldots, n+1$, *überführt, d.h. die jedes Element von* Z_μ *auf ein Element von* ${}^*Z_\mu$ *abbildet. Dann ist* τ *die Beschränkung einer affinen Abbildung*

$$\alpha: C^n(z_1, \ldots, z_n) \to C^n({}^*z_1, \ldots, {}^*z_n).$$

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen — eventuell ist eine lineare Koordinatentransformation auszuführen — daß die Richtungen, durch welche $Z_1, \ldots, Z_{n+1}$ bzw. ${}^*Z_1, \ldots, {}^*Z_{n+1}$ festgelegt sind, der Reihe nach gegeben werden durch

$$z_1 = \text{const}, \ldots, z_n = \text{const}, \qquad z_1 + \cdots + z_n = \text{const}$$

bzw.

$${}^*z_1 = \text{const}, \ldots, {}^*z_n = \text{const}, \qquad {}^*z_1 + \cdots + {}^*z_n = \text{const}.$$

Die Abbildung $\tau: X \to {}^*X$ werde beschrieben durch Gleichungen

$${}^*z_1 = f_1(z_1, \ldots, z_n), \ldots, {}^*z_n = f_n(z_1, \ldots, z_n).$$

Wegen $\tau(Z_\nu) = {}^*Z_\nu$, $\nu = 1, \ldots, n$, folgt, daß jeweils die Funktion $f_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ von der Funktion $\varphi_\nu(z_1, \ldots, z_n) := z_\nu$ analytisch abhängig ist. Also hängt $f_\nu(z_1, \ldots, z_n)$ nur von der Variablen z_ν wirklich ab, und wir können schreiben $f_\nu(z_1, \ldots, z_n) = f_\nu(z_\nu)$. Da auch $\tau(Z_{n+1}) = {}^*Z_{n+1}$ gilt, müssen weiter die Funktionen

$$\psi(z_1, \ldots, z_n) := \sum_{\nu=1}^{n} f_\nu(z_\nu), \qquad \varphi(z_1, \ldots, z_n) := \sum_{\nu=1}^{n} z_\nu$$

voneinander analytisch abhängig sein. Hieraus ergibt sich unmittelbar

$$\frac{df_1(z_1)}{dz_1} \equiv \frac{df_2(z_2)}{dz_2} \equiv \cdots \equiv \frac{df_n(z_n)}{dz_n},$$

also wegen $n \geqq 2$

$$\frac{df_\nu(z_\nu)}{dz_\nu} \equiv c = \text{const}, \qquad \nu = 1, \ldots, n.$$

Demnach ist

$$f_\nu(z_\nu) \equiv c\, z_\nu + a_\nu,$$

worin notwendig $c \neq 0$ ist, und es folgt die Behauptung.

Bemerkung. Die Aussage von Satz 15 bleibt auch unter schwächeren Bedingungen richtig: Es genügt offenbar, die durch τ vermittelte Beziehung zwischen den Zerlegungen Z_ν und $^*Z_\nu$ nur in einer Umgebung eines Punktes von X bzw. seines Bildpunktes in $^*X$ vorauszusetzen.

Im folgenden seien A und $^*A$ euklidische Polyedergebiete im $C^2(w, z)$ bzw. $C^2(^*w, ^*z)$, deren Stufen s und $^*s$ nicht kleiner als 3 sind. (Es ist leicht zu zeigen, daß ein euklidisches Polyedergebiet im C^2 genau dann von der Stufe 2 ist, wenn es direktes Produkt eindimensionaler euklidischer Polyedergebiete oder affines Bild eines solchen direkten Produktes ist.) Als Anwendung der Sätze 14 und 15 folgt dann unmittelbar

Satz 16. *Jede holomorphe Überlagerungsabbildung* $\tau: A \to {}^*A$ *ist die Beschränkung einer affinen Abbildung* $\alpha: C^2(w, z) \to C^2(^*w, ^*z)$.

Hieraus ergeben sich insbesondere die folgenden Aussagen:

(a) *Jede holomorphe Überlagerungsabbildung* $\tau: A \to {}^*A$ *is biholomorph.*

(b) *Die Anzahl der holomorphen Überlagerungsabbildungen von A auf* $^*A$ *ist endlich.*

Denn eine affine Abbildung des Raumes zweier komplexen Veränderlichen ist festgelegt durch Zuordnung zweier Systeme von je drei komplex linear-unabhängigen Punkten; unter den Eckpunkten eines endlichen euklidischen Polyeders sind aber stets drei linear-unabhängige vorhanden. Es gibt also höchstens so viele Überlagerungsabbildungen $\tau: A \to {}^*A$, wie es Möglichkeiten gibt, drei festgewählten komplex linear-unabhängigen Eckpunkten von A drei komplex linear-unabhängige Eckpunkte von $^*A$ zuzuordnen. Da jedoch nicht jede derartige Zuordnung notwendig zu einer gesuchten Abbildung von A auf $^*A$ führt, ist die Zahl dieser Abbildungen geringer[19]). Insbesondere kommt es vor, daß überhaupt keine Überlagerungsabbildung $\tau: A \to {}^*A$ existiert. Zum Beispiel tritt dies ein, wenn die Eckenanzahlen oder auch die Stufen von A und $^*A$ verschieden sind; aber auch im Falle gleicher Eckenanzahlen und Stufen braucht es keine Abbildungen τ zu geben, wie geeignet gewählte Beispiele von Simplexgebieten der Stufe 3 zeigen (vgl. auch unten die Betrachtungen in 6.4.).

[19]) Sind z. B. A und $^*A$ Simplexgebiete, so läßt sich elementar einsehen, daß es *höchstens fünf* verschiedene affine Abbildungen von A auf $^*A$ gibt und daß diese Anzahl in besonderen Fällen auch wirklich erreicht wird.

Die Aussagen (a) und (b) sind speziell für den Fall $A = {}^*A$ gültig. Jede Überlagerungsabbildung eines euklidischen Polyedergebietes $A \subset C^2$ der Stufe $s \geqq 3$ auf sich ist also affin und infolgedessen ein Holomorphismus. Die Gruppe $\mathfrak{A}(A)$ dieser Holomorphismen ist demnach stets eine endliche Gruppe. Es ist wieder einleuchtend, daß $\mathfrak{A}(A)$ „im allgemeinen", d.h. wenn A keine besonderen Symmetrien aufweist, nur aus der Identität besteht.

6.4. Wir wollen noch den Fall eines Simplexgebietes $A \subset C^2(w, z)$ der Stufe $s = 3$ etwas näher betrachten. Die Voraussetzung $s = 3$ ist offenbar mit der folgenden Bedingung äquivalent: Es gibt in der komplex-affinen (w, z)-Ebene zwei sich schneidende komplexe Geraden g und g' derart, daß eine der Ecken von A mit dem Schnittpunkt p_0 von g und g' zusammenfällt, während zwei der anderen Ecken auf g und die zwei restlichen Ecken auf g' liegen. Wir können uns daher die Ecken q_ν, $\nu = 0, 1, 2, 3, 4$, so numeriert denken, daß $q_0 = p_0$ ist und q_1, q_2 auf g sowie q_3, q_4 auf g' liegen. Nötigenfalls durch Wahl neuer affiner Koordinaten läßt sich erreichen, daß gilt: $q_0 = (0, 0)$, $q_1 = (1, 0)$, $q_2 = (a, 0)$, $q_3 = (0, 1)$, $q_4 = (0, b)$. Dabei sind a und b nicht reell, denn sonst wären 3 der Punkte q_ν reell linear abhängig. Man rechnet nun nach, daß A höchstens *einen* von der Identität verschiedenen affinen Holomorphismus zuläßt (der dann eine Vertauschung von g und g' bewirken muß), und daß ein solcher Holomorphismus genau dann existiert, wenn $a = b$ oder $a = b^{-1}$ ist.

Insbesondere folgt, daß das Simplexgebiet A mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(i, 0)$, $(0, 2i)$ starr gegenüber eigentlichen holomorphen Abbildungen in sich ist.

Literatur

[1] AHLFORS, L.: Open Riemann Surfaces and Extremal Problems on Compact Subregions. Comm. Math. Helv. **24**, 100–134. — [2] BEHNKE, H., u. E. PESCHL: Zur Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Starre Regularitätsbereiche. Monatsh. Math. u. Phys. **43**, 493–502 (1936). — [3] BEHNKE, H., u. P. THULLEN: Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Ergebn. d. Math. **3**, 3 (1934). — [4] BEHNKE, H., u. K. STEIN: Modifikation komplexer Mannigfaltigkeiten und Riemannscher Gebiete. Math. Ann. **124**, 1–16 (1951). — [5] BLANCHARD, A.: Sur les variétés analytiques complexes. Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup **73**, 157–202 (1956). — [6] BOCHNER, S., and D. MONTGOMERY: Groups on Analytic Manifolds. Ann. of Math. **48**, 659–669 (1947). — [7] BRILL, A., u. M. NOETHER: Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie. Math. Ann. **7**, 269–310 (1874). — [8] CALABI, E., and B. ECKMANN: A class of compact, complex manifolds which are not algebraic. Ann. of Math. **58**, 494–500 (1953). — [9] CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie, Bd. 2. Basel 1950. — [10] CARTAN, H.: Sur les fonctions de plusieurs variables complexes. L'itération des transformations intérieurs d'un domaine borné. Math. Z. **35**, 760–773 (1932). — [11] CARTAN, H.: Sur les fonctions de n variables complexes. Les transformations du produit topologique de deux domaines. Bull. Soc. Math. de France **64**, 1–12 (1936). — [12] CARTAN, H.: Séminaire E.N.S. 1951/52. — [13] GRAUERT, H.: Charakterisierung der holomorph vollständigen komplexen Räume. Math. Ann. **129**, 233–259 (1955). — [14] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Zur Theorie der Modifikationen I. Stetige und eigentliche Modifikationen komplexer Räume. Math. Ann. **129**, 274–296 (1955). — [15] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Komplexe Räume. Math. Ann. **136**, 245–318 (1958). — [16] GRAUERT, H., u. R. REMMERT: Einige Anwendungen der Garbentheorie auf die komplexe Analysis. (In Vorbereitung.) — [17] HEDTFELD, K. H.: Starre einfach zusammenhängende Holomor-

phiegebiete. Schriftenreihe Math. Inst. Univ. Münster, H. 8 (1954). — [*18*] HOPF, H.: Zur Algebra der Abbildungen von Mannigfaltigkeiten. J. reine u. angew. Math. **163**, 71—88 (1930). — [*19*] HOPF, H.: Enden offener Räume und unendliche diskontinuierliche Gruppen. Comm. Math. Helv. **16**, 81—100 (1945). — [*20*] HUREWICZ, W., and H. WALLMANN: Dimension Theory. Princeton 1948. — [*21*] IWAHASHI, R.: Domains spread on a complex space. J. Math. Soc. Japan **9**, 452—463 (1957). — [*22*] KÄHLER, E.: Zur Theorie der algebraischen Funktionen zweier Veränderlichen, I. Math. Z. **31**, 258—269 (1930). — [*23*] KERNER, H.: Funktionentheoretische Eigenschaften komplexer Räume. Diss. Univ. München 1958. — [*24*] KNESER, H.: Die kleinste Bedeckungszahl innerhalb einer Klasse von Flächenabbildungen. Math. Ann. **103**, 347—358 (1930). — [*25*] OKA, K.: Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables. VII. Lemme fondamental. J. Math. Soc. Japan **3**, 204—214, 259—278 (1951). — [*26*] PERRON, O.: Algebra I. Berlin 1951. — [*27*] RHAM, G. DE: Variétés différentiables Act. Sci. Inst. Paris: Herman et Cie. 1955. — [*28*] REMMERT, R.: Projektionen analytischer Mengen. Math. Ann. **130**, 410—441 (1956). — [*29*] REMMERT, R.: Sur les espaces analytiques holomorphiquement separables et holomorphiquement convexes. C. R. Acad. Sci. Paris **243**, 118—121 (1956). — [*30*] REMMERT, R.: Holomorphe und meromorphe Abbildungen komplexer Räume. Math. Ann. **133**, 328—370 (1957). — [*31*] REMMERT, R., u. K. STEIN: Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen. Math. Ann. **126**, 263—306 (1953). — [*32*] ROTHSTEIN, W.: Zur Theorie der analytischen Abbildungen im Raum zweier komplexer Veränderlichen. Diss. Univ. Münster 1935. — [*33*] SCHEJA, G.: Theorie der verzweigten Gebiete über komplexen Räumen und ihrer Holomorphiehüllen. Diss. Univ. Münster 1958. — [*34*] SEIFERT, H., u. W. THRELFALL: Lehrbuch der Topologie. Leipzig u. Berlin 1934. — [*35*] SERRE, J. P.: Géometrie Algébrique et Géometrie Analytique. Ann. Inst. Fourier G, 1—42 (1955/56). — [*36*] STEIN, K.: Analytische Zerlegungen komplexer Räume. Math. Ann. **132**, 63—93 (1956). — [*37*] STEIN, K.: Die Existenz komplexer Basen zu holomorphen Abbildungen. Math. Ann. **136**, 1—8 (1958). — [*38*] STEIN, K.: Maximale holomorphe und meromorphe Abbildungen. (In Vorbereitung.)

Münster, Mathematisches Institut der Universität
München, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 24. Juli 1959)