Werk

Titel: Über Produkte Hermitescher Matrizen und Büschel Hermitescher Formen.

Autor: Ostrowski, Alexander

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0072|log8

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

OSTROWSKI, A.
Math. Zeitschr. 72, 1–15 (1959)

Über Produkte Hermitescher Matrizen und Büschel Hermitescher Formen

Dem Andenken an LEON LICHTENSTEIN gewidmet
(16. 5. 1878 bis 21. 8. 1933)

Von

ALEXANDER OSTROWSKI

1. In einer kürzlich veröffentlichten Arbeit [9] habe ich unter anderem bewiesen, daß wenn eine Hermitesche Matrix H der Ordnung n mit einer positiv definiten Matrix D derselben Ordnung multipliziert wird, ihre Signatur dabei unverändert bleibt, so daß also DH genau so viele positive Eigenwerte hat wie H und dasselbe auch für negative Eigenwerte gilt. Es wurde, etwas schärfer, bewiesen, daß wenn D eine definite Matrix ist mit p als kleinstem und P als größtem Eigenwert, die Eigenwerte von DH sich aus denen von H durch Multiplikation mit gewissen Faktoren erhalten lassen, die zwischen p und P liegen[1]).

Es liegt nun nahe zu erwarten, daß wenn die Matrix D zwar nicht definit ist, also nicht lauter Eigenwerte gleichen Vorzeichens hat, dafür aber nur „wenig Eigenwerte abweichenden Vorzeichens" aufweist, dann vom obigen Satz zumindest eine gewisse Annäherung an die Tatsache der Realität sämtlicher Fundamentalwurzeln von DH gerettet werden könnte. Und dies ist in der Tat der Fall. Wir wollen allgemein für eine Hermitesche Matrix A mit π_A die Anzahl der positiven und mit ν_A die Anzahl der negativen Eigenwerte von A sowie für eine beliebige Matrix B mit K_B die Anzahl der nicht reellen Fundamentalwurzeln von B bezeichnen. Dann gilt der

Satz 1. *Sind A, B zwei Hermitesche Matrizen gleicher Ordnung, so ist K_{AB} gerade und es gilt*

$$K_{AB} \leqq 2 \operatorname{Min}(\pi_A, \nu_A, \pi_B, \nu_B). \tag{1}$$

2. Die Aussage des Satzes 1 liefert natürlich auch eine *untere* Schranke für die *Anzahl der reellen Fundamentalwurzeln* von AB. Wird diese Aussage in der entsprechenden Weise umgeschrieben, so läßt sie sich, wenn eine der Matrizen A, B regulär ist, insofern verschärfen, als man für die Anzahlen der positiven und der negativen Fundamentalwurzeln von AB einzeln untere Schranken angeben kann[2]).

[1]) Durch eine freundliche Mitteilung von OLGA TAUSSKY-TODD bin ich nachträglich darauf aufmerksam gemacht worden, daß in der kürzlich erschienenen Arbeit von AMIR-MOÉZ [1] *im Spezialfall, daß auch H eine definite Form ist,* der obige Sachverhalt als eine Folgerung aus recht allgemeinen und sehr scharfen Abschätzungen hergeleitet wird.

[2]) Es sei daran erinnert, daß die Eigenwerte von AB und BA die gleichen sind.

Um diese Formulierungen angeben zu können, erinnern wir daran, daß unter der *Signatur* einer Hermiteschen Form A die Differenz $\sigma_A = \pi_A - \nu_A$ verstanden wird. Wir bezeichnen ferner den *Rang* der Matrix A mit r_A und mit δ_A den *„Defekt"* von A, d.h. die Differenz $n - r_A$[3]). Dann ergibt sich aus dem Satz 1 als eine untere Schranke für die Anzahl der reellen Fundamentalwurzeln von AB

$$\begin{aligned}&\operatorname{Max}(n - 2\pi_A, n - 2\pi_B, n - 2\nu_A, n - 2\nu_B)\\ &\quad = \operatorname{Max}(\delta_A + \nu_A - \pi_A,\ \delta_B + \nu_B - \pi_B,\ \delta_A + \pi_A - \nu_A,\ \delta_B + \pi_B - \nu_B)\\ &\quad = \operatorname{Max}(|\sigma_A| + \delta_A,\ |\sigma_B| + \delta_B).\end{aligned}$$

Bezeichnen wir nun allgemein die Gesamtanzahl der reellen Eigenwerte einer Matrix A mit R_A, so ist der Satz 1 äquivalent mit

Satz 1°. *Sind A, B zwei Hermitesche Matrizen gleicher Ordnung, so gilt*

$$R_{AB} \geqq \operatorname{Max}(|\sigma_A| + \delta_A,\ |\sigma_B| + \delta_B), \tag{2}$$

wobei die Differenz der beiden Seiten von (2) *gerade ist.*

3. Wir bezeichnen ferner die Gesamtanzahl der positiven Eigenwerte einer Matrix A allgemein mit R_A^+ und analog die Anzahl ihrer negativen Eigenwerte mit R_A^-.

Als Pendant zum Satz 1° beweisen wir in Nr. 21 den

Satz 2. *Sind A, B zwei Hermitesche Matrizen gleicher Ordnung und ist A regulär, so gilt*

$$R_{AB}^+ \geqq \tfrac{1}{2}|\sigma_A + \sigma_B| - \tfrac{1}{2}\delta_B, \tag{3}$$

$$R_{AB}^- \geqq \tfrac{1}{2}|\sigma_A - \sigma_B| - \tfrac{1}{2}\delta_B. \tag{4}$$

Sind die Matrizen A, B *beide regulär*, so ergeben sich im Satze 2 die beiden unteren Schranken

$$\tfrac{1}{2}|\sigma_A + \sigma_B|, \quad \tfrac{1}{2}|\sigma_A - \sigma_B|,$$

deren Summe in diesem Falle gerade gleich dem Ausdruck (2) ist.

4. Lassen wir im Satze 2 die Voraussetzung fallen, daß eine der Matrizen A, B regulär ist, so lassen sich an Stelle der Relationen (3) und (4) geeignet abgeschwächte Relationen angeben.

Wir bezeichnen für eine Matrix A mit $\overline{R}_A^+$ die Anzahl der *nicht negativen* reellen Eigenwerte von A und analog mit $\overline{R}_A^-$ die Anzahl der *nicht positiven* reellen Eigenwerte von A. Dann werden wir in Nr. 23 beweisen:

Satz 3. *Sind A, B zwei Hermitesche Matrizen gleicher Ordnung, so gilt*

$$\overline{R}_{AB}^+ \geqq \tfrac{1}{2}|\sigma_A + \sigma_B| + \tfrac{1}{2}(\delta_A + \delta_B), \tag{5}$$

$$\overline{R}_{AB}^- \geqq \tfrac{1}{2}|\sigma_A - \sigma_B| + \tfrac{1}{2}(\delta_A + \delta_B). \tag{6}$$

[3]) Bekanntlich ist bei einer Hermiteschen Matrix der Defekt gleich der Mehrfachheit der Null als Fundamentalwurzel, während sonst der Defekt einer quadratischen Matrix gleich der Anzahl der im Nullpunkt verschwindenden Elementarteiler und damit der Anzahl der zum Eigenwert Null gehörenden linear unabhängigen Eigenvektoren ist.

5. Der Satz 1° hängt eng zusammen mit einem Satz, der in der Inauguraldissertation von FELIX KLEIN 1868 ausgesprochen und bewiesen wurde ([5], p. 32). Der Kleinsche Satz bezieht sich, in unseren Bezeichnungen und unter der heute fast selbstverständlichen Verallgemeinerung auf Hermitesche statt reelle symmetrische Matrizen (vgl. [10], Fußnote pp. 47—49), auf Büschel Hermitescher Matrizen n-ter Ordnung:

$$M_\lambda = B - \lambda C \tag{7}$$

und die zugehörige Gleichung in λ:

$$|B - \lambda C| = 0. \tag{8}$$

Und zwar lautet er (der Beweis ergibt sich mit in Nr. 18):

Satz 4 (von FELIX KLEIN). *Sind B und C zwei Hermitesche Matrizen n-ter Ordnung und ist die Matrix C regulär, so hat* (8) *wenigstens $|\sigma_C|$ reelle Wurzeln. Allgemeiner hat die Determinante $|B-\lambda C|$ wenigstens $|\sigma_C|$ reelle Elementarteiler ungerader Ordnung*[4]).

Wir werden darüber hinaus in Nr. 18 beweisen:

Zusatz zum Satz 4. *Unter den Voraussetzungen des F. Kleinschen Satzes sind die Differenzen zwischen den Anzahlen der reellen Wurzeln von* (8) *und der reellen Elementarteiler ungerader Ordnung von $B-\lambda C$ einerseits und $|\sigma_C|$ andererseits gerade.*

6. Setzen wir $C^{-1}=A$ im Satz 4 und beachten, daß für reguläre C sicher $\sigma_A=\sigma_C$ ist, so folgt aus

$$|B - \lambda C| = |C|\,|AB - \lambda E|, \tag{9}$$

daß

$$R_{AB} \geqq |\sigma_A|$$

ist, wobei A eine beliebige reguläre Hermitesche Matrix n-ter Ordnung und $R_{AB}-|\sigma_A|$ gerade ist. Daraus folgt weiter nach Definition von K_{AB} wegen $\sigma_A=2\pi_A-n$:

$$K_{AB} \leqq n - |2\pi_A - n|.$$

Da aber der Ausdruck rechts $\leqq 2\pi_A$ ist, folgt

$$K_{AB} \leqq 2\pi_A, \tag{10}$$

wobei $2\pi_A-K_{AB}$ gerade ist.

Von dieser Relation ausgehend, beweisen wir in Nr. 22 den Satz 1.

Es gilt ferner, analog zum Satz 4, der in Nr. 18 zu beweisende

[4]) Eine mit einem Teil der im Text angegebenen Kleinsche Aussage in den meisten Fällen äquivalente Formulierung findet sich bereits 1853 bei SYLVESTER ([11], p. 635), allerdings ohne Beweis und nur mit einer Beweisandeutung, die sich, wie uns scheint, ohne Hinzufügung weiterer Gedanken nicht ausführen läßt. Bei der bekannten Arbeitsweise des großen englischen Mathematikers muß daher wohl eher angenommen werden, daß er die fragliche Formulierung durch „unvollständige Induktion" gewonnen hat.

Satz 4°. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4 hat* (8) *wenigstens* $|\sigma_B|$ *reelle Wurzeln. Allgemeiner ist* $|\sigma_B|$ *höchstens gleich der Summe S der Anzahl der Elementarteiler ungerader Ordnung von* (7), *die reelle von* 0 *verschiedene Nullstellen haben, und der Anzahl der Elementarteiler gerader Ordnung von* (7), *die im Ursprung verschwinden. Dabei ist die Differenz* $S-|\sigma_B|$ *gerade.*

7. Die Sätze 4 und 4° lassen sich so umschreiben, daß darin statt σ die Größen π, ν vorkommen. So erhält man die Formulierung:

Satz 5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 4 liegen* π_C, ν_C *zwischen den Grenzen*

$$k+\sum\left[\frac{e}{2}\right], \quad k+\sum\left[\frac{e+1}{2}\right] \tag{11}$$

und π_B, ν_B *zwischen den Grenzen*

$$k+\sum\left[\frac{e'}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0-1}{2}\right], \quad k+\sum\left[\frac{e'+1}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0}{2}\right], \tag{12}$$

wo k die halbe Gesamtanzahl der nicht reellen Wurzeln von (8) *ist, die e die Exponenten sämtlicher reeller Elementarteiler von* (7), *die e' die Exponenten sämtlicher reeller nicht im Ursprung verschwindender Elementarteiler und die* e_0 *die Exponenten sämtlicher im Ursprung verschwindender Elementarteiler durchlaufen.*

Wir leiten in der Nr. 20 als den Satz 5° eine etwas verallgemeinerte Fassung des Satzes 5 her.

Die unteren Schranken des Satzes 5 sind von A. LOEWY ([6], [7], vgl. auch [2]) aufgestellt worden, wobei aber zu bemerken ist, daß die Gültigkeit der oberen Schranken dieses Satzes aus derjenigen der unteren Schranken sich direkt vermöge der Relationen

$$n=\pi_C+\nu_C, \quad n=\pi_B+\nu_B+\delta_B$$

herleiten läßt.

8. Wird unter Benutzung von (9) der Satz 5 auf das Produkt AB übertragen, so ergibt sich sofort die folgende Formulierung:

Satz 6. *Sind A, B zwei Hermitesche Matrizen, von denen wenigstens eine regulär ist, so gelten die Relationen*

$$\begin{cases} \operatorname{Max}(\pi_B, \nu_B) \leqq k+\sum\left[\frac{e'+1}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0}{2}\right], \\ \operatorname{Min}(\pi_B, \nu_B) \geqq k+\sum\left[\frac{e'}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0-1}{2}\right]; \end{cases} \tag{13a}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Max}(\pi_A, \nu_A) \leqq k+\sum\left[\frac{e'+1}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0+1}{2}\right], \\ \operatorname{Min}(\pi_A, \nu_A) \geqq k+\sum\left[\frac{e'}{2}\right]+\sum\left[\frac{e_0}{2}\right]. \end{cases} \tag{13b}$$

Dabei ist $2k=K$ *die* (gerade) *Gesamtanzahl nicht reeller Eigenwerte von AB, während e' die Exponenten aller reellen Elementarteiler von AB durchläuft, die im Ursprung nicht verschwinden, und* e_0 *die Exponenten der im Ursprung verschwindenden Elementarteiler.*

9. Der Übergang von den die Signatur enthaltenden Ungleichungen der Sätze 4 und 4° zu den π und ν enthaltenden Relationen des Satzes 5 hat natürlich den Vorteil, daß in den letzteren *sämtliche* Elementarteiler auftreten. Andererseits bedeutet dies aber einen *Rückschritt*, da dadurch die Möglichkeit einer wichtigen Verallgemeinerung verloren geht.

Wir wollen allgemein setzen:

$$\sigma(\lambda) = \sigma_{M_\lambda}, \quad \pi(\lambda) = \pi_{M_\lambda}, \quad \nu(\lambda) = \nu_{M_\lambda}. \tag{14}$$

Mit $R(\lambda)$ bezeichnen wir die Gesamtanzahl der reellen Wurzeln der Gl. (8), die $\leqq \lambda$ sind (natürlich mehrfache mehrfach gezählt). Ferner soll $R^*(\lambda)$ die Anzahl der reellen Elementarteiler ungerader Ordnung von (7) bedeuten, deren Nullstellen $\leqq \lambda$ sind. Dann läßt sich der Satz 4 dahin auffassen, daß die Zuwächse $\Delta R^*(\lambda)$, $\Delta R(\lambda)$ für das Intervall $(-\infty, \infty)$ wenigstens gleich den absolut genommenen entsprechenden Zuwächsen von $\pi(\lambda), \nu(\lambda), \frac{1}{2}\sigma(\lambda)$ sind:

$$\Delta R(\lambda) \geqq \Delta R^*(\lambda) \geqq |\Delta\pi(\lambda)| = |\Delta\nu(\lambda)| = \tfrac{1}{2}|\Delta\sigma(\lambda)|. \tag{15}$$

10. Da es sich nun aber bei den Δ-Ausdrücken in (15) offenbar um spezielle Werte von *Intervallfunktionen* handelt, wird man sich fragen, ob die Relation (15) auch dann richtig ist, wenn die Δ-Zuwächse in (15) Zuwächse über ein allgemeines Intervall $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ sind. Wir werden nun in Nr. 17 und Nr. 24 beweisen, daß (15) in der Tat auch für ein allgemeines Intervall (λ_1, λ_2) gilt, sofern λ_1 und λ_2 selbst keine Wurzeln von (8) sind:

Satz 7. *Sind B, C zwei Hermitesche Matrizen gleicher Ordnung und sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_1 < \lambda_2$, keine Wurzeln von (8), so gilt in den obigen Bezeichnungen*

$$\Delta R^*(\lambda) \geqq \tfrac{1}{2}|\Delta\sigma(\lambda)| = |\Delta\pi(\lambda)| = |\Delta\nu(\lambda)|, \tag{16}$$

unter Δ jeweils der Zuwachs der betreffenden Größe von λ_1 bis λ_2 verstanden. Setzt man für das Intervall $J = (\lambda_1, \lambda_2)$:

$$\Delta R^* - \tfrac{1}{2}|\Delta\sigma| = D(J), \tag{17}$$

so ist $D(J)$ eine nicht negative, ganzzahlige, gerade, superadditive Intervallfunktion, d.h. sie genügt der Ungleichung

$$D(J_1 + J_2) \geqq D(J_1) + D(J_2), \tag{18}$$

wenn J_1 und J_2 zwei aneinanderstoßende Intervalle sind, die den obigen Bedingungen genügen.

Insbesondere folgt aus dem Satz 7, daß wenn $D(-\infty, \infty) = 0$, dann D für jedes Intervall verschwindet und daher in (16) stets das Gleichheitszeichen gilt.

11. Die Beweise der oben angegebenen Sätze beruhen auf der Reduktionstheorie von Büscheln Hermitescher Formen, wie sie sich seit den ersten Arbeiten von WEIERSTRASS im Laufe einer 75-jährigen Entwicklung ausgebildet hat. Wir brauchen dabei nur das in der Nr. 16 angegebene Hauptresultat dieser Theorie, wonach jedes „reguläre" Büschel Hermitescher Formen sich durch eine reelle Variablentransformation auf eine Summe von gewissen

„Einzelformen" mit getrennten Variablen bringen läßt, wobei diese Einzelformen einerseits den reellen Elementarteiler des Büschels und andererseits den Paaren konjugiert komplexer Elementarteiler des Büschels entsprechen. Die Signaturen dieser Einzelformen werden in den Nrn. 12—15 diskutiert und aus den Resultaten dieser Diskussion, die vor allem in der Tabelle (23) der Nr. 12 zusammengefaßt sind, lassen sich dann unsere Sätze ziemlich leicht ablesen, solange $|C| \neq 0$ vorausgesetzt werden kann.

Der Satz 7 läßt sich dann durch die relativ einfache algebraische Überlegung der Nr. 24 auch auf den Fall $|C| = 0$ ausdehnen. Was aber die Sätze über das Matrizenprodukt AB anbetrifft, so müssen wir Stetigkeitsbetrachtungen anstellen, um sie auf den Fall $|A| = |B| = 0$ (vgl. die Nrn. 22, 23) zu verallgemeinern.

12. Wir werden im folgenden gewisse spezielle Hermitesche Formen zu untersuchen haben, die von einem reellen Parameter λ, einer reellen Zahl ϱ sowie von e konjugiert-komplexen Variablenpaaren abhängen, wo e einen der Werte 1, 2, ... hat. Es sind dies die Formen

$$(19) \quad K_{\varrho,e}(\lambda) = (\varrho - \lambda)[x_1\bar{x}_e + x_2\bar{x}_{e-1} + \cdots + x_e\bar{x}_1] + [x_1\bar{x}_{e-1} + \cdots + x_{e-1}\bar{x}_1].$$

Wir stellen uns die Aufgabe, für die Form K die Signatur, sowie die Anzahl der positiven und der negativen Eigenwerte in Abhängigkeit von λ zu bestimmen.

Offenbar ist die zu (19) gehörende Matrix durch die folgende Matrix der Ordnung e gegeben,

$$\begin{pmatrix} & & & & 1 & \varrho-\lambda \\ & & & 1 & \varrho-\lambda & \\ & & \iddots & \iddots & & \\ & 0 & & & & \\ & 1 & & & 0 & \\ 1 & \varrho-\lambda & & & & \\ \varrho-\lambda & & & & & \end{pmatrix},$$

wo die erste Nebendiagonale nur $\varrho - \lambda$ als Elemente hat, die erste Supernebendiagonale dazu nur lauter 1 enthält, und alle anderen Elemente verschwinden. Man erkennt sofort, daß die zugehörige Determinante den Wert

$$(20) \quad (-1)^{\frac{e(e-1)}{2}} (\varrho - \lambda)^e$$

hat.

Setzen wir zuerst $\lambda = \varrho$, so reduziert sich unsere Form auf

$$K_{\varrho,e}(\varrho) = x_1\bar{x}_{e-1} + \cdots + x_{e-1}\bar{x}_1,$$

und dies ist für *ungerade* $e = 2m + 1$ gleich

$$(21) \quad (x_1\bar{x}_{2m} + x_{2m}\bar{x}_1) + (x_2\bar{x}_{2m-1} + x_{2m-1}\bar{x}_2) + \cdots + (x_m\bar{x}_{m+1} + x_{m+1}\bar{x}_m),$$

während für *gerade* $e=2m+2$ wir die Darstellung

$$(22) \qquad (x_1\bar{x}_{2m+1}+x_{2m+1}\bar{x}_1)+\cdots+(x_m\bar{x}_{m+2}+x_{m+2}\bar{x}_m)+|x_{m+1}|^2$$

bekommen. In beiden Fällen enthalten die Klammerausdrücke nur getrennte Variablensysteme, so daß man die Eigenwerte erhält, wenn man für jeden der Klammerausdrücke seine Eigenwerte bestimmt. Diese einzelnen Klammerausdrücke haben aber alle den Typus $x\bar{y}+y\bar{x}=2\Re x\bar{y}$ und dies geht durch die unitär-orthogonale Substitution

$$x=\frac{\xi+\eta}{\sqrt{2}}, \qquad y=\frac{\xi-\eta}{\sqrt{2}}$$

über in

$$2\Re x\bar{y}=|\xi|^2-|\eta|^2.$$

Daher entspricht jedem unserer Klammerausdrücke ein Eigenwert $=1$ und ein Eigenwert $=-1$. Damit haben wir im Falle (21) $(e=2m+1)$ m mal den Eigenwert 1, m mal den Eigenwert -1, $\sigma=0$, sowie einen verschwindenden Eigenwert, da die Determinante für $\lambda=\varrho$ verschwindet. Im Falle (22) $(e=2m+2)$ haben wir, unter Berücksichtigung des letzten Terms, $m+1$ mal den Eigenwert 1 und m mal den Eigenwert -1, $\sigma=1$, wozu wiederum der eine verschwindende Eigenwert hinzukommt.

13. Lassen wir nun λ gegen ϱ konvergieren, so folgt aus der obigen Betrachtung, daß m Eigenwerte gegen -1 konvergieren, sowie, je nachdem ob $e=2m+1$ oder $e=2m+2$ ist, m oder $m+1$ Eigenwerte gegen 1 streben. Das Produkt aller dieser Eigenwerte konvergiert also in beiden Fällen gegen $(-1)^m$. Der übrigbleibende Eigenwert $E(\lambda)$ strebt dann gegen Null. Und da das Produkt sämtlicher Eigenwerte den Wert (20) besitzt, folgt leicht, daß $E(\lambda)\sim-(\lambda-\varrho)^e$ ist.

Da aber die Determinante unserer Form nur für $\lambda=\varrho$ verschwinden kann, können ihre Eigenwerte ihre Vorzeichen nur für $\lambda=\varrho$ wechseln. Unter Berücksichtigung dieser Tatsache sehen wir, daß im Falle ungerader e wir, für $\lambda>\varrho$, m positive und $m+1$ negative Eigenwerte haben, $\sigma=-1$, während für $\lambda<\varrho$ man $m+1$ positive und m negative Eigenwerte hat, $\sigma=1$. Für gerade e dagegen ist $E(\lambda)$ immer $\leqq 0$ und wir haben daher, für $\lambda\gtrless\varrho$, $m+1$ positive und $m+1$ negative Eigenwerte, $\sigma=0$. Wir können die Ergebnisse in der folgenden Tabelle zusammenfassen:

(23)

e	$\lambda<\varrho$	$\lambda>\varrho$	$\lambda=\varrho$
$2m+1$	$\sigma=1$	$\sigma=-1$	$\sigma=0$
$2m+2$	$\sigma=0$	$\sigma=0$	$\sigma=1$

14. Wir betrachten ferner gewisse spezielle Hermitesche Formen in den $2e$ konjugiert-komplexen Variablenpaaren $x_1, x_2, \ldots, x_e; \bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_e; y_1, y_2, \ldots, y_e; \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_e$. Diese Formen werden zugeordnet einer beliebigen *nicht reellen* Zahl ϱ, einer beliebigen von Null verschiedenen Zahl γ, sowie der natürlichen

Zahl e, und sind definiert durch:

$$(24)\quad \begin{cases} K_{\varrho,\gamma,e}(\lambda) = \gamma(\varrho-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}(x_\nu+iy_\nu)(\bar{x}_{e-\nu+1}+i\bar{y}_{e-\nu+1}) + \\ \qquad +\gamma\sum_{\nu=1}^{e-1}(x_\nu+iy_\nu)(\bar{x}_{e-\nu}+i\bar{y}_{e-\nu}) + \bar{\gamma}(\bar{\varrho}-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}(x_\nu-iy_\nu)\times \\ \qquad \times(\bar{x}_{e-\nu+1}-i\bar{y}_{e-\nu+1}) + \bar{\gamma}\sum_{\nu=1}^{e-1}(x_\nu-iy_\nu)(\bar{x}_{e-\nu}-i\bar{y}_{e-\nu}). \end{cases}$$

Dieser Ausdruck ist offenbar ein reelles Polynom in bezug auf die $x_\nu, y_\nu, \bar{x}_\nu, \bar{y}_\nu$. Und da es zugleich linear in den x_ν, y_ν ist und ebenso linear in den $\bar{x}_\nu, \bar{y}_\nu$, stellt dieser Ausdruck eine Hermitesche Form der Ordnung $2e$ dar. Wir wollen nun beweisen, daß diese Hermitesche Form *für jeden reellen Wert von λ die Signatur Null hat.* Zu diesem Zwecke bezeichnen wir die Form (24), um ihre Abhängigkeit von Variablen zum Ausdruck zu bringen, mit $K(x_\nu, y_\nu)$. Man übe nun auf die Variablen in dieser Form die Transformation aus, die nach dem Trägheitssatz die Signatur nicht ändern:

$$x_\nu = \eta_\nu, \quad y_\nu = -\xi_\nu, \quad \bar{x}_\nu = \bar{\eta}_\nu, \quad \bar{y}_\nu = -\bar{\xi}_\nu.$$

Dann gilt offenbar:

$$x_\nu + iy_\nu = -i(\xi_\nu + i\eta_\nu), \quad x_\nu - iy_\nu = i(\xi_\nu - i\eta_\nu),$$
$$\bar{x}_\nu + i\bar{y}_\nu = -i(\bar{\xi}_\nu + i\bar{\eta}_\nu), \quad \bar{x}_\nu - i\bar{y}_\nu = i(\bar{\xi}_\nu - i\bar{\eta}_\nu).$$

Dann ergibt sich offenbar:

$$(25)\qquad K(x_\nu, y_\nu) = -K(\xi_\nu, \eta_\nu).$$

Ist nun σ die Signatur von $K(x_\nu, y_\nu)$, so folgt aus (25) $\sigma = -\sigma$, $\sigma = 0$.

15. Wir wollen nunmehr die Determinante Δ der Hermiteschen Form (24) bestimmen. Diese Determinante ist offenbar die gleiche, wie diejenige der Bilinearform

$$\gamma(\varrho-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}(x_\nu+iy_\nu)(\xi_{e-\nu+1}+i\eta_{e-\nu+1}) + \gamma\sum_{\nu=1}^{e-1}(x_\nu+iy_\nu)(\xi_{e-\nu}+i\eta_{e-\nu}) +$$
$$+\bar{\gamma}(\bar{\varrho}-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}(x_\nu-iy_\nu)(\xi_{e-\nu+1}-i\eta_{e-\nu+1}) + \bar{\gamma}\sum_{\nu=1}^{e-1}(x_\nu-iy_\nu)(\xi_{e-\nu}-i\eta_{e-\nu}).$$

Üben wir nun die Variablentransformation aus:

$$(26)\qquad x_\nu + iy_\nu = X_\nu, \quad x_\nu - iy_\nu = Y_\nu,$$
$$(27)\qquad \xi_\nu + i\eta_\nu = \Xi_\nu, \quad \xi_\nu - i\eta_\nu = H_\nu, \qquad (\nu = 1, \ldots e)$$

so geht unsere Bilinearform über in

$$(28)\quad \gamma(\varrho-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}X_\nu\Xi_{e-\nu+1} + \gamma\sum_{\nu=1}^{e-1}X_\nu\Xi_{e-\nu} + \bar{\gamma}(\bar{\varrho}-\lambda)\sum_{\nu=1}^{e}Y_\nu H_{e-\nu+1} + \bar{\gamma}\sum_{\nu=1}^{e-1}Y_\nu H_{e-\nu}.$$

Bezeichnen wir die Determinante der Bilinearform (28) mit Δ_1, so gilt offenbar, da die Determinanten der Substitutionen (26) und (27) beide den Wert $(-2i)^e$ haben,

$$\Delta = 2^{2e}(-1)^e \Delta_1 .$$

Anderseits zerfällt aber die Bilinearform (28) in eine Summe von 2 Bilinearformen mit getrennten Variablen, zu denen die beiden Matrizen gehören

$$\gamma \begin{pmatrix} & & & 1 & \varrho-\lambda \\ & & & \varrho-\lambda & \\ & & \iddots & \iddots & \\ & 1 & & & 0 \\ 1 & \varrho-\lambda & & & \\ \varrho-\lambda & & & & \end{pmatrix}, \qquad \bar{\gamma} \begin{pmatrix} & & & 1 & \bar{\varrho}-\lambda \\ & & & \bar{\varrho}-\lambda & \\ & & \iddots & \iddots & \\ & 1 & & & 0 \\ 1 & \bar{\varrho}-\lambda & & & \\ \bar{\varrho}-\lambda & & & & \end{pmatrix}.$$

Daher ergibt sich $\Delta_1 = \gamma^e(\varrho-\lambda)^e \bar{\gamma}^e(\bar{\varrho}-\lambda)^e$, und daher schließlich

$$\Delta = [-4|\gamma|^2(\varrho-\lambda)(\bar{\varrho}-\lambda)]^e. \tag{29}$$

Das für uns wesentliche an der Formel (29) ist, daß die Determinante von (24) für kein reelles λ verschwindet. Daher gilt für die Form (24) für jeden reellen Wert von λ

$$\pi_K = \nu_K = e \qquad \big(K = K_{\varrho,\gamma,e}(\lambda)\big). \tag{30}$$

16. Man kann nun als das Hauptresultat der Reduktionstheorie der Büschel (7) Hermitescher Matrizen mit regulärer Matrix C bezeichnen[5]), daß ein solches Büschel Hermitescher Formen sich durch eine *reelle* Variablentransformation auf die folgende Gestalt bringen läßt

$$\sum K_{\varrho,\gamma,e}(\lambda) + \sum \varepsilon_i K_{\varrho_i,e_i}(\lambda) + \sum \delta_p K_{\varrho_p,e_p}(\lambda). \tag{31}$$

Dabei entsprechen die einzelnen Terme der ersten Summe den Paaren konjugiert komplexer Elementarteiler von (7) $(\lambda-\varrho)^e$, $(\lambda-\bar{\varrho})^e$, während die Konstanten γ gewisse nicht verschwindende Werte haben. Die Glieder der

[5]) Im Falle reeller quadratischer Formen ist die Zerlegung (31) im Prinzip 1858 und 1868 von WEIERSTRASS ([*15*], [*16*]) hergeleitet worden, wobei eine beim Weierstraßschen Beweis verbliebene Lücke erst 1894 durch FROBENIUS [*3*] ausgefüllt wurde. Inzwischen gelang es aber 1879 L. STICKELBERGER [*12*], die fragliche Schwierigkeit auf einem sehr scharfsinnig erdachten Umweg zu überwinden und damit eigentlich den ersten vollständig einwandfreien Beweis der Zerlegung (31) zu geben. WEIERSTRASS nimmt allerdings die Vorzeichenfaktoren ε_i, δ_p in die Variablen auf, womit sich eine etwas einfachere Gestalt der Darstellung (31) ergibt, die Transformation aber *komplex* wird. Für die von uns benutzte Gestalt der Zerlegung (31) vgl. im Falle quadratischer Formen KLEIN [*5*], pp. 27—30. Der Invarianzcharakter der Vorzeichenfaktoren ε_i, δ_p gegenüber reellen Transformationen wurde erst 1905 von MUTH [*8*] präzisiert und erhärtet. Die Übertragung der ganzen Diskussion auf Hermitesche Formen wurde zwar bereits 1890 von SEGRE [*10*] und 1900 von LOEWY [*7*] ins Auge gefaßt, vollständig einwandfrei wurde indessen die ganze Diskussion erst 1934/1935 durchgeführt von TROTT [*13*], TURNBULL [*14*] sowie von INGRAHAM and WEGNER [*4*]. Für (31) vgl. z. B. [*14*], p. 234.

zweiten Summe entsprechen sämtlichen reellen Elementarteilern von (7), $(\lambda-\varrho_i)^{e_i}$, mit *ungeraden* e_i, während jedes der ε_i einen der Werte ± 1 hat. Analog entsprechen die Terme der dritten Summe den reellen Elementarteilern von (7), $(\lambda-\varrho_p)^{e_p}$, mit *geraden* e_p, und die δ_p haben wiederum die Werte ± 1. Alle in (31) auftretenden Einzelformen haben dabei getrennte Variablen.

17. Wir setzen nun für die in (7) definierten Matrizen M_λ, wie in (14),

$$\sigma(\lambda)=\sigma_{M_\lambda},\quad \pi(\lambda)=\pi_{M_\lambda},\quad \nu(\lambda)=\nu_{M_\lambda},\quad \delta(\lambda)=\delta_{M_\lambda} \tag{32}$$

und wollen für $\lambda_1<\lambda_2$ aus der Darstellung (31) einen Ausdruck für den Zuwachs von $\sigma(\lambda)$ beim Übergang von λ_1 zu λ_2 herleiten. Dabei sollen auch $\lambda_1=-\infty$ und $\lambda_2=+\infty$ zugelassen werden.

Nun haben die in der ersten Summe von (31) auftretenden Einzelformen $K_{\varrho,\gamma,e}(\lambda)$, nach dem in Nr. 15 Bewiesenen, durchwegs die Signatur Null und tragen daher nichts zum Zuwachs von $\sigma(\lambda)$ bei.

Für die in der zweiten Summe von (31) vorkommenden $K_{\varrho_i,e_i}(\lambda)$ mit *ungeraden* e_i erhält man aus der Tabelle (23) der Nr. 13 beim Durchgang durch ϱ_i den Wert -2 als Zuwachs von σ. Daher liefern die im *offenen* Intervall (λ_1,λ_2) liegenden ϱ_i insgesamt den Zuwachs $-2\sum_{\lambda_1<\varrho_i<\lambda_2}\varepsilon_i$ für σ. Ist λ_1 eines der ϱ_i, so ergibt sich das zugehörige $-\varepsilon_i$ als Zuwachs von σ. Ist λ_2 eines der ϱ_i, so erfährt an dieser Stelle σ den entsprechenden Zuwachs $-\varepsilon_i$. Daher ergibt sich als der Beitrag der zweiten Teilsumme in (31) zu dem Zuwachs von σ:

$$-2\sum_{\lambda_1<\varrho_i<\lambda_2}\varepsilon_i-\sum_{\varrho_i=\lambda_1}\varepsilon_i-\sum_{\varrho_i=\lambda_2}\varepsilon_i.$$

Was aber die Terme der dritten Summe in (31) anbetrifft, so ergibt sich aus der Tabelle (23) der Nr. 13, daß sie für die im offenen Intervall (λ_1,λ_2) liegenden ϱ_p keinen Beitrag zum Zuwachs von σ liefern. Ferner erhält man, wenn $\lambda_1=\varrho_p$ ist, $-\delta_p$ als den entsprechenden Zuwachs von σ, während, wenn λ_2 ein ϱ_p ist, der entsprechende Zuwachs von σ gleich δ_p ist. Zusammenfassend erhalten wir daher

$$\Delta\sigma=\sigma(\lambda_2)-\sigma(\lambda_1)=-2\sum_{\lambda_1<\varrho_i<\lambda_2}\varepsilon_i-\sum_{\varrho_i=\lambda_1}\varepsilon_i-\sum_{\varrho_i=\lambda_2}\varepsilon_i-\sum_{\varrho_p=\lambda_1}\delta_p+\sum_{\varrho_p=\lambda_2}\delta_p. \tag{33}$$

Nehmen wir nun an, daß weder für λ_1 noch für λ_2 die Gl. (8) erfüllt ist, so reduziert sich (33) auf die Relation

$$\sigma(\lambda_2)-\sigma(\lambda_1)=-2\sum_{\lambda_1<\varrho_i<\lambda_2}\varepsilon_i. \tag{34}$$

Schätzt man hier den Ausdruck rechts durch $2\Delta R^*(\lambda)$ ab, wobei er mod 4 unverändert bleibt, so ergibt sich die auf die Formel (16) des Satzes 7 bezügliche Behauptung unter der Annahme $|C|\neq 0$.

Wir bezeichnen das Intervall (λ_1,λ_2) mit J. Es sei $p(J)$ die Anzahl der positiven ε_i unter den ε_i in der Summe rechts in (34) und $n(J)$ die Anzahl der negativen. Dann gilt

$$\Delta R^*=n(J)+p(J),\quad \tfrac{1}{2}|\Delta\sigma|=|p(J)-n(J)|$$

und in den Bezeichnungen des Satzes 7

$$D(J) = n(J) + p(J) - |p(J) - n(J)| = 2\,\mathrm{Min}\,(n(J), p(J)).$$

Daraus folgt aber sofort, daß $D(J)$ ganzzahlig, gerade und nicht negativ ist. Die Superadditivität von $D(J)$ folgt aus der allgemeinen Relation

$$\mathrm{Min}\,(a_1 + a_2, b_1 + b_2) \geqq \mathrm{Min}\,(a_1, b_1) + \mathrm{Min}\,(a_2, b_2).$$

Damit ist der Satz 7 *unter der Annahme* $|C| \neq 0$ bewiesen.

18. Beachtet man, daß $\sigma(-\infty) = \sigma_C$, $\sigma(\infty) = -\sigma_C$ ist, so ergibt sich aus (33) für $\lambda_1 = -\infty$, $\lambda_2 = \infty$

$$\sigma_C = \sum_{\varrho_i} \varepsilon_i. \tag{35}$$

Schätzt man in (35) die rechte Seite durch die ihr mod 2 kongruente Anzahl der ϱ_i ab, so folgt der Satz 4 und der Zusatz dazu.

Setzen wir in (33) $\lambda_1 = -\infty$ und ersetzen λ_2 durch λ, so erhalten wir unter Berücksichtigung von (35) für $\sigma(\lambda)$ den Ausdruck

$$\sum_{-\infty<\varrho<\infty} \varepsilon_i - 2\sum_{\varrho_i<\lambda} \varepsilon_i - \sum_{\varrho_i=\lambda} \varepsilon_i + \sum_{\varrho_p=\lambda} \delta_p = \sum_{\varrho_i>\lambda} \varepsilon_i - \sum_{\varrho_i<\lambda} \varepsilon_i + \sum_{\varrho_p=\lambda} \delta_p.$$

Das können wir zusammenfassen in

$$\sigma(\lambda) = \sum_{\varrho_i \neq \lambda} \varepsilon_i \,\mathrm{sgn}\,(\varrho_i - \lambda) + \sum_{\varrho_p=\lambda} \delta_p. \tag{36}$$

Für $\lambda = 0$ ergibt sich nunmehr der Satz 4° ohne weiteres.

19. Aus der Formel (33) wollen wir nunmehr Ausdrücke und Schranken von $\pi(\lambda)$ und $\nu(\lambda)$ herleiten, indem wir von den Relationen Gebrauch machen:

$$2\pi(\lambda) = n - \delta(\lambda) + \sigma(\lambda), \qquad 2\nu(\lambda) = n - \delta(\lambda) - \sigma(\lambda).$$

Ist $2k$ die Gesamtanzahl komplexer Wurzeln von (8), so kann man offenbar unter der Benutzung der Zerlegung (31) und der in ihr verwendeten Bezeichnungen schreiben:

$$n - 2k = \sum_{\varrho_i \neq \lambda} e_i + \sum_{\varrho_p \neq \lambda} e_p + \sum_{\varrho_i=\lambda} e_i + \sum_{\varrho_p=\lambda} e_p.$$

Beachtet man, daß $\delta(\lambda)$ die Gesamtanzahl der $\varrho_i = \lambda$ und $\varrho_p = \lambda$ ist, so folgt weiter

$$n - 2k - \delta(\lambda) = \sum_{\varrho_i \neq \lambda} e_i + \sum_{\varrho_p \neq \lambda} e_p + \sum_{\varrho_i=\lambda} (e_i - 1) + \sum_{\varrho_p=\lambda} (e_p - 1).$$

Addieren bzw. subtrahieren wir hiervon die entsprechenden Therme von (36) und dividieren die entstehenden Relationen durch 2, so ergibt sich:

$$\pi(\lambda) - k = \sum_{\varrho_i>\lambda} \frac{e_i + \varepsilon_i}{2} + \sum_{\varrho_i<\lambda} \frac{e_i - \varepsilon_i}{2} + \sum_{\varrho_i=\lambda} \frac{e_i - 1}{2} + \sum_{\varrho_p \neq \lambda} \frac{e_p}{2} + \sum_{\varrho_p=\lambda} \frac{e_p + \delta_p - 1}{2}; \tag{37}$$

$$\nu(\lambda) - k = \sum_{\varrho_i>\lambda} \frac{e_i - \varepsilon_i}{2} + \sum_{\varrho_i<\lambda} \frac{e_i + \varepsilon_i}{2} + \sum_{\varrho_i=\lambda} \frac{e_i - 1}{2} + \sum_{\varrho_p \neq \lambda} \frac{e_p}{2} + \sum_{\varrho_p=\lambda} \frac{e_p - \delta_p - 1}{2}. \tag{38}$$

20. Aus diesen Darstellungen ergibt sich als die gemeinsame *obere Schranke* von $\pi(\lambda)-k$ und $\nu(\lambda)-k$:

$$\sum_{\varrho_i \neq \lambda} \frac{e_i+1}{2} + \sum_{\varrho_i=\lambda}\left[\frac{e_i}{2}\right] + \sum_{\varrho_p \neq \lambda}\left[\frac{e_p+1}{2}\right] + \sum_{\varrho_p=\lambda} \frac{e_p}{2},$$

und dies läßt sich in der Form zusammenschreiben,

$$\sum_{\varrho \neq \lambda}\left[\frac{e+1}{2}\right] + \sum_{\varrho=\lambda}\left[\frac{e_0}{2}\right], \tag{39}$$

wo e die Ordnungen aller reellen Elementarteiler durchläuft, die nicht für $\varrho=\lambda$ verschwinden, während e_0 durch die Ordnungen aller für $\varrho=\lambda$ verschwindender Elementarteiler läuft.

Analog erhält man aus (37) und (38) die gemeinsame *untere Schranke* für $\pi(\lambda)-k$ und $\nu(\lambda)-k$:

$$\sum_{\varrho_i \neq \lambda}\left[\frac{e_i}{2}\right] + \sum_{\varrho_i=\lambda} \frac{e_i-1}{2} + \sum_{\varrho_p \neq \lambda} \frac{e_p}{2} + \sum_{\varrho_p=\lambda}\left[\frac{e_p-1}{2}\right].$$

Dies läßt sich aber wieder in der Form zusammenfassen,

$$\sum_{\varrho \neq \lambda}\left[\frac{e}{2}\right] + \sum_{\varrho=\lambda}\left[\frac{e_0-1}{2}\right], \tag{40}$$

wo e bzw. e_0 durch die gleichen Werte laufen wie oben. Zusammenfassend erhalten wir als eine unwesentliche Verallgemeinerung des Satzes 5 den

Satz 5°. *Sind B, C Hermitesche Matrizen n-ter Ordnung, ist $|C| \neq 0$ und sind $\pi(\lambda)$ und $\nu(\lambda)$ bzw. die Anzahlen der positiven und negativen Eigenwerte von $M_\lambda = B - \lambda C$, so sind sowohl $\pi(\lambda)-k$ und $\nu(\lambda)-k$ zwischen den beiden Schranken* (39), (40) *enthalten.*

Für $\lambda=0$ und $\lambda=\pm\infty$ ergeben sich die Behauptungen des Satzes 5.

21. Wir spezialisieren jetzt die Formel (33), indem wir einmal setzen $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\infty$ und sodann $\lambda_1=-\infty$, $\lambda_2=0$. So ergibt sich aus (33):

$$\sigma_B + \sigma_C = 2\sum_{\varrho_i>0} \varepsilon_i + \sum_{\varrho_i=0} \varepsilon_i + \sum_{\varrho_p=0} \delta_p; \tag{41}$$

$$\sigma_B - \sigma_C = -2\sum_{\varrho_i<0} \varepsilon_i - \sum_{\varrho_i=0} \varepsilon_i + \sum_{\varrho_p=0} \delta_p. \tag{42}$$

Setzen wir nun:

$$S_+ = \sum_{\varrho_i>0} \varepsilon_i, \qquad S_- = \sum_{\varrho_i<0} \varepsilon_i; \qquad S_g = \sum_{\varrho_p=0} \delta_p, \qquad S_u = \sum_{\varrho_i=0} \varepsilon_i,$$

so ergibt sich aus (41), (42)

$$S_+ = \tfrac{1}{2}(\sigma_C + \sigma_B - S_g - S_u), \tag{43}$$

$$S_- = \tfrac{1}{2}(\sigma_C - \sigma_B + S_g - S_u). \tag{44}$$

Man beachte nun, daß der Rang von B zugleich derjenige von $C^{-1}B = AB$ ist. Daher ist auch $\delta_B = \delta_{AB}$. Anderseits ist δ_{AB} zugleich die Anzahl der verschiedenen für $\lambda=0$ verschwindenden Elementarteiler von $AB-\lambda E$, und

damit auch nach (9) die Gesamtanzahl der verschwindenden ϱ_i und ϱ_p. Daraus folgt aber:

$$|S_g| + |S_u| \leqq \delta_B. \tag{45}$$

Berücksichtigt man dies, so ergeben sich aus (43), (44) die Schranken (3) und (4) des Satzes 2.

Zugleich sieht man, daß R_{AB}^{+}, R_{AB}^{-} in Satz 2 durch die Anzahlen der Elementarteiler *ungerader Ordnung* von AB mit positiven bzw. negativen Nullstellen ersetzt werden können.

22. Wir beweisen nunmehr den Satz 1. Da die Eigenwerte von AB die gleichen sind wie die von BA und bei der Multiplikation von A oder B mit -1 sich auch die Eigenwerte von AB sich mit -1 multiplizieren, können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß

$$\operatorname{Min}(\pi_A, \nu_A, \pi_B, \nu_B) = \pi_A$$

ist. Ist A regulär, so folgt daher der Satz 1 aus dem über (10) Gesagten. Es sei A singulär. Dann läßt sich eine von einem *positiven* Parameter $t \leqq 1$ abhängige reguläre Hermitesche Matrix $A(t)$ n-ter Ordnung finden, derart, daß für hinreichend kleine positive t

$$\pi_{A(t)} = \pi_A$$

und zugleich

$$A(t) \to A(t \downarrow 0)$$

gilt[6]). Dann gilt auch

$$A(t)\, B \to AB \;(t \downarrow 0)$$

und nach (10)

$$K_{A(t)B} \leqq 2\pi_{A(t)} = 2\pi_A.$$

Da aber die komplexen Eigenwerte von AB für $t \downarrow 0$ Grenzwerte von *komplexen* Eigenwerten von $A(t)B$ sind, ist $K_{AB} \leqq K_{A(t)B}$ und der Satz 1 ist bewiesen, sobald wir gezeigt haben, daß K_{AB} gerade ist. Nun folgt aber für die Hermiteschen Formen A, B aus $\overline{AB} = (BA)'$, da AB, BA und $(BA)'$ die gleichen Eigenwerte haben, daß die komplexen Eigenwerte von AB sich zu Paaren konjugiert komplexer zusammenordnen lassen. Daher ist K_{AB} in der Tat gerade.

23. Wir beweisen jetzt den Satz 3. Ist einmal die auf (5) bezügliche Behauptung bewiesen, so folgt daraus die auf (6) bezügliche Behauptung, wenn man B durch $-B$ ersetzt, da dann σ_B sich mit -1 multipliziert und die positiven Eigenwerte von AB in negative übergehen. Wir können und wollen

[6]) Um $A(t)$ zu bilden, transformiere man die A entsprechende quadratische Form in $x_1, \ldots, x_n$ durch eine reelle reguläre Transformation zwischen den x_ν und den ξ_ν auf die Form:

$$\xi_1^2 + \cdots + \xi_{\pi_A}^2 - \xi_{\pi_A+1}^2 - \cdots - \xi_{\pi_A+\nu_A}^2,$$

subtrahiere $\frac{t}{2}\sum_{\varkappa=1}^{n} \xi_\varkappa^2$ und transformiere sodann zurück auf die x_ν.

dabei ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\sigma_A+\sigma_B \geqq 0$ ist, da man sonst nur A, B bzw. $-A, -B$ zu ersetzen braucht.

Ist nun A regulär, so benützen wir (3) und beachten, daß die Anzahl der verschwindenden Eigenwerte von AB wenigstens gleich $\delta_{AB}=\delta_B$ ist. Addieren wir aber links in (3) die Gesamtordnung des Eigenwerts Null bei AB und rechts δ_B, so ergibt sich gerade die Relation (5).

Es sei nun A singulär. Dann können wir, analog wie in der Nr. 22, eine von einem positiven Parameter $t \leqq 1$ abhängige reguläre Hermitesche Matrix $A(t)$ gleicher Ordnung wie A finden, derart, daß $A(t) \to A(t \downarrow 0)$ und für hinreichend kleine positive t

$$\pi_{A(t)}=\pi_A+\delta_A, \qquad \nu_{A(t)}=\nu_A$$

und daher $\sigma_{A(t)}=\sigma_A+\delta_A$ gilt[7]). Dann folgt aus (3)

$$R^+_{A(t)B} \geqq \tfrac{1}{2}(\sigma_A+\sigma_B+\delta_A-\delta_B)$$

und daher, da die Gesamtordnung der verschwindenden Eigenwerte von $A(t)B$ wenigstens gleich δ_B ist,

$$\overline{R}^+_{A(t)B} \geqq \tfrac{1}{2}(\sigma_A+\sigma_B+\delta_A+\delta_B).$$

Läßt man nun t gegen 0 fallen, so entsprechen in der Grenze den nicht negativen Eigenwerten von $A(t)B$ wenigstens ebenso viele nicht negative Eigenwerte von AB. Deshalb gilt erst recht

$$\overline{R}^+_{A(t)B} \geqq \tfrac{1}{2}(\sigma_A+\sigma_B+\delta_A+\delta_B),$$

womit (5) und damit der Satz 3 vollständig bewiesen ist.

24. Wir beweisen endlich die Formel (16) des Satzes 7, die am Schlusse der Nr. 17 nur unter der Annahme $|C| \neq 0$ bewiesen wurde. Dabei dürfen und wollen wir unbeschadet der Allgemeinheit voraussetzen, daß $\lambda_1=0$, $\lambda_2=p>0$ ist. In der Tat wird der allgemeine Fall auf diesen durch die Transformation $\lambda=\lambda_1+\mu$ zurückgeführt. Dann lautet die zu beweisende Relation:

$$R^*(p)-R^*(0) \geqq \tfrac{1}{2}|\sigma_{B-pC}-\sigma_B|, \tag{46}$$

wobei vorausgesetzt wird, daß $|B| \neq 0$, $|B-pC| \neq 0$ ist. Man betrachte nun das Matrizenbüschel $C-\mu B$. Da hier $|B| \neq 0$ ist, ist darauf nach dem bereits Bewiesenen die Relation (16) anwendbar, und wir wenden sie auf das Intervall $(1/p, \infty)$ an. In der Tat ist nach Voraussetzung weder $1/p$ noch ∞ eine Wurzel von $|C-\mu B|$. Nun ist die Anzahl der reellen Eigenwerte ungerader Ordnung von $C-\mu B$ mit $\mu > \frac{1}{p}$ gleich der entsprechenden Anzahl für von $C-\frac{1}{\lambda}B$ mit $0<\lambda<p$, und dies ist gerade $R^*(p)-R^*(0)$. Daher liefert die Anwendung von (16) auf unser Büschel

$$R^*(p)-R^*(0) \geqq \left|\sigma_{-B}-\sigma_{C-\frac{1}{p}B}\right|. \tag{47}$$

---

[7]) Hierzu braucht man nur in der in Fußnote [6]) angegebenen Konstruktion t durch $-t$ zu ersetzen.

Hier ist aber $\sigma_{-B} = -\sigma_B$ und $\sigma_{C-\frac{1}{p}B} = \sigma_{pC-B} = -\sigma_{B-pC}$, womit (47) in (46) übergeht. Damit ist der Satz 7 vollständig bewiesen, da die auf $D(J)$ bezüglichen Behauptungen in Nr. 17 bereits allgemein bewiesen wurden.

Literatur

[1] AMIR-MOÉZ, ALI R.: Extreme properties of eigenvalues of a Hermitian transformation and singular values of the sum and product of linear transformation. Duke Math. J. **23**, 463–476 (1956). — [2] BROMWICH, T. J.: On a canonical reduction of bilinear forms. Proc. L. M. S. **32**, 321–352 (1900). — [3] FROBENIUS, G.: Über die Elementarteiler der Determinanten. Berliner Sitz.-Berichte **1894**, 31–44. — [4] INGRAHAM, M. H., and K. W. WEGNER: The equivalence of pairs of Hermitian matrices. Trans. A. M. S. **38**, 145–162 (1935). — [5] KLEIN, F.: Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Coordinaten auf eine canonische Form, Inaug.-Diss. Bonn 1868, wieder abgedruckt in Math. Ann. **23**, 539–578 (1884), wieder abgedruckt in F. KLEINS, Ges. Math. Abh., Bd. 1, pp. 7–48. Unsere Zitate beziehen sich auf den letztgenannten Wiederabdruck. — [6] LOEWY, A.: Über die Charakteristik einer reellen quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante. Math. Ann. **52**, 588–592 (1899). — [7] LOEWY, A.: Über Scharen reeller quadratischer und Hermitescher Formen. J. reine u. angew. Math. **122**, 53–72 (1900). — [8] MUTH, P.: Über reelle Äquivalenz von Scharen reeller quadratischer Formen. J. reine u. angew. Math. **128**, 302–321 (1905). — [9] OSTROWSKI, A.: Über Eigenwerte von Produkten Hermitescher Matrizen (HELMUT HASSE zum 60. Geburtstag). Hamb. Math. Abh. **23**, 60–68 (1959). — [10] SEGRE, C.: Un nuovo campo di ricerche geometriche. Atti della reale acad. di Torino **26**, 47–49 (1890). — [11] SYLVESTER, J. J.: The algebraical theory of the secular-inequality determinantive equation generalized. Phil. Magazine **6**, 214–216 (1853), wieder abgedruckt in Coll. Math. Papers, Vol. I, pp. 634–636. — [12] STICKELBERGER, L.: Über Scharen von bilinearen und quadratischen Formen. J. reine u. angew. Math. **86**, 20–43 (1879). — [13] TROTT, G. R.: On the canonical form of a non singular pencil of Hermitian matrices. Amer. J. Math. **56**, 359–371 (1934). — [14] TURNBULL, H. W.: On the equivalence of pencils of Hermitian Forms. Proc. L. M. S. (2) **39**, 232–248 (1935). — [15] WEIERSTRASS, K.: Über ein die homogenen Functionen zweiten Grades betreffendes Theorem, nebst Anwendung desselben auf die Theorie der kleinen Schwingungen. Monatsber. Akad. Wiss. Berlin **1858**, 207–220. — [16] WEIERSTRASS, K.: Zur Theorie der bilinearen und quadratischen Formen. Monatsber. Akad. Wiss. Berlin **1868**, 310–338.

Mathematische Anstalt der Universität Basel (Schweiz)

(Eingegangen am 25. Juni 1958)