## Werk

**Label:** Periodical issue

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0072|log54

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

T 2.

Postverlagsort Berlin

# MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG VON

E. KAMKE
TÜBINGEN

R. NEVANLINNA
HELSINKI

E. SCHMIDT †
BERLIN

F. K. SCHMIDT
HEIDELBERG

HERAUSGEGEBEN VON

H. WIELANDT
TÜBINGEN

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT

W. BLASCHKE L. FEJÉR † A. E. INGHAM H. KNESER
W. MAGNUS O. PERRON G. PICKERT

72. BAND, 5. (SCHLUSS-)HEFT

(ABGESCHLOSSEN AM 9. FEBRUAR 1960)

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1960

Math. Z.

Niedersächsische Staats- u.

Die **MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT**

wurde im Jahre 1918 von *L. Lichtenstein* unter der Mitwirkung von *K. Knopp*, *E. Schmidt* und *I. Schur* gegründet und herausgegeben. Nach dem Tode Lichtensteins übernahm *K. Knopp* 1933 die Herausgabe. Die Schriftleitung ergänzte sich 1933 durch *E. Kamke* und *F. K. Schmidt*, 1936 durch *R. Nevanlinna* und 1950 durch *H. Wielandt*, der 1952 die Herausgabe übernahm.

---

Die Zeitschrift erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials. Der Preis des Bandes beträgt DM 96.—.

Die Mathematische Zeitschrift ist durch jede Buchhandlung zu beziehen.

Die Mathematische Zeitschrift dient der Pflege der reinen Mathematik, doch werden auch Beiträge aus den Gebieten der theoretischen Physik und Astronomie Aufnahme finden, soweit sie mathematisch von Interesse sind. Besprechungen, Aufgaben u. dgl. werden nicht zugelassen.

Grundsätzlich dürfen nur Arbeiten eingereicht werden, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Der Autor verpflichtet sich, sie auch nachträglich nicht an anderer Stelle zu publizieren. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung durch den Verlag geht das Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder einschließlich des Rechts der fotomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung an den Verlag über. Jedoch wird gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch nach Maßgabe des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens die Anfertigung einer fotomechanischen Vervielfältigung gestattet. Wenn für diese Zeitschrift kein Pauschalabkommen mit dem Verlag vereinbart worden ist, ist eine Wertmarke im Betrage von DM 0.30 pro Seite zu verwenden. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.*

Die Mitarbeiter erhalten von ihren Arbeiten 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Manuskriptsendungen sind zu richten an die Mitglieder der unterzeichneten Redaktion. Die Herren Mitarbeiter werden im Interesse einer raschen Drucklegung gebeten, die Arbeiten in gut lesbarer Niederschrift einzureichen. Für den Text ist, wenn irgend möglich, Maschinenschrift, für die mathematischen Formeln jedoch nur Handschrift zu verwenden. Etwaige Abbildungen sind auf einem besonderen Blatt zu zeichnen. Die in den Formeln etwa vorkommenden griechischen oder deutschen Buchstaben (Fraktur) sowie andere der Gefahr von Verwechselungen ausgesetzte Zeichen, z.B. die Landauschen Symbole $o$ und $O$, sind stets besonders (etwa mit verschiedenfarbigen Stiften) zu kennzeichnen. Die Fußnoten sind fortlaufend zu numerieren, bei Zitaten Erscheinungsjahr und Seitenzahlen anzugeben.

Wenn zu einer bereits gedruckten Arbeit eine Berichtigung nötig wird, wollen die Herren Verfasser dem Herausgeber hiervon unverzüglich Mitteilung machen. Die Berichtigungen sollen dann am Schlusse eines Bandes gesammelt aufgenommen werden.

REDAKTION DER MATHEMATISCHEN ZEITSCHRIFT:

**E. Kamke**, Tübingen, Frischlinstraße 27,

**R. Nevanlinna**, Helsinki (Finnland), Mäntytie 5 B,

**F. K. Schmidt**, Heidelberg, Mathematisches Institut,

**H. Wielandt**, Tübingen, Ob dem Viehweidle 21 b.

**Springer-Verlag OHG** — Berlin-Wilmersdorf, Heidelberger Platz 3 — Heidelberg, Neuenheimer Landstraße 28/30. — Göttingen, Weender Straße 60.

---

72. Band **Inhalt** 5. (Schluß-)Heft

Seite

Gillman, L., and C. W. Kohls, Convex and pseudoprime ideals in rings of continuous functions . . . . . 399

Dembowski, P., Freie und offene projektive Ebenen . . . . . 410

Fleischer, I., Über Dualität in lineartopologischen Moduln . . . . . 439

Sabidussi, G., Graph Multiplication . . . . . 446

Thompson, J. G., A Special Class of Non-Solvable Groups . . . . . 458

Rhoades, B. E., Total Comparison among some totally Regular Hausdorff Methods 463

GILLMAN, L., and C. W. KOHLS
Math. Zeitschr. 72, 399—409 (1960)

# Convex and pseudoprime ideals in rings of continuous functions*)

By
LEONARD GILLMAN[1]) and CARL W. KOHLS

## 1. Introduction

A recent development in the study of the ring $C = C(X)$ of all continuous real-valued functions on the topological space $X$ has been the investigation of its special properties as a lattice-ordered ring. The fact that the order structure of $C(X)$ is intimately related with its prime ideal structure was first recognized and exploited in [3]. The main results contained in [3] have been reproduced in [1]. The basic theorem is that every prime ideal $P$ in $C$ is absolutely convex (defined in 2.3 below) and that $C/P$ is a totally ordered ring [1, 5.5].

In this paper, we shall present several theorems that disclose further connections between the two structures mentioned. The main results are Theorem 4.1 and Theorem 4.7. We proceed to indicate some of their content.

According to [1, 14B.2], an ideal in $C(X)$ is a $z$-ideal (2.7) if and only if it is an intersection of prime $z$-ideals. Now, every $z$-ideal is absolutely convex. Corresponding to the quoted result, we shall prove in Theorem 4.7 that an ideal is absolutely convex if and only if it is an intersection of "pseudoprime" absolutely convex ideals. As an application of this theorem, we obtain a new characterization of $F$-spaces (6.2).

In [1, 2.9] and [3, 2.20], the following properties are shown to be equivalent for a $z$-ideal $I$ — (i): $I$ contains a prime ideal; (ii): $I$ is pseudoprime; (iii): the prime ideals containing $I$ form a chain; (iv): $C/I$ is a totally ordered ring; (v): $I$ is prime. We shall prove in Theorem 4.1 that (i), (ii), and (iii) are equivalent for *arbitrary* $I$. Moreover, if (iv) is modified so as to refer to the smallest convex ideal containing $I$, and (v) to refer to the radical of $I$, then the resulting statements are also equivalent with (i), (ii), and (iii). Since a $z$-ideal is convex and coincides with its radical, the new result is a generalization of the earlier one.

Additional results include the construction of a pseudoprime ideal that is not convex (3.6) and one that is not primary (4.5), and the representation of an arbitrary ideal as an intersection of ideals each contained in just one maximal ideal (5.2).

In notation and terminology, we follow [1]; however, in order to make the paper reasonably self-contained, many of the required definitions will be

*) Presented to the American Mathematical Society, April 18, 1959.

[1]) Fellow of the John Simon Guggenheim Memorial Foundation. The authors wish to thank M. HENRIKSEN for some helpful comments.

repeated here. When deriving algebraic or order properties of $C(X)$, we make the tacit assumption that the space $X$ is completely regular; this involves no loss of generality [*1*, 3.9]. For some results about prime ideals not contained in [*1*], consult [*3*] and [*4*].

## 2. Convex and absolutely convex ideals

**2.1.** Let $A$ be a partially ordered commutative ring. An ideal $I$ in $A$ is *convex* if $0 \leqq a \leqq b$ and $b \in I$ implies $a \in I$. Convexity is the necessary and sufficient condition that $A/I$ be partially ordered, under the definition: $I(a) \geqq 0$ provided that $I(a) = I(x)$ for some $x \geqq 0$ [*1*, 5.2]. It is this induced order that will always be understood in references to partially ordered residue class rings.

**2.2.** It is obvious from the above definition that a canonical homomorphism with convex kernel preserves order. From this, it follows that the total preimage of a convex ideal is convex. Conversely, the image of a convex ideal containing the kernel is convex [*1*, 14.3(b)]. Hence we have:

PROPOSITION. *If $I$ is a convex ideal in a partially ordered ring $A$, then the correspondence $J \to J/I$ is one-one between the convex ideals of $A$ that contain $I$ and the convex ideals in $A/I$.*

**2.3.** Throughout the rest of this section, we assume that $A$ is not only partially ordered, but lattice-ordered. In this case, if $I$ is convex, then $|a| \in I$ implies $a \in I$. Moreover, the stronger property of absolute convexity can be defined: $I$ is *absolutely convex* if $|a| \leqq |b|$ and $b \in I$ implies $a \in I$. Clearly, absolute convexity implies convexity; in fact, $I$ is absolutely convex if and only if $I$ is convex and $a \in I$ implies $|a| \in I$ [*1*, 5.3]. Absolute convexity is the necessary and sufficient condition that the canonical homomorphism of $A$ onto $A/I$ be a lattice homomorphism [*1*, 5.3].

**2.4.** It is evident that arbitrary intersections of [absolutely] convex ideals are [absolutely] convex. Hence, for each ideal $I$, we can define

$$\mathrm{c}(I) = \textit{smallest convex ideal containing } I,$$

and

$$\mathrm{ac}(I) = \textit{smallest absolutely convex ideal containing } I.$$

(These ideals may be improper.)

**2.5.** For any ideal $I$ in a lattice-ordered ring $A$, we have

$$\mathrm{c}(I) = \{a \in A\colon\ b_1 \leqq a \leqq b_2 \textit{ for some } b_1, b_2 \in I\}.$$

To see this, suppose that $a$ belongs to $J$, the set in question, and $s \in A$; then $(s \vee 0)a \in J$ and $(s \wedge 0)a \in J$, whence $sa \in J$. The rest of the proof is routine.

In case the formula $|ab| = |a| \cdot |b|$ holds in $A$, then

$$\mathrm{ac}(I) = \{a \in A\colon\ |a| \leqq \textstyle\sum |b_i| \textit{ for some } b_1, \ldots, b_n \in I\}.$$

The proof is straightforward.

**2.6.** Clearly, the union of any *chain* of [absolutely] convex ideals is [absolutely] convex. Moreover, the sum of any two absolutely convex ideals is absolutely convex — but the corresponding proposition for *convex* ideals is false; the details follow.

PROPOSITION. *The sum of any two absolutely convex ideals in a lattice-ordered ring is absolutely convex*[2].

It follows from this result, of course, that an arbitrary sum of absolutely convex ideals is absolutely convex.

**2.7.** An ideal $I$ in $C(X)$ is a *z-ideal* if for all $f$, $\mathbf{Z}(f)\in\mathbf{Z}[I]$ implies $f\in I$. Clearly, intersections of $z$-ideals are $z$-ideals. Now, if $|f|\leqq|g|$, then $\mathbf{Z}(f)=\mathbf{Z}(fg)$; it follows that every $z$-ideal is absolutely convex. The sum of two $z$-ideals is a $z$-ideal [*1*, 14.8]; also, the sum of two prime ideals in $C(X)$ is prime [*1*, 14B.*1*]. We remark that, unlike the proof for absolutely convex ideals, the proofs of these last two assertions seem to depend strongly upon properties of rings of functions and properties of the Stone-Čech compactification $\beta X$.

**2.8.** EXAMPLE. *A convex ideal and a z-ideal in $C(\mathbf{R})$ whose sum is not convex.* The ideal $I=(\mathbf{i})$, where $\mathbf{i}(x)=x$, is convex [*1*, 5E.*2*]; and

$$J=\{f\in C(\mathbf{R}):\ f(x)=0 \text{ for all } x>0\}$$

is a $z$-ideal. Obviously, $|\mathbf{i}|\equiv\mathbf{i}\pmod J$, so that $|\mathbf{i}|\in(I,J)$. Consider the following function $g\in C(\mathbf{R})$:

$$g(x)=|x|\cdot|\sin 1/x| \quad \text{for} \quad x\neq 0, \qquad g(0)=0.$$

Evidently, $\mathbf{0}\leqq g\leqq|\mathbf{i}|$. Hence, if $(I,J)$ were convex, we would have $g\in(I,J)$, and thus $g\equiv h\mathbf{i}\pmod J$ for some $h\in C(\mathbf{R})$. But then $h(x)=|\sin 1/x|$ for all $x>0$, whence $h$ is not continuous at 0.

This example serves to illustrate that a homomorphic image of a convex ideal (not containing the kernel) need not be convex: under the canonical homomorphism of $C(\mathbf{R})$ onto $C(\mathbf{R})/J$, the image of the convex ideal $(\mathbf{i})$ is the same as that of the nonconvex ideal $(I,J)$, and therefore is not convex (2.2).

**2.9.** If $I$ is convex and $a\equiv|a|\pmod I$, then $I(a)\geqq 0$. In case $I$ is absolutely convex, then, conversely, $I(a)\geqq 0$ implies $a\equiv|a|\pmod I$; indeed, this circumstance is characteristic of absolutely convex ideals [*1*, 5.3]. It leads to the following result.

**2.10.** PROPOSITION. *Let $I$ be the intersection of a family of absolutely convex ideals $I_\alpha$ in a lattice-ordered ring $A$.*

(a) *$I(a)\geqq 0$ if and only if $I_\alpha(a)\geqq 0$ for every $\alpha$.*

(b) *If the ideals $I_\alpha$ form a chain, and if $A/I_\alpha$ is totally ordered for every $\alpha$, then $A/I$ is totally ordered, and $I(a)>0$ if and only if $I_\alpha(a)>0$ for some $\alpha$.*

PROOF. (a) This follows directly from the preceding remark.

(b) If $A/I$ is not totally ordered, there exists $a$ such that $a-|a|\notin I$ and $a+|a|\notin I$. Hence there exist $\alpha$ and $\alpha'$ such that $a-|a|\notin I_\alpha$ and $a+|a|\notin I_{\alpha'}$. Say $I_\alpha<I_{\alpha'}$. Then $A/I_\alpha$ is not totally ordered. The final statement in (b) follows from (a).

[2] For a proof, see p. 222 of BIRKHOFF, Lattice Theory, New York, 1948.

### 3. Pseudoprime ideals

**3.1.** Let $A$ be an arbitrary commutative ring (not necessarily ordered). We recall that an ideal $P$ in $A$ is *prime* provided that for $a, b \in A$, $ab \in P$ implies $a \in P$ or $b \in P$. Let us call an ideal $I$ *pseudoprime* if for $a, b \in A$,

$$ab = 0 \quad \textit{implies} \quad a \in I \ \textit{or} \ b \in I.$$

Trivially, all prime ideals are pseudoprime. Evidently, any ideal containing a pseudoprime ideal is pseudoprime. In particular, any ideal containing a prime ideal is pseudoprime.

**3.2.** We shall prove in 4.1 that the converse to this last statement holds in $C(X)$. However, the converse does not hold in general. For example, in the ring $\mathbf{Z}_8$ of integers modulo 8, the ideal $J$ consisting of the classes $\overline{0}$ and $\overline{4}$ is pseudoprime, but it contains no prime ideal.

An obvious induction shows that if $P$ is prime, then for any $n$, $a_1 a_2 \dots a_n \in P$ implies that some $a_k \in P$. It is of some interest to notice that the attempt at a corresponding induction for pseudoprime ideals breaks down at once. In the above example of $\mathbf{Z}_8$, for instance, $\overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2} = \overline{0}$, but $\overline{2} \notin J$. In fact, we have the following result.

**3.3.** PROPOSITION. *An ideal $I$ in a commutative ring contains a prime ideal if and only if, for every $n$,*

(A) $$a_1 a_2 \dots a_n = 0 \quad \textit{implies that some} \ a_k \in I.$$

PROOF. The necessity is clear. Conversely, if (A) holds, consider the set $S$ of all products $b_1 b_2 \dots b_n$, for $b_k \notin I$. Then $S$ is closed under multiplication, and, by (A), $0 \notin S$. It follows from the maximal principle that there exists a prime ideal disjoint from $S$, and hence contained in $I$ (see, e.g., [*1*, 0.16]).

**3.4.** It is easily seen that the intersection of any chain of prime ideals is prime. Likewise, intersections of chains of pseudoprime ideals are pseudoprime.

**3.5.** Suppose, now, that $A$ is a lattice-ordered ring and that the formula $a^2 = |a|^2$ holds in $A$, i.e.,

$$(a - |a|)(a + |a|) = 0$$

for all $a$. (In particular, $C(X)$ is such a ring.) If $I$ is a pseudoprime ideal, then $a - |a| \in I$ or $a + |a| \in I$. Thus, every *convex* ideal $J$ containing a pseudoprime ideal is pseudoprime and *absolutely* convex, and $A/J$ is *totally* ordered.

It follows further that if a principal ideal $(a)$ is an intersection of pseudoprime ideals, then $|a| \in (a)$; similarly, if $(|a|)$ is such an intersection, then $a \in (|a|)$.

**3.6.** We have remarked that every *prime* ideal in $C(X)$ is absolutely convex. It will now be shown that, in contrast, a pseudoprime ideal need not be convex. A consequence of this result is that the totally ordered valuation rings $C/P$ ($P$ a nonmaximal, prime $z$-ideal) studied in [*3*, § 3] are not representative of all rings of the form $C/P$.

THEOREM[3]. *If a point $p \in X$ is the limit of a sequence of distinct points, then there exists a prime ideal $P < \boldsymbol{M}_p$ such that*

(a) *for each $g \in \boldsymbol{M}_p - P$, the pseudoprime ideal $(P, g)$ is nonconvex*
*— or, equivalently,*

(b) *every nonzero principal ideal in $C(X)/P$ is nonconvex.*

PROOF. Define $S = \{s_n\}_{n \in \mathbf{N}}$, where $(s_n)_{n \in \mathbf{N}}$ is the postulated sequence converging to $p$. Express $S$ as the union of disjoint infinite sets $A_k (k \in \mathbf{N})$. Let $\mathscr{F}$ denote the filter of all subsets of $S$ that include all but a finite number of points of $A_k$ for all but finitely many $k$. Let $\mathscr{U}$ be any ultrafilter containing $\mathscr{F}$. Then

(B) *If $U \in \mathscr{U}$, then $U \cap A_k$ is infinite for infinitely many $k$.*

Next, define

$$P = \{f \in C(X) : \boldsymbol{Z}(f) \cap S \in \mathscr{U}\}. \tag{C}$$

It is easily seen that $P$ is a prime $z$-ideal in $C(X)$; and $P < \boldsymbol{M}_p$. (Cf. [*4*, 3.1 and 3.2] and [*1*, 4.12].)

Consider, now, any function $g \in \boldsymbol{M}_p - P$. Since $g \notin P$, and $P$ is a $z$-ideal, we have $\boldsymbol{Z}(g) \cap S \notin \mathscr{U}$. Therefore

$$S - \boldsymbol{Z}(g) \in \mathscr{U}. \tag{D}$$

Now choose $f \in C(X)$ such that

$$f(s_n) = g(s_n)/k \quad \text{for} \quad s_n \in A_k. \tag{E}$$

(Define $f(p) = 0$, and extend from the compact set $S \cup \{p\}$. More generally, see [*1*, 3L.2].) Then $0 \leqq f(s_n) \leqq |g(s_n)|$, and so we may assume that $\mathbf{0} \leqq f \leqq |g|$. Consequently, if $(P, g)$ were convex, and hence absolutely convex, we should have $f \in (P, g)$. We now prove that this is impossible.

If $f \in (P, g)$, then there exists $h \in C(X)$ such that $f \equiv hg \pmod{P}$, i.e.,

$$\{s_n : f(s_n) = h(s_n)\, g(s_n)\}$$

is a member of $\mathscr{U}$. Then by (D), the set

$$U = \{s_n \notin \boldsymbol{Z}(g) : f(s_n) = h(s_n)\, g(s_n)\}$$

belongs to $\mathscr{U}$. Consider any $k \in \mathbf{N}$. For $s_n \in U \cap A_k$, we have, from (E),

$$g(s_n) \neq 0, \quad \text{and} \quad g(s_n)/k = h(s_n)\, g(s_n),$$

whence $h(s_n) = 1/k$. Thus by (B), there exist distinct integers $k_1$ and $k_2$ such that $h$ assumes each of the values $1/k_1$ and $1/k_2$ infinitely often on $S$. But then $h$ cannot be continuous at $p$.

---

[3] By [*3*, 3.4] (or [*1*, 14.24]), any ring $C/P$ of the type exhibited in the theorem possesses an ideal that is finitely generated but not principal. We have shown that the ideals with a minimal basis of two elements are never convex either; but the proof is quite involved and will be omitted.

**3.7.** If, in the above construction, we express each $A_k$ as a union of disjoint infinite sets $A_{k,n}$ $(n \in \mathbf{N})$, and define $B_n = \cup_k A_{k,n}$, then each $B_n$ meets every member of $\mathscr{F}$, so that $\mathscr{F} \cup \{B_n\}$ is contained in some ultrafilter; since the sets $B_n$ $(n \in \mathbf{N})$ are disjoint, the ultrafilters are distinct for distinct $n$. Thus, $\mathscr{F}$ is contained in infinitely many ultrafilters. It follows that $\mathscr{F}$ is contained in $2^{\mathfrak{c}}$ ultrafilters (see, e.g., [*1*, 9H.*2*]). Now, in many special cases, the correspondence $\mathscr{U} \to P$ defined by (C) is one-one [*1*, 14G, H, I]. Hence, in such cases, we can conclude that $\boldsymbol{M}_p$ contains $2^{\mathfrak{c}}$ prime ideals $P$ satisfying the conclusions of the theorem.

## 4. The main results

**4.1.** We shall now show that the various concepts discussed so far are closely related in $C(X)$, indicating that $C(X)$ possesses a rather special structure as a lattice-ordered ring.

The radical of an ideal $I$ is denoted by $\mathrm{R}(I)$:

$$\mathrm{R}(I) = \textit{intersection of all prime ideals containing } I.$$

THEOREM. *For any ideal $I$ in $C(X)$, the following statements are equivalent.*

(1) *$I$ contains a prime ideal.*

(2) *$I$ is pseudoprime.*

(3) *For every convex ideal $J \supset I$, $C/J$ is a totally ordered ring.*

(4) *$C/\mathrm{c}(I)$ is a totally ordered ring.*

(5) *The convex ideals containing $I$ form a chain.*

(6) *The prime ideals containing $I$ form a chain.*

(7) *$\mathrm{R}(I)$ is prime.*

(8) *$C/\mathrm{R}(I)$ is a totally ordered ring.*

PROOF. (1) *implies* (2). This was noted in 3.1.

(2) *implies* (3). This was noted in 3.5.

(3) *implies* (4). Trivial.

(4) *implies* (5). As in any totally ordered ring, the convex ideals in $C/\mathrm{c}(I)$, being symmetric intervals, form a chain. By 2.2, the convex ideals containing $\mathrm{c}(I)$ form a chain. But these latter are the same as the convex ideals containing $I$.

(5) *implies* (6). As already noted, every prime ideal in $C$ is convex.

(6) *implies* (7). As already noted, the intersection of any chain of prime ideals is prime.

(7) *implies* (1). Let $Q$ be a prime $z$-ideal contained in the prime ideal $\mathrm{R}(I)$ [*1*, 14.7]. We prove that $Q < I$. Let $f \in Q$. To show that $f \in I$, we may assume that $|f| \leqq \mathbf{1}$ [*1*, 2A]. Put

$$h = \sum_{n \in \mathbf{N}} \mathbf{2}^{-n} |f|^{1/n} \tag{F}$$

Then $h$ is defined as a continuous function (because of the uniform convergence), and, obviously, $\boldsymbol{Z}(h) = \boldsymbol{Z}(f)$. So $h$ belongs to the $z$-ideal $Q$, and, therefore,

$h \in \mathrm{R}(I)$. As is well known, this means that $h^n \in I$ for some $n$. But we have

$$2^{-2n}|f|^{1/2n} \leqq h,$$

so that

$$2^{-2n^2}|f|^{\frac{1}{2}} \leqq h^n. \tag{G}$$

By [*1*, 1D.*3*], $f$ is a multiple of $h^n$. Therefore $f \in I$.

This establishes the equivalence of propositions (1)—(7). Since $\mathrm{R}(I) = \mathrm{c}(\mathrm{R}(I)) = \mathrm{R}(\mathrm{R}(I))$, the equivalence of (4) with (7) yields their equivalence with (8).

**4.2.** A number of additional propositions may be deduced immediately from Theorem 4.1: (a) A pseudoprime ideal in $C$ is prime if and only if it coincides with its radical. (b) If $I$ is an intersection of prime ideals in $C$, then $I$ is prime if and only if $C/I$ is a totally ordered ring. (c) A convex ideal $I$ in $C$ is pseudoprime if and only if $C/I$ is a totally ordered ring. (d) If $I$ is a convex ideal in $C$, and $C/I$ is a totally ordered ring, then $C/I$ has a prime radical. (This last statement generalizes the result that (5) implies (4) in [*3*, 2.20].)

**4.3.** Since a convex pseudoprime ideal in $C(X)$ is absolutely convex, we get:

(H) *If $I$ is a convex ideal in $C(X)$ such that $C/I$ is a totally ordered ring, then $I$ is absolutely convex*

— in other words, the canonical homomorphism of $C$ onto a totally ordered ring is always a lattice homomorphism.

This need not hold in a general ring, as is shown by the example given in [*1*, 5B.*4*]: $A$ is the direct sum of $\mathbf{R}$ with itself, with

$$\{(x, y): 0 \leqq y \leqq x\}$$

as the set of elements $\geqq 0$, and $I = \{(0, y): y \in \mathbf{R}\}$; then $I$ is convex but not absolutely convex, yet $A/I$ is totally ordered.

From (H) and 2.10, we deduce that if $\{I_\alpha\}$ is a chain of convex ideals in $C$, with each $C/I_\alpha$ a totally ordered ring, then $C/\bigcap I_\alpha$ is a totally ordered ring. It does not seem easy to obtain this result directly, since the functions selected as in 2.1 are not known to be independent of $\alpha$.

**4.4.** From the equivalence of (1) with (6), one can deduce various facts about the lattice of ideals in $C$. For instance, an ideal cannot be contained in precisely the prime ideals in one chain without also containing a prime ideal. This implies, in particular, that an ideal contained properly in a minimal prime ideal is contained in at least two noncomparable prime ideals.

**4.5.** Recall that an ideal $Q$ in a commutative ring $A$ is *primary* provided that for $a, b \in A$, $ab \in Q$ implies that $a \in Q$ or some power of $b$ belongs to $Q$. It is a well known fact that the radical of a primary ideal is prime. Thus, by Theorem 4.1, every primary ideal in $C(X)$ is pseudoprime. In contrast, we have:

THEOREM. *Let $p \in X$, let $P$ be a nonmaximal, prime $z$-ideal contained in $\boldsymbol{M}_p$, and let $f \in \boldsymbol{M}_p - P$; then the pseudoprime ideal $(P, f)$ in $C(X)$ is not primary.*

PROOF. We begin with the following observation:

(I) *If $Z \in \boldsymbol{Z}[P]$, then $p \in \mathrm{cl}(Z - \boldsymbol{Z}(f))$.*

For if the conclusion is false, then there exists a zero-set-neighborhood $V$ of $p$ disjoint from $Z - \boldsymbol{Z}(f)$. Since $P$ is prime, $V \in \boldsymbol{Z}[P]$ [*1*, 4I.*4*]. We then have $\boldsymbol{Z}(f) \supset V \cap Z \in \boldsymbol{Z}[P]$, whence $f$ belongs to the $z$-ideal $P$, contrary to hypothesis.

In considering the ideal $(P, f)$, we may assume, as before, that $|f| \leqq \mathbf{1}$ [*1*, 2A]. Define $h$ by (F); then $\boldsymbol{Z}(h) = \boldsymbol{Z}(f)$. Since $f \in \boldsymbol{M}_p$, we have $f(p) = 0 = h(p)$. Next, define $g$ as follows:

$$g(x) = f(x)/h(x) \quad \text{for } x \notin \boldsymbol{Z}(h),$$
$$g(x) = 0 \quad \text{for } x \in \boldsymbol{Z}(h).$$

From (G) (with $n = 1$), we see that $|g(x)| \leqq 4\,|f(x)|^{\frac{1}{2}}$ for each $x \in X$; this implies that $g$ is continuous everywhere on $X$. Evidently, $gh = f \in (P, f)$. We prove that $(P, f)$ is not primary by showing that $g \notin (P, f)$ and that $h^n \notin (P, f)$ $(n \in \mathbf{N})$.

If $g \in (P, f)$, then there exists $k \in C(X)$ such that $g \equiv kf \pmod{P}$, whence there exists $Z \in \boldsymbol{Z}[P]$ with $g(x) = k(x)\, f(x)$ for all $x \in Z$. For $x \in Z - \boldsymbol{Z}(f)$, then, $k(x)\, h(x) = 1$. By (I), $k(p)\, h(p) = 1$, contradicting $h(p) = 0$.

If $h^n \in (P, f)$, then, as above, there exists $l \in C(X)$ and $W \in \boldsymbol{Z}[P]$ such that for all $x \in W$, $h^n(x) = l(x)\, f(x)$; by (G), $l(x)\, f(x) \geqq 2^{-2n^2} |f(x)|^{\frac{1}{2}}$. For $x \in W - \boldsymbol{Z}(f)$ this becomes $|l(x)| \cdot |f(x)|^{\frac{1}{2}} \geqq 2^{-2n^2}$, yielding a contradiction as before.

**4.6.** On the other hand, there exist primary ideals in $C$ (or in $C/P$) that are not prime. Let $a$ be any positive non-unit in $C/P$ ($P$ a prime ideal in $C$), and consider the set

$$I = \bigcap_{n \in \mathbf{N}} \{b \in C/P\colon\ |b| < a^{1-1/n}\}.$$

It is easy to see that $I$ is an ideal in $C/P$ and that $I$ is not prime. But $I$ is primary. For, suppose that $bc \in I$, while $b \notin I$. Then $|b| \geqq a^{1-1/m}$ for some $m$. But for all $n$, we have $|bc| < a^{1-1/mn}$ and hence $|c| < a^{1/m-1/mn}$. Therefore $c^m \in I$.

**4.7.** We have quoted (in § 1) the theorem that an ideal in $C(X)$ is a $z$-ideal if and only if it is an intersection of prime $z$-ideals. Now, we know that any intersection of (absolutely) convex pseudoprime ideals in $C(X)$ is absolutely convex. Thus, we are led to ask whether the converse to this last assertion s also true. That it is indeed true is the content of the next theorem[4]).

THEOREM. *An ideal $I$ in $C(X)$ is absolutely convex if and only if it is an intersection of (absolutely) convex pseudoprime ideals.*

[4]) This and Corollary 4.8 can also be proved by combining 4.1 with Theorems 12 and 14 of BIRKHOFF and PIERCE: Lattice-ordered rings, An. Acad. Brasil. Ci. **28**, 41–69 (1956).

PROOF. We are to prove the necessity: given that $I$ is absolutely convex, and given any $f \notin I$, we have to show that there exists a convex pseudoprime ideal containing $I$ but not $f$. By the maximal principle, there exists an ideal $P$ that is maximal in the class of absolutely convex ideals containing $I$ but not $f$. We shall prove that $P$ is pseudoprime. Suppose, on the contrary, that there exist $g \notin P$ and $h \notin P$ such that $gh = \mathbf{0}$. Then $f \in \operatorname{ac}((P,g))$ and $f \in \operatorname{ac}((P,h))$. By 2.5, there exist $p_i \in P$ and $s_i \in C$ such that

$$|f| \leqq \sum |p_i + s_i g|,$$

and there exist $q_j \in P$ and $t_j \in C$ such that

$$|f| \leqq \sum |q_j + t_j h|.$$

Now, for each $x \in X$, either $g(x) = 0$ or $h(x) = 0$. Consequently, for each $x \in X$,

$$|f(x)| \leqq \sum |p_i(x)| \quad \text{or} \quad |f(x)| \leqq \sum |q_j(x)|.$$

Therefore

$$|f| \leqq \sum |p_i| + \sum |q_j|.$$

Since $P$ is absolutely convex, this implies $f \in P$, a contradiction.

**4.8.** From Theorem 4.1 (or from 3.5), we obtain:

COROLLARY. *If $I$ is an absolutely convex ideal in $C(X)$, so that $C/I$ is a lattice-homomorphic image of $C$, then $C/I$ is a subdirect sum of totally ordered rings*[5]).

**4.9.** COROLLARY. *Let $I$ be an absolutely convex ideal in $C(X)$, and let $f \notin I$. There exists a prime ideal $Q$ such that $Q(|f|) > Q(g)$ for every $g \in I$.*

PROOF. By Theorem 4.7, there exists a pseudoprime ideal $P$ containing $I$ but not $f$; and by Theorem 4.1, $P$ contains a prime ideal $Q$. The ideal $(I, Q)$ is convex (2.6), and so its image modulo $Q$ is an interval in the totally ordered ring $C/Q$ (2.2). Since $f \notin (I, Q)$, $Q(f)$ lies outside this interval.

**4.10.** In connection with Theorem 4.1, we notice that not every ideal in $C(X)$ is an intersection of pseudoprime ideals. In fact, we have:

PROPOSITION. *Let $A$ be a lattice-ordered ring in which the formula $a^2 = |a|^2$ holds. If an ideal $I$ is an intersection of pseudoprime ideals, then $\mathrm{c}(I) = \operatorname{ac}(I)$.*

PROOF. Let $a \in \mathrm{c}(I)$, so that, by 2.5, $b \leqq a \leqq c$ for some $b, c \in I$. Then $b \vee 0 \leqq a \vee 0 \leqq c \vee 0$. From 3.5, it follows that $2(b \vee 0) = b + |b| \in I$, and, similarly, $2(c \vee 0) \in I$. Thus, by 2.5 again, we have $2(a \vee 0) \in \mathrm{c}(I)$, whence $|a| \in \mathrm{c}(I)$. Therefore $\mathrm{c}(I)$ is absolutely convex (2.3) and hence, by definition, coincides with $\operatorname{ac}(I)$.

In particular, a convex ideal that is not absolutely convex cannot be an intersection of pseudoprime ideals. (An example is the ideal (i) in $C(\mathbf{R})$ [*1*, 5 E.*2*].)

[5]) When $I$ is a $z$-ideal, the totally ordered summands can be chosen to be *integral domains* ([*1*, 2.8] and [*3*, 2.2]).

For $f\in C(X)$, we have $\operatorname{ac}((|f|)) = \operatorname{c}((|f|))$, as follows directly from 2.3 and 2.5. Hence the above proposition leaves open the question of when $(|f|)$ can be an intersection of pseudoprime ideals. However, we can obtain a criterion from 3.5: it is necessary that $f\in(|f|)$; in other words, it is necessary that for each point $x\in \boldsymbol{Z}(f)$, there exist a neighborhood of $x$ on which $f$ does not change sign.

## 5. Ideals contained in a unique maximal ideal

**5.1.** According to [*1*, 7.13], an ideal $I$ in $C(X)$ is contained in a unique maximal ideal $\boldsymbol{M}^p$ if and only if $I$ contains $\boldsymbol{O}^p$. It follows that for any $I$, if $I<\boldsymbol{M}^p$, then $\boldsymbol{M}^p$ is the only maximal ideal containing $(I, \boldsymbol{O}^p)$; and if $I\not\subset \boldsymbol{M}^p$, then $(I, \boldsymbol{O}^p)$ is the entire ring $C(X)$.

Every prime ideal in $C(X)$ is contained in a unique maximal ideal; more generally, every pseudoprime ideal has this property, as follows from the proof of [*1*, 7.15] or from Theorem 4.1. Hence Theorem 4.7 implies that every absolutely convex ideal in $C$ is an intersection of ideals contained in unique maximal ideals. We prove next that the same is true for an arbitrary ideal in $C(X)$.

**5.2.** THEOREM. *Every ideal $I$ in $C(X)$ is an intersection of ideals each of which is contained in a unique maximal ideal; specifically,*

$$I = \bigcap_{p\in\beta X} (I, \boldsymbol{O}^p).$$

PROOF. Denote the intersection in question by $I'$. Obviously, $I'>I$. To show that $I'<I$, consider any $f\in I'$. We may assume that $f$ is bounded [*1*, 2A]. For each $p\in\beta X$, there exists a bounded function $g_p\in I$ such that $f-g_p\in \boldsymbol{O}^p$. By definition of $\boldsymbol{O}^p$ [*1*, 7.12], the set $\operatorname{cl}_{\beta X} Z_p$, where $Z_p=\boldsymbol{Z}(f-g_p)$, is a neighborhood of $p$. Since $\beta X$ is compact, it is covered by some finite collection

$$\{\operatorname{int}\operatorname{cl} Z_{p_1}, \ldots, \operatorname{int}\operatorname{cl} Z_{p_n}\}.$$

Let $\{h_i^\beta\}_{i\le n}$ be a partition of unity subordinate to this cover [*2*, 5W]. Since $f^\beta(p) = g_{p_i}^\beta(p)$ whenever $p\in \operatorname{int}\operatorname{cl} Z_{p_i}$, we have

$$f^\beta = \sum h_i^\beta\, g_{p_i}^\beta.$$

Therefore $f = \sum h_i\, g_{p_i}$, and so $f\in I$.

**5.3.** Theorem 4.7 shows, in fact, that every absolutely convex ideal is an intersection of *absolutely convex* ideals contained in unique maximal ideals. The same conclusion follows from 2.6 and Theorem 5.2.

## 6. *P*-spaces and *F*-spaces

**6.1.** The foregoing results lead to a new characterization of $F$-spaces, in further analogy with known results about $P$-spaces [*1*, 14.25 and 14.29]. We recall that the following statements are equivalent:

($P_1$) *$X$ is a $P$-space, i.e., every Prime ideal in $C(X)$ is maximal.*

($P_2$) *Every ideal in $C(X)$ is an intersection of prime ideals.*

($P_3$) *Every principal ideal in $C(X)$ is an intersection of prime ideals.*

The equivalence of $(P_1)$ with $(P_2)$ is explicitly asserted in [1, 4 J], and the equivalence of $(P_1)$ and $(P_2)$ with $(P_3)$ is implicit.

Correspondingly, we have:

**6.2.** THEOREM. *The following statements are equivalent.*

$(F_1)$ *$X$ is an $F$-space, i.e., every Finitely generated ideal in $C(X)$ is principal.*

$(F_2)$ *Every ideal in $C(X)$ is an intersection of pseudoprime ideals.*

$(F_3)$ *Every principal ideal in $C(X)$ is an intersection of pseudoprime ideals.*

PROOF. $(F_1)$ *implies* $(F_2)$. We give two proofs. If $X$ is an $F$-space, then every ideal in $C(X)$ is absolutely convex [1, 14.26]; hence the result follows from Theorem 4.7. Alternatively, if $X$ is an $F$-space, then every ideal $\boldsymbol{O}^p$ is prime [1, 14.25], whence any ideal $(I, \boldsymbol{O}^p)$ is pseudoprime; the result now follows from Theorem 5.2.

$(F_2)$ *implies* $(F_3)$. Trivial.

$(F_3)$ *implies* $(F_1)$. This follows from 3.5 and the fact that if $|f| \in (f)$ for all $f$, then $X$ is an $F$-space [1, 14.25].

Another equivalent formulation is that $X$ is an $F$-space if and only if every ideal in $C(X)$ is an intersection of *convex* pseudoprime ideals.

## References

[1] GILLMAN, L., and M. JERISON: Rings of Continuous Functions. Van Nostrand 1960. — [2] KELLEY, J. L.: General Topology. Van Nostrand 1955. — [3] KOHLS, C. W.: Prime ideals in rings of continuous functions. Illinois J. Math. **2**, 505—536 (1958). — [4] KOHLS, C. W.: Prime ideals in rings of continuous functions. II. Duke Math. J. **25**, 447—458 (1958).

*Institute for Advanced Study and University of Illinois*

*(Eingegangen am 27. April 1959)*

DEMBOWSKI, P.
Math. Zeitschr. 72, 410—438 (1960)

# Freie und offene projektive Ebenen

Von
PETER DEMBOWSKI

## Einleitung

Die freien projektiven Ebenen (Definition auf S. 416) sind 1943 von M. HALL eingeführt und — allerdings nur für den Fall endlicher Erzeugbarkeit — zuerst eingehend untersucht worden [*2*, § 4]. Später hat L. I. KOPEJKINA einige der Hallschen Sätze auf den allgemeinen Fall übertragen und für andere gezeigt, daß ihre Gültigkeit auf die endlich erzeugten freien projektiven Ebenen beschränkt ist [*4*]. Außerdem deckte KOPEJKINA eine auch schon von HALL bemerkte weitgehende Analogie zu den freien Gruppen auf; einige der hierher gehörigen Sätze von KOPEJKINA finden sich auch in einer leichter zugänglichen Arbeit von SKORNYAKOV [*8*, S. 10—17].

Den Ausgangspunkt für die vorliegende Untersuchung bildete die Frage nach dem Transitivitätsverhalten der Kollineationsgruppe einer freien projektiven Ebene. Nennt man zwei Elemente einer projektiven Ebene *konjugiert*, wenn sie durch Kollineationen aufeinander abbildbar sind, so läßt sich das Hauptresultat dieser Arbeit folgendermaßen aussprechen: *Jede freie projektive Ebene hat die Eigenschaften:*

(I) *Zu jedem Element gibt es unendlich viele Konjugierte.*

(II) *Es gibt unendlich viele Elemente, von denen keine zwei konjugiert sind.*

Dieses Ergebnis läßt sich in verschiedenen Richtungen verallgemeinern und verschärfen. Zunächst wird die Eigenschaft (I) nicht nur für die freien projektiven Ebenen bewiesen, sondern außerdem für eine Klasse von freien Ebenenerweiterungen (wir schließen uns hier wie auch im folgenden der Terminologie des Buches [*7*] von PICKERT an) hinreichend „homogener" unendlicher Inzidenzstrukturen (vgl. Lemma 2.1, S. 419 und Folgerung (b), S. 420). Natürlich ist die Klasse der projektiven Ebenen mit der Eigenschaft (I) damit nicht erschöpft, denn alle unendlichen desarguesschen projektiven Ebenen haben diese Eigenschaft ja auch.

Die Gültigkeit der Eigenschaft (II) ist ebenfalls nicht auf die freien projektiven Ebenen beschränkt; sie wird hier für die größere Klasse der offenen projektiven Ebenen (Definition S. 416) bewiesen, welche sich (Satz 1.2) auch durch die Eigenschaft charakterisieren lassen, daß in ihnen jede endliche Teilmenge eine freie Unterebene erzeugt, und die deshalb auch „lokal frei" genannt werden. Daß die freien projektiven Ebenen offen sind, hat HALL gezeigt [*2*, theorem 4.8]; die tieferliegende Tatsache der Existenz offener projektiver Ebenen, die nicht frei sind, wurde zuerst von KOPEJKINA bewiesen [*4*, § 5]. Die Gültigkeit von (II) für offene projektive Ebenen ist

nun insofern überraschend, als man zwei in einer freien projektiven Ebene nicht konjugierte Elemente oft durch Einbettung dieser Ebene in eine offene doch zu Konjugierten machen kann. [Das ergibt sich aus Satz 1.3, S. 418, den man aus einem tiefliegenden Satz von B. H. NEUMANN [*6*] gewinnen könnte, der hier aber aus einem anderen (in einem Anhang bewiesenen) Einbettungssatz gefolgert wird.] Es ist deshalb vermutet worden, es gäbe vielleicht offene projektive Ebenen mit transitiver Kollineationsgruppe; hier zeigt sich nun aber, daß (II) für offene projektive Ebenen auch dann noch richtig bleibt — gerade wegen dieser Einbettungsmöglichkeit —, wenn man die Definition des Konjugiertseins von der Abbildbarkeit durch Kollineationen der ganzen Ebene auf Abbildbarkeit durch Isomorphismen gewisser Unterebenen abschwächt (Näheres in 3.3).

Die freie Ebenenerweiterung einer aus unendlich vielen disjunkten unendlichen, paarweise nichtisomorphen desarguesschen projektiven Ebenen bestehenden Inzidenzstruktur hat nach Lemma 2.1 die Eigenschaften (I) und (II); diese Eigenschaften sind also auch zusammengenommen für die freien projektiven Ebenen nicht charakteristisch. Das oben formulierte Hauptresultat läßt sich aber nicht einmal auf die offenen projektiven Ebenen verallgemeinern: in 3.4 wird ein Beispiel einer offenen projektiven Ebene angegeben, die einen bei allen Kollineationen festbleibenden Punkt besitzt; diese Ebene kann natürlich nicht die Eigenschaft (I) haben. Auch die Frage, ob die freien wenigstens innerhalb der offenen projektiven Ebenen durch (I) und (II) charakterisiert sind, ist zu verneinen; das zeigt ein weiteres Beispiel in 3.5.

Die Abschnitte 2 und 3 enthalten mehrere abseits von der allgemeinen Fragestellung dieser Arbeit liegende Ergebnisse, die ein unabhängiges Interesse verdienen; hier sei nur die Existenz nicht endlich erzeugbarer Unterebenen von endlich erzeugten freien projektiven Ebenen erwähnt (Lemma 2.3), ein neues Beispiel für die schon erwähnte enge Analogie zwischen freien projektiven Ebenen und freien Gruppen (vgl. hierzu etwa KUROSCH [*5*, S. 274]).

## BEZEICHNUNGEN

*Ebene* bedeutet immer *projektive Ebene* (Definition [*7*, S. 7]). Gelegentlich wird der Deutlichkeit halber von *nichtausgearteten* Ebenen gesprochen werden; die von HALL [*2*, S. 232] "degenerate planes" genannten Strukturen werden als *ausgeartete Ebenen* bezeichnet (vgl. [*7*, S. 13]).

Die *Elemente* einer Ebene sind ihre Punkte und ihre Geraden, sie werden durch kleine lateinische Buchstaben bezeichnet. Es wird fast nie darauf ankommen, ob ein willkürlich ausgewähltes Element einer Ebene ein Punkt oder eine Gerade ist; aber durch die Angabe, daß die Elemente $x$ und $y$ *inzident* sind (bezeichnet durch $x\,\mathrm{I}\,y$ oder $y\,\mathrm{I}\,x$) wird natürlich ihre Verschiedenartigkeit ausgedrückt. Auch sonst wird die Gleich- oder Verschiedenartigkeit zweier Elemente manchmal ausdrücklich festgestellt werden.

Sind $x$ und $y$ zwei verschiedene, aber gleichartige Elemente, so bezeichnet $xy = yx$ das eindeutig bestimmte mit ihnen beiden inzidente andersartige Element, d.h. ihren Schnittpunkt oder ihre Verbindungsgerade.

Mengen von Elementen einer Ebene werden mit großen lateinischen Buchstaben bezeichnet, projektive Ebenen selbst i.a. durch den Buchstaben $E$. Eine Menge von vier zu je dreien nichtkollinearen Punkten heißt ein *Viereck*, Bezeichnung meist durch den Buchstaben $Q$. Die Mächtigkeit einer Menge $X$ wird mit $|X|$ bezeichnet.

Von einem *Homomorphismus* einer Ebene $E$ auf eine andere $E'$ wird nur Erhaltung der Inzidenzen, nicht Erhaltung von Punkten und Geraden gefordert. In Analogie zum üblichen algebraischen Sprachgebrauch nennen wir einen Homomorphismus *Endomorphismus*, wenn $E' \subseteqq E$, insbesondere *Epimorphismus*, wenn $E' = E$ ist, *Isomorphismus*, wenn er umkehrbar eindeutig ist, und ein *Monomorphismus* ist gleichzeitig Endomorphismus und Isomorphismus, ein *Automorphismus* gleichzeitig Epimorphismus und Monomorphismus. Die Automorphismengruppe einer Ebene besteht aus deren Kollineationen und Korrelationen und ist genau dann gleich der Kollineationsgruppe, wenn die Ebene nicht selbstdual ist; im allgemeinen ist die Kollineationsgruppe in der Automorphismengruppe ein Normalteiler vom Index zwei.

Kleine griechische Buchstaben bezeichnen Abbildungen, meist Automorphismen von Ebenen. Mengen (meist Gruppen) solcher Abbildungen werden durch große griechische Buchstaben bezeichnet. Wir schreiben die Abbildungen als Rechtsmultiplikatoren, $x\pi$ bedeutet also das Bildelement von $x$ unter der Abbildung $\pi$, und $x\Pi$ ist die Menge aller $x\pi$ mit $\pi \in \Pi$. Ist $\Pi$ eine Gruppe, so ist $x\Pi$ eines der Transitivitätsgebiete von $E$ bezüglich $\Pi$, diese Transitivitätsgebiete nennen wir auch die *$\Pi$-Klassen* von $E$.

## 1. Grundlagen

In diesem Abschnitt werden die später benötigten Tatsachen über freie Ebenen und verwandte Begriffsbildungen zusammengestellt. Die Resultate sind teils wohlbekannt, teils in der hier gewählten Darstellungsweise unveröffentlicht. Bei den ohne Beweis übernommenen bekannten Resultaten berufen wir uns in erster Linie auf das Buch [7] von PICKERT, außerdem auf die Arbeiten [4] und [8] von KOPEJKINA und SKORNYAKOV.

1.1. ERZEUGUNG PROJEKTIVER EBENEN. Unter der von einer Teilmenge $M$ der Ebene $E$ *erzeugten Unterebene* wird der Durchschnitt $[M]$ aller (einschließlich der ausgearteten) $M$ enthaltenden Unterebenen von $E$ verstanden. Man überzeugt sich leicht, daß man $[M]$ auch auf die folgende Weise erklären kann: Bezeichnet $X^+$ die Menge aller derjenigen Elemente von $E$, welche mit wenigstens zwei Elementen der Teilmenge $X$ von $E$ inzidieren, aber selbst nicht zu $X$ gehören, so ist $[M]$ die Vereinigungsmenge der folgendermaßen definierten aufsteigenden Folge $M_0 \subseteqq M_1 \subseteqq \ldots$ von Teilmengen von $E$:

$$M_0 = M, \quad M_{n+1} = M_n \cup M_n^+ \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{1}$$

Jedem Element $x \in [M]$ wird als seine *$M$-Stufe* $s_M(x)$ die durch $M$ und $x$ eindeutig bestimmte kleinste ganze Zahl $n$ mit $x \in M_n$ zugeordnet. Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, sagen wir „Stufe" statt „$M$-Stufe" und schreiben $s(x)$ statt $s_M(x)$.

Lemma 1.1. *Jedem Element der Unterebene $E$ einer projektiven Ebene sei eine nichtnegative Zahl $s(x)$ als ihre „Stufe" zugeordnet, und $M$ sei die Menge der $x \in E$ mit $s(x)=0$. Genau dann ist $M_n$ gleich der Menge aller $x \in E$ mit $s(x) \leqq n$ $(n=0, 1, \ldots)$, also insbesondere $E=[M]$, wenn die Stufenzahlen die folgenden Eigenschaften haben:*

(s 1) *Ist $s(x)>0$, so gibt es mindestens zwei mit $x$ inzidente Elemente niedrigerer Stufe.*

(s 2) *Ist $s(x)>0$, so hat höchstens ein mit $x$ inzidentes Element eine Stufe $<s(x)-1$.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus der obigen Definition (1).

Das Element $x \in [M]$ heiße *$M$-früher* als das Element $y \in [M]$, wenn es eine Folge $U=(u_0, \ldots, u_k)$ von Elementen in $[M]$ gibt derart, daß $u_0=x$, $u_k=y$ ist und $u_i \mathrm{I}\, u_{i+1}$, $s_M(u_i)<s_M(u_{i+1})$ gilt für $i=0, \ldots, k-1$. Unter dem *$M$-Sockel* eines Elementes $x \in [M]$ wird nun diejenige Menge $M(x)$ verstanden, welche aus $x$ und allen $M$-früheren als $x$ besteht.

Lemma 1.2. *Es sei $z$ ein Element der $M$-Stufe $m$ in der Ebene $E=[M]$. Dann hat der $M$-Sockel $S=M(z)$ die folgenden Eigenschaften:*

(S 1) *Aus $x \in S$ folgt $M(x) \subseteqq S$, also insbesondere $s_M(x) \leqq m$.*

(S 2) *Zu jedem $n$ mit $0 \leqq n \leqq m$ enthält $S$ ein Element der $M$-Stufe $n$.*

(S 3) *Jedes $x \in S$ mit $0<s_M(x)<m$ inzidiert mit mindestens drei verschiedenen Elementen von $S$.*

(S 4) *Ist $S \cap M$ endlich, so auch $S$ selbst.*

Beweis. (S 1) ergibt sich sofort aus der Definition von „$M$-früher". (S 2) folgt aus (s 1) und (s 2) und der Sockeldefinition. Erfüllt $x$ die Voraussetzungen von (S 3), so inzidiert $x$ mit zwei Elementen kleinerer Stufe [wegen (s 1)] und einem größerer Stufe [da $x \neq z$], also mit mindestens drei Elementen von $S$. Ist $M'=S \cap M$ endlich, so ist $s_{M'}(x)=s_M(x)$ für alle $x \in S$, also ist $S \subseteqq (M')_m$. Nun ist aber mit $X$ sicher auch $X^+$ endlich, also folgt, daß alle $(M')_n$ endlich sein müssen, und also ist auch $S$ endlich. Damit ist Lemma 1.2 bewiesen.

Ein Element $u \in [M]$ mit $s_M(u)>0$ heißt *$M$-unfrei*, wenn es mit mehr als zwei Elementen mit $M$-Stufe $\leqq s_M(u)$ inzidiert (mindestens zwei solche Elemente gibt es nach (s 1) immer, und aus (s 1) folgt weiter, daß $u$ sicher dann $M$-unfrei ist, wenn $u$ mit einem $M$-gleichstufigen Element inzidiert.) Die folgenden Überlegungen führen zu einer Abschätzung der Anzahl der $M$-unfreien Elemente für den Fall, daß $M$ endlich ist.

Unter dem *Rang* einer endlichen Inzidenzstruktur $K$ mit $i$ Inzidenzen (d.h. zweielementigen Teilmengen $\{x, y\}$ mit $x \mathrm{I}\, y$, vgl. [7, S. 22—23]) wird die Zahl

$$r(K) = 2|K| - i$$

verstanden. Entsteht die Inzidenzstruktur $K'$ aus $K$ durch Hinzunahme eines neuen Elementes $x$, so heißt der Übergang von $K$ zu $K'$ *Erweiterung* von $K$ durch $x$, und statt $K'$ wird auch $K+x$ geschrieben. Die umgekehrte Operation, also das Weglassen eines Elementes $x$ aus $K$, heißt *Kürzung* von $K$

durch $x$, und ihr Ergebnis wird auch mit $K-x$ bezeichnet. Inzidiert $x$ mit genau $n$ Elementen von $K$ und ist $K$ wieder endlich, so gilt, wie man sofort nachrechnet:

$$(2) \qquad \begin{cases} r(K+x) = r(K) - (n-2) & \text{für} \quad x \notin K, \\ r(K-x) = r(K) + (n-2) & \text{für} \quad x \in K. \end{cases}$$

Insbesondere gilt also $r(K+x)=r(K)$ genau dann, wenn $n=2$ ist. In diesem Falle wird von *freier* Erweiterung [und im Falle $r(K-x)=r(K)$ von *freier* Kürzung] gesprochen; natürlich bleiben diese Definitionen auch im Falle unendlicher $K$ sinnvoll.

Lemma 1.3. *Ist $K$ eine endliche Teilmenge einer projektiven Ebene, so ist die Anzahl der in $K_n^+$ liegenden $K$-unfreien Elemente höchstens gleich $d_n = r(K_n) - r(K_{n+1})$, $(n=0, 1, \ldots)$, und $d_n=0$ ist gleichbedeutend mit Abwesenheit solcher Elemente.*

Beweis. Die Anzahl der in $K_n^+$ liegenden $K$-unfreien Elemente sei $j_n$. Ist $j_n=0$, so inzidiert jedes Element von $K_n^+$ mit genau zwei Elementen von $K_n$, und aus (2) folgt, daß sukzessive Erweiterungen von $K_n$ mit den (endlich vielen) Elementen von $K_n^+$ den Rang von $K_n$ unverändert lassen. Also ist $r(K_n)=r(K_n \cup K_n^+)=r(K_{n+1})$, und es folgt $d_n=0$. Es bleibt $j_n \leqq d_n$ zu beweisen. Ist $x$ ein in $K_n^+$ liegendes $K$-unfreies, also mit mindestens drei Elementen von $K_n$ inzidentes Element, so ergibt (2), daß $r(K_n+x) \leqq r(K_n) - 1$ sein muß. Ist $y$ ein weiteres $K$-unfreies Element in $K_n^+$, so folgt ebenso $r(K_n+x+y) \leqq r(K_n+x) - 1 \leqq r(K_n) - 2$, und sukzessive Erweiterungen durch alle $K$-unfreien in $K_n^+$ ergibt nun

$$r(K_{n+1}) = r(K_n \cup K_n^+) \leqq r(K_n) - j_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

woraus die Behauptung $j_n \leqq d_n$ folgt. Damit ist Lemma 1.3 bewiesen.

Folgerungen. (a) *Die Folge $r(K)$, $r(K_1)$, $r(K_2)$, ... ist monoton fallend.*
(b) *Genau dann gibt es keine $K$-unfreien Elemente, wenn alle $r(K_n)=r(K)$ sind.*
(c) *Die Anzahl der $K$-unfreien Elemente in $K_n$ ist höchstens $r(K) - r(K_n)$.*

Denn nach Lemma 1.3 sind alle $d_n \geqq 0$, und Gleichheit für alle $n$ gilt genau bei Abwesenheit $K$-unfreier Elemente. Damit sind (a) und (b) bewiesen. Die Anzahl der $K$-unfreien Elemente in $K_n$ ist wegen (1) gleich $\sum_{i=0}^{n-1} j_i \leqq \sum_{i=0}^{n-1} d_i = r(K) - r(K_n)$, und das ist die Behauptung von (c).

1.2. FREIE EBENENERWEITERUNGEN. Die projektive Ebene $E$ heißt *freie Ebenenerweiterung* ihrer Teilmenge $M$, wenn $E=[M]$ ist und es keine $M$-unfreien Elemente gibt; die freie Ebenenerweiterung von $M$ wird stets durch $F(M)$ bezeichnet. Natürlich ist $E=F(E)$ für jede Ebene $E$; weniger trivial ist die Tatsache, daß es zu jeder Inzidenzstruktur $M$ eine (und bis auf isomorphe nur eine) $M$ enthaltende, möglicherweise ausgeartete, Ebene gibt, die gleich $F(M)$ ist. $F(M)$ ist genau dann nichtausgeartet, wenn $M$ nichtausgeartet ist (vgl. [7, S. 14—15]).

Wir beweisen zwei Eigenschaften von freien Ebenenerweiterungen:

Lemma 1.4. *Für jedes $x \in F(M)$ gilt $|M(x)| < 2^{s_M(x)+1}$.*

Ist $x \in F(M)$ von der $M$-Stufe $k$, so folgt aus der Abwesenheit $M$-unfreier Elemente, daß $M(x)$ höchstens $2^j$ Elemente der $M$-Stufe $k-j$ enthält ($j = 0, \ldots, k$). Also enthält $M(x)$ höchstens $\sum_{j=0}^{k} 2^j = 2^{k+1} - 1$ Elemente, und die Behauptung folgt.

Lemma 1.5. *Jedes Element maximaler $M$-Stufe einer nicht in $M$ enthaltenen Teilmenge $K$ von $F(M)$ inzidiert mit höchstens zwei Elementen von $K$.*

Beweis. Ist $x$ ein Element maximaler $M$-Stufe in $K$, so kann es höchstens dann drei verschiedene mit $x$ inzidente Elemente in $K$ geben, wenn $x$ in $M$ liegt, denn sonst wäre $x$, da diese drei Elemente keine höhere $M$-Stufe als $x$ haben, $M$-unfrei (nach Definition von S. 413). Wäre aber $x \in M$, so würde aus der Maximaleigenschaft von $x$ sogar $K \subseteqq M$ folgen. Dieser Widerspruch zur Voraussetzung beweist Lemma 1.5.

Unter einer *geschlossenen Konfiguration* wird eine endliche Inzidenzstruktur verstanden, welche zu jedem ihrer Elemente mindestens drei mit ihm inzidente enthält.

Folgerung. *Jede in $F(M)$ enthaltene geschlossene Konfiguration liegt schon in $M$ selbst.*

Das ergibt sich mit Lemma 1.5 sofort aus der Tatsache, daß jede endliche Teilmenge von $F(M)$ ein Element maximaler Stufe enthält.

Das folgende Lemma wird später mehrfach gebraucht werden; es gestattet eine Übersicht über die Beziehungen zwischen den Stufenzahlen bezüglich verschiedener Erzeugendensysteme einer freien Ebenenerweiterung.

Lemma 1.6. *Es sei $L$ eine beliebige Teilmenge der freien Ebenenerweiterung $F(M)$. Dann gibt es zu jedem Paar $x, y$ inzidenter Elemente in $[L]$ mit $s_M(x) < s_M(y)$ und $s_L(x) > s_L(y)$ ein Element $z \in L \cap L(y)$ mit $y \in M(z)$.*

Beweis. Nach der Definition des Sockels (S. 413) genügt es offenbar, die Existenz einer Folge $u_1, u_2, \ldots, u_n$ ($n \geqq 2$) von Elementen in $[L]$ mit folgenden Eigenschaften zu beweisen:

$$(3) \quad \begin{cases} u_1 = x,\ u_2 = y,\ u_i \mathrel{I} u_{i+1},\ s_M(u_i) < s_M(u_{i+1}),\ s_L(u_i) > s_L(u_{i+1}) \\ \text{für} \quad i = 1, \ldots, n-1, \quad \text{und} \quad s_L(u_n) = 0. \end{cases}$$

Das gesuchte Element $z$ ist dann das Element $u_n$. Nach den Voraussetzungen des Lemmas können wir $u_1, \ldots, u_j$ mit $j \geqq 2$ als schon konstruiert annehmen. Ist dann $s_L(u_j) = 0$, so ist $n = j$ und wir sind fertig. Ist aber $s_L(u_j) > 0$, so gibt es nach (s 1) mindestens zwei mit $u_j$ inzidente Elemente $v, v'$ niedrigerer $L$-Stufe als $u_j$. Von diesen beiden Elementen muß mindestens eines höhere $M$-Stufe als $u_j$ haben, denn es gibt genau zwei mit $u_j$ inzidente Elemente niedrigerer $M$-Stufe [wegen $j > 1$ ist $s_M(u_j) > 0$], von denen eines, nämlich $u_{j-1}$, höhere $L$-Stufe als $u_j$ hat. O.B.d.A. sei $s_M(v) > s_M(u_j)$, dann setzen wir $v = u_{j+1}$

und haben die gesuchte Folge um ein Glied fortgesetzt. Nach endlich vielen Schritten muß ein $u_n$ die $L$-Stufe Null haben; damit ist alles bewiesen.

Folgerung. *Ist* $[L]=F(L)\subsetneqq[M]$ *und haben alle Elemente von* $L$ *eine* $M$*-Stufe* $\leqq n$*, so folgt aus* $x, y\in[L]$, $x\,\mathrm{I}\,y$ *und* $n\leqq s_M(x)<s_M(y)$ *stets* $s_L(x)<s_L(y)$.

Wäre nämlich $s_L(x)\geqq s_L(y)$, so müßte sogar $s_L(x)>s_L(y)$ gelten, denn sonst wäre das wegen $s_M(y)>n$ sicher nicht in $L$ liegende Element $y$ mit einem $L$-gleichstufigen inzident, also $L$-unfrei, im Widerspruch zu $[L]=F(L)$. Also ist Lemma 1.6 anwendbar, und es folgt die Existenz eines $z\in L$ mit $y\in M(z)$. Das ist aber unmöglich, denn aus $z\in L$ folgt $s_M(z)\leqq n$, aus $y\in M(z)$ aber $s_M(z)\geqq s_M(y)>n$.

Wir kommen nun zu einer besonders wichtigen Klasse von freien Ebenenerweiterungen. Eine projektive Ebene heißt *freie Ebene*, wenn sie die freie Ebenenerweiterung einer Inzidenzstruktur $B$ von folgender Art ist: $B$ besteht aus einer Geraden $c$, zwei nicht mit $c$ inzidenten Punkten $a, b$ und einer Menge $C$ von mindestens zwei mit $c$ inzidenten Punkten. Eine solche Menge $B=\{a, b, c\}\cup C$ mit $E=F(B)$ heißt eine *Basis* der freien Ebene $E$. Die Menge $C$ braucht nicht endlich zu sein; ist sie aber endlich und $|C|=n-2$, enthält $B$ also genau $n$ Punkte, so schreiben wir statt $F(B)$ auch $F_n$; die Berechtigung zu dieser Schreibweise ergibt sich aus dem unten zitierten Satz (F 1). Ist $|C|=2$, so ist $E=F(B)$ auch gleich der freien Ebenenerweiterung des Vierecks $Q=B-c$; jedes solche eine $F_4$ frei erzeugende Viereck heißt ein *Basisviereck* dieser $F_4$.

Für das spätere werden die folgenden wohlbekannten Sätze über freie Ebenen gebraucht, die wir hier ohne Beweis zitieren:

(F 1) (HALL) *Die freie Ebenenerweiterung* $F(K)$ *einer endlichen Inzidenzstruktur* $K$ *ist genau dann eine* $F_n$*, wenn* $K$ *keine geschlossenen Konfigurationen enthält und* $r(K)=n+4$ *ist. Insbesondere sind* $F_m$ *und* $F_n$ *genau dann isomorph, wenn* $m=n$ *ist, und* $F(K)$ *ist ausgeartet, wenn* $r(K)<8$ *ist* [7, S. 18–23].

(F 2) (HALL) *Jede* $F_n$ *enthält eine* $F_{n+1}$ *als Unterebene* ($n=4, 5, \ldots$) [7, S. 25].

(F 3) (KOPEJKINA) *Unterebenen freier Ebenen sind frei* [8, S. 15–16].

1.3. OFFENE EBENEN. Eine Inzidenzstruktur heißt *offen*, wenn sie keine geschlossenen Konfigurationen (Definition S. 415) enthält. Im Gegensatz zu [7, S. 19] wird hier zugelassen, daß eine offene Inzidenzstruktur unendlich ist, und im folgenden werden wir uns sogar hauptsächlich mit unendlichen offenen Inzidenzstrukturen befassen, nämlich mit offenen projektiven Ebenen. Aus der Folgerung von Lemma 1.5 ergibt sich, daß jede freie Ebene offen ist, denn eine Basis kann natürlich keine geschlossenen Konfigurationen enthalten. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht allgemein, wie später gezeigt werden wird (in 3.4), jedoch ist sie richtig, wenn die Ebene endlich erzeugbar ist [7, S. 23].

Eine Inzidenzstruktur heiße *nichtausgeartet* (vgl. [7, S. 13]), wenn sie (ein Viereck oder) eine Inzidenzstruktur enthält, die zu einer aus einem Viereck durch endlich viele freie Erweiterungen und Kürzungen hervorgehenden Inzidenzstruktur isomorph ist.

Lemma 1.7. *Ist $E$ eine offene Ebene und $K$ eine nichtausgeartete Unterstruktur von $E$ mit dem Rang $r$, so ist die Anzahl der $K$-unfreien Elemente in $E$ höchstens $r-8$.*

Beweis. Mit $K=K_0$ sind auch alle $K_j$ ($j=0, 1, \ldots$, vgl. Definition (1) von S. 412) endlich und nichtausgeartet; außerdem sind alle $K_j$ als Teilmengen einer offenen Ebene offen, haben also nach (F 1) sämtlich einen Rang $\geqq 8$. Wäre die Anzahl der $K$-unfreien Elemente in $E$ nun größer als $r-8$, so gäbe es auch schon in einer $K_n$ mehr als $r-8$ solche Elemente. Die Folgerung (c) von Lemma 1.3 würde dann aber $r-8<r(K)-r(K_n)$ ergeben, woraus $r(K_n)<8$ folgen würde, im Widerspruch zu der oben festgestellten Tatsache $r(K_j)\geqq 8$ für alle $j$. Damit ist Lemma 1.7 bewiesen.

Lemma 1.7 hat zwei interessante Konsequenzen. Zunächst folgt unmittelbar:

Satz 1.1. *Hat die nichtausgeartete Teilstruktur $K$ der offenen Ebene $E$ den Rang 8, so ist $[K]$ gleich der freien Ebenenerweiterung $F(K)$ in $E$.*

Insbesondere ist also jede von einem Viereck $Q$ erzeugte offene Ebene eine $F_4$ mit $Q$ als Basisviereck. Einfachste Beispiele zeigen, daß es in jeder offenen Ebene zu jeder natürlichen Zahl $n>8$ nichtausgeartete Teilstrukturen $K$ des Ranges $n$ derart gibt, daß $[K]$ nicht die freie Ebenenerweiterung von $K$ ist. Satz 1.1 ist also ein bestmögliches Resultat.

Es sei angemerkt, daß die Behauptungen von Lemma 1.7 und Satz 1.1 richtig bleiben, wenn man die Voraussetzungen folgendermaßen abändert: $K$ sei eine nicht in $M$ enthaltene Teilmenge der freien Ebenenerweiterung $E=F(M)$. Diese Sätze sind von unabhängigem Interesse, da es nichtoffene freie Ebenenerweiterungen gibt; hier interessieren sie uns jedoch nur am Rande.

Eine projektive Ebene heiße *lokal frei*, wenn jede ihrer nichtausgearteten endlichen Teilmengen eine freie Unterebene erzeugt.

Satz 1.2. *Eine projektive Ebene ist genau dann offen, wenn sie lokal frei ist.*

Beweis. Zunächst sei die lokale Freiheit der projektiven Ebene $E$ vorausgesetzt. Ist $K$ eine endliche Teilmenge von $E$, so kann sie keine geschlossene Konfiguration sein, da sie sonst nichtausgeartet wäre und deshalb eine freie Unterebene erzeugte; im Widerspruch zu der am Beginn dieses Paragraphen gemachten Bemerkung, daß freie Ebenen offen sind. Also ist $E$ offen. Wird umgekehrt Offenheit von $E$ vorausgesetzt, und ist $K$ wieder eine endliche nichtausgeartete Teilmenge von $E$, so muß auch $K$ offen sein, und aus Lemma 1.7 folgt, daß $E$ nur endlich viele $K$-unfreie Elemente enthält. Diese müssen alle in einer $K_n$ liegen, und es folgt $[K]=[K_n]=F(K_n)$. Da $K_n$ natürlich endlich ist, und $r(K_n)\geqq 8$, ergibt sich schließlich aus (F 1), daß $[K]=F(K_n)$ eine $F_m$ mit $m+4=r(K_n)$ ist. Also ist $[K]$ eine freie Unterebene von $E$, d.h. $E$ ist lokal frei. Damit ist Satz 1.2 bewiesen.

Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist das Wort „lokal" in Satz 1.2 unentbehrlich: Es gibt offene Ebenen, die nicht frei sind, wie zuerst KOPEJKINA gezeigt hat [4, § 5]. Die von KOPEJKINA angegebenen offenen, nicht freien Ebenen sind für uns aus anderen Gründen von Interesse, wir geben sie daher

hier unter leichter Verallgemeinerung nochmals an, ohne den KOPEJKINAschen Beweis ihrer Nicht-Freiheit zu reproduzieren. In 3.4 und 3.5 wird die Nicht-Freiheit gewisser solcher Ebenen auf andere Weise bewiesen werden; wir werden so die Existenz von offenen, nicht freien Ebenen unabhängig von den KOPEJKINAschen Überlegungen ebenfalls nachweisen.

Es sei $E_1, E_2, \ldots$ eine Folge von (endlich erzeugten) freien Ebenen $F_{n_i} = E_i$, $i = 1, 2, \ldots$. Da jede $F_n$ nach (F 2) Unterebenen $F_k$ mit beliebig hohem $k$ besitzt, kann man zu jeder Ebenen $E_i$ eine isomorphe $E_i'$ finden, die echt in $E_{i+1}$ enthalten ist. Durch die Identifizierungen $E_i = E_{i|}'$ $(i = 1, 2, \ldots)$ werden die $E_i$ also echt ineinander eingebettet: $E_1 < E_2 < \ldots$. Es ist klar, daß die Vereinigungsmenge $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ eine projektive Ebene ist, die als Vereinigungsmenge offener Inzidenzstrukturen natürlich ebenfalls offen sein muß.

Jede projektive Ebene, die sich in der soeben beschriebenen Weise als Vereinigung unendlich vieler endlich erzeugter freier Ebenen $E_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ darstellen läßt, nennen wir *von unendlicher Höhe*, die $E_i$ ihre *Glieder*. (Die Glieder brauchen durch die Ebene natürlich nicht eindeutig bestimmt zu sein.) Unter den offenen Ebenen von unendlicher Höhe gibt es freie Ebenen; z.B. ist die freie Ebene $F(B)$ mit abzählbar-unendlicher Basis $B = \{a, b, c\} \cup C$, wo $C = \{c_1, c_2, \ldots\}$, von unendlicher Höhe, mit den Gliedern $E_i = F(B_i)$, wo $B_i = \{a, b, c\} \cup C_i$ und $C_i = \{c_1, \ldots, c_i\}$, $i > 1$. Aber eine große Klasse offener Ebenen von unendlicher Höhe besteht nur aus nichtfreien Ebenen: *Keine offene Ebene von unendlicher Höhe mit unendlich vielen zur $F_4$ isomorphen Gliedern ist frei.* Das ist der oben erwähnte Satz von KOPEJKINA; wir werden später nie von ihm Gebrauch machen.

Es sei $E$ eine $F_n$ mit der Basis $B = \{a, b, c\} \cup C$, wo $C = \{c_1, \ldots, c_n\}$, $n > 1$. Dann gibt es, wie man leicht aus (F 2) herleitet, eine echte Unterebene $E'$ von $E$, die ebenfalls eine $F_n$ ist. Sei $E' = F(B')$, $B' = \{a', b', c'\} \cup C'$, $C' = \{c_1', \ldots, c_n'\}$. Durch die Abbildungsvorschriften $a \to a'$, $b \to b'$, $c \to c'$, $c_i \to c_i'$ $(i = 1, \ldots, n)$ wird nun ein Isomorphismus $\pi$ von $E$ auf $E'$ definiert, der ein Monomorphismus, aber wegen $E \neq E'$ kein Automorphismus von $E$ ist. Sind $E_1, E_2, \ldots$ abzählbar-unendlich viele zu $E = F_n$ isomorphe Ebenen und $\pi_1, \pi_2, \ldots$ die $\pi$ entsprechenden Monomorphismen von $E_1, E_2, \ldots$, so liefert die Identifizierungsvorschrift $E_i = E_{i+1}\pi_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ eine Einbettung der $E_i$ ineinander. Jede offene Ebene unendlicher Höhe, deren Glieder alle isomorph und auf die angegebene Art mittels eines Monomorphismus $\pi$ ineinander eingebettet sind, heißt *uniform* bezüglich $\pi$. Im Anhang zu dieser Arbeit wird ein Einbettungssatz über allgemeine Algebren bewiesen, der auf projektive Ebenen anwendbar ist. Aus diesem Satz ergibt sich unmittelbar der folgende für das spätere wichtige Satz:

Satz 1.3. *Zu jedem Monomorphismus $\pi$ einer $F_n$, der kein Automorphismus ist, gibt es eine diese $F_n$ enthaltende, bezüglich $\pi$ uniforme offene Ebene unendlicher Höhe, welche einen $\pi$ in der vorgegebenen $F_n$ induzierenden Automorphismus $\pi'$ besitzt.*

Für den Fall $n=4$ ergibt sich insbesondere:

Folgerung. *Ist $V$ ein beliebiges Viereck einer $F_4$ mit dem Basisviereck $Q$, so gibt es eine $F(Q)$ enthaltende offene Ebene, in welcher $Q$ durch einen Automorphismus auf $V$ abbildbar ist.*

Denn nach Satz 1.1 ist $[V]=F(V)$ in $F(Q)$, also läßt sich $Q$ in $F(Q)$ durch einen Monomorphismus $\pi$ auf $V$ abbilden; das weitere folgt aus Satz 1.3. Es sei noch darauf hingewiesen, daß die Folgerung richtig bleibt, wenn man unter einem „Viereck" ein *geordnetes* Punktquadrupel in allgemeiner Lage versteht, nicht nur eine (ungeordnete) Menge von vier Punkten in allgemeiner Lage.

## 2. Automorphismen freier Ebenenerweiterungen

Das Thema dieses Abschnittes ist der Nachweis der in der Einleitung formulierten Eigenschaft (I) für freie Ebenen. Die wesentlichen Hilfsmittel beim Beweis sind Lemma 2.1 für unendliche und Lemma 2.5 für endliche Basis. Lemma 2.1 gestattet den Nachweis von (I) sogar für eine die freien Ebenen mit unendlicher Basis echt enthaltende Klasse freier Ebenenerweiterungen. Interessante Nebenresultate sind die Sätze 2.1 und 2.2 sowie die Folgerung aus Lemma 2.4.

2.1. Stationäre Automorphismen. Ist $E$ eine beliebige projektive Ebene und $\Lambda$ eine Gruppe von Automorphismen von $E$, so heißen zwei Elemente von $E$ immer dann *$\Lambda$-konjugiert*, wenn eines von ihnen durch einen zu $\Lambda$ gehörigen Automorphismus von $E$ auf das andere abgebildet werden kann. Die zu dieser Äquivalenzrelation in $E$ gehörigen Äquivalenzklassen heißen die *$\Lambda$-Klassen* von $E$.

Lemma 2.1. *Es sei $E$ eine von der Inzidenzstruktur $M$ (nicht notwendig frei) erzeugte projektive Ebene mit einer Gruppe $\Lambda$ von $M$ auf sich abbildenden Automorphismen. Enthält sodann $M$ eine unendliche $\Lambda$-Klasse $T$, so ist auch jede $\Lambda$-Klasse unendlich, die ein Element $x$ mit endlichem nichtleerem Durchschnitt $M(x)\cap T$ enthält.*

Beweis. Da $T$ unendlich, aber $M(x)\cap T$ endlich und nicht leer ist, gibt es unendlich viele verschiedene $U(\lambda)=[M(x)\cap T]\lambda$ mit $\lambda\in\Lambda$. Aus $U(\lambda)\neq U(\lambda')$ folgt $x\lambda\neq x\lambda'$ wegen $U(\lambda)=M(x\lambda)\cap T$. Also gibt es auch unendlich viele verschiedene $x\lambda$, d.h. die $\Lambda$-Klasse $x\Lambda$ ist unendlich, wie behauptet.

Es sei $M$ eine Inzidenzstruktur, die keine projektive Ebene ist, und $E$ ihre (dann von $M$ verschiedene) freie Ebenenerweiterung $F(M)$. Sodann heißt ein Automorphismus $\pi$ von $E$, durch den $M$ auf sich abgebildet wird, *$M$-stationär* oder, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, einfach *stationär*. Jeder $M$-stationäre Automorphismus von $E$ induziert einen Automorphismus in $M$, und umgekehrt läßt sich jeder Automorphismus $\pi'$ von $M$ auf genau eine Weise zu einem Automorphismus $\pi$ von $F(M)=E$ ausdehnen: Ist $s_M(x)=0$ (also $x\in M$), so $x\pi=x\pi'$; ist aber $s_M(x)>0$ und sind $u$, $v$ die beiden wohlbestimmten mit $x$ inzidenten Elemente niedrigerer $M$-Stufe, so kann man $u\pi$ und $v\pi$ induktiv als schon bestimmt annehmen, und es ist dann $x\pi=(u\pi)(v\pi)$. Die $M$-stationären Automorphismen von $E=F(M)$

bilden also eine im wesentlichen mit der Automorphismengruppe von $M$ identische Gruppe, die wir mit $\Sigma_M(E)$ bezeichnen.

Folgerungen aus Lemma 2.1. (a) *Ist $\Sigma$ eine Gruppe $M$-stationärer Automorphismen der freien Ebenenerweiterung $E=F(M)$, mit einer unendlichen in $M$ enthaltenen $\Sigma$-Klasse $T$, so ist die von einem $x\in E$ mit nichtleerem Durchschnitt $M(x)\cap T$ aufgespannte $\Sigma$-Klasse $x\Sigma$ unendlich.*

(b) *Hat die Automorphismengruppe $\Sigma$ der Inzidenzstruktur $M$ lauter unendliche $\Sigma$-Klassen, so gilt das gleiche für die von $\Sigma$ in $F(M)$ erzeugte Gruppe von $M$-stationären Automorphismen.*

(c) *Ist $E=F(B)$ eine freie Ebene mit unendlicher Basis $B=\{a, b, c\}\cup C$, so sind der Punkt $(ab)c$ und die Geraden $c$, $ab$ Fixelemente aller Automorphismen von $\Sigma_B(E)$, die Punkte $a$, $b$ bilden eine $\Sigma_B(E)$-Klasse für sich, und alle anderen $\Sigma_B(E)$-Klassen sind unendlich.*

Um Lemma 2.1 im Falle (a) anwenden zu können, braucht man nur zu wissen, daß alle $M$-Sockel in $F(M)$ endlich sind; das folgt sofort aus Lemma 1.4. Die Folgerung (b) ist eine unmittelbare Konsequenz von (a).

Beweis von (c). Aus der Definition der Basis (S. 416) folgt, daß die mit $\Sigma_B(E)$ im wesentlichen identische Automorphismengruppe von $B$ gleich dem direkten Produkt der folgenden Gruppen $\Pi$ und $[\lambda]$ ist: $\Pi$ ist die von den Permutationen von $C$ erzeugte Kollineationsgruppe, und $[\lambda]$ ist die Gruppe der Ordnung zwei, die von der Vertauschung $\lambda$ von $a$ und $b$ erzeugt wird, wobei $x\lambda=x$ für alle $x\in C$. Also ist $C$ eine unendliche $\Sigma_B(E)$-Klasse $T$ in $B$, und die Richtigkeit von (c) ergibt sich aus (a) wegen der sofort zu verifizierenden Tatsache, daß alle Elemente von $E$, die nicht in einer der genannten vier endlichen Klassen liegen [diese nennen wir in Zukunft die *$B$-Ausnahmeklassen* von $E=F(B)$], einen $B$-Sockel haben, der mit $C$ einen nichtleeren Durchschnitt besitzt.

Folgerung (b) garantiert die Gültigkeit der Eigenschaft (I) aus der Einleitung in vielen freien Ebenenerweiterungen, die keine freien Ebenen sind; z. B. hat die freie (projektive) Ebenenerweiterung einer unendlichen desarguesschen affinen Ebene diese Eigenschaft. Für freie Ebenen mit unendlicher Basis wird die Eigenschaft (I) wegen (c) dann bewiesen sein, wenn gezeigt wird, daß jedes Element einer Ausnahmeklasse zu einem nicht in einer Ausnahmeklasse liegenden Element konjugiert ist. Dieser Nachweis wird in 2.4 geführt werden.

Wir wenden uns nun den freien Ebenenerweiterungen $F(M)$ mit solchen $M$ zu, deren Automorphismengruppen nur endliche $\Sigma_B(E)$-Klassen haben. Insbesondere ist das bei endlichem $M$ der Fall.

Lemma 2.2. *Es sei $\Sigma$ eine Gruppe $M$-stationärer Automorphismen der freien Ebenenerweiterung $E=F(M)$, und seien $U$, $V$ zwei endliche $\Sigma$-Klassen mit zwei Elementen $u\in U$, $v\in V$, für die $u\,\mathrm{I}\,v$ und $s_M(u)<s_M(v)$ gilt; ferner sei $u'$ das wohlbestimmte von $u$ verschiedene und mit $v$ inzidente Element niedrigerer $M$-Stufe. Ist sodann $|U|$ ungerade oder $u$ nicht $\Sigma$-konjugiert zu $u'$, so ist $|U|$ ein Teiler von $|V|$; sonst ist $|U|/2$ ein Teiler von $|V|$.*

Beweis. Zunächst bemerken wir, daß ein $M$-stationärer Automorphismus von $E$ natürlich die $M$-Stufe jedes Elementes von $E$ erhält; alle Elemente von $U$ haben also die gleiche $M$-Stufe wie $u$, und alle Elemente von $V$ die gleiche $M$-Stufe wie $v$. Aus $u \mathrm{I} v$ folgt die Existenz zweier natürlicher Zahlen $j, k$ mit folgenden Eigenschaften: Jedes Element von $U$ inzidiert mit genau $j$ Elementen von $V$, und jedes Element von $V$ inzidiert mit genau $k$ Elementen von $U$. (Für den einfachen Beweis dieser Behauptung sei auf [*1*, Satz 1] verwiesen; der dort gegebene Beweis für endliche Inzidenzstrukturen überträgt sich wörtlich auf den hier vorliegenden Fall.) Man kann nun die Anzahl der Paare $(x, y)$ mit $x \in U$, $y \in V$, $x \mathrm{I} y$ auf zwei verschiedene Weisen abzählen, woraus sich die Gleichung

$$j|U| = k|V|$$

ergibt (vgl. [*1*, S. 62]). Nun ist $k > 0$ wegen der Voraussetzung $u \mathrm{I} v$, und $k < 3$, da sonst jedes Element von $V$ mit mindestens drei Elementen niedrigerer $M$-Stufe inzident wäre, im Widerspruch zur Definition der freien Ebenenerweiterung. Also ist $k = 1$ oder $k = 2$, und aus der Definition von $u'$ folgt, daß genau dann $k = 1$ gilt, wenn $u$ und $u'$ nicht $\Sigma$-konjugiert sind. Die Behauptung des Lemmas ergibt sich nun sofort aus der obigen Gleichung.

Folgerungen. (a) *Es sei $E = F(B)$ eine freie Ebene mit endlicher Basis $B = \{a, b, c\} \cup C$ und $q$ der größte ungerade Teiler von $|C|$ $(|C| - 1)$. Dann gilt: Die von $a$ $b$ verschiedenen Geraden der $B$-Stufe Eins bilden eine volle $\Sigma_B(E)$-Klasse $K$ mit $2|C|$ Elementen; für jede von den $B$-Ausnahmeklassen und den $\Sigma_B(E)$-Klassen $C$, $K$ verschiedene $\Sigma_B(E)$-Klasse $X$ ist $|X|$ ein Vielfaches von $q$.*

Die zweite Behauptung ist natürlich nur für $|C| > 2$ interessant.

(b) *Ist $B$ eine (endliche) Basis einer $F_n$ mit $n > 4$, so bleiben genau die Elemente $a$ $b$, $c$, $(a\ b)\ c$ bei allen $B$-stationären Automorphismen fest. Ist $Q$ ein Basisviereck einer $F_4$, so gibt es keine bei allen $Q$-stationären Automorphismen festbleibenden Elemente.*

Beweis. Daß $C$ eine volle $\Sigma_B(E)$-Klasse ist, ist klar, und man verifiziert leicht, daß auch die beschriebene Menge $K$ eine $\Sigma$-Klasse von $2|C|$ Elementen ist $[\Sigma = \Sigma_B(E)]$. Ebenso leicht ist zu sehen, daß genau $|C|$ $(|C| - 1)$ der Schnittpunkte dieser Geraden von der $B$-Stufe 2 sind und eine $\Sigma$-Klasse $L$ für sich bilden. Nach Voraussetzung ist $q$ der größte ungerade Teiler von $|L|$. Jede Gerade $g$ von der $B$-Stufe 3 muß nun mit einem Punkt von $L$ inzidieren, denn sonst wäre von den beiden mit $g$ inzidenten Punkten niedrigerer Stufe einer gleich $(a\ b)\ c$ und der andere in $B$, also würde $g = a\ b$ oder $g = c$ folgen, im Widerspruch zu $s_B(g) = 3$. Also inzidiert $g$ mit einem Punkt von $L$, und Lemma 2.2 wird mit $U = L$ und $V = g\Sigma$ anwendbar. Folglich ist $q$ auch ein Teiler von $|g\Sigma|$, und damit ist (a) für alle von $C, K$ und den Ausnahmeklassen verschiedenen $\Sigma$-Klassen bewiesen, deren Elemente von einer $B$-Stufe $\leqq 3$ sind.

Sei nun $k > 3$ und (a) für alle $\Sigma$-Klassen von Elementen mit $B$-Stufe $< k$ bewiesen, die von $C, K$ und den Ausnahmeklassen verschieden sind. Ist sodann $V$ eine $\Sigma$-Klasse von Elementen der $B$-Stufe $k$, und ist $v \in V$, so existiert

ein mit $v$ inzidentes Element $u$ mit $s_B(u)=k-1\geqq 3$. Nach Induktionsvoraussetzung ist die Anzahl der Elemente der $\Sigma$-Klasse $U=u\Sigma$ ein Vielfaches von $q$, und Anwendung von Lemma 2.2 ergibt wieder, daß $q$ auch $|V|$ teilt. Damit ist die Folgerung (a) von Lemma 2.2 bewiesen.

(b) Daß $a\,b,\,c$ und $(a\,b)\,c$ bei allen $B$-stationären Automorphismen einer freien Ebene $E=F(B)$ festbleiben, haben wir schon früher gesehen. Ist nun $B$ endlich und $F(B)$ eine $F_n$ mit $n>4$, so ist $|C|>2$, und $|C|\,(|C|-1)$ besitzt einen ungeraden Teiler $\geqq 3$. Also ergibt Folgerung (a), daß außer den genannten Fixelementen höchstens noch Elemente der Ausnahmeklasse $\{a, b\}$ oder Elemente von $C$ oder $K$ bei allen $B$-stationären Automorphismen festbleiben könnten; das ist aber natürlich nicht der Fall.

Für $n=4$ versagt der eben durchgeführte Schluß, da sodann $|C|\,(|C|-1)=2$ ist, also keine ungeraden Teiler $>1$ enthält. Im nächsten Paragraphen wird gezeigt, daß die Behauptung (b) in diesem Falle sogar tatsächlich falsch wird. Aber im Falle $n=4$ ist $E$ ja auch als freie Ebenenerweiterung $F(Q)$ eines Basisvierecks $Q$ darstellbar, und die Gruppe $\Sigma=\Sigma_Q(E)$ der $Q$-stationären Automorphismen von $E$ (isomorph zur symmetrischen Gruppe vom Grad vier) hat keine Fixelemente: Zunächst ist $Q$ selbst eine volle $\Sigma$-Klasse, und das gleiche gilt für die Menge $Q_1$ der Geraden der $Q$-Stufe Eins. Wegen $|Q_1|=6$ ist die Primzahl 3 Teiler von $|Q_1|$. Wir zeigen, daß 3 auch alle anderen $|x\Sigma|$ teilt ($x\in E$): Ist das für alle $\Sigma$-Klassen mit Elementen der $Q$-Stufe $<k$ schon bewiesen ($k>1$), so sei $v$ ein Element der $Q$-Stufe $k$, $u$ ein mit $v$ inzidentes der $Q$-Stufe $k-1\geqq 1$ und $U=u\Sigma$, $V=v\Sigma$. Nach Induktionsvoraussetzung ist 3 ein Teiler von $|U|$, und Lemma 2.2 ergibt wieder, daß 3 auch ein Teiler von $|V|$ sein muß. Damit ist die Folgerung (b) von Lemma 2.2 bewiesen.

2.2. UNTEREBENEN FREIER EBENEN. Das Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des folgenden Satzes:

Satz 2.1. *Jede Unterebene einer freien Ebene $E=F(B)$ ist eine freie Ebene $E'=F(B')$, deren Basis $B'$ eine Mächtigkeit $m$ mit $5\leqq m\leqq \aleph_0|B|$ hat. Umgekehrt gibt es zu jeder solchen Mächtigkeit $m$ Unterebenen $F(B')$ von $E$ mit $|B'|=m$.*

Ist $B=\{a, b, c\}\cup C$ unendlich, so ist $\aleph_0|B|=|B|$, und man erhält Unterebenen $F(B')$ mit jeder Mächtigkeit $5\leqq m=|B'|\leqq|B|$ einfach durch Auswahl von Teilmengen $C'\in C$ mit $|C'|=m-3$; ist $B'=\{a, b, c\}\cup C'$ mit $C'\subseteqq C$, so folgt natürlich leicht $[B']=F(B')$ in $E$. Daß andere Typen von Unterebenen nicht auftreten können, folgt aus (F 3) (S. 416) und der aus der Definition der freien Ebenenerweiterung sich ergebenden Tatsache, daß $|E|=\aleph_0|B|=|B|$ ist.

Ist $B$ endlich, so enthält $E$ zunächst eine $F_4$ (mit $m=5$; nach Satz 1.1 erzeugt jedes Viereck in $E$ eine $F_4$) und deshalb nach (F 2) auch Unterebenen $F_n$ für jedes natürliche $n$. Da nach (F 3) andere als freie Unterebenen nicht auftreten können, bleibt zum Beweis von Satz 2.1 als einzige nichttriviale Aufgabe nur der Nachweis der Tatsache übrig, daß die $F_4$ nicht endlich erzeugbare Unterebenen besitzt. Das geschieht durch das folgende Lemma.

Lemma 2.3. *Es sei $E=F(B)$ eine $F_4$ mit der Basis $B=\{a, b, c\}\cup C$, $C=\{c_1, c_2\}$. Dann ist die Menge der bei allen $B$-stationären Automorphismen*

*von $E$ festbleibenden Elemente von $E$ eine nicht endlich erzeugbare freie Unterebene von $E$.*

Dieses Lemma liefert ein Analogon zu dem geläufigen Satz, daß eine Untergruppe einer endlich erzeugten freien Gruppe nicht endlich erzeugbar zu sein braucht (man vgl. z.B. KUROSCH [5, S. 274]).

Wir führen den etwas langwierigen Beweis von Lemma 2.3 in mehreren Schritten. Dabei wird der Kürze wegen „Stufe" statt „$B$-Stufe" gesagt und $s$ statt $s_B$ geschrieben. Die Gruppe $\Sigma=\Sigma_B(E)$ der $B$-stationären Automorphismen von $E$ ist das direkte Produkt von zwei zyklischen Gruppen der Ordnung zwei, nämlich der von der Vertauschung $\lambda$ von $a$ und $b$ (S. 420) und der Vertauschung $\pi$ von $c_1$ und $c_2$ erzeugten. $\Sigma$ ist also eine KLEINsche Vierergruppe; alle ihre Elemente sind involutorische Kollineationen, und jede $\Sigma$-Klasse hat 1, 2 oder 4 Elemente. Statt „$\Sigma$-Klasse" sagen wir einfach „Klasse", ohne Mißverständnisse befürchten zu müssen, und ebenso reden wir von „Fixelementen" statt „$\Sigma$-Fixelementen". Die Menge aller Fixelemente nennen wir $E'$.

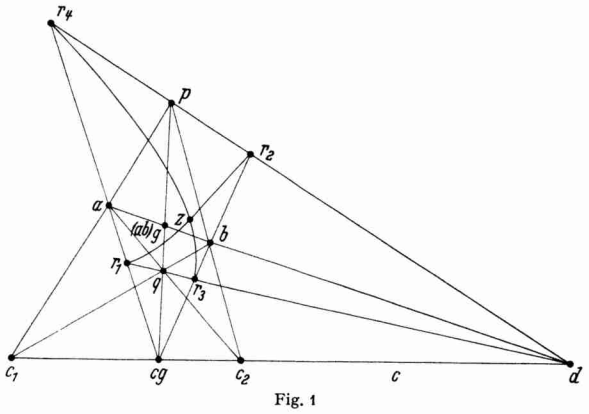

Fig. 1

(i) Wir zeigen zuerst, daß $E'$ eine nichtausgeartete projektive Ebene ist. Dazu braucht natürlich nur ein Viereck in $E'$ angegeben zu werden. Setzt man $p=(ac_1)(bc_2)$, $q=(ac_2)(bc_1)$, $g=pq$, so sieht man leicht, daß $g$ eine Fixgerade ist (vgl. Fig. 1); also sind $d=(ab)c$, $cg$ und $(ab)g$ bereits drei nichtkollineare Punkte in $E'$, und wir brauchen nur noch einen auf keiner Seite des von $d$, $cg$ und $(ab)g$ gebildeten Dreiecks liegenden Fixpunkt $z$ anzugeben. Nun bilden, wie man ohne Mühe einsieht, die Schnittpunkte $r_i$ $(i=1, \ldots, 4)$ der Geraden $dp$, $dq$ der Stufe 3 mit den Geraden $a(cg)$, $b(cg)$ der Stufe 5 eine Klasse für sich, und das gleiche gilt von den beiden Geraden $r_1r_2$ und $r_3r_4$ der Stufe 7. Ihr Schnittpunkt $z$ ist sicher ein Fixpunkt, und läge er auf einer der Seiten von $d$, $cg$, $(ab)g$, so wäre er mit drei Geraden niedrigerer Stufe inzident, im Widerspruch zur Definition der freien Ebenenerweiterung. Damit ist gezeigt, daß $E'$ nichtausgeartet ist.

(ii) Der Hauptteil des Beweises besteht im Nachweis der Richtigkeit von

(*) *Zu jeder natürlichen Zahl $n$ gibt es eine aus vier Elementen in allgemeiner Lage bestehende Klasse, deren Elemente eine Stufe $\geqq n$ haben.*

Beweis. Wäre (*) falsch, so müßte es ein minimales $n$ geben, für welches keine Klasse mit den behaupteten Eigenschaften existiert; da die in (i) angegebene Klasse $\{r_1, \ldots, r_4\}$ aus Punkten in allgemeiner Lage besteht, ist $n>6$.

Nun gibt es nach Auswahl von $n$ sicher eine aus vier in allgemeiner Lage befindlichen Elementen der Stufe $n-1$ bestehende Klasse $W$. Jedes mit einem $w \in W$ inzidente Element $x$ höherer Stufe gehört zu einer aus vier nicht in allgemeiner Lage befindlichen oder aus nur zwei Elementen bestehenden Klasse, denn da die Elemente von $W$ in allgemeiner Lage sind, kann $x$ kein Fixelement sein. Da die von $x$ erzeugte Klasse höchstens dann nur zwei Elemente enthält, wenn $x$ außer mit $w$ noch mit einem zweiten Element von $W$ inzidiert, so folgt, daß jedes nur mit $w$ und keinem anderen Element von $W$ inzidente $x$ mit $s(x) \geqq n$ zu einer aus vier Elementen bestehenden Klasse gehört, welche nicht in allgemeiner Lage sind und daher mit ein und demselben Fixelement inzidieren. Jedes solche $x$ inzidiert also mit genau einem Fixelement $f(x)$, und die von $x$ erzeugte Klasse besteht aus den vier Elementen $w_i f(x)$, $i=1, \ldots, 4$, wo $W=\{w_1, \ldots, w_4\}$.

Wir betrachten nun die Menge $X$ der mit genau einem $w_i = w \in W$ inzidenten Elemente der genauen Stufe $n$; jedes $x \in X$ inzidiert also außer mit $w$ noch mit genau einem weiteren Element $y \in B_{n-1}$. Nun hat aber $f(x)$ sicher eine niedrigere Stufe als $x$, da $f(x)$ mit vier Elementen der Stufe $n$ inzidiert, nämlich mit $x$ und den drei zur selben Klasse wie $x$ gehörigen Elementen $w_i f(x) \neq x$. Also ist $y=f(x)$, d.h. jedes Element $y \in B_{n-1}$, für welches $wy=x \notin B_{n-1}$ ist, gehört entweder zu $W$ oder ist ein Fixelement. Folglich müssen alle nicht in $E'$ liegenden Elemente von $B_{n-1}-W$ mit einem der beiden wohlbestimmten Elemente $u, v \mathrel{\mathrm{I}} w$ mit $s(u)$, $s(v)<s(w)$ inzidieren. Wegen $n>6$ sind nun sowohl die Punkte $a, b, c_1, c_2, p, q$ als auch die Geraden $ac_1, bc_1, ac_2, bc_2, dp, dq$ in $B_{n-1}-W$, denn alle diese 12 Elemente haben eine Stufe $\leqq 3$. Außerdem ist keines dieser Elemente ein Fixelement; es müßten also entweder die Punkte $a, \ldots, q$ auf zwei Geraden $u, v$ liegen oder die Geraden $ac_1, \ldots, dq$ durch zwei Punkte $u, v$ gehen. Beides ist aber nicht der Fall, es ergibt sich also ein Widerspruch, und (*) ist bewiesen.

(iii) Mit Hilfe von Lemma 1.6 können wir jetzt den Beweis von Lemma 2.3 zu Ende führen. Wegen (i) ist $E'$ eine nichtausgeartete Unterebene der freien Ebene $E=F_4$; nach (F 3) ist also auch $E'$ frei. Sei $B'=\{a', b', c'\} \cup C'$ eine Basis von $E'$; wir müssen zeigen, daß $C'$ nicht endlich sein kann. Wäre $C'$ endlich, so gäbe es eine natürliche Zahl $m$ mit $s(x) \leqq m$ für alle $x \in B'$. Nach der in (ii) bewiesenen Aussage (*) gibt es nun eine aus vier in allgemeiner Lage befindlichen Elementen derselben Stufe $\geqq m$ bestehende Klasse $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$. Da alle Kollineationen von $Q$ involutorisch sind, zerfallen die sechs Elemente $v_i v_j$ $(i \neq j)$ in drei Klassen zu je zweien, wie man leicht einsieht, und mindestens eine davon o.B.d.A. $\{v_1 v_2, v_3 v_4\}$, besteht aus Elementen einer Stufe $> m$, da sonst jedes $v_i$ mit drei Elementen kleineren Grades inzident wäre. Das Element $f=(v_1 v_2)(v_3 v_4)$ ist sodann ein Fixelement noch höherer Stufe, da sonst $v_1 v_2$ mit drei niedrigerstufigen Elementen inzidierte. Damit haben wir in $E'$ ein Element $f$ mit $s(f)>m$ gefunden, welches mit zwei nicht zu $E'$ gehörigen Elementen $u, v$ niedrigerer Stufe (nämlich $v_1 v_2$ und $v_3 v_4$) inzidiert. Wegen $s(f)>m$ kann $f$ nicht zu $B'$ gehören, d.h. $s'(f)>0$ (die $B'$-Stufe der Elemente von $E'$ wird mit $s'$ bezeichnet). Also inzidiert $f$ mit zwei

Elementen $u'$, $v'$ kleineren $B'$-Grades, die natürlich zu $E'$ gehören und deshalb von $u, v$ verschieden sind. Also folgt $m<s(f)<s(u')$ und $s'(f)>s'(u')$; das ist aber ein Widerspruch zu der Folgerung von Lemma 1.6 (S. 416), nach welcher aus $m<s(f)<s(u')$ auch $s'(f)<s'(u')$ folgen müßte. Dieser Widerspruch beweist Lemma 2.3, und damit ist auch Satz 2.1 bewiesen.

2.3. PROJEKTIVE EBENEN OHNE AUTOMORPHISMEN. In diesem Paragraphen wird folgender Satz bewiesen:

Satz 2.2. *Es gibt unendlich viele nichtisomorphe projektive Ebenen, die nur den identischen Automorphismus zulassen.*

Zum Beweis wird eine Klasse freier Ebenenerweiterungen $F(K)$ mit folgenden Eigenschaften konstruiert: (a) $K$ ist eine geschlossene Konfiguration, (b) $K$ besitzt nur den identischen Automorphismus. Es ist klar, daß jede solche $F(K)$ automorphismenfrei sein muß, denn zunächst muß jeder Automorphismus $K$ auf sich abbilden (nach der Folgerung von Lemma 1.5), d.h. $K$-stationär sein, andererseits ist die Gruppe der $K$-stationären Automorphismen isomorph zur Automorphismengruppe von $K$, also nach (b) trivial. Sind aber $K, K'$ zwei nichtisomorphe geschlossene Konfigurationen, so sind auch $F(K)$ und $F(K')$ nichtisomorph, denn nach der Folgerung von Lemma 1.5 müßte ein Isomorphismus von $F(K)$ auf $F(K')$ auch $K$ auf $K'$ abbilden, da $K$ und $K'$ geschlossene Konfigurationen sind. Es bleibt also übrig, unendlich viele nichtisomorphe automorphismenfreie geschlossene Konfigurationen anzugeben. HALL hat ein Beispiel einer solchen Konfiguration angegeben [3, p. 46]; das folgende (dem Verfasser von Herrn ANDRÉ mitgeteilte) Konstruktionsprinzip liefert gleich unendlich viele geschlossene Konfigurationen mit den verlangten Eigenschaften. $P$ sei eine von einem Viereck $V=\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$ erzeugte endliche projektive Ebene mit mindestens sechs Punkten auf jeder Geraden. Jede endliche Ebene ohne echte Unterebenen wird von einem Viereck erzeugt; für $P$ kann also z.B. jede desarguessche Ebene einer Primzahlordnung $\geqq 5$ genommen werden, d.h. es gibt unendlich viele Möglichkeiten der Auswahl für $P$. Sodann sei $g$ eine durch $p_1$, aber keinen anderen Punkt von $V$ gehende Gerade von $P$, und $S=V\cup\{g, p_1p_2, p_1p_3, p_3p_4\}$.

Man überzeugt sich nun ohne Schwierigkeit, daß keine nichtidentische Kollineation und keine Korrelation von $P$ die Menge $S$ auf sich abbildet, so daß $K=P-S$ nur den identischen Automorphismus zuläßt, denn jeder Automorphismus von $K$ wird natürlich von einem Automorphismus von $P$ induziert. Also erfüllt $K$ die Bedingung (b), und da jedes Element von $P$ nach Voraussetzung mit mindestens 6 andersartigen inzidiert, ist $K$ noch eine geschlossene Konfiguration, erfüllt also auch die Bedingung (a). Damit ist alles bewiesen.

2.4. BEWEIS VON (I) FÜR FREIE EBENEN. Es sei wieder $E=F(B)$ eine freie Ebene mit der Basis $B=\{a, b, c\}\cup C$, ferner seien $c_1$, $c_2$ zwei Punkte von $C$. Dann wird durch

$$(4)\qquad a'=a\,c_1,\quad b'=a\,c_2,\quad c'=b,\quad x'=b\,x \text{ für alle } x\in C$$

eine zu $B$ (dual-)isomorphe Menge $B'=\{a', b', c'\}\cup C'$ definiert, von der man leicht einsieht, daß sie die ganze Ebene $E$ erzeugt (da $B<[B']$). Wir zeigen,

daß $[B']=F(B')$ ist. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es $B'$-unfreie Elemente in $E$; sei $x$ ein solches. Von den wenigstens drei mit $x$ inzidenten Elementen niedrigerer $B'$-Stufe muß mindestens eines wegen $E=F(B)$ höhere $B$-Stufe als $x$ haben; sei $y$ ein solches Element. Aus $s_B(x)<s_B(y)$ und $s_{B'}(x)>s_{B'}(y)$ folgt nun aber mit der Folgerung von Lemma 1.6, da die Elemente von $B'$ nach (4) alle eine Stufe $\leqq 1$ haben, daß $s_B(x)<1$, also $x\in B$ sein müßte. Das ist ein Widerspruch, denn man sieht sofort, daß in $B$ kein $B'$-unfreies Element vorhanden ist. Also ist $E=[B']=F(B')$, und es ist bewiesen:

Lemma 2.4. *Die durch* (4) *erklärte Abbildung* $a\to a'$, $b\to b'$, $c\to c'$, $x\to x'$ *für* $x\in C$ *von* $B$ *auf* $B'$ *definiert eine Korrelation von* $E=F(B)=F(B')$.

Diese Korrelation nennen wir $\delta$. Wegen Lemma 2.4 gilt natürlich die

Folgerung. *Jede freie Ebene ist selbstdual.*

Nun sei $\Gamma=\Gamma_B(E)$ die von $\delta$ und der Gruppe $\Sigma=\Sigma_B(E)$ erzeugte Automorphismengruppe von $E=F(B)$. Das Hauptresultat dieses Paragraphen lautet:

Lemma 2.5. *Zu jedem* $x\in E$ *existiert ein* $\gamma\in\Gamma$ *mit* $s_B(x\gamma)>s_B(x)$.

Beweis. (i) Wie früher bezeichne $s(x)$ die $B$-Stufe, $s'(x)$ die $B'$-Stufe von $x\in E$. Natürlich ist $s_B(x)=s_{B\delta}(x\delta)$, und das bedeutet $s(x)=s'(x\delta)$ oder $s'(x)=s(x\delta^{-1})$. Da nach (4) alle Elemente von $B'$ eine $B$-Stufe $\leqq 1$ haben, ergibt nun die Folgerung von Lemma 1.6 (S. 416):

*Aus* $x\,\mathrm{I}\,y$, $s(x)<s(y)$ *und* $s(x\delta^{-1})>s(y\delta^{-1})$ *folgt* $x\in B$.

(ii) Ist $x=c$, so hat die Kollineation $\delta^2$ die in Lemma 2.5 behauptete Eigenschaft, denn aus (4) folgt sofort $c\delta^2=ac_2$. Um also das Lemma zu beweisen, genügt es jetzt, zu zeigen:

(**) *Ist* $c\neq x\in E$, *so hat entweder* $x\delta^{-1}$ *oder ein* $x\sigma\delta$ *mit* $\sigma\in\Sigma=\Sigma_B(E)$ *eine B-Stufe* $>s(x)$.

Den Beweis von (**) führen wir in mehreren Schritten. Wie früher (vgl. Fig. 1, S. 423) setzen wir $p=(ac_1)(bc_2)$ und $q=(ac_2)(bc_1)$.

(iii) Beweis für $s(x)\leqq 1$: Ist $s(x)=0$, also $c\neq x\in B$, so folgt die Richtigkeit von (**), mit $\sigma=1$, aus (4). Ist $s(x)=1$, so sind drei Fälle zu unterscheiden:

(a) $x=ab$, dann ist $s(x\delta^{-1})=s[(ab)c]=2$, nach (4).

(b) $x=c_1b$, dann ist $s(x\delta)=s(q)=2$ nach (4), also $\sigma=1$.

(c) $x\notin\{ab, c_1b\}$, dann ist $x$ von der Form $ay$ oder $by$, mit $y\in C$. In diesem Fall enthält $\Sigma$ ein $\sigma$ mit $x\sigma=c_1b$, und es folgt $s(x\sigma\delta)=s(q)=2$.

(iv) Wäre nun (**) nicht allgemein richtig, so gäbe es ein Element $z$ niedrigster $B$-Stufe $m$, für welches die Behauptung von (**) nicht gilt, für das also die Menge $\{z\delta^{-1}\}\cup z\Sigma\delta$ keine Elemente einer $B$-Stufe $>m$ enthält. Aus (iii) folgt sofort, daß $m>1$ sein muß. Mit $z$ inzidiert ein Element $u$ der Stufe $m-1$. Wegen der Minimaleigenschaft von $m$ gibt es ein $\gamma\in\Gamma$, welches entweder gleich $\delta^{-1}$ oder von der Form $\sigma\delta$ mit $\sigma\in\Sigma$ ist, mit $s(u\gamma)\geqq m$. Da $z\gamma$ als mit $u\gamma$ inzidentes Element nicht dieselbe $B$-Stufe wie $u\gamma$ haben kann und außerdem $z$ durch $\gamma$ nach unserer Annahme sicher nicht auf ein Element höherer Stufe abgebildet wird, ergibt sich $u\,\mathrm{I}\,z$, $s(u)<s(z)$ und $s(u\gamma)>s(z\gamma)$. Daraus folgt,

daß $\gamma$ nicht gleich $\delta^{-1}$ sein kann, denn das würde $u \in B$ bedeuten [wegen (i)], d.h. $m = s(u) + 1 = 1$, im Widerspruch zu (iii). Also muß $\gamma = \sigma\delta$ mit $B$-stationärem $\sigma$ sein.

(v) Wie in (iv) gezeigt, gilt $s(z\sigma\delta) < s(u\sigma\delta)$; andererseits ist aber auch, da $\sigma$ ein $B$-stationärer Automorphismus ist,

$$s[(z\sigma\delta)\delta^{-1}] = s(z\sigma) = s(z) > s(u) = s(u\sigma) = s[(u\sigma\delta)\delta^{-1}].$$

Nun ergibt (i) mit $x = z\sigma\delta$ und $y = u\sigma\delta$, daß $z\sigma\delta \in B$ sein muß, also $z\sigma \in B\delta^{-1}$. Außerdem muß $z\sigma$ wie $z$ die $B$-Stufe $m > 1$ haben. Man leitet nun leicht aus (4) her, daß $z\sigma$ dann nur der Punkt $p$ oder eine Gerade $px$ mit $c_1, c_2 \neq x \in C$ sein kann. Um den gewünschten Widerspruch zu erhalten, müssen wir also nur noch diese beiden Möglichkeiten ad absurdum führen. Da $q = p\lambda$ ist (die Kollineation $\lambda \in \Sigma$ wurde auf S. 420 definiert), und $q\delta = pq$ nach (4), ist $s(p\lambda\delta) = s(pq) = 3 > s(p)$. Es folgt $z\sigma \neq p$, also bleibt nur $z\sigma = px$ mit $c_1, c_2 \neq x \in C$, d.h. $m = s(z) = s(z\sigma) = 3$. Aus (4) folgt aber nun, mit $\sigma' = \sigma\lambda$, daß $s(z\sigma'\delta) = s[(px)\lambda\delta] = s[(pq)(bx)] = 4$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme über $z$, und damit ist Lemma 2.5 bewiesen.

Aus Lemma 2.5 ergibt sich nun sofort das Ziel dieses Abschnittes, nämlich der Beweis der in der Einleitung genannten Eigenschaft (I) für freie Ebenen:

Satz 2.3. *Jede freie Ebene besitzt eine Kollineationsgruppe, deren Transitivitätsklassen alle unendlich sind.*

Natürlich hat jede $\Gamma$-Klasse von $E = F(B)$ wegen Lemma 2.5 unendlich viele Elemente. Die in $\Gamma$ enthaltenen Kollineationen bilden einen Normalteiler $\Lambda$ vom Index zwei in $\Gamma$; wäre eine $\Lambda$-Klasse $x\Lambda$ endlich, so auch die entsprechende $\Gamma$-Klasse $x\Gamma$, denn es gilt $|x\Gamma| = 2|x\Lambda|$. Also hat $\Lambda$ nur unendliche Transitivitätsklassen, d.h. $E$ hat die Eigenschaft (I) schon bezüglich der $\Lambda$-Konjugiertheit (vgl. S. 419), und Satz 2.3 ist bewiesen.

## 3. Isomorphismen in offenen Ebenen

In diesem Abschnitt wird eine Verschärfung der in der Einleitung genannten Eigenschaft (II) für offene Ebenen bewiesen. In 3.4 und 3.5 werden Beispiele von offenen nicht freien Ebenen gebracht, welche zeigen, daß nicht alle offenen Ebenen auch die Eigenschaft (I) haben und daß (I) und (II) zusammen die freien Ebenen nicht charakterisieren, auch nicht innerhalb der offenen Ebenen.

3.1. Fastgeschlossene Konfigurationen. Der folgende Begriff ist grundlegend für diesen ganzen Abschnitt: Unter einer *fastgeschlossenen Konfiguration* verstehen wir eine endliche Inzidenzstruktur $K$, die ein Element $u = u(K)$ (ihr *Scheitelelement*) mit den folgenden Eigenschaften enthält:

(u 1) *$u$ inzidiert mit genau zwei Elementen von $K$ (den „Trägerelementen").*

(u 2) *Jedes $x \neq u$ von $K$ inzidiert mit mindestens drei Elementen von $K$.*

Zu jeder fastgeschlossenen Konfiguration definieren wir die *abgeleiteten* Konfigurationen $K', K'', \ldots$ durch

$$K' = K - u(K), \qquad K^{(i+1)} = [K^{(i)}]', \qquad i = 1, 2, \ldots . \tag{5}$$

Wegen der Endlichkeit von $K$ bricht die Folge der $K^{(i)}$ nach endlich vielen Schritten ab: $K^{(i+1)}$ ist nur dann definiert, wenn $K^{(i)}$ noch eine fastgeschlossene Konfiguration ist, was i. a. nicht der Fall zu sein braucht. Ist $K^{(n)}$ die letzte fastgeschlossene Konfiguration in der Reihe der abgeleiteten Konfigurationen von $K$, so heißt $n$ die *Ordnung* von $K$. Es ist klar, daß $n-i$ die Ordnung von $K^{(i)}$ ist.

Aus der Definition (5) der $K^{(i)}$ folgt, daß für $0 \leqq i < n$ einer der Träger von $K^{(i)}$ gleich dem Scheitel von $K^{(i+1)}$ sein muß. Dieses Element nennen wir $u_{i+1}(K)$, der andere Träger heißt $v_{i+1}(K)$. Die Elemente $u(K), u_1(K), \ldots, u_n(K)$ sind natürlich alle verschieden, während unter den $v_i(K)$, $i=1, \ldots, n$, sowohl mehrere Male dasselbe Element als auch gewisse $u_j(K)$ auftreten können.

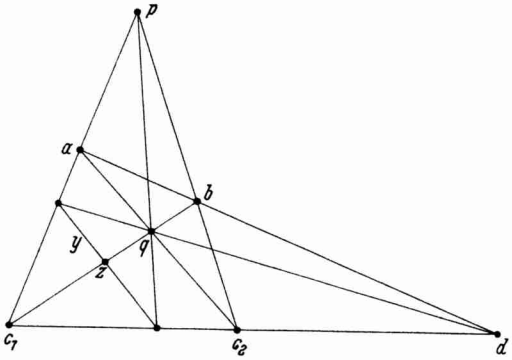

Fig. 2

In diesem Abschnitt betrachten wir nun ausschließlich solche fastgeschlossenen Konfigurationen, die sich als Teilmengen von offenen Ebenen auffassen lassen, also selbst offen sind. Im folgenden sei also $E$ stets eine offene Ebene, und alle fastgeschlossenen Konfigurationen seien als in $E$ enthalten angenommen.

Wir erledigen zuerst die Frage nach der Existenz von fastgeschlossenen Konfigurationen in $E$. Nach (S 3) von Lemma 1.2 (S. 413) ist der $B$-Sockel eines Elementes $x \in E$ genau dann eine fastgeschlossene Konfiguration mit Scheitel $x$, wenn jedes Element von $B \cap B(x)$ mit mindestens drei Elementen von $B(x)$ inzidiert; dabei kann $B$ ein beliebiges freies Erzeugendensystem einer $x$ enthaltenden Unterebene von $E$ sein. Fig. 2 zeigt zwei besonders einfache Beispiele: $B$ ist hier ein Basisviereck $Q=\{a, b, c_1, c_2\}$ der von $Q$ frei erzeugten Unter-$F_4$ von $E$ (vgl. Satz 1.1, S. 417), und die beiden Sockel $Q(y)$, $Q(z)$ (vgl. Fig. 2) sind fastgeschlossene Konfigurationen der Ordnungen 0 bzw. 1. Der Übergang von $Q(y)$ nach $Q(z)$ stellt ein einfaches Beispiel für das in dem folgenden Lemma ausgesprochene Konstruktionsprinzip für fastgeschlossene Konfigurationen beliebig hoher Ordnung in $E$ dar:

Lemma 3.1. *Ist $K$ eine fastgeschlossene Konfiguration in $E$ mit dem Scheitel $u$, so gibt es ein mit $u$ gleichartiges Element $v \in K$ derart, daß $K+uv$ eine fastgeschlossene Konfiguration ist, deren Ordnung die von $K$ um Eins übertrifft.*

Beweis. Natürlich erfüllt jedes $v \in K$ mit $uv \notin K$ diese Bedingung, man braucht also nur die Existenz eines solchen $v$ nachzuweisen. Diese ergibt sich aber sofort aus (u 1) und der aus der Definition der fastgeschlossenen Konfiguration leicht folgenden Tatsache, daß $K$ ein zu $u$ verschiedenartiges

und mit $u$ nicht inzidentes Element $w$ enthält: eines der drei mit $w$ inzidenten Elemente $x$ muß die Eigenschaft $ux \notin K$ haben.

3.2. Die Scheitelmenge einer offenen Ebene. Die Menge aller derjenigen Elemente einer offenen Ebene $E$, welche Scheitelelemente von fastgeschlossenen Konfigurationen in $E$ sind, heiße die *Scheitelmenge* von $E$, sie wird durch $S(E)$ bezeichnet. Ist $y \in S(E)$, also $y = u(K)$ für eine fastgeschlossene Konfiguration $K$ in $E$, und ist $x$ einer der beiden Träger von $y$ in $K$, so heißt $x$ im Falle $x \in S(E)$ ein *Vorgänger* von $y$ und $y$ ein *Nachfolger* von $x$. Allgemein heißt das Element $x \in S(E)$ *früher* als das Element $y \in S(E)$, oder $y$ *später* als $x$, wenn es eine Folge $x = u_0, u_1, \ldots, u_k = y$ $(k > 0)$ gibt derart, daß $u_i$ Vorgänger von $u_{i+1}$ ist $(i = 0, \ldots, k-1)$.

Lemma 3.2. *Die Früher-Relation in der Scheitelmenge $S(E)$ einer offenen Ebene $E$ definiert eine teilweise Ordnung in $S(E)$, die bei jedem Automorphismus von $E$ erhalten bleibt.*

Beweis. Das Vorgänger- und Nachfolgersein von Elementen in $S(E)$ ist nach Definition eine bei allen Automorphismen erhalten bleibende Eigenschaft; also bleibt auch die Früher-Relation erhalten. Zum Beweis des Lemmas muß daher nur noch gezeigt werden, daß $S(E)$ durch die Früher-Relation teilweise geordnet wird. Da die Transitivität der Früher-Relation trivial ist, beweisen wir nur ihre Antisymmetrie: Angenommen $u \neq u'$, und jedes der Elemente $u$, $u'$ sei früher als das andere. Dann existieren nach Definition Elemente $u = u_0, \ldots, u_k = u', \ldots, u_n = u$ mit folgenden Eigenschaften: $u_i = u(K_i)$ für fastgeschlossene Konfigurationen $K_i$ in $E$, $i = 0, \ldots, k, \ldots, n$; $u_i$ ist einer der Träger von $K_{i+1}$. Dann aber sieht man sofort, daß $K = \bigcup_{i=0}^{n} K_i$ eine geschlossene Konfiguration in $E$ sein müßte; dieser Widerspruch zur Offenheit von $E$ beweist Lemma 3.2.

Eine genauere Untersuchung der Früher-Relation in der Scheitelmenge $S(E)$ einer offenen Ebene $E$ liefert ein Verfahren zum Beweis der Eigenschaft (II) in jeder offenen Ebene. Das wird im nächsten Paragraphen 3.3 geschehen; vorher soll aber noch gezeigt werden, daß stets $S(E) \neq E$ gilt für den Fall, daß $E$ eine freie Ebene ist.

Lemma 3.3. *Eine in der freien Ebenenerweiterung $F(M)$ enthaltene fastgeschlossene Konfiguration mit dem Scheitel $u$ liegt in $M \cup M(u)$.*

Beweis. Angenommen, die fastgeschlossene Konfiguration $K \subsetneqq F(M)$ mit $u(K) = u$ enthielte Elemente, die weder in $M$ noch in $M(u)$ liegen; dann sei $z$ unter diesen eines mit maximaler $M$-Stufe $m$. Natürlich ist $m > 0$, da $z \notin M$, und es folgt, daß von den mindestens drei mit $z$ inzidenten Elementen von $K$ wenigstens eines höhere $M$-Stufe hat als $z$. Ist $w$ ein solches Element, so muß $w$ wegen der Maximaleigenschaft von $z$ in $M(u)$ liegen. Dann aber würde auch $z \in M(u)$ folgen, entgegen unserer Annahme. Damit ist Lemma 3.3 bewiesen.

Satz 3.1. *Ist $E = F(B)$ eine freie Ebene mit der Basis $B$, so ist der Durchschnitt von $B_3$ und $S(E)$ leer. Ist $E$ eine $F_4$ mit dem Basisviereck $Q$ (vgl. S. 416), so ist sogar der Durchschnitt von $Q_4$ und $S(E)$ leer.*

Beweis. Zunächst folgt aus der Basisdefinition von S. 416, daß $B=\{a, b, c\}\cup C$ keine fastgeschlossenen Konfigurationen enthalten kann. Also muß nach Lemma 3.3 jedes in einer fastgeschlossenen Konfiguration $K$ von $E$ enthaltene Element von $B$ mit drei verschiedenen Elementen von $K$ inzidieren. Sodann ergibt Lemma 3.3, daß $K$ schon in $B(u)\cup\{c\}$ enthalten sein muß $[u=u(K)]$, und für den Fall $E=F_4$ sogar in $Q(u)$. Man muß sich also nur noch davon überzeugen, daß $B(x)\cup\{c\}$ für kein $x\in B_3$, bzw. $Q(x)$ für kein $x\in Q_4$, eine fastgeschlossene Konfiguration enthält; das aber kann man den — noch sehr einfach gebauten — Sockeln $B(x)$ bzw. $Q(x)$ dieser Art direkt ansehen.

Daß $B_4$ im Falle $E\neq F_4$ sehr wohl Scheitelelemente enthalten kann, zeigt folgendes Beispiel: Sei $B=\{a, b, c\}\cup C$ mit $|C|>2$, und seien $c_1, c_2, c_3$ drei verschiedene Elemente von $C$. Ist dann $p_i=(a\,c_{i+1})\,(b\,c_{i+2})$ und $q_i=(a\,c_{i+2})\,(b\,c_{i+1})$, wobei die Indizes modulo 3 zu nehmen sind, so ist mit $u_i=(p_{i+1}q_{i+1})(p_{i+2}q_{i+2})$ jede der Mengen $B(u_i)+c$ $(i=1, 2, 3)$ eine fastgeschlossene Konfiguration mit Scheitel $u_i$. Dieses Beispiel, zusammen mit dem von Fig. 2 (wo $s_Q(y)=5$) zeigt, daß Satz 3.1 nicht verbessert werden kann.

Satz 3.1 erlaubt es, schnell die Existenz von offenen, nicht freien Ebenen nachzuweisen. Man kann nämlich leicht offene Ebenen unendlicher Höhe konstruieren, für welche $S(E)=E$ gilt. Ein Beispiel einer solchen Ebene findet sich in 3.5.

3.3. TRÄGERFOLGEN. Lemma 3.4. *Haben zwei fastgeschlossene Konfigurationen in einer offenen Ebene denselben Scheitel, so haben sie auch dieselben Träger.*

Beweis. Wären $K$ und $L$ zwei fastgeschlossene Konfigurationen in der offenen Ebene $E$ mit gleichem Scheitel $u$, für welche die Behauptung nicht zutrifft, so wäre $u$ also mit mindestens drei Elementen von $K\cup L$ inzident, und es würde folgen, daß diese (natürlich endliche) Teilmenge von $E$ eine geschlossene Konfiguration wäre, im Widerspruch zur Offenheit von $E$.

Lemma 3.5. *Haben zwei fastgeschlossene Konfigurationen $K, L$ in der offenen Ebene $E$ von Null verschiedene Ordnung und denselben Scheitel $u$, so ist $u_1(K)=u_1(L)$ und $v_1(K)=v_1(L)$.*

Beweis. Wegen Lemma 3.4 besteht zu der Behauptung höchstens die Alternative $u_1(K)=v_1(L)$, $v_1(K)=u_1(L)$; diese führt aber auf einen Widerspruch: Da $L$ von Null verschiedene Ordnung hat, ist $L'$ noch eine fastgeschlossene Konfiguration. Also inzidiert das vom Scheitel $u_1(L)$ von $L'$ verschiedene Element $v_1(L)$ mit mindestens drei verschiedenen Elementen von $L'$, und ebenso folgert man, daß $v_1(K)$ mit mindestens drei Elementen von $K'$ inzidiert. Wären nun, wie oben angenommen, $v_1(K)$ und $v_1(L)$ verschiedene Elemente, so würde sich ergeben, daß $K\cup L-u$ eine geschlossene Konfiguration wäre, wieder im Widerspruch zur Offenheit von $E$.

Die beiden soeben bewiesenen Lemmata bilden das wesentliche Hilfsmittel für den Beweis des folgenden Satzes:

Satz 3.2. *Zu jedem Element $x$ der Scheitelmenge $S(E)$ einer offenen Ebene $E$ existiert eine (und nur eine) Folge von Elementen $u_i(x), v_i(x)$ aus $E$ $(i=1, 2, \ldots)$*

*derart, daß für jede fastgeschlossene Konfiguration $K$ in $E$ mit Scheitel $x$ und mit beliebiger Ordnung $n$ gilt: $u_i(K)=u_i(x)$, $v_i(K)=v_i(x)$, $i=1, \ldots, n$.*

Beweis. Offenbar genügt es, folgendes zu zeigen: Ist $n$ das Minimum der Ordnungen zweier fastgeschlossener Konfigurationen $K$ und $L$ in $E$ mit demselben Scheitel $x$, so ist $u_i(K)=u_i(L)$ und $v_i(K)=v_i(L)$ für $i=1, \ldots, n$. Ist $n=0$, so ist nichts zu beweisen. Ist aber $n>0$, so besagt Lemma 3.5 gerade die Richtigkeit dieser Behauptung für $i=1$, und für $1<i\leqq n$ folgt ihre Richtigkeit für $i$ aus der für $i-1$ durch Anwendung von Lemma 3.5 auf die fastgeschlossenen Konfigurationen $K^{(i-1)}$ und $L^{(i-1)}$, die ja sodann (nach dem bei der Definition der Ordnung einer fastgeschlossenen Konfiguration bemerkten) sicher noch von Null verschiedene Ordnung haben.

Die nach Satz 3.2 durch $x$ eindeutig bestimmte Folge $T(x)=[u_1(x), v_1(x), u_2(x), \ldots]$ nennen wir die *Trägerfolge*, die von ihren $2n$ ersten Elementen gebildete endliche Teilfolge $T_n(x)=[u_1(x), v_1(x), \ldots, u_n(x), v_n(x)]$ die *$n$-te Trägerfolge* von $x$. Die Folge $T(x)$ kann gleich einer der $T_n(x)$ sein; ist z.B. $z$ das in Fig. 2 abgebildete Element der von $Q=\{a, b, c_1, c_2\}$ frei erzeugten $F_4$, so ist $T(z)=[y, bc_1]=T_1(z)$, denn nach Satz 3.1 ist $y=u_1(z)$ wegen $s_B(y)=5$ zwar noch in $S(E)$, aber jede fastgeschlossene Konfiguration mit Scheitel $y$ hat die Ordnung Null. Wie in 3.5 gezeigt werden wird, gibt es offene Ebenen $E$, bei denen $T(x)$ für jedes $x\in E$ unendlich ist. Mit $\{T(x)\}$ bzw. $\{T_n(x)\}$ werden die (ungeordneten) *Mengen* der Elemente von $T(x)$ bzw. $T_n(x)$ bezeichnet.

Das Element $x\in E$ heiße nun *$n$-konjugiert* zu $y\in E$ $(n=0, 1, \ldots)$, wenn es eine $T_n(x)$ enthaltende Unterebene $E'$ von $E$ gibt, welche sich auf eine $T_n(y)$ enthaltende Unterebene $E''$ derart isomorph abbilden läßt, daß bei diesem Isomorphismus $x$ in $y$, $u_i(x)$ in $u_i(y)$ und $v_i(x)$ in $v_i(y)$ übergeht $(i=1, \ldots, n)$. Es ist klar, daß das $n$-Konjugiertsein für jedes $n$ eine Äquivalenzrelation ist. Sind $x$ und $y$ durch Automorphismen von $E$ ineinander überführbar, so sind sie natürlich $n$-konjugiert für jedes $n$. Zwei beliebige Elemente $x, y\in E$ sind stets 0-konjugiert, wie man aus den Sätzen 1.1 und 3.1 leicht herleitet.

Satz 3.3. *In jeder offenen projektiven Ebene existiert eine unendliche Menge $Z$ von Elementen mit folgender Eigenschaft: Sind $z, z'$ zwei verschiedene Elemente von $Z$, so gibt es ein $n>0$ derart, daß $z$ und $z'$ nicht zueinander $n$-konjugiert sind.*

Da nach den obigen Bemerkungen das $n$-Konjugiertsein eine Abschwächung des in der Einleitung definierten Begriffes der Konjugiertheit ist (auch wenn man dort das Wort „Kollineationen" durch „Automorphismen" ersetzt; vgl. S. 412), wird mit dem Beweis des Satzes 3.3 auch der Nachweis der Gültigkeit von (II) für die offenen Ebenen erbracht sein.

Beweis. Da eine notwendige Folge der $n$-Konjugiertheit von $x$ und $y$ natürlich die Isomorphie der Inzidenzstrukturen $\{T_n(x)\}$ und $\{T_n(y)\}$ ist, genügt es, eine Folge $Z=(z_1, z_2, \ldots)$ von Elementen in $E$ derart zu konstruieren, daß $\{T_n(z_i)\}$ und $\{T_n(z_j)\}$ bei $i\neq j$ für hinreichend hohes $n$ nichtisomorph sind. Wir werden $Z$ als eine Folge von kollinearen Punkten konstruieren.

Wir beginnen mit einem Viereck $Q=\{a, b, c_1, c_2\}$ in der vorgegebenen offenen Ebene $E$ und konstruieren zunächst die Elemente $y$ und $z$ wie in Fig. 2 (S. 428). Sodann sei $x_0=(az)(qd)$ und $x_1=(c_1x_0)(pq)$. Damit haben wir die beiden ersten Punkte einer Folge $X=(x_0, x_1, \ldots)$ von Punkten aus $[Q]$ $(=F(Q)$ nach Satz 1.1) mit folgenden Eigenschaften konstruiert:

$$(6)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{(a) } Q(x_0) \text{ ist eine } Q(z) \text{ enthaltende fastgeschlossene Konfiguration.} \\ \text{(b) } Q(x_n) \subset Q(x_{n+1});\ u_1(x_{n+1}) = x_n\, x_{n+1} \\ \text{(c) } x_n \neq d, p, q,\ y(dq),\ y(pq) \\ \text{(d) } x_{2k} \mathrm{I} dq, \quad x_{2k+1} \mathrm{I} pq, \quad k = 0, 1, \ldots. \end{array}\right\} n = 0, 1, \ldots.$$

Ist $x_n$ mit diesen Eigenschaften schon gefunden, so liegt eine der Verbindungsgeraden von $x_n$ mit den Punkten von $Q$ wegen $x_n \neq d, p, q$ nicht in $Q(x_n)$ und schneidet diejenige der Geraden $dq, pq$, welche nicht mit $x_n$ inzidiert, in einem nicht zu $Q(x_n)$ gehörigen Punkt, den wir $x_{n+1}$ nennen können, da er, wie man leicht einsieht, wieder den Bedingungen (6) genügt.

Nachdem wir also eine Folge $X=(x_0, x_1, \ldots)$ mit den Eigenschaften (6) konstruiert haben, definieren wir jetzt $z_n=y(x_n\, x_{n-1})$ für $n=1, 2, \ldots$ (in Fig. 3 sind die $x_n$ und die $z_n$ bis $n=2$ eingezeichnet). Da $x_n$ und $z_n$ gleiche $Q$-Stufe haben und andererseits $s_Q(x_n)=2n+8 \neq s_Q(x_m)$ für $m \neq n$ ist, müssen die $z_n$ alle verschieden sein. Ferner unterscheiden sich die Sockel $Q(x_n)$ und $Q(z_n)$ nach Konstruktion nur durch die Elemente $x_n$ bzw. $z_n$ selbst, und es folgt:

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{(a)} \quad v_1(z_n) = y \\ \text{(b) } u_{2k-1}(z_n) = x_{n-k}\, x_{n-k+1},\ u_{2k}(z_n) = x_{n-k},\ k = 1, \ldots, n \\ \text{(c) } u_{2n+1}(z_n) = az,\ u_{2n+2}(z_n) = z,\ u_{2n+3}(z_n) = y. \end{array}\right\} n = 1, 2, \ldots$$

Nun sei $m<n$. Dann ist $u_{2m+3}(z_m)=y=v_1(z_m)$, nach (7). Wären $z_m$ und $z_n$ zueinander $(2m+3)$-konjugiert, so müßte $u_{2m+3}=v_1$ auch für die Trägerfolge von $z_n$ gelten; es ist aber $u_{2m+3}(z_n)$ entweder gleich $az$ oder gleich $x_{n-m-2}\, x_{n-m-1}$ (je nachdem ob $m$ gleich oder kleiner als $n-1$ ist), also immer von $v_1(z_n)=y$ verschieden. Also sind $z_m$ und $z_n$ nicht $(2m+3)$-konjugiert, und Satz 3.3 ist bewiesen.

3.4. EINE OFFENE EBENE MIT FIXELEMENT. In diesem Paragraphen wird durch ein Beispiel gezeigt, daß die offenen Ebenen die im zweiten Abschnitt für freie Ebenen bewiesene Eigenschaft (I) im allgemeinen nicht zu haben brauchen. Bei der zu konstruierenden Ebene ist eine Konjugiertenklasse (im Sinne von S. 419, mit $\Lambda$ gleich der vollen Automorphismengruppe) nicht nur endlich, sondern besteht sogar nur aus einem einzigen Element.

Es sei wieder $Q=\{a, b, c_1, c_2\}$ ein Viereck und $E=F(Q)$ die von $Q$ frei den Eigenschaften (6) wie in 3.3 (vgl. Fig. 3). Alle diese Punkte sind erzeugte $F_4$. Dann konstruieren wir wieder die Punkte $z, x_1, x_2, \ldots$ mit Scheitelelemente von fastgeschlossenen Konfigurationen, nämlich ihren $Q$-Sockeln, und daher Elemente von $S(E)$. Also ergibt Satz 3.1, daß die von dem

Viereck $V=\{z, x_0, x_1, c_2\}$ erzeugte Unterebene $[V]$ von $E$ verschieden ist. Da andererseits $[V]=F(V)$ ist (nach Satz 1.1), wird durch die Abbildungsvorschrift $a\to z$, $b\to x_0$, $c_1\to x_1$, $c_2\to c_2$ ein Isomorphismus $\pi$ von $E$ auf $[V]$ erklärt, welcher ein Monomorphismus, aber kein Automorphismus von $E$ ist. Also läßt sich $E$ nach Satz 1.3 in eine bezüglich $\pi$ uniforme offene Ebene $E'$ unendlicher Höhe einbetten. Wir zeigen, daß *der Punkt* $c_2\in E\subset E'$ *Fixpunkt jedes Automorphismus von* $E'$ *ist.*

Um das zu beweisen, brauchen wir nur $S(E')=E'-c_2$ nachzuweisen, denn $S(E')$ geht natürlich bei jedem Automorphismus von $E'$ in sich über. Jede fastgeschlossene Konfiguration in $E'$ liegt nun wegen ihrer Endlichkeit schon in einem der Glieder $E_n$ von $E'$ (vgl. S. 418); also kann ihr Scheitel nach

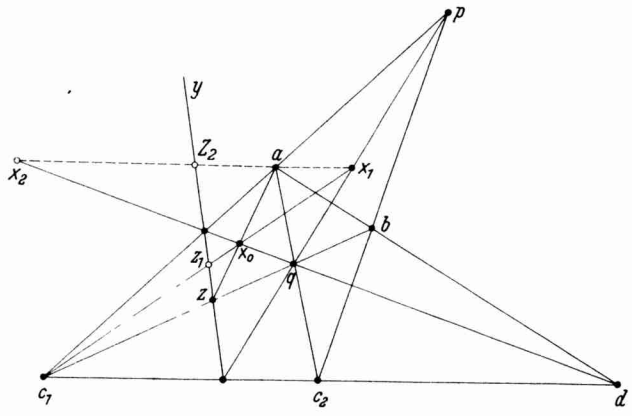

Fig. 3

Satz 3.1 nicht gleich $c_2$ sein, und es folgt $c_2\notin S(E')$. Es bleibt zu zeigen, daß alle $x\neq c_2$ von $E'$ zu $S(E')$ gehören. Wäre das nicht der Fall, so gäbe es ein Element $v\in E'$ mit $c_2\neq v\notin S(E')$. Dieses Element müßte bereits in einem Glied $E_n$ liegen, also läge $w=v\pi'^{n+1}$ in der von $V$ erzeugten Unterebene $E\pi$ von $E$, und da $\pi'$ ein Automorphismus (nämlich der $\pi$ in $E$ induzierende, vgl. Satz 1.3) von $E'$ ist, wäre auch $w\notin S(E')$, und wir hätten mit $w$ ein von $c_2$ verschiedenes und nicht in $S(E')$ liegendes Element in $[V]$ gefunden.

Wir betrachten jetzt die Menge $K=Q(x_1)\cup V(w)$ (in Fig. 3 sind die Elemente von $Q(x_1)$ stärker gezeichnet als die anderen). Höchstens die Elemente $x_1$ und $w$ von $K$ inzidieren mit weniger als drei Elementen von $K$, denn $Q(x_1)$ ist nach Konstruktion eine fastgeschlossene Konfiguration, welche die zu $V(w)$ gehörigen und möglicherweise mit weniger als drei Elementen von $V(w)$ inzidenten Elemente $z$, $x_0$, $c_2$ enthält. Da $K$ keine geschlossene Konfiguration sein kann, inzidiert wenigstens eines der Elemente $x_1$, $w$ mit nur zwei Elementen von $K$, und wegen $w\notin S(E')$ ist das für $x_1$ sogar bestimmt der Fall. Also sind $x_0x_1$ und $qx_1$ genau die beiden zu $K$ gehörigen mit $x_1$ inzidenten Geraden. Nun ist $qx_1\notin[V]$, denn sonst wäre $s_Q(qx_1)<s_Q(x_1)$ und $s_V(qx_1)>s_V(x_1)$,

so daß nach Lemma 1.6 ein $u \in V$ mit $x_1 \in Q(u)$ existieren würde; das ist aber nicht möglich, denn dann müßte $u \neq x_1$, also $s_Q(u) > s_Q(x_1)$ sein, im Widerspruch zu der Tatsache, daß nach Konstruktion $x_1$ maximale $Q$-Stufe in $V$ hat. Also ist $q\,x_1$ auch nicht in $V(w)$ enthalten, und es folgt, daß $V(w)$ höchstens eine Gerade durch $x_1 \in V$ enthält, nämlich die Gerade $x_0 x_1$. Aus der Sockeldefinition (S. 413) ergibt sich daraus aber sofort, daß die $V$-Stufe von $w$ höchstens gleich 1 ist. Also müßte $w$ einer der Punkte von $V$ oder eine der Verbindungsgeraden dieser Punkte sein. Die $Q$-Sockel der von $c_2$verschiedenen unter diesen Elementen sind nun aber, wie man sofort der Fig. 3 entnimmt, fastgeschlossene Konfigurationen mit diesen Elementen als Scheiteln. Wegen $w \notin S(E')$ würde nun $w = c_2$ folgen, im Widerspruch zu unserer Annahme. Also ist $c_2$ tatsächlich das einzige nicht in $S(E')$ liegende Element von $E'$ und deshalb Fixpunkt aller Automorphismen von $E'$.

Da $c_2$ bei Korrelationen von $E'$ natürlich nicht festbleiben könnte, haben wir gleichzeitig folgenden Satz bewiesen:

Satz 3.4. *Es gibt nicht-selbstduale offene projektive Ebenen.*

Wegen der Folgerung von Lemma 2.4 (S. 426) haben wir damit die Existenz nicht-freier offener Ebenen unabhängig von dem auf S. 417 zitierten Satz von KOPEJKINA neu bewiesen.

Es sei noch bemerkt, daß man statt der Punkte $z$, $x_0$, $x_1$ auch drei beliebige andere Punkte der Folge $x_0, x_1, \ldots$ mit den Eigenschaften (6), welche zusammen mit $c_2$ ein Viereck $V$ bilden, zum Beweis hätte benutzen können. Ist $\pi$ der durch $Q \to V$ definierte Monomorphismus von $E$, so hat stets die bezüglich $\pi$ uniforme, $E$ enthaltende offene Ebene $E'$ unendlicher Höhe nur $c_2$ festlassende Automorphismen. Durch Auswahl verschiedener $V$ kann man auf diese Weise verhältnismäßig einfach zeigen, daß es unendlich viele nichtisomorphe offene Ebenen mit Fixelement gibt.

3.5. EINE OFFENE, NICHT-FREIE EBENE MIT DER EIGENSCHAFT (I). In diesem letzten Paragraphen wird an einem weiteren Beispiel gezeigt, daß die freien Ebenen nicht die einzigen offenen Ebenen mit der Eigenschaft (I) sind, was man nach 3.4 vermuten könnte. Das jetzt zu konstruierende Beispiel lehnt sich eng an das des vorigen Paragraphen an; es wird eine offene, aber nicht freie Ebene angegeben, welche eine zyklische Gruppe von Kollineationen mit lauter unendlichen Transitivitätsgebieten besitzt.

Es sei wieder $E = F(Q)$ die von $Q = \{a, b, c_1, c_2\}$ frei erzeugte $F_4$, und $z, x_1, x_2, \ldots$ mit den Eigenschaften (6) wie in 3.3. Wieder ergibt Satz 3.1, daß die von $V = \{z, x_0, x_1, x_2\}$ erzeugte Unterebene $[V]$ von $E$ verschieden ist (man beachte, daß das Symbol $V$ jetzt ein anderes Viereck bezeichnet als in 3.4). Den durch die Vorschrift $a \to z$, $b \to x_0$, $c_1 \to x_1$, $c_2 \to x_2$ definierten Monomorphismus von $E$ mit der Bildebene $[V]$ bezeichnen wir wieder mit $\pi$, und $E'$ sei die bezüglich $\pi$ uniforme $E$ enthaltende offene Ebene unendlicher Höhe mit dem $\pi$ in $E$ induzierenden Automorphismus $\pi'$. Wir wollen beweisen: *$E'$ ist keine freie Ebene,* und *die von $\pi'$ erzeugte zyklische Automorphismengruppe von $E'$ hat nur unendliche Transitivitätsgebiete.*

Die erste dieser Behauptungen ist wegen Satz 3.1 bewiesen, wenn $S(E')=E'$ gezeigt wird. Das kann man aber leicht ebenso einsehen wie in 3.4 die Tatsache, daß dort der Punkt $c_2$ das einzige nicht in $S(E')$ gelegene Element von $E'$ war. Dieser Beweis soll daher jetzt nicht ausgeführt werden. Es bleibt übrig zu zeigen, daß die von $\pi'$ erzeugte Kollineationsgruppe von $E'$ lauter unendliche Transitivitätsgebiete hat. Dazu beweisen wir zunächst:

$$Q(x_2)\cap[V]=V\cup\{x_0x_1,\ x_1x_2,\ x_2x_0,\ x_0z,\ a\}. \tag{8}$$

[Die Elemente von $Q(x_2)$ sind genau die von $z_1, z_2$ verschiedenen der Fig. 3.] Wäre (8) falsch, so müßte es Elemente in $Q(x_2)\cap[V]$ geben, welche weder zu $V$ noch zu $\{x_0x_1,\ x_1x_2,\ x_2x_0,\ x_0z,\ a\}$ gehören. Sei $w$ ein solches Element, und $K=Q(x_2)\cup V(w)$. Da $x_2\neq w\in Q(x_2)$ ist, inzidiert $w$ mit mindestens drei Elementen von $K$, d. h. $K$ ist eine fastgeschlossene Konfiguration mit Scheitel $x_2$ (nach Definition von $K$ können nämlich höchstens Elemente von $Q$ oder $V$ mit weniger als drei Elementen von $K$ inzidieren). Nun ergibt Lemma 3.3, daß $K$ schon in $Q(x_2)$ enthalten ist, und das ist ein Widerspruch, denn der Sockel $V(w)$ eines Elementes $w$ mit den vorausgesetzten Eigenschaften kann natürlich nicht in $Q(x_2)$ liegen. Damit ist (8) bewiesen.

Wir bezeichnen jetzt die $Q$-Stufen der Elemente von $E$ mit $s$, die $V$-Stufen der Elemente von $[V]$ mit $s'$ und zeigen:

$$s'(x)<s(x)\quad\text{für}\quad a\neq x\in[V]. \tag{9}$$

Wäre das falsch, so gäbe es ein Element $w\neq a$ minimaler $V$-Stufe mit $s(w)\leqq s'(w)=m$. Man entnimmt der Fig. 3 sofort, daß $m>1$ sein muß. Mit $w$ inzidiert ein Element $u$ der $V$-Stufe $m-1$, für welches wegen der Minimaleigenschaft von $m$ natürlich $m-1<s(u)$ gilt. Da $s(w)-s'(w)\equiv 0 \bmod 2$ ist, folgt sogar $s(u)>m$, und damit haben wir ein Elementepaar $u, w$ mit $s(w)<s(u)$ und $s'(w)>s'(u)$ gefunden. Nach Lemma 1.6 existiert nun ein Element $v\in V$ mit $u\in Q(v)$. Das Element $w$ müßte dann aber auch in $Q(v)$ liegen, und da nach Konstruktion $Q(x_2)=\bigcup_{v\in V}Q(v)$ ist, folgt $w\in Q(x_2)$. Da $w$ natürlich in $[Q]$ liegt, ergibt nun (8), daß $w$ eines der neun Elemente $a, z, x_0, x_1, x_2, x_0x_1, x_1x_2, x_2x_0, x_0z$ sein müßte. Aber $a$ ist das einzige dieser Elemente, dessen $Q'$-Stufe höher als seine $Q$-Stufe ist, wie man direkt nachprüft. Also würde jetzt $w=a$ folgen, im Widerspruch zu unserer Annahme $w\neq a$. Damit ist (9) bewiesen.

Nun ist natürlich $s(x)=s_Q(x)=s_{Q\pi}(x\pi)=s'(x\pi)$ für alle $x\in E$, wobei $\pi$ den oben durch die Abbildungsvorschrift $Q\to V$ erklärten Monomorphismus von $E$ auf $[V]$ bedeutet. Also ist $s'(y)=s(y\pi^{-1})$ für alle $y\in[V]$, und aus (9) folgt $s(y\pi^{-1})<s(y)$ für alle $y\neq a$ von $[V]$. Wegen $d\pi=a$ (vgl. Fig. 3) bedeutet das:

$$s(x)<s(x\pi)\quad\text{für}\quad d\neq x\in E. \tag{10}$$

Mit Hilfe von (10) läßt sich nun die zweite der oben aufgestellten Behauptungen leicht beweisen: Gäbe es eine endliche Transitivitätsklasse $T$ der von

$\pi'$ erzeugten zyklischen Kollineationsgruppe von $E'$, so müßte $T$ schon in einem der Glieder $E_n$ von $E'$ liegen (vgl. S. 418), und folglich wäre $T = T\pi'^n$ in $E$ selbst enthalten. Wegen (10) könnte $T$ nur aus Elementen mit $Q$-Stufe $\leqq 2$ bestehen; aber aus der Definition von $\pi$ ergibt sich sofort, daß alle von $d$ verschiedenen Elemente von $Q_2$ durch $\pi$ auf Elemente mit $Q$-Stufe $>2$ abgebildet werden, insbesondere das Element $a = d\pi$ auf das Element $z$ der $Q$-Stufe 6. Dieser Widerspruch beweist die Nichtexistenz endlicher $\pi'$-Klassen, und damit ist alles bewiesen.

Wie bei dem Beispiel von 3.4 hätte man auch hier $V$ anders definieren können; mit jedem Viereck $V$ von Punkten der Folge $z, x_0, x_1, \ldots$ hätte man ebenfalls die Eigenschaft (I) für $E'$ beweisen können. Auf diese Weise erhält man das Resultat, daß es sogar unendlich viele nichtisomorphe offene, aber nicht freie Ebenen mit der Eigenschaft (I) gibt.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß der auf S. 417 zitierte Satz von KOPEJKINA auch in 3.5 nirgends benutzt worden ist. Will man diesen Satz benutzen, so kann man noch einfachere Beispiele offener nicht-freier Ebenen mit der Eigenschaft (I) angeben.

## Anhang: Ein Einbettungssatz

Das Thema dieses Anhanges ist ein Satz, der eigentlich schon auf S. 418 (bei Satz 1.3) hätte bewiesen werden müssen, der aber deshalb auf später verschoben wurde, weil seine Gültigkeit sich auf einen viel größeren Bereich erstreckt als den der projektiven Ebenen.

Unter einer *allgemeinen Algebra* versteht man eine Menge $A$ zusammen mit einer Folge $R = (r_j)$ [$j \in J$ = beliebige Indexmenge] von Relationen; $r_j$ ist eine Untermenge einer Produktmenge $A^{n_j}$. Zu jeder allgemeinen Algebra gehört also eine Folge $N = (n_j)_{j \in J}$ von natürlichen Zahlen. Jede Gruppe $G$ ist eine allgemeine Algebra: $R$ besteht aus einer einzigen (ternären) Relation $r \subseteqq G^3$, und $(x, y, z) \in r$ gilt genau dann, wenn $xy = z$ ist. Jede projektive Ebene $E$ ist eine allgemeine Algebra: $R$ besteht aus einer einzigen (binären) Relation $i \subseteqq E^2$, und $(x, y) \in i$ gilt genau dann, wenn $x \mathrm{I} y$ ist.

Zwei allgemeine Algebren $A$ und $A'$ heißen *vergleichbar*, wenn sie gleiche Indexmenge $J$ und gleiche Folge $N$ besitzen. Alle Gruppen sind also vergleichbar, und dasselbe gilt für alle projektive Ebenen; aber keine Gruppe ist mit einer projektiven Ebene vergleichbar. Eine Abbildung $\pi$ einer allgemeinen Algebra $A$ auf eine vergleichbare $A'$ heißt nun ein *Homomorphismus*, wenn für jedes $j \in J$ aus $(x_1, \ldots, x_{n_j}) \in r_j$ stets $(x_1\pi, \ldots, x_{n_j}\pi) \in r_j'$ folgt. Im allgemeinen kann man für die Relation $r_j'$ von $A'$ wieder $r_j$ schreiben, ohne Mißverständnisse befürchten zu müssen.

Ebenso wie auf S. 412 für projektive Ebenen werden nun spezielle Homomorphismen von allgemeinen Algebren Endo-, Epi-, Iso-, Mono- und Automorphismen genannt. Wie üblich ist das Produkt $\pi\lambda$ zweier Endomorphismen $\pi$, $\lambda$ von $A$ durch $x(\pi\lambda) = (x\pi)\lambda$ für alle $x \in A$ definiert; $\pi$ und $\lambda$ heißen *vertauschbar*, wenn $\pi\lambda = \lambda\pi$ ist. Die Menge aller mit $\pi$ vertauschbaren Endomorphismen wird mit $\Phi(\pi)$ bezeichnet.

Der erwähnte Einbettungssatz lautet nun:

Satz. *Es sei $A$ eine allgemeine Algebra mit einem Monomorphismus $\pi$. Dann gibt es eine mit $A$ vergleichbare Algebra $A'$ mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *$A'$ ist die Vereinigungsmenge einer Folge von zu $A$ isomorphen Unteralgebren $A=A_0\subseteqq A_1\subseteqq\ldots$ (also ist $A$ in $A'$ eingebettet).*

(b) *$A'$ besitzt einen $\pi$ in $A$ induzierenden Automorphismus $\pi'$.*

(c) *Zu jedem $\lambda\in\Phi(\pi)$ existiert ein $\lambda$ in $A$ induzierender Endomorphismus $\lambda'$ von $A'$.*

(d) *Alle diese $\lambda'$ sind mit $\pi'$ vertauschbar.*

(e) *Ist $\lambda\in\Phi(\pi)$ und $A\pi^k\subseteqq A\lambda$ für eine natürliche Zahl $k$, so ist $\lambda'$ ein Epimorphismus.*

(f) *Ist $\lambda\in\Phi(\pi)$ ein Monomorphismus, so auch das entsprechende $\lambda'$.*

Beweis. Ist $A\pi=A$, so ist $\pi$ ein Automorphismus, und wir sind fertig: $A'=A$, $\pi'=\pi$, $\lambda'=\lambda$ für alle $\lambda\in\Phi(\pi)$. Also kann $A\pi\neq A$ angenommen werden. Dann betrachten wir eine abzählbar-unendliche Folge $A_0, A_1, \ldots$ von zu $A$ isomorphen Algebren und in jeder $A_n$ die $\pi$ und den $\lambda\in\varphi(\pi)$ entsprechenden Endomorphismen $\pi_n$ und $\lambda_n$ $(n=0, 1, \ldots)$. Durch die Identifizierungen $A_0=A$, $A_n=A_{n+1}\pi_{n+1}$ werden die $A_n$ ineinander echt eingebettet: $A=A_0=A_1\pi_1\subset A_1=A_2\pi_2\subset\ldots$; wir zeigen, daß die Vereinigungsmenge $A'=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n$ die behaupteten Eigenschaften hat.

Es ist klar, daß $A'$ eine mit $A$ vergleichbare allgemeine Algebra ist: jeder Relation $r$ von $A$ wird folgendermaßen umkehrbar eindeutig eine Relation $r'$ von $A'$ zugeordnet: Sind $x_1, \ldots, x_n\in A'$, so gibt es ein $k$ mit $x_1, \ldots, x_n\in A_k$, und nun soll $(x_1, \ldots, x_n)\in r'$ genau dann gelten, wenn $(x_1, \ldots, x_n)\in r_k$ gilt, wobei $r_k$ die $r$ entsprechende Relation von $A_k$ ist.

Ist $\lambda$ ein beliebiger Endomorphismus von $A$ und $\lambda_n$ der entsprechende Endomorphismus von $A_n$, so ist also das $\pi_{n+1}$-Urbild des $\lambda_n$-Bildes eines Elementes $x\in A_n\subset A_{n+1}$ gleich dem $\lambda_{n+1}$-Bild seines $\pi_{n+1}$-Urbildes, das heißt

$$\lambda_n=\pi_{n+1}^{-1}\lambda_{n+1}\pi_{n+1}\qquad(n=0, 1, \ldots).$$

Ist nun $\lambda\in\Phi(\pi)$, so sind $\lambda_{n+1}$ und $\pi_{n+1}$ vertauschbar, und es ergibt sich $x\lambda_n=x\lambda_{n+1}$ für alle $x\in A_n$, d.h. jedes $\lambda_n$ wird von $\lambda_{n+1}$ induziert. Also haben alle $\lambda_n$ eine gemeinsame Fortsetzung $\lambda'$, welche ein Endomorphismus von $A'$ sein muß. Wegen $\pi\in\Phi(\pi)$ wird auch $\pi$ durch ein $\pi'$ von $A'$ induziert, und man sieht sofort, daß alle $\lambda'$ [wo $\lambda\in\Phi(\pi)$] mit $\pi'$ vertauschbar sind. Ist $\lambda$ umkehrbar, so auch alle $\lambda_n$, und $\lambda'$ ist ein Monomorphismus. Wegen

$$A'\pi'=\Big(\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n\Big)\pi'=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n\pi_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{n-1}\cup A_0\pi_0=\bigcup_{n=0}^{\infty}A_n=A'$$

ergibt sich, daß $\pi'$ sogar ein Automorphismus ist. Folglich sind auch alle $\pi'^k$ Automorphismen von $A'$, und ist $A\pi^k\subseteqq A\lambda$ für ein $\lambda\in\Phi(\pi)$, so folgt

$$A_n\pi_n^k=A_n\pi'^k\subseteqq A_n\lambda_n=A_n\lambda',$$

und daraus

$$A' = A'\pi'^k = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \pi'^k \subseteq \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \lambda' = A'\lambda',$$

also $A'\lambda' = A'$, und $\lambda'$ ist ein Epimorphismus. Damit ist alles bewiesen.

Für den Fall, daß $A$ eine freie projektive Ebene ist, ergibt der Beweis, daß $A'$ die bezüglich $\pi$ uniforme $A$ enthaltende offene projektive Ebene unendlicher Höhe ist. Aus dieser Bemerkung ergibt sich sofort die Richtigkeit von Satz 1.3.

Wir bemerken zum Schluß, daß man den Satz 1.3 auch aus einem viel tiefer liegenden Satz von B. H. NEUMANN [6] hätte herleiten können; jedoch hätte eine solche Herleitung nicht weniger Platz in Anspruch genommen als der Beweis des Satzes von S. 437.

*Zusatz bei der Korrektur:* Herr B. H. NEUMANN hat mich darauf aufmerksam gemacht, daß Teile des Satzes von S. 437 in einer Fußnote der Arbeit *Extending partial endomorphisms of groups* von B. H. NEUMANN und HANNA NEUMANN [Proc. London Math. Soc. (3) **2**, 338—348 (1952)] bewiesen worden sind.

## Literatur

[1] DEMBOWSKI, P.: Verallgemeinerungen von Transitivitätsklassen endlicher projektiver Ebenen. Math. Z. **69**, 59—89 (1958). — [2] HALL, M.: Projective planes. Trans. Amer. Math. Soc. **54**, 229—277 (1943). — [3] HALL, M.: Projective planes and related topics. Calif. Inst. Techn. 1954. — [4] KOPEJKINA, L. I.: Freie Zerlegungen von projektiven Ebenen. Isv. Akad. Nauk SSSR. **9**, 495—526 (1945). — [5] KUROSCH, A.: Gruppentheorie. Berlin 1953. — [6] NEUMANN, B. H.: An embedding theorem for algebraic systems. Proc. London Math. Soc. **4**, 138—153 (1954). — [7] PICKERT, G.: Projektive Ebenen. Berlin 1955. — [8] SKORNYAKOV, L. A.: Projective planes. Translation 99 Amer. Math. Soc. [von Usp. Akad. Nauk. SSSR. **6**, 112—154 (1951)], Providence 1953.

*Frankfurt a.M., Mathematisches Seminar der Universität*

*(Eingegangen am 4. Mai 1959)*

FLEISCHER, I.
Math. Zeitschr. 72, 439—445 (1960)

# Über Dualität in lineartopologischen Moduln

Von
ISIDORE FLEISCHER

**1.** Topologien auf abelschen Gruppen, die durch Angabe eines Nullfundamentalsystems von Untergruppen definiert werden können, sind schon häufig und von verschiedenen Gesichtspunkten aus untersucht worden (in letzter Zeit z.B. in den Arbeiten [5]—[10]; für eine Beschreibung der älteren Literatur, s. [6] und [8]). Sie liefern einerseits neue Beispiele topologischer Gruppen, die sich besonders leicht handhaben, andererseits ein wertvolles Hilfsmittel zur Strukturuntersuchung unendlicher Gruppen.

Die vorliegende Arbeit will sich mit einer einheitlichen Auseinandersetzung der besonders anziehenden Dualitätstheorie solcher Gruppen beschäftigen. Über die bekannten Arbeiten hinaus ist die vorliegende Fassung eine streng abstrakte: sie arbeitet mit einem im allgemeinen nichtkommutativen Operatorenbereich und versucht durch schrittweise Hinzufügung von Postulaten die wesentlichen Eigenschaften unter möglichst weittragenden Voraussetzungen festzustellen. Es wird erwartet, daß die folgende Entwicklung nicht nur eine Erweiterung des Gültigkeitsbereiches der Theorie bewirkt, sondern auch einen kurzen und durchsichtigen Zugang zu den bekannten Sätzen liefert.

Als wesentliches Werkzeug bedienen wir uns der Begriffsbildungen und Beweismethoden aus der Theorie der topologischen Vektorräume[1]); so wird u.a. der Begriff der schwachen Topologie verwendet, ein Analogon des Hahn-Banachschen Satzes eine entscheidende Annahme sein und ein Struktursatz nach dem Muster des Satzes von MACKEY aufgestellt.

Eine erste Niederschrift dieser Arbeit (ohne Kenntnis von [8] und [9]) war im Sommer 1955 abgeschlossen, während eines wertvollen und angenehmen Aufenthaltes des Verfassers an der Universität Bonn.

**2.** Wir werden es mit topologischen Moduln besonderer Art zu tun haben. Unter einem topologischen Modul $M$ verstehen wir eine topologische abelsche Gruppe, die mit einem stetig wirkenden (Ring-)Operatorenbereich $R$ versehen wird. Vorläufig wird auf $R$ keine Topologie erklärt. Ein Untermodul ist wie gewöhnlich eine Untergruppe, die hinsichtlich $R$ abgeschlossen ist.

Wie in jeder topologischen Gruppe, ist die Topologie durch jedes Fundamentalsystem von Umgebungen des Nullelements vollständig festgelegt. Gibt es ein solches Fundamentalsystem, das ausschließlich aus Untermoduln besteht,

[1]) Siehe [2]. Auf eine gemeinsame Verallgemeinerung, die den Grund dieses Zusammenhangs klar macht, wird an anderer Stelle eingegangen.

so heißt $M$ *lineartopologisch*. Da ein offener Untermodul sogar abgeschlossen ist, kommt man durch topologische Quotientenbildung zu einer trennenden Menge stetiger $R$-Homomorphismen von $M$ auf diskrete Moduln $M/U$: die Topologie von $M$ ist die gröbste, für die diese Homomorphismen noch stetig sind [2]).

**3.** Nun führen wir den Grundmodul $M^0$ ein. Er wird im Mittelpunkt der folgenden Betrachtungen stehen und bleibe ein für allemal fest. Er sei immer mit der diskreten Topologie versehen.

Mit $\overline{R}$ sei der $R$-Endomorphismenring von $M^0$ bezeichnet, mit $\overline{\overline{R}}$ sein $\overline{R}$-Endomorphismenring.

Ist $M$ irgendein $R$-Modul, so bedeute $M^*$ den $\overline{R}$-Modul aller Homomorphismen von $M$ in $M^0$; ist $M$ sogar topologisch, so heiße der Untermodul $N$ der stetigen Homomorphismen der *Dualmodul*.

Auf $M^*$ kann man eine besondere Topologie, die *schwache* erklären: Es ist die Topologie der Konvergenz in den Punkten von $M$: sie besitzt die charakteristische Eigenschaft, daß sie die gröbste ist, für die die Elemente aus $M$ noch stetige Homomorphismen auf $M^*$ induzieren. Wegen der Diskretheit von $M^0$ erhält man ein schwaches Fundamentalsystem der Nullumgebungen in $M^*$ in den Annullatoren der endlichen Untermengen (oder, was auf dasselbe hinauskommt, der endlicherzeugbaren Untermoduln) von $M$: Die schwache Topologie ist also eine lineare.

Nun ist ein schwacher Cauchy-Filter auf $M^*$ nichts anders als die widerspruchsfreie Angabe eines $M^0$-wertigen Homomorphismus auf jedem endlicherzeugbaren Untermodul von $M$. Ein solcher bestimmt aber ein Element aus $M^*$. Somit ist $M^*$ *schwachvollständig*. Dasselbe gilt natürlich auch von dem Annullator jeder Untermenge in $M$. Deshalb hat jede schwachdichte Untermenge in $M^*$ denselben Annullator in $M$ wie $M^*$.

**4.** Von nun ab wird $M^0$ als *injektiv* vorausgesetzt. Das bedeutet: Ein $M^0$-wertiger Homomorphismus läßt sich von seinem Definitionsbereich zu einem beliebigen Obermodul erweitern.

Damit gleichwertig ist: Für jeden Untermodul $S$ eines Moduls $M$, mit Annullator $S'$ in $M^*$, ist $S^*$ mit $M^*/S'$ kanonisch isomorph. Bei dieser Isomorphie stimmt außerdem das Bild des Annullators eines weiteren Untermoduls $U$ mit dem in $S^*$ gebildeten Annullator des Durchschnitts $U \cap S$ überein. Denn die Erweiterung eines auf $S/U \cap S$ definierten $M^0$-wertigen Homomorphismus kann ja durch vorhergehendes Annullieren von $U/U \cap S$ vollgezogen werden.

Daraus erschließt man die „topologische Injektivität" von $M^0$: stetige Homomorphismen auf $S$ können zu stetigen auf $M$ erweitert werden, oder auch: Der Dualmodul von $S$ ist Bild mod $S'$ des Dualmoduls von $M$.

---

[2]) Wegen des Trennungsaxiom erweist sich $M$ somit als dichter Untermodul des projektiven Limes der $M/U$, der seine vollständige Hülle ist.

**5.** Nun habe der Modul $M^0$ die weitere Eigenschaft: Er enthalte ein nichtverschwindendes homormophes Bild jedes zyklischen Moduls [3]).

Im Zusammenhang mit der soeben gemachten Voraussetzung folgt: $M^*$ hat einen in $M$ trivialen Annullator; oder, in gleichwertiger Redeweise: $M^*$ *trennt* auf $M$. Durch Anwendung auf die diskreten Quotientenmoduln des lineartopologischen Moduls $M$ gewinnt man die Verallgemeinerung: Auch $N$ trennt auf $M$. Noch allgemeiner schließt man durch Quotientenbildung weiter: Ist $U$ abgeschlossener Untermodul von $M$, so stimmt der Annullator in $M$ des Annullators in $N$ von $U$ mit $U$ überein [4]).

Wendet man dies auf die Nullumgebungen $U$ an, deren Annullatoren $U'$ $N$ zur Vereinigung haben, so folgt aus diesen Aussagen: Die Darstellung von $M$ als $M^0$-wertiger Homomorphismenmodul auf $N$ ist eine eineindeutige, und die Topologie auf $M$ ist mit der Funktionentopologie der gleichmäßigen Konvergenz in den Annullatoren der Nullumgebungen identisch.

Geht man von $M$ zu einem Quotientenmodul über, so ist die Quotiententopologie die der gleichmäßigen Konvergenz auf den Durchschnitten der $U'$ mit dem Annullator des Kernes; die auf einem Untermodul $S$ von $M$ induzierte Topologie stimmt mit der der gleichmäßigen Konvergenz auf den Bildern der $U' \bmod S'$ überein, wie aus der vorhergehenden Nummer folgt.

Das letzterwähnte Ergebnis, das im wesentlichen besagt, daß die Summe zweier in $M^*$ gebildeter Annullatoren wieder ein solcher Annullator ist, sichert nun, daß die Topologie auf $M$ der gleichmäßigen Konvergenz auf allen in $M^*$ gebildeten und in $N$ liegenden Annullatoren noch $N$ zum Dualmodul hat. Sie ist offenbar die feinste Topologie mit dieser Eigenschaft und wird hier die durch $N$ definierte *starke Topologie* genannt. Dagegen erhält $M$ als Untermodul von $N^*$ die $N$-schwache als Relativtopologie, die ja die gröbste ist, die $N$ zum Dualmodul hat. Topologien auf $M$ zwischen diesen, und nur solche, haben $N$ als Dualmodul. Untermodul- und Quotiententopologien starker oder schwacher Topologien sind von derselben Art.

**6.** In dieser Nummer soll $M^0$ alle vorausgesetzten Eigenschaften auch als $\overline{R}$-Modul besitzen.

Nach Definition ist $M^{0*} = \overline{R}$. Da der Eins-Endomorphismus zu $\overline{R}$ gehört, ist auch $\overline{R}^* = M^0$. Stehen aber zwei Moduln derart in Beziehung, daß jeder der volle Homomorphismenmodul des anderen ist, so haben ihre linearen Topologien nur einen einzigen Dualmodul, denn jeder Untermodul ist Annullator. Überdies gelten dieselben Eigenschaften für Untermoduln, Quotientenmoduln und endliche direkte Summen solcher Moduln.

Daraus schließt man einerseits die Willkür des trennenden Untermoduls $N$ von $M^*$ als Dualmodul einer Topologie auf $M$, z.B. die $N$-schwache. Denn

[3]) Enthält $R$ den Einsoperator, so genügt es, wenn dies für die einfachen zyklischen Moduln gilt.

[4]) Da der Annullator in $M$ einer Menge aus $N$ dem Durchschnitt ihres (schwachvollständigen) Annullators in $N^*$ mit $M$ gleich ist, folgt: Jeder abgeschlossene Untermodul ist auch schwachabgeschlossen; die abgeschlossenen Untermoduln hängen lediglich von dem Dualmodul ab.

jeder endlicherzeugbare Untermodul in $N$ ist Annullator in $M^*$ seines in $M$ gebildeten Annullators.

Als Umkehrung der letzten Bemerkung in 3. gewinnt man andererseits: Ein auf $N$ trennender Modul ist schwachdicht in $N^*$. Denn ein solcher induziert auf jedem endlicherzeugbaren Untermodul in $N$ einen trennenden, also seinen einzigen, Dualmodul.

Daraus folgt nun die Kennzeichnung der Schwachvollständigkeit für Annullatoren in $N^*$, die innerhalb des Dualmoduls eine Charakterisierung dieser für die Lineartopologien auf $N$ bedeutsamen Untermoduln liefert.

**7.** Da wir die Gültigkeit des letzten Ergebnisses auch in $M^*$ benötigen, wollen wir $\overline{\overline{R}} = R$ annehmen.

Wir sind jetzt imstande, den Zusammenhang mit den Formulierungen klar zu stellen, die Linearkompaktheit benutzen. $M$ heißt *linearkompakt*, wenn jeder lineartopologische Modul, der einen (eventuell unechten) Quotientenmodul von $M$ als eineindeutiges stetiges Bild hat, vollständig ist [5]).

Ein schwachlinearkompakter Modul ist also schwachvollständig. Umgekehrt ist $M^*$ in der schwachen Topologie linearkompakt. Denn aus der Tatsache, daß jeder abgeschlossene Untermodul Annullator ist, folgt einerseits, daß jeder Quotientenmodul ein $M^*$ ist, andererseits, daß $M^*$ keine echte gröbere lineare Topologie besitzt.

Die Annullatoren lassen sich also ebensogut durch Linearkompaktheit wie durch Schwachvollständigkeit kennzeichnen.

**8.** Bisher haben wir eine etwa vorhandene Topologie auf $R$ nicht berücksichtigt. Wie ändert sich nun die vorhergehende Entwicklung, wenn man von allen vorkommenden Topologien noch verlangt: Die natürliche Abbildung von $R$ in einen beliebigen zyklischen Untermodul von $M$ sei stetig [6]) ?

Wir nehmen an, diese Annahme gelte für $M^0$. Das heißt: Jedes Element in $M^0$ habe eine Nullumgebung in $R$ als Ordnungsideal. Untermoduln, die, wie die endlicherzeugbaren, von einer Nullumgebung annulliert werden, nennen wir *beschränkt*. In einem allgemeinen $M^*$ heiße ein Untermodul beschränkt, wenn die Gesamtheit der Werte, die er auf einem Element in $M$ annimmt, einem beschränkten Untermodul in $M^0$ angehört. Beschränkte Untermoduln gehen bei Durchschnittsbildung mit oder Quotientenbildung nach einem Annullator in sich über.

Dann und nur dann genügt eine Topologie dem neuen Axiom, wenn die Annullatoren der Nullumgebungen beschränkt sind. An der Definition der schwachen Topologie ist also nichts zu ändern; in der der starken dagegen dürfen jetzt nur beschränkte Annullatoren auftreten.

Ein kompakter Modul ist linearkompakt und beschränkt. Ist jeder beschränkte Untermodul von $M^0$ kompakt (d.h. hier: endlich), so gilt auch umgekehrt die Kompaktheit jedes beschränkten schwachvollständigen Moduls.

[5]) Eine äquivalente Formulierung, in der nur abgeschlossene Untermoduln auftreten, gestattet es zu erkennen, daß der Begriff im wesentlichen von dem Dualmodul abhängt.

[6]) Die Stetigkeit der Ringoperation in beiden Variabeln zeigt sich dann leicht.

**9.** Es sei $\overline{R}$ derart topologisiert, daß genau die Mengen $\overline{R}$-beschränkte Untermoduln in $M^0$ erzeugen, die auch $R$-beschränkte Untermoduln erzeugen[7]).

Wollten wir den Dualmodul $N$ in Einklang mit [2] topologisieren, so hätten wir ihm die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz in den beschränkten Untermoduln von $M$ zu geben. Da endlicherzeugbare Untermoduln beschränkt sind, würde $M$ dann im Bidualmodul enthalten sein. Stimmt dieser mit $M$ algebraisch überein, was mit der Schwachvollständigkeit beschränkter schwachgeschlossener Untermoduln aus $M$ gleichbedeutend ist, so nennt man $M$ in diesem Fall *semi-reflexiv*; fällt weiter die Topologie des Bidualmoduls mit der von $M$ zusammen, so heißt $M$ *reflexiv*.

Im vorliegenden Gebiet aber pflegt man $N$ durch die Annullatoren der schwachvollständigen beschränkten Untermoduln zu topologisieren. Dann ist jeder Modul semi-reflexiv, und genau die stark topologisierten sind reflexiv.

**10.** Als Beispiel untersuchen wir den meist behandelten Fall eines Bewertungsringes (der natürlich den des Körpers sogleich umfaßt) und zwar sofort in der allgemeinsten Fassung (s. [5]).

Es sei also $R$ Bewertungsring, $I$ sein maximales Ideal, $Q$ sein Quotientenkörper. Der einzige einfache zyklische Modul ist $R/I$; wir sind also auf die injektive Hülle dieses Moduls als Wahl für $M^0$ geführt. Besonders einfach werden die Verhältnisse, wenn $R$ fast maximal ist[8]) (was wir jetzt annehmen werden), denn dann ist $M^0 = Q/I$ ([4] Prop. 1). Weiter erkennt man $\overline{R}$ als die vollständige Hülle von $R$, m.a.W., als den maximalen Bewertungsring, der zu $R$ gehört. Denn $Q/I$ ist isomorph zu $\overline{Q}/\overline{I}$, wo der Strich Vervollständigung bedeutet, und die $R$- fallen mit den $\overline{R}$-Endomorphismen zusammen. Somit genügt es zu zeigen, daß jeder $\overline{R}$-Homomorphismus von $\overline{Q}$ in $\overline{Q}/\overline{I}$ in den kanonischen durch Multiplikation mit einem Körperelement verwandelt werden kann. Um dies festzustellen[9]), suche man, für eine Menge (gebrochener) Hauptideale, deren Vereinigung ganz $\overline{Q}$ ist, je ein multiplizierendes Element auf, das das Gewünschte für jedes einzelne Hauptideal leistet. Die so entstehenden Elemente bilden eine Cauchy-Folge, deren Limes das gesuchte Element ist.

Wir erwähnen noch die einfach zu bestätigenden Tatsachen: $\overline{\overline{R}} = \overline{R}$, $Q/I$ ist linearkompakt, die Bewertungstopologie auf $R$ ist eine lineare und die zu ihr gehörigen beschränkten Mengen in $Q/I$ sind genau die, deren Urbild in $Q$ beschränkte Werte haben. Ist der Bewertungsring sogar ein diskreter, so sind die beschränkten Untermoduln die zyklischen; ist sein Restklassenkörper auch endlich, was mit der Kompaktheit von $\overline{R}$ bekanntlich äquivalent ist, dann ist jeder beschränkte Untermodul endlich.

**11.** Nun sind wir imstande, einige Musterbeispiele aus der Literatur von dem hier gewonnenen Standpunkt zu überblicken.

[7]) Dann kann man einen beschränkten Untermodul in $M^*$ dadurch charakterisieren, daß eine beliebige schwache Nullumgebung sein Produkt mit einem geeigneten Nullumgebungsideal aus $\overline{R}$ enthält.

[8]) Das bedeutet bekanntlich keine Einschränkung für diskrete Bewertungsringe.

[9]) Das Resultat ist ein Spezialfall von [5] Theorem 11.

Das Hauptresultat von [6] sagt aus, daß jeder schwachlinearkompakte Modul (über einem diskreten Bewertungsring) voller Homomorphismenmodul ist. Das war in 7. mit der Umkehrung bestätigt.

Auf den ersten Blick scheint der Gegenstand der Arbeiten [8] und [10] in dem hier aufgestellten Rahmen nicht enthalten zu sein, denn die Dualität wird dort hinsichtlich der Gruppe der reellen Zahlen modulo den Ganzen erklärt und die Dualgruppe wird mit Hilfe der kompakten Untermengen topologisiert.

Erstens aber werden nur Gruppen behandelt, in der jedes Element endliche Ordnung modulo einer Nullumgebungsuntergruppe hat, und zwar meistens der Fall, in der diese Ordnung Potenz einer gewissen Primzahl $p$ ist. Dann konvergiert aber $p^n x$ offenbar gegen Null für jedes $x$ und ein *stetiger* Homomorphismus kann $x$ nur auf eine solche Rationalzahl abbilden, deren Nenner eine Potenz von $p$ ist. Außerdem darf man die Menge $M^0$ dieser Zahlen mit der diskreten Topologie ansehen, da die ursprüngliche Topologie keinen Einfluß auf die Stetigkeit eines Homomorphismus haben kann. Weiter gestattet (s. Anmerkung 2) $M$ selber den Operatorenbereich $R$ der rationalen ganzen $p$-adischen Zahlen; $M^0$ erscheint dann als $Q/I$ und jeder stetige Homomorphismus erweist sich als $R$-Homomorphismus. Damit ist erkannt, daß diese Arbeiten sich wirklich unter den vorliegenden Formalismus subsumieren.

Zweitens wird dort die Vollständigkeit der Abschließung jedes zyklischen Untermoduls vorausgesetzt, was gleichbedeutend ist mit der Möglichkeit der Erweiterung des Operatorenbereiches auf die nichtrationalen ganzen $p$-adischen Zahlen [10]). Nach dem schon Gezeigten ist nun $\overline{\overline{R}}=R$ und die beschränkten schwachvollständigen Untermoduln stimmen mit den kompakten überein. Also stimmen auch die formal verschiedenartigen Topologisierungen des Dualmoduls in Wirklichkeit überein.

Nun werden viele in [8]—[10] gemachten Aussagen sehr einleuchtend. In [9] heißt ein Modul lineardiskret, wenn alle Untermoduln abgeschlossen sind, und es wird gezeigt, daß ein solcher in Dualität mit einem linearkompakten Modul steht. Lineardiskretheit ist offenbar die Bedingung dafür, daß die starke Topologie die diskrete ist, woraus sich die Linearkompaktheit des Dualmoduls aus seinem Zusammenfallen mit $M^*$ ergibt. Weiter wird die Übereinstimmung der Topologie des Bidualmoduls mit der Ausgangstopologie an die Bedingung gebunden, daß jeder Untermodul mit lineardiskretem Quotientenmodul Nullumgebung ist. Diese Untermoduln sind aber die Annullatoren der linearkompakten, also ist dies die genaue Bedingung dafür, daß die ursprüngliche Topologie die starke war.

Dagegen ist in [10] Satz 7 ein hinreichendes Kriterium für Reflexivität angegeben, das im wesentlichen besagt, die gegebene Topologie sei die feinste, die auf sämtlichen kompakten Untermoduln die ursprünglichen Topologien

[10]) Denn das Endlichsein der Ordnung eines Elements nach jeder Nullumgebung ist die genaue Bedingung für die Stetigkeit der Abbildung von $R$ auf den von diesem Element erzeugten zyklischen Modul.

induzieren. Nun sind die kompakten (gleich linearkompakten und beschränkten) Untermoduln samt ihren Topologien allein durch den Dualmodul ausgezeichnet; eine feinere Topologie mit demselben Dualmodul gibt es also nicht, woraus sich das Hinreichen der Bedingung ergibt.

Es scheint möglich, die allgemeinen Gruppen der Arbeiten [*8*] und [*10*] direkt zu behandeln, statt sie auf den primären Fall zurückzuführen, indem man für $R$ das unbeschränkte Produkt aller $p$-adischen Ringe, für $M^0$ das Produkt der zugehörigen $Q/I$ wählt. Die Einzelheiten dieser Entwicklung hat der Verfasser jedoch nicht ausgearbeitet.

## Literatur

[*1*] BOURBAKI, N.: Topologie generalé. Paris: Hermann & Cie. 1951. — [*2*] BOURBAKI, N.: Espaces vectoriels topologiques. Paris: Hermann & Cie. 1955. — [*3*] CARTAN, H., and S. EILENBERG: Homological Algebra. Princeton University Press 1956. — [*4*] FLEISCHER, I.: Modules of finite rank over Prüfer rings. Ann. Math. **65**, 250—254 (1957). — [*5*] FLEISCHER, I.: Unveröffentlichte Dissertation, Chicago 1952. — [*6*] KAPLANSKY, I.: Dual modules over a valuation ring. Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 213—219 (1953). — [*7*] LEFSCHETZ, S.: Algebraic Topology. New York 1942. — [*8*] LEPTIN, H.: Über eine Klasse linear kompakter abelscher Gruppen, II. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **19**, 221—243 (1955). — [*9*] LEPTIN, H.: Linear kompakte Moduln und Ringe, II. Math. Z. **66**, 289—327 (1957). — [*10*] SCHÖNEBORN, H.: Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen, II. Math. Z. **60**, 17—30 (1954).

*901 Washington Ave., Brooklyn 25, N.Y. (U.S.A.)*

*(Eingegangen am 8. Mai 1959)*

SABIDUSSI, G.
Math. Zeitschr. 72, 446—457 (1960)

# Graph Multiplication[1])

By
GERT SABIDUSSI

## 1. Introduction, definitions

The purpose of this note is to define three multiplications of graphs (cartesian, strong, and weak). We shall show that every connected graph of *finite type* [cf. (1.5)] has a unique prime factor decomposition with respect to cartesian multiplication, and that the automorphism group of any such graph is isomorphic to the automorphism group of the *sum* of its prime factors.

By a *graph* $X$ we mean an ordered pair $X=(V, E)$, where $V$ is an arbitrary set (the set of *vertices* of $X$), and $E$ (the set of *edges* of $X$) is a (possibly empty) set of unordered pairs of *distinct* vertices of $X$. In order to distinguish between different graphs we shall write $V(X)$ for $V$, and $E(X)$ for $E$. We shall indicate unordered pairs by brackets. By $|X|$ we denote the cardinal of the set $V(X)$. Let $X$ and $Y$ be graphs. By $X \cup Y$ and $X \cap Y$ we mean the graphs given by $V(X \cup Y)=V(X) \cup V(Y)$, $E(X \cup Y)=E(X) \cup E(Y)$, and $V(X \cap Y)=V(X) \cap V(Y)$, $E(X \cap Y)=E(X) \cap E(Y)$, respectively.

Let $X$ and $Y$ be graphs. By a *monomorphism* of $X$ into $Y$ we mean a one-one function $\varphi: V(X) \to V(Y)$ such that $[x, y] \in E(X)$ implies $[\varphi x, \varphi y] \in E(Y)$. A one-one function $\varphi$ of $V(X)$ onto $V(Y)$ is an *isomorphism* if both $\varphi$ and $\varphi^{-1}$ are monomorphisms. An *automorphism* of $X$ is an isomorphism of $X$ onto itself. The group of automorphisms of $X$ will be denoted by $G(X)$.

We define *connectedness* as usual in terms of paths. By a *path* of a graph $X$ joining $x, y \in V(X)$ we mean a subgraph $P$ of $X$ such that $V(P)=\{x_i | 1 \leqq i \leqq n\}$, $n \geqq 1$, $x_1=x$, $x_n=y$, all $x_i$ distinct, and $E(P)=\{[x_i, x_{i+1}] | 1 \leqq i \leqq n-1\}$. $X$ is *connected* if any two vertices $x, y$ of $X$ are joined by a path. Let $X$ be a connected graph, $x, y \in V(X)$. By the *distance* $\varrho(x, y)$ is meant $\varrho(x, y)=\min |P|-1$, the minimum taken over all paths $P$ of $X$ joining $x$ and $y$.

Let $\{X_a | a \in A\}$ be a set of graphs. By $\prod_{a \in A} V(X_a)$ we denote the cartesian product of the sets $V(X_a)$, and by $p_b: \prod_{a \in A} V(X_a) \to V(X_b)$ we mean the usual projection of the product onto its $b$-th coordinate, $b \in A$.

(1.1) DEFINITION. Let $\{X_a | a \in A\}$ be a set of graphs. By the *cartesian (strong, weak) product* $\prod_{a \in A} X_a \left( \prod_{a \in A}^{*} X_a, \prod_{a \in A}^{w} X_a \right)$ of the graphs $X_a$ is meant the following graph $X$ $(X^*, X^w)$:

$$V(X) = V(X^*) = V(X^w) = \prod_{a \in A} V(X_a); \tag{1}$$

[1]) Written with the support of the National Science Foundation of the United States of America.

(2) given $x, y \in V(X)$ $\left(V(X^*), V(X^w)\right)$, then $[x, y] \in E(X)$ $\left(E(X^*), E(X^w)\right)$ if and only if there exists a one-element subset $B$ of $A$ (a non-empty subset $B$ of $A$, a non-empty finite subset $B$ of $A$) such that

$$[p_b x, p_b y] \in E(X_b)$$

for all $b \in B$, and

$$p_a x = p_a y$$

for all $a \in A - B$.

Note that $X$ is a spanning subgraph[2]) of $X^w$ which in turn is a spanning subgraph of $X^*$. If the index set $A$ is finite, then clearly weak product and strong product coincide.

REMARK. [1] contains a definition of a fourth product of graphs called the *cardinal product*. Using the notation of definition (1.1), and denoting the cardinal product of the graphs $X_a$ by $X'$ the relationship between $X$, $X'$ and $X^*$ is as follows: $V(X') = V(X) = V(X^*)$, $E(X') = E(X^*) - E(X)$.

(1.2) It is immediate from definition (1.1) that if we identify isomorphic graphs, then both cartesian and strong multiplication are *commutative* and *associative*. Both have a *unit*, for if $X$ is any graph, and $U$ is the *trivial* graph given by $V(U) = \{x\}$, $E(U) = \bigcirc$ (= the empty set), then $X \times U = X * U \cong U \times X = U * X \cong X$. Therefore the set of all non-isomorphic graphs is a commutative semigroup with unit under both cartesian and strong multiplication.

(1.3) A graph $X$ is called *prime* (or *indecomposable*) with respect to cartesian multiplication if $X$ is non-trivial (i.e. if $X$ is not isomorphic to $U$), and if $X \cong Y \times Z$ implies $Y \cong U$ or $Z \cong U$. Two graphs $X$ and $Y$ are called *relatively prime* with respect to cartesian multiplication if and only if $X \cong X' \times Z$ and $Y \cong Y' \times Z$ imply $Z \cong U$. Analogous definitions can be made for strong multiplication.

(1.4) The cartesian (strong) product of a finite (any) number of connected graphs is connected. The cartesian (strong) product of any graph by a disconnected graph is disconnected. The weak, and hence the cartesian, product of infinitely many non-trivial graphs is disconnected.

(1.5) Let $\gamma$ be a function from the class of all graphs to the class of all cardinals such that

(i) if $X \cong Y$, then $\gamma(X) = \gamma(Y)$;

(ii) if $X \subset Y$, then $\gamma(X) \leqq \gamma(Y)$;

(iii) if $\gamma(X) < \aleph_0$, $\gamma(Y) < \aleph_0$, and both $X$ and $Y$ are non-trivial, then $\max\left(\gamma(X), \gamma(Y)\right) < \gamma(X \times Y) < \aleph_0$.

We shall say that a connected graph $X$ is of *finite type* if there is a $\gamma$ satisfying (i) (ii) (iii) for which $\gamma(X) < \aleph_0$.

*Examples.* (1) $\gamma(X) = \sup d(X; x)$, where $d(X; x)$ is the degree of $x$ in $X$. The corresponding graphs of finite type are the graphs of bounded finite degree.

[2]) A graph $Y$ *spans* $X$ if $Y$ is a subgraph of $X$, and $V(Y) = V(X)$.

(2) $\gamma(X)=\sup\varrho(x, y)$ if $X$ is connected, $\gamma(X)=\aleph_0$ if $X$ is disconnected. Here $X$ is of finite type if and only if $X$ is a connected graph of finite diameter.

(3) $\gamma(X)=\sup|C|$, the supremum taken over all subgraphs $C$ of $X$ which are isomorphic to a cartesian product of non-trivial complete graphs. $X$ is of finite type if and only if it contains no arbitrarily large complete graphs, and no arbitrarily large "cubes" (i.e. products of edges).

(1.6) Let $X$ be a connected graph. We shall say that $X$ can be *decomposed into prime factors* (in the cartesian sense) if and only if there is a set $\{X_a|a\in A\}$ of prime graphs such that $X\simeq\prod_{a\in A} X_a$. It follows from (1.4) that each $X_a$ is connected, and that the index set $A$ is finite.

In this connection it should be pointed out that there is a large class of connected graphs which have no prime factor decomposition in the cartesian sense. These graphs can be obtained as follows. Let $\{X_a|a\in A\}$ be a set of graphs, and let $x_a^{(0)}\in V(X_a)$, $a\in A$. Define the *weak cartesian product* $X=\prod_{a\in A}(X_a, x_a^{(0)})$ of the rooted graphs $(X_a, x_a^{(0)})$ by

$$V(X)=\Big\{x\in\prod_{a\in A}V(X_a)\,\Big|\,p_a x\neq x_a^{(0)} \text{ for at most finitely many } a\in A\Big\},$$

$$E(X)=\big\{[x, y]\,\big|\,x, y\in V(X),\ [p_a x, p_a y]\in E(X_a) \text{ for exactly one } a\in A,\ p_b x=p_b y \text{ for all } b\in A-\{a\}\big\}.$$

Weak cartesian products have the following properties:

(i) If the index set $A$ is finite, then $\prod_{a\in A}(X_a, x_a^{(0)})$ is independent of the vertices $x_a^{(0)}$, and equal to $\prod_{a\in A} X_a$.

(ii) The weak cartesian product of any set of connected graphs is connected. More precisely, $\prod_{a\in A}(X_a, x_a^{(0)})$ is that component of $\prod_{a\in A} X_a$ which contains $x^{(0)}$, where $p_a x^{(0)}=x_a^{(0)}$, $a\in A$.

(iii) If $B$ is a proper non-empty subset of $A$, then $X=\prod_{a\in A}(X_a, x_a^{(0)})\cong Y_1\times Y_2$, where $Y_1=\prod_{a\in B}(X_a, x_a^{(0)})$, $Y_2=\prod_{a\in A-B}(X_a, x_a^{(0)})$. This is most easily seen by considering the isomorphism $\varphi: V(Y_1\times Y_2)\to V(X)$ given by $p_a\varphi(y_1, y_2)=p_a^{(1)}y_1$, if $a\in B$, $p_a\varphi(y_1, y_2)=p_a^{(2)}y_2$, if $a\in A-B$, where $p_a^{(i)}$ is the projection of $V(Y_i)$ onto $V(X_a)$, $i=1, 2$. It follows that no proper weak cartesian product of connected graphs (i.e. a weak product of infinitely many non-trivial connected graphs) is prime. We shall show below ((2.16)) that if the $X_a$'s are prime graphs of finite type, then the proper weak cartesian product $\prod(X_a, x_a^{(0)})$ has no prime factor decomposition in the cartesian sense.

We can use weak cartesian products to show that there exist non-trivial connected idempotent graphs (i.e. graphs $X$ for which $X\times X\cong X$). For if $Y$ is a non-trivial connected graph, $y^{(0)}\in V(Y)$, and $(X_a, x_a^{(0)})=(Y, y^{(0)})$ for all $a$ in some infinite index set $A$, then clearly $\prod(X_a, x_a^{(0)})$ is idempotent. Note that even if a connected idempotent graph can be decomposed into prime

factors, the decomposition cannot possibly be unique. It is natural to conjecture that no connected idempotent graph has a prime factor decomposition at all. However, we have not been able to prove or disprove this conjecture.

The situation is different with respect to strong multiplication. For any cardinal $n \geqq 1$ let $C(n)$ be the complete $n$-graph given by

$$V\big(C(n)\big) = N,$$

where $N$ is a set of cardinal $n$, and

$$E\big(C(n)\big) = \{[\mu, \nu] \,|\, \mu \neq \nu,\ \mu, \nu \in N\}.$$

It is easily seen that if $\{n_a \,|\, a \in A\}$ is any set of cardinals, then

$$\prod_{a \in A}{}^{*} C(n_a) = C\Big(\prod_{a \in A} n_a\Big).$$

In particular, if $n \geqq \aleph_0$, then $C(n)$ is idempotent (i.e. $C(n) * C(n) \cong C(n)$). Here idempotency does not always preclude the existence of prime factor decompositions. For instance the graph $C(2^{\aleph_\alpha})$ can be decomposed in infinitely many essentially different ways (not arising from each other via idempotency) as follows:

$$C(2^{\aleph_\alpha}) \cong \prod_{a \in A}{}^{*} C(p_a),$$

where $\{p_a \,|\, a \in A\}$ is any set of primes, and $A$ has cardinal $\aleph_\alpha$. On the other hand $C(\aleph_0)$ and $C(\aleph_\omega)$ (for instance) are idempotent graphs which have no strong prime factor decomposition. Assuming the generalized continuum hypothesis $C(\aleph_\alpha)$ has a strong prime factor decomposition if and only if $\alpha$ is $>0$ and not a limit ordinal.

## 2. Invariant characterization of the cartesian product

Given a connected graph $X$ we shall define an equivalence relation on $E(X)$ such that all edges of $X$ are equivalent if $X$ is a prime graph of finite type, while two edges of a non-prime graph of finite type are equivalent if and only if they belong to the same prime factor of $X$. The fact that such an equivalence relation can be defined immediately implies the uniqueness of the prime factor decomposition of connected graphs of finite type.

(2.1) Let $X$ be a connected graph such that $E(X) \neq \bigcirc$. We define a set of binary relations on $E(X)$ as follows. Let $e, e' \in E(X)$.

$e \sim^{(0)} e'$ if and only if $e$ and $e'$ are not adjacent, and $X$ contains a 4-circuit $C$ such that $e, e' \in E(C)$.

$e \sim^{(1)} e'$ if and only if $e$ and $e'$ are adjacent, and $X$ contains no 4-circuit $C$ without diagonals such that $e, e' \in E(C)$.

By $\sim_1$ we denote the smallest equivalence relation on $E(X)$ which contains both $\sim^{(0)}$ and $\sim^{(1)}$.

It will be convenient to introduce the following notation. If $Y$ and $Y'$ are subgraphs of $X$, and if $\sim$ is any binary relation on $E(X)$, then $Y \sim Y'$

will mean that $e \sim e'$ for all $e \in E(Y)$ and $e' \in E(Y')$, while $Y \nsim Y'$ means $e \nsim e'$ for all $e \in E(Y)$ and $e' \in E(Y')$.

Suppose we have already defined $\sim_{r-1}$, $r \geqq 2$. Put $\sim_{r,0} = \sim_{r-1}$. Assuming that $\sim_{r,s-1}$, $s \geqq 1$, has already been defined we construct $\sim_{r,s}$ as follows. Let $C$ be a finite circuit of $X$. We shall say that $C \in \mathfrak{A}_{r,s}$, $s \geqq 1$, if and only if

$$C = P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_s,$$

where $P_0, \ldots, P_s$ are paths such that

(1) $$P_i \sim_{r-1} P_i, \quad 0 \leqq i \leqq s;$$

and

(2) $$P_0 \nsim_{r,s-1} P_i, \quad 1 \leqq i \leqq s.$$

We now define $\sim^{(r,s)}$, $\sim_{r,s}$, and $\sim_r$, $r \geqq 2$, $s \geqq 1$.

$e \sim^{(r,s)} e'$ if and only if there is a $C = P_0 \cup \cdots \cup P_s \in \mathfrak{A}_{r,s}$ such that $e \in E(P_0)$, $e' \in E(P_i)$, $1 \leqq i \leqq s$. By $\sim_{r,s}$ we denote the smallest equivalence relation on $E(X)$ which contains $\sim_{r,s-1}$ and $\sim^{(r,s)}$, and by $\sim_r$ the smallest equivalence relation which contains all $\sim_{r,s}$, $s \geqq 1$. Finally, we denote by $\sim$ the smallest equivalence relation which contains all $\sim_r$, $r \geqq 1$. Note that for fixed $r$ the relations $\sim_{r,s}$ form a tower. Similarly the $\sim_r$'s form a tower.

(2.2) REMARK. *Let* $C = P_0 \cup \cdots \cup P_s \in \mathfrak{A}_{r,s}$. *Then* $E(P_i \cap P_j) = \bigcirc$ *for all* $i \neq j$, $0 \leqq i \leqq s$, $0 \leqq j \leqq s$.

PROOF. Assume the contrary. Let $P_{k_1}, \ldots, P_{k_m}$, $0 \leqq k_1 < \cdots < k_m \leqq s$, be those paths of $C$ for which $E(P_i \cap P_{k_j}) \neq \bigcirc$, $j = 1, \ldots, m$, $m \geqq 2$. Since $C$ is a circuit, $P = \bigcup \{P_{k_j} | 1 \leqq j \leqq m\}$ is either $C$ or a path of $C$. Because of (2) the first possibility cannot arise. Note that (1) implies $P \sim_{r-1} P$. Let $P_{h_0}, \ldots, P_{h_p}$, $0 \leqq h_0 < \cdots < h_p \leqq s$, be those paths of $C$ for which $E(P_i \cap P_{h_j}) = \bigcirc$, $j = 0, \ldots, p$. By (2), $h_0 = 0$. Then $P_{h_0}, \ldots, P_{h_p}$, $P$ is a set of $p+2$ paths of $C$ such that (i) $C = P_0 \cup P_{h_1} \cup \ldots \cup P_{h_p} \cup P$; (ii) $P_{h_j} \sim_{r-1} P_{h_j}$, $0 \leqq j \leqq p$, $P \sim_{r-1} P$; (iii) $P_{h_0} \nsim_{r,p} P_{h_j}$, $1 \leqq j \leqq p$, $P_{h_0} \nsim_{r,p} P$, for if $P_{h_0} \sim_{r,p} P_{h_j}$, say, then also $P_{h_0} \sim_{r,s-1} P_{h_j}$, a contradiction against (2). It follows that $C \in \mathfrak{A}_{r,p+1}$. Hence $P_0 \sim^{(r,p+1)} P_{h_j}$, and therefore $P_0 \sim_{r,p+1} P_{h_j}$. But $p+1 < s$, hence $P_0 \sim_{r,s-1} P_{h_j}$, a contradiction against (2).

(2.3) REMARK. All relations defined above are *invariant under isomorphisms*. In particular, if $e \sim e'$ in $X$, and if $\varphi$ is an isomorphism of $X$ onto $Y$, then $\varphi e \sim \varphi e'$ in $Y$. Because of $\sim^{(1)}$ this is not generally true for monomorphisms.

(2.4) DEFINITION. Let $\{X_a | a \in A\}$ be a set of graphs, and let $X = \prod_{a \in A} X_a$. For each $x \in V(X)$ and $a \in A$ we define $i_a^x : V(X_a) \to V(X)$ by

$$p_b i_a^x x_a = \begin{cases} p_b x & \text{if } b \neq a \\ x_a & \text{if } b = a \end{cases}, \quad x_a \in V(X_a).$$

Clearly $i_a^x$ is a monomorphism, and $p_a i_a^x x_a = x_a$ for all $x_a \in V(X_a)$, and $i_a^x p_a x = x$ for all $x \in V(X)$. By $X_a^x$ we shall denote the graph $i_a^x X_a$. Note that if $[x, y] \in E(X_a^x)$, then $X_a^x = X_a^y$.

(2.5) LEMMA. *Let $X=X_1\times\cdots\times X_n$, where $X_1, \ldots, X_n$ are connected graphs, and let $e, e'\in E(X)$ be such that $e\sim_1 e'$. Then there exist $x, x'\in V(X)$ such that $e\in E(X_a^x)$, $e'\in E(X_a^{x'})$ for some $a$, $1\leqq a\leqq n$.*

PROOF. Let $e=[x, y]$, $e'=[x', y']$. Assume first that $e\sim^{(0)}e'$. By definition of $\sim^{(0)}$, $x, y, y', x'$ for a 4-circuit if $X$. There exist $a, a', b, b'$ such that $[x, y]\in E(X_a^x)$, $[x', y']\in E(X_{a'}^{x'})$, and $[x, x']\in E(X_b^x)$, $[y, y']\in E(X_{b'}^y)$. It follows that

$$p_c x = p_c y \Leftrightarrow c\neq a, \tag{3}$$

$$p_c y = p_c y' \Leftrightarrow c\neq b', \tag{4}$$

$$p_c y' = p_c x' \Leftrightarrow c\neq a', \tag{5}$$

$$p_c x' = p_c x \Leftrightarrow c\neq b. \tag{6}$$

By (3) and (6), $p_c x'=p_c y\Leftrightarrow c\neq a, b$; by (4) and (5), $p_c x'=p_c y\Leftrightarrow c\neq a', b'$. Therefore we have the following two possibilities: (i) $a=a'$, $b=b'$, and (ii) $a=b'$, $a'=b$. We have to show that (ii) cannot occur. Assume (ii). Then by (3) and (4), $p_{a'}x=p_{a'}y'$; by (5) and (6), $p_c x=p_c y'$, $c\neq a'$. Hence $p_c x=p_c y'$, $c=1, \ldots, n$, i.e. $x=y'$, a contradiction.

Now assume that $e\sim^{(1)}e'$. Then $e$ and $e'$ are adjacent; without loss of generality $x=x'$. Let $e\in E(X_a^x)$, $e'\in E(X_{a'}^x)$, and suppose that $a\neq a'$. Let $z\in V(X)$ be such that $p_a z=p_a y$, $p_c z=p_c y'$, $c\neq a$. Then $x, y, z, y'$ form a 4-circuit without diagonal. To show: $[y, z]$, $[z, y']\in E(X)$, $[x, z]$, $[y, y']\notin E(X)$. Note that $[p_{a'}y, p_{a'}z]=[p_{a'}x, p_{a'}y']\in E(X_{a'})$, and $p_c z=p_c y'=p_c x=p_c y$, $c\neq a, a'$, $p_a z=p_a y$. Hence $[y, z]\in E(X)$. $[p_a z, p_a y']=[p_a y, p_a x]\in E(X_a)$, $p_c z=p_c y'$, $c\neq a$, hence $[z, y']\in E(X)$. $p_a z=p_a y\neq p_a x$, $p_{a'}z=p_{a'}y'\neq p_{a'}x$, i.e. $x$ differs from $z$ in more than one coordinate, hence $[x, z]\notin E(X)$; similarly for $[y, y']$.

(2.6) LEMMA. *Let $X=X_1\times\cdots\times X_n$, where $X_1, \ldots, X_n$ are connected graphs, and let $e=[x, y]\in E(X_a^x)$. Then for each $z\in V(X)$, $i_a^z p_a e\sim_1 e$.*

PROOF. Since $X$ is connected it suffices to prove Lemma (2.6) in the case where $[x, z]\in E(X)$. We have to consider two possibilities. (i) $[x, z]\in E(X_a^x)$. In this case $i_a^z p_a e=e$, so that the two edges are trivially equivalent. (ii) $[x, z]\in E(X_b^x)$, $b\neq a$. Here the four edges $[x, y]$, $[y, i_a^z p_a y]$, $[i_a^z p_a y, i_a^z p_a x]$, $[i_a^z p_a x, x]$ form a 4-circuit, and therefore $i_a^z p_a e\sim^{(0)}e$.

(2.7) LEMMA. *Let $X=X_1\times\cdots\times X_n$, where $X_1, \ldots, X_n$ are connected graphs, and let $e, e'\in E(X)$ be such that $e\sim_r e'$, $r\geqq 2$. Then there exist $x, x'\in V(X)$ such that $e\in E(X_a^x)$, $e'\in E(X_a^{x'})$ for some $a$, $1\leqq a\leqq n$.*

PROOF. We prove (2.7) by induction on $r$. We assume that $e\sim_{r-1}e'$ implies $e\in E(X_a^x)$, $e'\in E(X_a^{x'})$ for some $a$, $1\leqq a\leqq n$. It follows immediately from this assumption that if $P$ is a path of $X$ such that $P\sim_{r-1}P$, then $P\subset X_a^x$ for some $x\in V(X)$ and some $a$, $1\leqq a\leqq n$. We shall use the induction hypothesis in this second form. To prove (2.7) it clearly suffices to show that for any $s\geqq 1$,

$$e\sim^{(r,s)}e'\Rightarrow e, e'\in E(X_a^x). \tag{7}$$

Let $C=P_0\cup\ldots\cup P_s\in\mathfrak{A}_{r,s}$. The notation can be so chosen that $V(P_j\cap P_{j+1})\neq\bigcirc$, $j=0,\ldots,s$ (subscripts to be taken modulo $s+1$). If $s\geqq 2$, then $P_j\cap P_{j+1}$ consists of a single vertex $x_j$, $0\leqq j\leqq s$. If $s=1$, $P_0\cap P_1$ has exactly two vertices $x_0$, $x_1$. By (1), (2.5), and the induction hypothesis

$$P_j\subset X^x_{a_j} \tag{8}$$

for some $a_j$, $j=0,\ldots,s$. Now fix a particular $j$, $0\leqq j\leqq s$. $P_j$ joins $x_{j-1}$ and $x_j$. Hence it follows from (8) that

$$p_{a_j}x_{j-1}\neq p_{a_j}x_j. \tag{9}$$

If $a_k\neq a_j$ for all $k\neq j$, then successive application of the same argument to the paths $P_{j+1},\ldots,P_s,P_0,\ldots,P_{j-1}$ yields $p_{a_j}x_j=p_{a_j}x_{j+1}$, $p_{a_j}x_{j+1}=p_{a_j}x_{j+2}$, $\ldots$, $p_{a_j}x_{j-2}=p_{a_j}x_{j-1}$, and therefore $p_{a_j}x_j=p_{a_j}x_{j-1}$. But this contradicts (9). Hence there is a $k\neq j$, $0\leqq k\leqq s$, such that $a_k=a_j$. For $s=1$ this proves that if $e,e'\in E(C)$, then $e$ and $e'$ belong to the same $X^x_a$.

To prove (7) for $s\geqq 2$ let $e\in E(P_0)$, $e'\in E(P_m)$, where $1\leqq m\leqq s$, and $a_m\neq a_0$. Let $P_{i_0},\ldots,P_{i_q}$, $0=i_0<\cdots<i_q\leqq s$, be those paths of $C$ for which $a_{i_j}=a_0$, $j=0,\ldots,q$. By the argument in the preceding paragraph, $q\geqq 1$, and since $a_m\neq a_0$, $q<s$.

Now choose an arbitrary $x\in V(X)$ and consider the graph $Q=Q_0\cup\ldots\cup Q_q$, where

$$Q_j=i^x_{a_0}p_{a_0}P_{i_j},\qquad j=0,\ldots,q.$$

$Q$ is connected. Since $Q=p_{a_0}Q$, it suffices to show that $p_{a_0}Q$ is connected. Note that $p_{a_0}|P_{i_j}$, $0\leqq j\leqq q$, is a monomorphism. Hence each $Q_j$ is a path of $Q$ and it therefore suffices to show that

$$p_{a_0}x_{i_j}=p_{a_0}x_{i_{j+1}-1},\qquad j=0,\ldots,q, \tag{10}$$

where subscripts of subscripts have to be taken modulo $q+1$. But (10) follows immediately from (8).

Since $P_{i_0},\ldots,P_{i_q}$ are non-overlapping paths of a circuit, and since $P_{i_0}$ satisfies (2) it follows that $Q$ contains a circuit $C_0=R_0\cup R_1\cup\ldots\cup R_t$, where $t\leqq q$, $R_0\subset Q_0$, $R_k\subset Q_{j(k)}$, $1\leqq j(k)\leqq q$, $k=1,\ldots,t$, and no two distinct $R_k$'s are contained in the same $Q_j$. (This is most easily seen by observing that $E(Q_0\cap Q_j)=\bigcirc$ for all $j=1,\ldots,q$, and that $Q_1\cup\ldots\cup Q_q$ is connected). Thus it follows that $C_0\in\mathfrak{A}_{r,t}$.

It follows that $R_0\sim^{(r,t)}R_k$, $k=1,\ldots,t$, hence $R_0\sim_{r,t}R_k$, $k=1,\ldots,t$, and therefore we deduce from (2.6) that given any $k$, $1\leqq k\leqq t$, there is an $e_0\in E(P_0)$ and an $e_k\in E(P_{i_{j(k)}})$ such that

$$e_0\sim_{r,t}e_k. \tag{11}$$

But (11) contradicts (2). Hence $a_m=a_0$.

(2.8) LEMMA. *Given a connected graph $X$ let $x\in V(X)$, and let $E$ be any equivalence class of $E(X)$ modulo $\sim$. Then there is an $e\in E$ which is incident with $x$.*

PROOF. Suppose there is no edge $e \in E$ which is incident with $x$. Let $x_0$ be a vertex of $X$ such that (i) $x_0$ is incident with some $e_0 \in E$, and (ii) among all vertices having property (i), $x_0$ has minimal distance from $x$. Let $P$ be a path of $X$ joining $x$ and $x_0$, and having exactly $\varrho(x, x_0)$ edges. Let $[x_0, x_1]$ be that edge of $P$ which is incident with $x_0$. Note that $[x_0, x_1] \notin E$, for otherwise $x_1$ would be incident with an edge of $E$, but $\varrho(x, x_1) = \varrho(x, x_0) - 1$, contradicting the minimality of $\varrho(x, x_0)$. $[x_0, x_1] \notin E$ implies $e_0 \nsim^{(1)} [x_0, x_1]$; hence there is a 4-circuit without diagonals which contains both $e_0$ and $[x_0, x_1]$. Let $e_0'$ be the edge of $C$ opposite $e_0$. Then $e_0' \sim^{(0)} e_0$, hence $e_0' \in E$. Also $x_1$ is incident with $e_0'$, but this contradicts the minimality of $\varrho(x, x_0)$.

(2.9) COROLLARY. *Let $X$ be a connected graph containing a vertex of finite degree. Then $E(X)$ consists of only finitely many equivalence classes modulo $\sim$.*

(2.10) LEMMA. *Let $X$ be a connected graph, and let $s$ be a positive integer. Then $X$ contains no circuit $C$ with the following property $\mathfrak{B}_s$: There exist $s+1$ paths $P_0, \ldots, P_s$ of $X$ such that* (i) $C = P_0 \cup \ldots \cup P_s$; (ii) $P_i \sim P_i$, $0 \leqq i \leqq s$; (iii) $P_0 \nsim P_i$, $1 \leqq i \leqq s$.

PROOF. Assume the contrary. Since $C$ is finite the fact that the relations $\sim_r$ form a tower implies the existence of a positive integer $r_0$ such that for all $e, e' \in E(C)$, $e \sim e'$ if and only if $e \sim_{r_0} e'$. Thus condition (ii) becomes $P_i \sim_{r_0} P_i$. (iii) implies $P_0 \nsim_{r_0, s-1} P_i$, $1 \leqq i \leqq s$, hence by (1) and (2), $P_0 \sim^{(r_0, s)} P_i$, and therefore $P_0 \sim P_i$, $1 \leqq i \leqq s$, contradicting (iii).

(2.11) LEMMA. *Let $X$ be a connected prime graph such that* (i) *$X$ is of finite type, or* (ii) *$X$ contains a vertex of finite degree. Then $X \sim X$.*

PROOF. Let $X_0$ be a maximal connected subgraph of $X$ such that $X_0 \sim X_0$, and suppose that $X_0 \neq X$. We shall produce a sequence $X_0, X_1, \ldots$ of subgraphs of $X$ such that $X_i$ is a product of $i+1$ non-trivial factors, $X_i < X_{i+1}$, and $E(X_i)$ meets exactly $i+1$ distinct equivalence classes of $E(X)$ modulo $\sim$, $i = 0, 1, \ldots$, thus establishing a contradiction against the assumption that $X$ is of finite type or that $X$ has a vertex of finite degree.

Since $X_0 \neq X$ there is an equivalence class $E_1$ of $E(X)$ mod $\sim$ such that $E(X_0) \cap E_1 = \bigcirc$. Let $x_0$ be an arbitrary but fixed vertex of $X_0$. Put $E_1(x_0) = \cup E(P)$, the union taken over all paths $P < X$ with $x_0 \in V(P)$ and $E(P) < E_1$, and let $Y_1$ be the minimal subgraph of $X$ with $E(Y_1) = E_1(x_0)$. By (2.8), $E(Y_1) \neq \bigcirc$. Clearly $Y_1$ is connected, and $Y_1 \sim Y_1$.

We will show that given any $x \in V(X_0)$ and $y \in V(Y_1)$ there is a unique vertex $z_{xy} \in V(X)$ such that (i) if $x \neq x_0$ or $y \neq x_0$, then $z_{xy} \notin V(Y_1)$ or $\notin V(X_0)$, respectively; (ii) for all $x \in V(X_0)$ and all $y \in V(Y_1)$, $z_{x x_0} = x$, $z_{x_0 y} = y$; (iii) if $(x, y) \neq (x', y')$, then $z_{xy} \neq z_{x'y'}$; (iv) $[z_{xy}, z_{x'y'}] \in E(X)$ if and only if $x = x'$ and $[y, y'] \in E(Y_1)$, or $y = y'$ and $[x, x'] \in E(X_0)$; (v) $[z_{xy}, z_{xy'}] \sim_1 [y, y']$ provided $[y, y'] \in E(Y_1)$, $[z_{xy}, z_{x'y}] \sim_1 [x, x']$ provided $[x, x'] \in E(X_0)$. Note that (v) is an immediate consequence of (i) ... (iv).

We begin by showing that $V(X_0 \cap Y_1) = \{x_0\}$. Assuming the contrary let $x_1$ be a vertex of $X_0 \cap Y_1$ distinct from $x_0$ such that $\varrho_0(x_0, x_1)$ is minimal, where $\varrho_0$ denotes distance in $X_0$. Let $P_0, P_1$ be paths of $X_0$ and $Y_1$ respectively,

joining $x_0$ and $x_1$, and suppose that $P_0$ has exactly $\varrho_0(x_0, x_1)$ edges. Then $P_0$ and $P_1$ have exactly $x_0$ and $x_1$ in common, and therefore $P_0 \cup P_1$ is a circuit of $X$ with property $\mathfrak{B}_1$, a contradiction against (2.10).

Given $(x, y) \in V(X_0) \times V(Y_1)$ we shall define $z_{xy}$ by induction on $\sigma(x, y) = \varrho_0(x, x_0) + \varrho_1(y, x_0)$, where $\varrho_0$ and $\varrho_1$ denote distance in $X_0$ and $Y_1$, respectively. If $\sigma(x, y) = 0$, i.e. if $x = x_0$, $y = x_0$, we put $z_{xy} = x_0$. If $\sigma(x, y) = 1$, then either (1) $x = x_0$, $[y, x_0] \in E(Y_1)$, or (2) $y = x_0$, $[x, x_0] \in E(X_0)$. In case (1) put $z_{xy} = y$, in case (2), $z_{xy} = x$. Since $V(X_0 \cap Y_1) = \{x_0\}$ it follows that the $z_{xy}$'s thus defined satisfy condition (iii). To see that condition (iv) is satisfied let $\sigma(x, y) = \sigma(x', y') = 1$ and $[z_{xy}, z_{x'y'}] \in E(X)$. If $x \neq x'$ and $y \neq y'$, then $z_{xy}$, $z_{x'y'}$ and $x_0$ form a 3-circuit, and hence $[x_0, z_{xy}] \sim_1 [x_0, z_{x'y'}]$, a contradiction. Hence either $x = x'$ or $y = y'$, i.e. (iv) is satisfied.

Suppose $z_{uv}$ has been defined for all $(u, v) \in V(X_0) \times V(Y_1)$ with $\sigma(u, v) \leqq m$. Let $(x, y) \in V(X_0) \times V(Y_1)$ be such that $\sigma(x, y) = m + 1$. Then there is a $(u, v) \in V(X_0) \times V(Y_1)$ with $\sigma(u, v) = m$ such that either (1) $u = x$, $[v, y] \in E(Y_1)$, or (2) $v = y$, $[u, x] \in E(X_0)$. It suffices to consider case (1). Either $x = x_0$ or $\varrho_0(x, x_0) \geqq 1$. In the first case put $z_{xy} = y$; in the second let $w \in V(X_0)$ be such that $[x, w] \in E(X_0)$ and $\varrho_0(w, x_0) = \varrho_0(x, x_0) - 1$. Then $\sigma(w, v) = m - 1$, $\sigma(w, y) = m$, hence both $z_{wv}$ and $z_{wy}$ are already defined, and by (iv) and (v), $[z_{wv}, z_{wy}] \in E(X)$, $[z_{xv}, z_{wv}] \in E(X)$, and $[z_{wv}, z_{wy}] \sim_1 [v, y]$, $[z_{xv}, z_{wv}] \sim_1 [x, w]$. Thus $[z_{xv}, z_{wv}] \nsim [z_{wv}, z_{wy}]$, hence in particular $[z_{xv}, z_{wv}] \nsim^{(1)} [z_{wv}, z_{wy}]$, and therefore $X$ contains a 4-circuit $C$ without diagonals such that $[z_{xv}, z_{wv}]$ and $[z_{wv}, z_{wy}]$ belong to $E(C)$. Define $z_{xy}$ to be the fourth vertex of $C$.

$z_{xy}$ thus defined is unique. If $x = x_0$ this is obvious. Assume therefore that $\varrho_0(x, x_0) \geqq 1$. Let $v' \in V(Y_1)$ be such that $[v', y] \in E(Y_1)$ and $\varrho_1(v', x_0) = \varrho_1(y, x_0) - 1$; similarly let $w' \in V(X_0)$ be such that $[x, w'] \in E(X_0)$ and $\varrho_0(w', x_0) = \varrho_0(x, x_0) - 1$. Let $z'_{xy}$ be the fourth vertex of a 4-circuit without diagonals containing $[z_{xv'}, z_{w'v'}]$ and $[z_{w'v'}, z_{w'y}]$, and suppose that $z'_{xy} \neq z_{xy}$. Let $Q_0$ be a path of $X$ with $V(Q_0) = \{z_{wy}, z_{w_1y}, \ldots, z_{w_ry}, z_{w'y}\}$, where $\sigma(w_i, y) \leqq m$, $i = 1, \ldots, r$, $r \geqq 0$. Such a path exists because $\varrho_0(w, x_0) = \varrho_0(w', x_0)$. Similarly, let $Q_1$ be a path of $X$ with $V(Q_1) = \{z_{xv}, z_{xv_1}, \ldots, z_{xv_s}, z_{xv'}\}$, where $\sigma(x, v_j) \leqq m$, $j = 1, \ldots, s$, $s \geqq 0$. Note that $Q_0 \sim X_0$, $Q_1 \sim Y_1$. Let $P_0$, $P_1$ be the paths formed by $[z_{xy}, z_{wy}]$, $Q_0$, $[z_{w'y}, z'_{xy}]$, and $[z_{xy}, z_{xv}]$, $Q_1$ $[z_{xv'}, z'_{xy}]$, respectively. Then $P_0 \cup P_1$ is a circuit of $X$ with property $\mathfrak{B}_1$, a contradiction. Hence $z'_{xy} = z_{xy}$.

We show next that if $x \neq x_0$, then $z_{xy} \notin V(Y_1)$, if $y \neq x_0$, then $z_{xy} \notin V(X_0)$, and that $z_{xy} \neq z_{uv}$ for all $(u, v)$ with $\sigma(u, v) \leqq m$. Suppose $x \neq x_0$, and $z_{xy} \in V(Y_1)$. Let $w$ be as in the preceding paragraph, let $R_0$ be a path of $X$ with $V(R_0) = \{z_{x_0y}, z_{x_1y}, \ldots, z_{x_ty}, z_{wy}\}$ such that $\sigma(x_i, y) \leqq m$, and let $P_1$ be a path of $Y_1$ joining $y$ and $z_{xy}$. Let $P_0$ be the path formed by $[z_{wy}, z_{xy}]$ and $R_0$. Then $P_0 \cup P_1$ is a circuit with property $\mathfrak{B}_1$. A similar argument proves the other two statements.

It remains to prove (iv). That $[z_{xy}, z_{x'y'}] \in E(X)$ if $x = x'$ and $[y, y'] \in E(Y_1)$, or $y = y'$ and $[x, x'] \in E(X_0)$ is obvious from the construction and uniqueness of $z_{xy}$. Now assume $[z_{xy}, z_{x'y'}] \in E(X)$, $\sigma(x', y') < \sigma(x, y) = m + 1$. Assume that $x \neq x'$, $y \neq y'$. Let $P_0$ be a path of $X$ joining $z_{x'y}$ and $z_{xy'}$ such that

$P_0 \sim X_0$, and let $P_1$ be a path of $X$ joining $z_{xy'}$ and $z_{xy}$ such that $P_1 \sim Y_1$. Then $P_0$, $P_1$ and $[z_{xy}, z_{x'y'}]$ form a circuit with property $\mathfrak{B}_1$, a contradiction. Hence either $x = x'$ or $y = y'$, and accordingly $[y, y'] \in E(Y_1)$ or $[x, x'] \in E(X_0)$.

(i) ... (iv) imply that $X$ contains a subgraph $X_1 \cong X_0 \times Y_1$. Since $X$ is prime, and $X_1$ is non-prime, $X_1$ is a proper subgraph of $X$. It follows from the construction of $X_1$ that no edge of $E_1 - E(X_1)$ is incident with any vertex of $X_1$. Let $E_2 \neq E_1$ be an equivalence class of $E(X)$, and repeat the above construction replacing $X_0$ by $X_1$, $Y_1$ by $Y_2$, etc., obtaining $X_2 \cong X_0 \times Y_1 \times Y_2$, etc.

(2.12) LEMMA. *Let $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, where $X_1, \ldots, X_n$ are connected graphs, and let $e, e' \in E(X_a)$, $1 \leqq a \leqq n$. Then $e \sim e'$ (in $X_a$) implies $i_a^x e \sim i_a^x e'$ (in $X$) for all $x \in V(X)$.*

PROOF. It suffices to show that $i_a^x$ preserves $\sim^{(1)}$. Let $e, e' \in E(X_a)$, and suppose that $e \sim^{(1)} e'$ (in $X_a$). Assume that $e_x \not\sim^{(1)} e'_x$ (in $X$), where $e_x = i_a^x e$, $e'_x = i_a^x e'$. Then $X$ contains a 4-circuit $C$ without diagonals such that $e_x, e'_x \in E(C)$. Since the remaining two edges of $C$ are in relation $\sim^{(0)}$ with $e_x$ and $e'_x$, respectively, it follows from Lemma (2.5) that $C$ is a subgraph of $X_a^x$. Hence $p_a C$ is a 4-circuit without diagonals of $X_a$ such that $e, e' \in E(p_a C)$. Therefore $e \not\sim^{(1)} e'$ (in $X_a$), a contradiction.

(2.13) THEOREM. *Let $X$ be a connected graph of finite type, or a connected graph containing a vertex of finite degree, and suppose that $X = X_1 \times \cdots \times X_n$, where $X_1, \ldots, X_n$ are prime graphs. Let $e, e' \in E(X)$. Then a n.a.s.c. that $e \sim e'$ is that $e \in E(X_a^x)$, $e' \in E(X_a^{x'})$ for some $x, x' \in V(X)$, and some $a$, $1 \leqq a \leqq n$.*

PROOF. Necessity: (2.5), (2.7). Sufficiency: (2.11), (2.12).

(2.14) COROLLARY. *Let $X$ be as in (2.13), and let $x \in V(X)$. By $E_a$ denote that equivalence class of $E(X)$ modulo $\sim$ for which $E_a \cap E(X_a^x) \neq \bigcirc$. Then $X_a^x$ is the maximal connected subgraph of $X$ such that $x \in V(X_a^x)$, and $E(X_a^x) \subset E_a$.*

(2.15) COROLLARY. *If $X$ is a connected graph of finite type or if $X$ is a connected graph containing a vertex of finite degree, and if $X$ has a prime factor decomposition, then the prime factor decomposition of $X$ is unique to within isomorphisms.*

(2.16) THEOREM. *Let $\{X_a \mid a \in A\}$ be an infinite set of connected prime graphs of finite type. Then $\prod_{a \in A} (X_a, x_a^{(0)})$ has no prime factor decomposition in the cartesian sense.*

PROOF. Assume the contrary. Then there exist connected prime graphs $Y_1, \ldots, Y_n$ such that $X = \prod_{a \in A} (X_a, x_a^{(0)}) \simeq \prod_{i=1}^{n} Y_i$. Let $x^{(0)} \in V(X)$ be given by $p_a x^{(0)} = x_a^{(0)}$, $a \in A$. Examination of the proofs of (2.5), (2.7), and (2.12) shows that (2.13) also holds for weak cartesian products of connected prime graphs of finite type. It follows that two edges $e, e'$ of $X$ are equivalent if and only if $e \in E(X_a^x)$, $e' \in E(X_a^{x'})$ for some $a \in A$. Applying this fact and Lemma (2.14) to the graphs $Y_i^{x^{(0)}}$ (defined in analogy to the $X_a^{x'}$s) we obtain that if $E(X_a^x \cap Y_i^{x^{(0)}}) \neq \bigcirc$, then $X_a^x \subset Y_i^{x^{(0)}}$. Consequently $Y_i^{x^{(0)}} = \cup \{X_a^x \mid a \in A_i, x \in V(Y_i^{x^{(0)}})\}$, where $A_i = \{a \in A \mid E(X_a^x \cap Y_i^{x^{(0)}}) \neq \bigcirc \text{ for some } x \in V(X)\}$, and therefore $Y_i \cong Y_i^{x^{(0)}}$

$\cong \prod_{a\in A_i} (X_a, x_a^{(0)})$. Since $A$ is infinite, there is an $i$ for which $A_i$ is infinite. But then $\prod_{a\in A_i} (X_a, x_a^{(0)})$ is not prime [cf. (1.6) (iii)], and therefore $Y_i$ is not prime, a contradiction.

### 3. The automorphism group of connected graphs of finite type

We recall that given a set $\{X_a | a\in A\}$ of graphs the *sum* $X^+ = \sum_{a\in A} X_a$ is defined as follows.

$$V(X^+) = \bigcup_{a\in A} \big(V(X_a)\times\{a\}\big), \tag{1}$$

$$E(X^+) = \bigcup_{a\in A} \{[(x_a, a), (x'_a, a)] | [x_a, x'_a] \in E(X_a)\}. \tag{2}$$

If the graphs $X_a$ are mutually disjoint, then $X^+ \cong X_0^+$, where

$$V(X_0^+) = \bigcup_{a\in A} V(X_a), \qquad E(X_0^+) = \bigcup_{a\in A} E(X_a).$$

We shall then identify $X^+$ with $X_0^+$.

(3.1) THEOREM. *Let $X$ be as in* (2.13). *Then $G(X)\cong G(X^+)$, where $X^+ = \sum_{a=1}^{n} X_a$, and $X_1, \ldots, X_n$ are the prime factors of $X$ with respect to cartesian multiplication.*

PROOF. Without loss of generality we can identify $X$ with $X_1\times\cdots\times X_n$. Also, we can assume that the graphs $X_a$ are mutually disjoint. Since $X$ is connected, the prime factors $X_1, \ldots, X_n$ are likewise connected; hence every $\psi\in G(X^+)$ induces a permutation $\varrho\in S_n$ (= symmetric group of degree $n$) given by

$$\psi X_a = X_{\varrho a}, \qquad a = 1, \ldots, n,$$

and $\psi\to\varrho$ is a homomorphism of $G(X^+)$ into $S_n$.

Given $\psi\in G(X^+)$ define $\varphi: V(X)\to V(X)$ by

$$p_{\varrho a}\varphi x = \psi p_a x, \qquad x\in V(X), \qquad a = 1, \ldots, n,$$

where $\varrho\in S_n$ is the permutation induced by $\psi$. Let $[x, x']\in E(X)$. Then $[p_a x, p_a x']\in E(X_a)$ for exactly one $a$, $1\leqq a\leqq n$. Therefore

$$[\psi p_a x, \psi p_a x'] = [p_{\varrho a}\varphi x, p_{\varrho a}\varphi x'] \in E(X_{\varrho a}),$$

and

$$i_{\varrho a}^{\varphi x}[p_{\varrho a}\varphi x, p_{\varrho a}\varphi x'] = [\varphi x, \varphi x'] \in E(X_{\varrho a}^{\varphi x}) < E(X).$$

Hence $\varphi\in G(X)$. It also follows that

$$\varphi X_a^x = X_{\varrho a}^{\varphi x}.$$

Consider the function $j: G(X^+)\to G(X)$ given by $j\psi = \varphi$. Clearly $j$ is a homomorphism. Let $\psi\in \operatorname{Ker} j$. Then

$$X_a^x = X_{\varrho a}^x, \qquad a = 1, \ldots, n, \qquad x\in V(X).$$

Hence $\varrho = 1$, and $\psi p_a x = p_a x$, i.e. $\psi = 1$. Hence $j$ is a monomorphism.

Let $x \in V(X)$. By (2.14), $X_a^x$ is the maximal connected subgraph of $X$ with $x \in V(X_a^x)$ and $E(X_a^x) < E_a$. Since $\sim$ is invariant under automorphisms [cf. (2.3)], every $\varphi \in G(X)$ induces a $\pi \in S_n$ given by

$$\varphi E_a = E_{\pi a}, \qquad a = 1, \ldots, n.$$

Consequently

$$\varphi X_a^x = X_{\pi a}^{\varphi x}, \qquad a = 1, \ldots, n, \qquad x \in V(X).$$

Clearly $\varphi \to \pi$ is a homomorphism of $G(X)$ into $S_n$.

Given $\varphi \in G(X)$ define $\psi: V(X^+) \to V(X^+)$ by

$$i_{\pi a}^{\varphi x} \psi x_a = \varphi i_a^x x_a, \qquad x_a \in V(X_a), \qquad a = 1, \ldots, n,$$

where $x$ is an arbitrary vertex of $X$, and $\pi \in S_n$ is the permutation induced by $\varphi$. $\psi$ does not depend on the choice of $x$. Since $X$ is connected, it suffices to show that

$$p_{\pi a} \varphi i_a^x x_a = p_{\pi a} \varphi i_a^{x'} x_a$$

whenever $[x, x'] \in E(X)$. We have $[x, x'] \in E(X_b^x)$ for exactly one $b$, $1 \leqq b \leqq n$. Hence $p_c x = p_c x'$, if $c \neq b$, and $[p_b x, p_b x'] \in E(X_b)$. We can assume that $b \neq a$ for otherwise it follows trivially that $i_a^x x_a = i_a^{x'} x_a$. Put

$$y = i_a^x x_a, \qquad y' = i_a^{x'} x_a.$$

Then

$$p_c y = p_c x, \quad \text{if} \quad c \neq a, \qquad p_a y = x_a,$$

and

$$p_c y' = p_c x', \quad \text{if} \quad c \neq a, \qquad p_a y' = x_a.$$

Hence $[y, y'] \in E(X_b^y)$. It follows that $[\varphi y, \varphi y'] \in E(X_{\pi b}^{\varphi y})$, hence $p_c \varphi y = p_c \varphi y'$ for all $c \neq \pi b$; in particular, $p_{\pi a} \varphi y = p_{\pi a} \varphi y'$, i.e. $p_{\pi a} \varphi i_a^x x_a = p_{\pi a} \varphi i_a^{x'} x_a$.

The proof that $\psi \in G(X^+)$, and that the function $j^+: G(X) \to G(X^+)$ given by $j^+ \varphi = \psi$ is a monomorphism, is dual to the proof for $j$, and is therefore left to the reader. It remains to show that $j j^+ = 1$, and $j^+ j = 1$. Let $\varphi \in G(X)$, $x \in V(X)$. Note that $\varphi$ and $j^+ \varphi$ induce the same $\pi \in S_n$. Hence $p_{\pi a}(j j^+ \varphi) x = (j^+ \varphi) p_a x = p_{\pi a} \varphi i_a^x p_a x = p_{\pi a} \varphi x$, and therefore $j j^+ = 1$. Similarly for $j^+ j$. It follows that $G(X) \cong G(X^+)$.

(3.2) COROLLARY. *Let $X_1, \ldots, X_n$ be connected graphs of finite type which are pairwise relatively prime with respect to cartesian multiplication. Then $G(X_1 \times \cdots \times X_n) \cong G(X_1) \times \cdots \times G(X_n)$.*

## Reference

[1] ČULIK, K.: Zur Theorie der Graphen. Časopis Pro Pěstováni Matematiky **83**, 133–155 (1958).

*College of Arts and Sciences, Tulane University, New Orleans, La. (U.S.A.)*

*(Eingegangen am 8. Mai 1959)*

THOMPSON, J. G.
Math. Zeitschr. 72, 458—462 (1960)

# A Special Class of Non-Solvable Groups

By
JOHN G. THOMPSON

The object of this note is to prove a theorem which was only stated in [4].

THEOREM. *If a maximal subgroup $M = P \times M_1$ of the non-solvable finite group $G$ is nilpotent, and if the 2-Sylow subgroup $P$ of $M$ is generalized quaternion or dihedral, then $G$ possesses a normal series*

$$G \geqq G_0 > T \geqq 1,$$

*where $[G:G_0] \leqq 2$, $T$ is nilpotent, and $G_0/T \cong LF(2, q)$, where*

i. *$q$ is a prime greater than 7 of the form $2^n \pm 1$,*

*or* ii. *$q = 9$,*

*or* iii. *$q = 7$, in which case $[G:G_0] = 2$.*

REMARK. It appears likely that the assumption regarding the structure of $P$ is unnecessary, and that the conclusion of the theorem follows with no assumptions on $P$ whatsoever.

We first prove three easy lemmas.

LEMMA 1. *If $D$ is a dihedral group of order $2^{n+1}$,*

$$D = \{a, b \mid a^2 = b^{2^n} = 1,\ a\,b\,a = b^{-1}\},$$

*then any proper non-cyclic normal subgroup of $D$ has index 2 in $D$.*

PROOF. Since $a\,b\,a^{-1} = b^{-1}$, $B = \{b\}$ is a normal subgroup of $D$. Since all subgroups of $B$ are cyclic, it suffices to show that any proper normal subgroup $E$ of $D$ not contained in $B$ has index 2. Now $D/E \cap B$ is a dihedral 2-group, with generators $\bar{a} = a(E \cap B)$ and $\bar{b} = b(E \cap B)$, and $E/E \cap B \lhd D/E\,B$. Hence it suffices to consider the case when $E \cap B = 1$. But then $[E:1] = [D:B] = 2$. On the other hand, $E$ must contain an element $t = a\,b^r$ not in $B$ and its conjugate $b^{-1}tb = a\,b^{r+2}$. Thus, $E$ contains at least three elements unless $n = 1$, in which case $[D:E] = 2$, as asserted.

LEMMA 2. *Suppose $X$ is a finite group of even order which possesses no normal subgroups of index 2, and suppose that a 2-Sylow subgroup of $X$ is dihedral, and is its own normalizer in $X$. Then any two elements of order 2 in $X$ are conjugate in $X$.*

PROOF. Let the group $D$ of lemma 1 be a 2-Sylow subgroup of $X$. The elements of order 2 in $D$ split into three conjugate classes in $D$, namely $C_1 = [b^{2^{n-1}}]$,

$C_2=[ab^{2t}, t=0, 1, \ldots, 2^{n-1}-1]$, and $C_3=[ab^{2t+1}, t=0, 1, \ldots, 2^{n-1}-1]$. Since any element of order 2 in $X$ is conjugate to an element of order 2 in $D$, we must show that $C_1$, $C_2$, and $C_3$ lie in the same conjugate class of $X$.

Since by assumption $D=N_X(D)$, Grün's second theorem states that the 2-factor commutator group of $X$ is isomorphic to $D/D^*$, where

$$D^* = \prod_x D \cap (D^x)',$$

$x$ ranging through the elements of $X$. Since we are also assuming that $X$ has no normal subgroups of index 2, we must have $D^*=D$.

Since $(D^x)'$ is cyclic for each $x$ in $X$, so is $D\cap(D^x)'$. If $D\cap(D^x)'$ has order at least four, then it is contained in $\{b^2\}$, which is itself contained in the Frattini subgroup of $D$ and is superfluous to any generating set. Hence, we only need to consider those $x$ such that $D\cap(D^x)'$ has order 2.

An element of order 2 in $(D^x)'$ is necessarily a generator for $Z(D^x)$, and is thus conjugate to $b^{2^{n-1}}$ in $X$. On the other hand, if $D\cap(D^x)'$ has order 2 and is not contained in $D'$, then it is necessarily of the form $\{ab^{2s}\}$ or $\{ab^{2t+1}\}$, for suitable $s$ or $t$. Since the elements in $D$ of the form $ab^{2s}$ generate a proper normal subgroup of $D$, as do the elements of the form $ab^{2t+1}$, we see that $b^{2^{n-1}}$ is conjugate in $X$ to both $ab^{2s}$ and $ab^{2t+1}$, and the proof is complete.

LEMMA 3. *If $p$ is an odd prime, and $p^m=1+2^n$, then either $m=1$ or else $m=2$ and $p=3$. If $p^m=2^n-1$, then $m=1$.*

PROOF. Suppose $p^m=1+2^n$ and $m>1$. We find that $p^m-1=(p-1)\times(p^{m-1}+\cdots p+1)=2^n$. If $m$ were odd, then $p^{m-1}+\cdots p+1$ would also be odd. Since it is a power of 2, this would force $m=1$. Hence $m=2t$. But then $p^{2t}-1=(p^t-1)(p^t+1)=2^n$, so that $p^t-1$ and $p^t+1$ are both powers of 2. Hence $p^t=3$, $t=1$, $m=2$, as desired.

If $p^m=2^n-1$ and $m$ is even, then $p^m\equiv 1 \pmod 8$, which is not possible unless $m=0$. Hence $m$ is odd. But then

$$p^m+1=(p+1)(p^{m-1}-p^{m-2}+\cdots-p+1)=2^n,$$

and $p^{m-1}-p^{m-2}+\cdots-p+1$ is both odd and a power of 2, hence is equal to 1. This forces $m=1$.

PROOF OF THE THEOREM. Let $N$ be the maximal solvable normal subgroup of $G$. If $N$ were not contained in $M$, then $G=MN$ by maximality of $M$, so that $G$ is an extension of the solvable group $N$ by the nilpotent group $G/N\cong M/M\cap N$, and is solvable. Since we are assuming that $G$ is non-solvable we conclude

$$N \leqq M. \tag{1}$$

$N=M$ is not possible since $M$ would then have prime index in $G$, and $G$ would be solvable.

Now $\overline{G}=G/N$ is non-solvable and $M/N=\overline{M}$ is a maximal subgroup of $G$. If $\overline{M}$ were of odd order, then by a previous result [4], $G$ would be solvable. Hence $\overline{M}$ is of even order and the 2-Sylow subgroup of $\overline{M}$ is $PN/N \cong P/P\cap N$ and is generalized quaternion or dihedral or of order 2. In any case, from (1) we conclude that if $\overline{H} \neq 1$ is any normal subgroup of $\overline{M}$, then

$$N_{\overline{G}}(\overline{H}) = \overline{M}. \tag{2}$$

Suppose $\overline{M}$ has a normal complement, say $\overline{K}$. In this case, an element $x$ in $Z(\overline{M})$, $x \neq 1$, $x$ of prime order, would induce an automorphism of $\overline{K}$ which, by virtue of (2), would have no fixed-points. By [4], we would find that $\overline{K}$ is nilpotent, so that $\overline{G}$ would be an extension of a nilpotent group by a nilpotent group, hence solvable, contrary to assumption. Thus, $\overline{M}$ does not have a normal complement.

Let $\overline{Q}$ be a $q$-Sylow subgroup of $\overline{M}_1$, where $\overline{M}_1 = M_1/NN''$. By (2), if $\overline{T}$ is any normalsubgroup of $\overline{Q}$, then elements of order prime to $q$ which normalize $\overline{T}$ centralize $\overline{T}$. By Theorem A [4], $\overline{Q}$ has a normal complement. The intersection of these normal complements for the Sylow subgroups of $\overline{M}_1$ is a normal complement for $\overline{M}_1$. If $\overline{P}$ were of order 2, then $\overline{P}$ would have a normal complement [1, p. 163]. The intersection of the normal complement for $\overline{M}_1$ with the normal complement for $\overline{P}$ is thus a normal complement for $\overline{M}$, contrary to the previous paragraph. Hence, $\overline{P}$ is not of order 2.

CASE 1. $N \neq 1$. We conclude by the induction hypothesis that $\overline{G}$ has a normal series $\overline{G} \geqq \overline{G}_0 > \overline{T} \geqq 1$ satisfying the demands of the theorem with $\overline{G}$ replacing $G$. The complete inverse image in $G$ of this normal series gives rise to a normal series for $G$,

$$G \geqq G_0 > T \geqq N > 1.$$

$T$ is solvable since $T$ is an extension of the nilpotent group $N$ by the nilpotent group $\overline{T} = T/N$. By a previous remark, $T \leqq M$, so that $T$ is nilpotent, and we are finished.

CASE 2. $N=1$, but $M_1 \neq 1$. We can now remove the bars from (2). Since $G$ does not have a normal 2-complement, $G$ is not 2-normal by [2, p. 216], together with (2). Since $G$ is not 2-normal, we can find an element $x$ in $G$ such that $Z(P)^x \leqq P$ but $Z(P)^x \neq Z(P)$. This implies that $Z(P)$ is contained in $P^{x^{-1}}$ and hence in $M^{x^{-1}}$, so in particular is centralized by $M_1^{x^{-1}}$. By (2), we conclude that $M_1^{x^{-1}} \leqq M$. Since $M$ is nilpotent, we must have $M_1^{x^{-1}} = M_1$. Since $M_1 \neq 1$, again by (2) we conclude that $x \in M$. But then $Z(P)^x = Z(P)$, contrary to our choice of $x$. We are left with one more possibility.

CASE 3. $N=1$, $M_1=1$, that is, $M$ is a 2-group which is either generalized quaternion or dihedral. Since $N_G(M)=M$, $M$ is a 2-Sylow subgroup of $G$.

Suppose $M$ is generalized quaternion and that $Z$ is the unique subgroup of order 2 in $M$. $G$ is necessarily 2-normal, so that by [2, p. 216] $G/G_2 \cong \tilde{N}/\tilde{N}_2$, where $\tilde{N} = N_G(Z)$. Since we are assuming that $N=1$, we conclude that $\tilde{N}=M$ and this says that $G_2$ is a normal 2-complement in $G$. But then the generator

$z$ for $Z$ induces a fixed-point-free automorphism of $G_2$, which forces $G_2$ to be abelian, and $G$ to be solvable. We conclude that $M$ is dihedral.

Let us consider the group $G_2 \leqq G$, so that $G_2$ has no non-trivial quotient groups which are 2-groups. By a theorem of BURNSIDE [*1*, p. 163], a 2-Sylow subgroup of $G_2$ is not cyclic. Since $G_2 \cap M \lhd M$, and $G_2 \cap M$ is a 2-Sylow subgroup of $G_2$, it is non-cyclic. We apply lemma 1 to conclude that $[M : M \cap G_2] \leqq 2$. Application of lemma 2 tells us that $G_2$ possesses just one conjugate class of elements of order 2. Since $G_2 \cap M \lhd M$ and $M$ is a 2-group, we can choose an element $z \neq 1$ of order 2 such that $z \in G_2 \cap M \cap Z(M) = G_2 \cap Z(M)$. We conclude that every element of order 2 in $G_2$ is conjugate to $z$. Also, since $z \in Z(M)$ and $Z(M)$ has order 2, we have $\{z\} = Z(M)$. [(2) implies that $M$ cannot be dihedral of order 4.] Since $C_G(z) = M$, we conclude from this that the cyclic subgroups of $G_2$ are either of odd order or of order a power of 2.

Next, we see that $G_2$ is characteristically simple, since if $C \neq 1$ is any characteristic subgroup of $G_2$, then $C \lhd G$, and since $N = 1$, we have $G = CM$, so that $G/C$ is a 2-group. By the definition of $G_2'$, $C \leqq G_2$ and $C$ characteristic in $G_2$ imply that $C = G_2$.

Since $G_2$ is characteristically simple, $G_2 = H_1 \times \cdots \times H_r$ is a direct product of $r$ pairwise isomorphic simple groups of composite even order. If $r \geqq 2$, then there would be at least $r$ conjugate classes of elements of order 2, contrary to the fact that $G_2$ has just one conjugate class of elements of order 2. Hence, $r = 1$, and $G_2$ is simple, and of even order.

Let $U$ and $V$ be two cyclic subgroups of $G_2$ with $U \cap V \neq 1$, and $U$ of even order. By the preceding comments, $U$ and $V$ must both have order a power of 2. Since the elements of order 2 in $G_2$ form a single conjugate class we can suppose that $z \in U \cap V$. Since $U$ and $V$ both centralize $z$, we have $\{U, V\} \leqq M$. Since $M$ is dihedral, $M = \{a, b \mid a^2 = b^{2^n} = 1, aba = b^{-1}\}$, so that $z = b^{2^{n-1}}$. A typical element of $M$ either lies in $\{b\}$, or is of order 2 and is different from $z$. Since $U \cap V \geqq \{z\}$, we conclude that $\{U, V\} \leqq \{b\}$, so that $\{U, V\}$ is cyclic. By a result of BRAUER [*3*, p. 664], $G_2 \cong LF(2, q)$ for some prime power $q$.

Suppose $q = 2^t$. This is not possible since the 2-Sylow subgroups of $LF(2, 2^t)$ do not equal their normalizers, in contradiction with (2), since $G_2 \cap M \lhd M$, and $G_2 \cap M$ is a 2-Sylow subgroup of $G_2$. Hence, $q$ is odd. Now the order of $LF(2, q)$ is $\frac{1}{2}q(q-1)(q+1)$, and it is known that $LF(2, q)$ has elements of orders $\frac{1}{2}(q-1)$ and $\frac{1}{2}(q+1)$. Since $q$ is odd, precisely one of these numbers is even. As observed earlier, the cyclic subgroups of $G_2$ have odd order or order a power of two. Hence, if $\frac{1}{2}(q-1)$ is even, then $\frac{1}{2}(q-1)$ is a power of 2, so that $q = 1 + 2^n$, while if $\frac{1}{2}(q+1)$ is even, then $q = 2^n - 1$. We apply lemma 3 to conclude that if $q = 9$ or $q$ is a prime greater than 7, we are finished, since $[G : G_2] = [M : M \cap G_2] \leqq 2$, as derived earlier.

It remains to treat the possibilities $q = 3$, 5, or 7. $q = 3$ is not a possibility since $LF(2, 3)$ is solvable. Also, $q = 5$ is not possible, since $LF(2, 5) \cong A_5$,

from which we conclude that $G=A_5$ or $S_5$. But neither $A_5$ nor $S_5$ possesses 2-Sylow subgroups which are maximal, since $A_5$ contains $A_4$ and $S_5$ contains $S_4$.

Finally, suppose $q=7$. The group $LF(2, 7)$ has order $168=8\cdot3\cdot7$, and it possesses a subgroup of order 24, so that the 2-Sylow subgroups are not maximal. Hence $G_2\cong LF(2, 7)$ must be of index 2 in $G$.

The verification that $LF(2, q)$ possesses 2-Sylow subgroups which are maximal for the relevant values of $q$ is straightforward and is omitted.

## Bibliography

[1] BURNSIDE, W.: Theory of Groups of Finite Order. New York: Dover 1957. — [2] HALL, M.: The Theory of Groups. New York: MacMillan 1959. — [3] SUZUKI, M.: On Finite Groups with Cyclic Sylow Subgroups For all Odd Primes. Amer. J. Math. **77**, no. 4, 657—691 (1955). — [4] THOMPSON, J.: Finite Groups With Fixed-Point-Free Automorphisms of Prime Order. Proc. Nat. Acad. Sci. **45**, no. 4, 578—581 (1959).

*Dept. of Math., University of Chicago, Chicago 37, Ill. (U.S.A.)*

*(Eingegangen am 22. Mai 1959)*

RHOADES, B. E.
Math. Zeitschr. 72, 463—466 (1960)

# Total Comparison among some totally Regular Hausdorff Methods

By
B. E. RHOADES

BASU in [2] compares totally the Cesàro methods $(C^\alpha)$ and the Hölder methods $(H^\alpha)$. Among the results of [4] is a total comparison of the $H^\alpha$ and the $\Gamma_\beta^\alpha$ methods, where $\Gamma_\beta^\alpha$ has $[\beta/(n+\beta)]^\alpha$ as a generating sequence, $\alpha, \beta > 0$. The present paper compares totally the $C^\alpha$ and $\Gamma_\beta^\alpha$ methods. For definitions of terms used in this paper, the reader can consult [4] and the references cited there. Since results of [2] and [4] are to be utilized, I shall state them here to make this paper somewhat self-contained.

Let $x$ denote a sequence, $A$ an infinite matrix for which $A_n(x) = \Sigma a_{nk} x_k$ is defined. For two matrix methods $A$ and $B$, $B$ is said to be totally stronger than $A$ ($B$ *t.s.* $A$) if, for each sequence $x$ for which $A_n(x) \to l$, $B_n(x) \to l$, $|l| \leqq \infty$. $B$ is not totally stronger than $A$ ($B$ *n.t.s.* $A$) if $A_n(x) \to l$ implies $B_n(x) \to l$ for $l$ finite, but that there exists a sequence $x$ for which $A_n(x) \to +\infty$ and $B_n(x) \not\to +\infty$. If $A$ possesses a two-sided inverse, the statement $B$ *t.s.* $A$ is equivalent to the statement that $BA^{-1}$ is totally regular. That is, the matrix method defined by $BA^{-1}$ preserves convergence ($x_n \to l$ implies $BA_n^{-1}(x) \to l$) and that, for every sequence $x$ with $x_n \to +\infty$, $BA_n^{-1}(x) \to +\infty$.

THEOREM B 2.

(i) *For* $-1 < \alpha < 0$, $H^\alpha$ *t.s.* $C^\alpha$; *but the converse is false.*

(ii) *For* $0 < \alpha < 1$, $C^\alpha$ *t.s.* $H^\alpha$; *but the converse is false.*

(iii) *For* $a > 1$, $H^\alpha$ *t.s.* $C^\alpha$; *but the converse is false.*

(iv) *For* $-1 < \alpha < \beta < 0$, $C^\beta$ *n.t.s.* $H^\alpha$.

(v) *For* $0 < \alpha < \beta < 1$, $H^\beta$ *n.t.s.* $C^\alpha$.

(vi) *For* $1 < \alpha < \beta$, $C^\beta$ *n.t.s.* $H^\alpha$.

THEOREM B 4.1.

(i) *For* $\alpha < \beta$, $c > 0$, $\Gamma_c^\beta$ *t.s.* $\Gamma_c^\alpha$.

(ii) *Let* $0 < a < b$, $\alpha > 0$. *Then* $\Gamma_a^\alpha$ *t.s.* $\Gamma_b^\alpha$.

THEOREM B 4.2. *If* $\alpha > 0$,

(i) *for* $0 < a < 1$, $\Gamma_a^\alpha$ *t.s.* $H^\alpha$, *but* $H^\alpha$ *n.t.s.* $\Gamma_a^\alpha$,

(ii) *for* $b > 1$, $H^\alpha$ *t.s.* $\Gamma_b^\alpha$ *but* $\Gamma_b^\alpha$ *n.t.s.* $H^\alpha$.

In [4], B 4.1 (i) has the restriction that $\alpha > 0$, but this restriction is not needed in the proof. The important item is that $\beta - \alpha$ be positive. The analogous result of B 4.1 (ii) for $\alpha < 0$ will now be stated. The proof is the same as that of B 4.2 (ii) and will be omitted.

THEOREM 1. *Let* $\alpha<0$. *If* $0<a<b$, *then* $\Gamma_b^\alpha$ *t.s.* $\Gamma_a^\alpha$, *but* $\Gamma_a^\alpha$ *n.t.s.* $\Gamma_b^\alpha$.

Since $\Gamma_1^\alpha=H^\alpha$, Theorem 1 also says that, for $\alpha<0$, $0<a<1$, $b>1$, $\Gamma_b^\alpha$ *t.s.* $H^\alpha$ *t.s.* $\Gamma_a^\alpha$.

THEOREM 2. *Let* $0<1+\alpha\leqq a<1$. *Then* $\Gamma_a^\alpha$ *t.s.* $C^\alpha$, *but not conversely.*

THEOREM 3. *Let* $-1<\alpha<0$, $0<a\leqq\frac{1}{2}(\alpha+1)$. *Then* $C^\alpha$ *t.s.* $\Gamma_a^\alpha$, *but not conversely.*

THEOREM 4. *Let* $0<a\leqq\frac{1}{2}(\alpha+1)<1$. *Then* $\Gamma_a^\alpha$ *t.s.* $C^\alpha$, *but not conversely.*

THEOREM 5. *Let* $0<a<1$, $b>1$. *Then* $\Gamma_\alpha^1$ *t.s.* $C^1$ *t.s.* $\Gamma^1$, *but not conversely.*

THEOREM 6. *If* $\alpha>1$, $b\geqq\frac{1}{2}(\alpha+1)$, *then* $C^\alpha$ *t.s.* $\Gamma_b^\alpha$, *but not conversely.*

To prove Theorems 2, 3, 4, and 6, let

$$\mu_n=\frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\alpha+1)}\cdot\frac{a^\alpha}{(n+a)^\alpha}.$$

Let $\mu(t)=e^{\sigma(t)}$, where $\sigma(t)=\log\Gamma(t+\alpha+1)+\alpha\log a-\log\Gamma(\alpha+1)-$ $-\log\Gamma(t+1)-\alpha\log(t+a)$. For $t<0$,

$$\sigma'(t)=\frac{\Gamma'(t+\alpha+1)}{\Gamma(t+\alpha+1)}-\frac{\Gamma'(t+1)}{\Gamma(t+1)}-\frac{\alpha}{t+a},$$

$$\sigma'(t)=\frac{-\alpha}{t+a}+\sum_{m=0}^{\infty}\{(m+t+1)^{-1}-(m+t+\alpha+1)^{-1}\}. \tag{1}$$

The form of the logarithmic derivative of the Gamma function can be derived from [1], p. 161, (34). Since

$$(t+a)^{-1}=\sum_{m=0}^{\infty}\{(m+t+a)^{-1}-(m+t+a+1)^{-1}\},$$

$$\begin{cases}(-1)\,\sigma'(t)=\alpha\sum\limits_{m=0}^{\infty}\{[(m+t+a)\,(m+t+a+1)]^{-1}\\ \qquad\qquad -[(m+t+1)\,(m+t+\alpha+1)]^{-1}\}.\end{cases} \tag{2}$$

If, for a given $a$, $\alpha$,

$$(-1)^n\sigma^{(n)}(t)\geqq 0 \qquad (t>0;\ n=1,2,3,\ldots), \tag{3}$$

then $\Gamma_a^\alpha$ *t.s.* $C^\alpha$. On the other hand, since the moment function corresponding to the transformation from $\Gamma_a^\alpha$ to $C^\alpha$ is $1/\mu(t)=e^{-\sigma(t)}$, if

$$(-1)^{n+1}\sigma^{(n)}(t)\geqq 0 \qquad (t>0;\ n=1,2,3,\ldots), \tag{4}$$

then $C^\alpha$ *t.s.* $\Gamma_a^\alpha$.

Replacing $a$ in (2) by $c=\frac{1}{2}(\alpha+1)$, the quantity in braces becomes $\frac{1}{4}(1-\alpha^2)\,f_m(t)$, where $f_m(t)=1/(m+t+c)\,(m+t+c+1)\,(m+t+1)\,(m+t+\alpha+1)$, and $(-1)\,\sigma'(t)=\frac{1}{4}\alpha(1-\alpha^2)\sum\limits_{m=0}^{\infty}f_m(t)$. Since $\alpha>-1$, $\operatorname{sgn} f_m^{(n)}(t)=(-1)^n$ for $n, m\geqq 0$, $t>0$. Hence (3) is satisfied for $\alpha(1-\alpha^2)>0$ and (4) is satisfied for $\alpha(1-\alpha^2)<0$.

Thus far we have shown that Theorems 3, 4, and 6 are true for $a=b=c$. To complete the proofs, consider that of Theorem 3. From Theorem 1, for $-1<\alpha<0$, $\Gamma_c^\alpha$ *t.s.* $\Gamma_a^\alpha$ for $0<a<c$. Since t.s. is a transitive relation, Theorem 3 is now complete. Theorems 4 and 6 are completed in a similar manner.

To prove Theorem 2, repeat the above argument with a in (2) replaced by $\alpha+1$.

Theorem 5 is merely a restatement of Theorem 1, since $H^1$ and $C^1$ are identical. Theorem 5 is a known result. Observing that $\Gamma_\alpha^1=(H, a, 1, a+1)$, where $(H, \alpha, \beta, \gamma)$ denotes the hypergeometric summability method (see [3]), Theorem 5 merely combines relations (iii) and (iv) of [3], p. 228.

To show that the converses of Theorems 2 to 6 do not hold, use [2], p. 452.

The next five theorems are negative results, obtained in attempts to further compare the $\Gamma_c^\alpha$, $C^\alpha$, and $H^\alpha$ methods for $c>0$. They are listed here in succession for easy reference.

THEOREM 7. *Let* $-1<\alpha<0$, $\frac{1}{2}(\alpha+1)<a<1$. *Then* $C^\alpha$ *n.t.s.* $\Gamma_a^\alpha$.

THEOREM 8. *Let* $0<\alpha<1$, $2a>\alpha+1$. *Then* $\Gamma_a^\alpha$ *n.t.s.* $C^\alpha$.

THEOREM 9. *Let* $0<\alpha<\beta\leqq 1$, $0<a<1$. *Then* $C^\beta$ *n.t.s.* $\Gamma_a^\alpha$.

THEOREM 10. *Let* $1\leqq\alpha<\beta$, $b>1$. *Then* $\Gamma_b^\beta$ *n.t.s.* $C^\alpha$.

THEOREM 11. *For* $1\leqq b<(\alpha+1)/2$, $C^\alpha$ *n.t.s.* $\Gamma_b^\alpha$.

Theorems 7, 8, and 11 are proved similarly, so I shall group their proofs together.

Using (2),

$$(-1)\,\sigma'(t)=\alpha\sum_{m=0}^{\infty}\{[(m+t+a)\,(m+t+a+1)]^{-1}-$$
$$-[(m+t+1)\,(m+t+\alpha+1)]^{-1}\}.$$

Let

$$f(m, t, a, \alpha)=(m+t+1)\,(m+t+\alpha+1)-(m+t+a)\,(m+t+a+1)$$
$$=(\alpha+1-2a)\,(m+t)+\alpha+1-a(a+1).$$

Proof of Theorems 7 and 8. Since $2a>1+\alpha$, it is true that $f(m, t, a, \alpha)<0$ for $m+t$ sufficiently large.

Proof of Theorem 11. Replace $a$ by $b$. Since $2b<\alpha+1$, $f(m, t, b, \alpha)>0$ for $t$ sufficiently large, $m=0, 1, 2, \ldots$.

The technique used in the remaining two theorems will be to show that there exists an integer $k>0$ for which $(-1)^k\mu^{(k)}(t)<0$ for the moment function $\mu(t)$ under consideration. This will be accomplished by examining the coefficient of $t^k$ in an infinite series expansion for $t$ which is valid for some subset of $0<t<1$, and taking advantage of the fact that the sign of the $k$th derivative of $\mu(t)$ is determined by the sign of the coefficient of $t^k$ for sufficiently small values of $t$.

Proof of Theorem 9. It is sufficient to consider the case for $\beta=1$. Let $\mu(t)=(t+a)^\alpha/a^\alpha(t+1)$. Then

$$\mu(t)=(1-t+t^2-t^3+\cdots)\left(1+\frac{\alpha t}{a}-\frac{\alpha(1-\alpha)t^2}{2!\,a^2}+\cdots\right),$$

and the coefficient of $t^k$ in the power series for $\mu(t)$ is

$$(-1)^k\left[1-\sum_{r=1}^{k}\frac{\alpha(1-\alpha)\ldots(r-1-\alpha)}{a^r r!}\right].$$

But the above series is a part of the series $\sum_{r=1}^{\infty} \alpha(1-\alpha)\dots(r-1-\alpha)a^{-r}(r!)^{-1}$, which is divergent since $0<a<1$. Therefore, the coefficient of $t^k$ is negative for $k$ sufficiently large, and $\mu(t)$ is not totally monotone.

Proof of Theorem 10.

Case I. I shall first show that $\Gamma_b^\beta$ *n.t.s.* $C^1$, for $\beta>1$, $b>1$. Let $\mu_n=(n+1)\,b^\beta/(n+b)^\beta$. Let

$$\mu(t) = (t+1)\,b^\beta/(t+b)^\beta = (t+1)\,(1+t/b)^{-\beta}$$
$$= (t+1)\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{k!\,b^k}\,t^k\right], \qquad 0<t<b.$$

The coefficient of $t^k$ for $k>1$ is

$$(-1)^k\left\{\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{k!\,b^k} - \frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-2)}{(k-1)!\,b^{k-1}}\right\}$$
$$= (-1)^k\,\frac{\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-2)}{k!\,b^k}\,\vartheta_k(\beta),$$

where $\vartheta_k(\beta)=\beta+k-1-kb=k(1-b)+\beta-1$. Since $b>1$, $\beta>1$, $\vartheta_k(\beta)<0$ for $k$ sufficiently large. Therefore $\mu(t)$ is not totally monotone.

Case II. Let $1<\alpha<\beta$, $b>1$, and assume that $\Gamma_b^\beta$ *t.s.* $C^\alpha$. Since $C^\alpha$ *t.s.* $C^1$, we have $\Gamma_b^\beta$ *t.s.* $C^1$, contradicting Case I.

Note that Theorem B 2(i) can be proved directly from Theorems 1 and 2.

Proof of B 2(i). Let $0<1+\alpha\leqq a<1$, $b=1$ in Theorem 1. Then $H^\alpha$ *t.s.* $\Gamma_a^\alpha$. From Theorem 2, $\Gamma_a^\alpha$ *t.s.* $C^\alpha$. Therefore $H^\alpha$ *t.s.* $C^\alpha$.

Below is listed a table of results obtained by combining the results of Theorems 1 to 6 with B 2(i) to (iii). Let $0<a<1$, $b>1$.

For $-1<\alpha<0$, $0<a<\frac{1}{2}(\alpha+1)<\alpha+1\leqq a'<1$, $b>1$, $\Gamma_b^\alpha$ *t.s.* $H^\alpha$ *t.s.* $\Gamma_{a'}^\alpha$ *t.s.* $C^\alpha$ *t.s.* $\Gamma_a^\alpha$, but not conversely.

For $0<\alpha<1$, $0<a\leqq\frac{1}{2}(\alpha+1)<1$, $\Gamma_a^\alpha$ *t.s.* $C^\alpha$ *t.s.* $H^\alpha$ *t.s.* $\Gamma_b^\alpha$, but not conversely.

For $\alpha=1$, $\Gamma_a^1$ *t.s.* $C^1=H^1$ *t.s.* $\Gamma_b^1$, but not conversely.

For $\alpha>1$, $0<a<1$, $2b\geqq\alpha+1$, $\Gamma_a^\alpha$ *t.s.* $H^\alpha$ *t.s.* $C^\alpha$ *t.s.* $\Gamma_b^\alpha$, but not conversely.

I wish to express my thanks to Dr. B. KUTTNER of the University of Birmingham, England, and to Dr. A. WILANSKY of Lehigh University for their helpful suggestions in the preparation of this manuscript.

## References

[1] AHLFORS, L. V.: Complex Analysis. New York 1953. — [2] BASU, S. K.: On the total relative strength of the Hölder and Cesàro methods. Proc. London Math. Soc. (2) **50**, 447–462 (1949). — [3] BASU, S. K.: On hypergeometric summability involving infinite limits. Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 226–238 (1954). — [4] BASU, S. K.: On comparison of the total strength of some Hausdorff methods. Math. Z. **67**, 303–309 (1957).

*Dept. of Math., Lafayette College, Easton, Pennsylvania (USA)*

*(Eingegangen am 9. Juni 1959)*