SALZMANN, H.
Math. Zeitschr. Bd. 67, S. 436—466 (1957)

Topologische projektive Ebenen

Von
HELMUT SALZMANN

Einleitung

Unter einer topologischen projektiven Ebene verstehen wir eine projektive Ebene, deren Punkt- und Geradenmenge topologische Räume sind derart, daß Verbinden und Schneiden stetige Operationen sind. Solche Ebenen haben eine Reihe überraschender topologischer Eigenschaften; z.B. sind die zugehörigen topologischen Räume regulär. Darüber hinaus können wir in Beantwortung einer von FREUDENTHAL [**1956**] gestellten Frage zeigen, daß eine lokalkompakte projektive Ebene das zweite Abzählbarkeitsaxiom erfüllt. Die Geraden wie auch die punktierten Geraden einer zusammenhängenden lokalkompakten Ebene erweisen sich als kurvenweise zusammenhängend und lokal kurvenweise zusammenhängend.

Soweit gelten die Sätze in einer beliebigen topologischen projektiven Ebene, ohne daß irgendwelche Schließungssätze vorausgesetzt werden. Unter der Voraussetzung gewisser einfacher Schließungssätze läßt sich für die Topologie der Ebene noch mehr folgern: Gilt der desarguessche Satz für eine feste Achse und ein festes nicht auf ihr gelegenes Zentrum, so ist eine lokalkompakte projektive Ebene sogar kompakt. Dasselbe gilt übrigens auch, wenn die Topologie durch eine Anordnung der Ebene hervorgerufen wird. (SKORNJAKOV hatte früher [**1954**] bewiesen, daß man in einer zusammenhängenden projektiven Ebene von der lokalen Kompaktheit auf die Kompaktheit der ganzen Ebene schließen kann.) Ist für ein Parallelgewebe in der Ebene die Thomson-Bedingung erfüllt (das bedeutet, daß die zu dem Gewebe gehörige Loop eine kommutative Gruppe ist), so sind die Geraden der Ebene homöomorph zu einer Sphäre; insbesondere hat die Ebene dann eine endliche topologische Dimension. Nebenbei ergibt sich bei dem Beweis, daß in einer zusammenhängenden kompakten Ebene nicht jedes vollständige Viereck kollineare Diagonalpunkte haben kann.

Der letzte Teil der Arbeit widmet sich den projektiven Ebenen, die zur gewöhnlichen reellen Ebene homöomorph sind. Wir zeigen zunächst, daß in einer solchen Ebene auch die Geraden homöomorph zur reellen Geraden sind. Man wird nicht erwarten können, daß die topologische Voraussetzung der Homöomorphie zur reellen Ebene allein die allgemeine Gültigkeit irgendeines Schließungssatzes zur Folge hat. Tatsächlich erweist es sich, wie in einer späteren Arbeit gezeigt werden soll, daß in der [**1902**] von MOULTON konstruierten nichtdesarguesschen Ebene mit der gewöhnlichen reellen Topologie kein Schließungssatz allgemein gültig ist. Jedoch bestehen in einer zur reellen Ebene homöomorphen projektiven Ebene viel engere Beziehungen zwischen Schließungssätzen, als ohne die topologische Voraussetzung. So ist etwa eine solche Ebene, in welcher der desarguessche Satz für eine feste Achse und jedes auf ihr gelegene Zentrum gilt (Translationsebene), sogar gleich der reellen Ebene. Erstaunlich ist neben diesem Resultat die Existenz einer projektiven Ebene mit der Topologie der reellen Ebene, in welcher der desarguessche Satz genau für die drei Ecken eines festen Dreiecks als Zentren und die Gegenseiten als zugehörigen Achsen gilt. Als Koordinatenbereich hat diese Ebene einen (echten, planaren, kommutativen) Neokörper mit kürzbarer Addition, womit die von PICKERT [**1956**] aufgeworfene Frage nach der Existenz solcher Neokörper beantwortet ist.

In einem angehängten Paragraphen wird die Frage, ob ein topologischer Ternärkörper Koordinatenbereich einer topologischen projektiven Ebene ist, für Alternativkörper bejahend beantwortet.

Den Herren R. BAER und G. PICKERT fühle ich mich für ihre vielen und wertvollen Anregungen zu großem Dank verpflichtet.

§ 1. Definitionen

Eine projektive Ebene besteht aus zwei Mengen von Dingen, die Punkte und Geraden genannt werden, und einer als Enthaltensein bezeichneten Relation zwischen Punkten und Geraden, die den folgenden drei Bedingungen genügt:

(I) Zu zwei verschiedenen Punkten p, q gibt es genau eine Gerade $G = p \cup q$, in der die beiden Punkte enthalten sind, $p \in G$ und $q \in G$. G heißt die Verbindungsgerade von p und q.

(II) Dual dazu gibt es zu zwei verschiedenen Geraden G, H genau einen „Schnittpunkt" $p = G \cap H$, der in beiden Geraden enthalten ist, $p \in G$ und $p \in H$.

(III) Es gibt vier verschiedene Punkte, von denen keine drei in ein und derselben Geraden enthalten sind.

Statt „p ist in der Geraden G enthalten" sagt man auch: p liegt auf G, G geht durch p, der Punkt p gehört der Geraden G an, G enthält p. Man kann eine Gerade G mit der Menge der in ihr enthaltenen Punkte identifizieren. Bei dieser Auffassung ist also jede Gerade eine Teilmenge der Gesamtheit P aller Punkte. $\mathfrak{G}$ sei die Menge aller Geraden[1]). Eine Menge P wird zu einem topologischen Raum, wenn man gewisse Teilmengen von P als offene Mengen auszeichnet, derart, daß jede Vereinigung von offenen Mengen wieder offen ist (auch die leere Menge $\emptyset$ als „leere Vereinigung") und ebenso jeder Durchschnitt von endlich vielen offenen Mengen (darunter auch der ganze Raum P als „leerer Durchschnitt"). Die Komplemente offener Mengen heißen abgeschlossen. Umgebung eines Punktes p heißt jede Menge V, die eine offene Menge O enthält, welcher der Punkt p noch angehört. $\mathfrak{V}(p)$ sei die Gesamtheit der Umgebungen von p. Eine Untermenge A eines topologischen

[1]) Die Bezeichnungen, die sich auf projektive Ebenen beziehen, lehnen sich an PICKERT [**1955**] an, die topologischen Bezeichnungen an BOURBAKI [**1951**].

Raumes P wird in natürlicher Weise zu einem topologischen Raum, wenn man die Spuren der offenen Mengen von P auf A als offene Mengen von A nimmt. Die Produktmenge zweier topologischer Räume wird mit den Produkten offener Mengen und deren Vereinigungen als offenen Mengen ein topologischer Raum. Eine Abbildung eines topologischen Raumes in einen anderen heißt stetig, wenn das volle Urbild jeder offenen Menge des Bildraumes eine offene Menge des Urbildraumes ist. Sind bei einer projektiven Ebene der Raum P der Punkte und der Raum $\mathfrak{G}$ der Geraden topologische Räume, so ist damit erklärt, was es heißt, die Bildung der Verbindungsgeraden (also die Abbildung des Raumes der Paare verschiedener Punkte auf ihre Verbindungsgeraden) sei stetig, und dual auch die Stetigkeit der Bildung des Schnittpunktes. Eine projektive Ebene soll topologisch heißen, wenn die Bildung von Verbindungsgerader und Schnittpunkt in diesem Sinne stetig ist und es nicht leere, echte, offene Teilmengen von P gibt, aber nicht alle Teilmengen von P offen sind. Die letzte Festsetzung dient nur zur Vermeidung unbequemer Sonderfälle. Ist G eine Gerade und p ein nicht auf ihr gelegener Punkt, so bezeichne $G \simeq p$ die „perspektive" Abbildung $x \to x \cup p$ der Menge der Punkte auf G auf die Menge der Geraden durch p. Die durch Hintereinander-Ausführung von Perspektivitäten entstehenden Selbstabbildungen einer Geraden heißen Projektivitäten. Sie bilden bekanntlich eine dreifach transitive Gruppe auf der Geraden. In einer topologischen Ebene ist jede Perspektivität und damit auch jede Projektivität ein Homöomorphismus.

§ 2. Koordinaten und topologische Ternärkörper

Wählt man vier Punkte $0, e, u, v$ mit der in (III) genannten Eigenschaft und nimmt man die Gerade $u \cup v$ und alle auf ihr liegenden Punkte aus der projektiven Ebene heraus, so erhält man eine affine Ebene. Zwei Geraden der affinen Ebene, die entweder zusammenfallen oder sich nicht schneiden, heißen parallel. Durch die Festsetzung

$$(*) \qquad \begin{cases} x_p = \big(((p \cup v) \cap (0 \cup e)) \cup u\big) \cap (0 \cup v) \\ y_p = (p \cup u) \cap (0 \cup v) \end{cases}$$

werden die Punkte p der affinen Ebene umkehrbar eindeutig den Paaren (x_p, y_p) von „Koordinaten", d.h. Elementen der Menge T der von v verschiedenen Punkte auf $0 \cup v$ zugeordnet. y_e wird mit 1 bezeichnet. Als $\tau(s, x, t)$ erklärt man dasjenige Element y, für welches (x, y) auf der Parallelen zu $(0, 0) \cup (1, s)$ durch $(0, t)$ liegt. T wird zusammen mit der ternären Verknüpfung τ zu einer als Ternärkörper bezeichneten algebraischen Struktur, in der sich alle geometrischen Beziehungen wiederfinden. Die Übersetzung der Eigenschaften (I), (II) liefert für den Ternärkörper:

(1) Zu s, x, y gibt es genau ein t mit $y = \tau(s, x, t)$.

(2) Zu $x_1 \neq x_2$ und y_1, y_2 gibt es genau ein Paar s, t mit $y_i = \tau(s, x_i, t)$ für $i = 1, 2$.

(3) Zu $s_1 \neq s_2$ und t_1, t_2 gibt es genau ein x mit $\tau(s_1, x, t_1) = \tau(s_2, x, t_2)$.

In einem Ternärkörper führt man die beiden folgenden, als Addition und Multiplikation bezeichneten binären Verknüpfungen ein:

$$x + t = \tau(1, x, t), \qquad s x = \tau(s, x, 0).$$

Die Menge T bildet zusammen mit der Addition eine Loop mit dem neutralen Element 0, die Menge $T^{\times} = T - 0$ zusammen mit der Multiplikation eine Loop mit dem neutralen Element 1. [In einer desarguesschen projektiven Ebene gilt $\tau(s, x, t) = s x + t$ und T ist zusammen mit der Addition und Multiplikation ein Schiefkörper.]

Liegt eine topologische projektive Ebene vor, so wird die affine Ebene durch die Darstellung (*) topologisches Produkt der affinen Geraden T mit sich selbst (Skornjakov [**1954**], Salzmann [**1955**]). (T, τ) wird ein topologischer Ternärkörper, das soll heißen, $\tau(s, x, t)$ hängt stetig von allen drei Veränderlichen (gleichzeitig) ab und jede der in (1), (2), (3) geforderten Umkehrungen ist stetig in allen übrigen Veränderlichen. Umgekehrt ist es aber nicht gelungen allgemein zu beweisen, daß ein topologischer Ternärkörper wieder zu einer topologischen projektiven Ebene führt. In einem topologischen Ternärkörper T bildet T zusammen mit der Addition eine topologische Loop, d.h. die Addition sowie ihre rechte und linke Umkehrung sind stetige Funktionen. Die Abbildung $x \to \tau(s, x, t)$ stellt für $s \neq 0$ einen Homöomorphismus von T dar; denn $\tau(s, x, t) = \tau(0, x, y) = y$ ist bei festem s, t $(s \neq 0)$ stetig nach x auflösbar. Die Menge dieser Abbildungen ist nach (2) wegen $\tau(0, x, t) = t$ zweifach transitiv auf T.

Ein Ternärkörper einer topologischen projektiven Ebene ist ein regulärer topologischer Raum. Hieraus folgt, daß auch jede projektive Ebene als topologischer Raum regulär ist (Skornjakov [**1954**], Salzmann [**1955**]).

§ 3. Abzählbarkeitseigenschaften in lokalkompakten projektiven Ebenen und Ternärkörpern

Ein topologischer Raum heißt kompakt, wenn sich aus jeder Überdeckung mit offenen Mengen eine Überdeckung mit endlich vielen dieser offenen Mengen auswählen läßt; er heißt lokalkompakt, wenn es zu jedem Punkt eine Umgebung gibt, die als Unterraum des Gesamtraumes kompakt ist. Man sagt, ein topologischer Raum habe eine abzählbare Basis (oder: er erfülle das zweite Abzählbarkeitsaxiom), wenn es abzählbar viele offene Mengen gibt, so daß sich jede offene Menge als Vereinigung von einigen dieser offenen Mengen darstellen läßt; man sagt, er sei lokal von abzählbarer Basis, wenn es zu jedem Punkt abzählbar viele Umgebungen V_n gibt, so daß jede Umgebung des Punktes eine Umgebung V_n enthält. In diesem Abschnitt wird gezeigt:

Jede lokalkompakte projektive Ebene ist von abzählbarer Basis.

Dazu beweist man zuerst:

Ein lokalkompakter Ternärkörper ist lokal von abzählbarer Basis.

Um das einzusehen, beachtet man zunächst, daß der Ternärkörper als nicht diskret vorausgesetzt war, also nicht alle Punkte offene Mengen sind, und wegen der Homogenität sogar kein Punkt offen ist. Berücksichtigt man noch (T_1) und die Tatsache, daß der Durchschnitt endlich vieler Umgebungen wieder eine Umgebung ist, so folgt, daß jede Umgebung unendlich viele Elemente enthält. Man betrachtet nun eine kompakte Umgebung irgendeines Punktes und in ihr eine Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ verschiedener Punkte a_n. Diese Folge muß auf Grund der Kompaktheit der sie enthaltenden Menge einen Häufungspunkt haben, d.h. einen solchen Punkt a, daß jede Umgebung von a wenigstens ein a_n enthält. Durch Anwendung eines Homöomorphismus kann man sich a in 0 überführt denken, so daß man also eine Folge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ finden kann, die 0 zum Häufungspunkt hat. Wählt man noch eine kompakte Umgebung W von 0, so bilden die $V_n = a_n W$ die geforderte abzählbare Umgebungsbasis von 0; denn sei V irgendeine Umgebung von 0, w ein Punkt aus W. Dann gibt es wegen $0w = 0$ eine Umgebung V_w von 0 und eine Umgebung W_w von w mit $V_w W_w \subseteqq V$. Jetzt kann man W mit endlich vielen $W_{w_1}, \ldots, W_{w_k}$ der W_w überdecken. Für $V_0 = V_{w_1} \cap \cdots \cap V_{w_k}$ gilt $V_0 W \subseteqq V$. Nun enthält aber V_0 ein a_n, so daß also insbesondere V_n in V enthalten ist. Infolge der Homogenität von T überträgt sich die abzählbare Umgebungsbasis auch auf jeden anderen Punkt x von T.

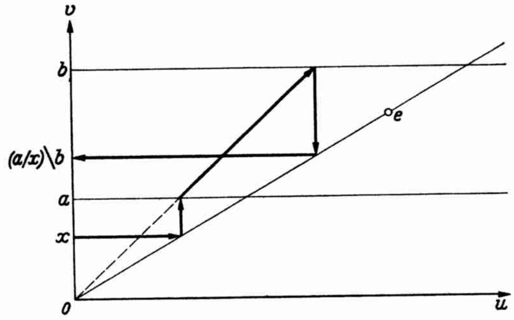
Ist der Ternärkörper einer topologischen projektiven Ebene lokalkompakt, so ist auch die projektive Ebene lokalkompakt; denn die affine Ebene ist es als Produkt eines lokalkompakten Raumes mit sich selbst, und dann ist es wegen der Abgeschlossenheit der Geraden auch die projektive Ebene.

Ein Ternärkörper einer lokalkompakten projektiven Ebene ist σ-kompakt.

Das bedeutet, er ist Vereinigung von höchstens abzählbar vielen kompakten Mengen. Beim Beweis wird wesentlich von der Einbettung des Ternärkörpers in eine topologische projektive Ebene Gebrauch gemacht. Aus einer sich gegen 0 häufenden Folge von Elementen $\neq 0$ werde eine gegen 0 konvergente Teilfolge $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ausgewählt, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Das ist möglich, da der Raum lokal von abzählbarer Basis ist. Ferner sei a ein von 0 verschiedenes Element. Nach der multiplikativen Loopeigenschaft von $T^{\times}$ bestimmt man s_n mit $s_n a_n = a$. Wählt man nun noch eine kompakte Umgebung W von 0, so ist jedes Element b von T in einem $s_n W$ enthalten, d.h. aber nichts anderes als $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} s_n W$, und jedes $s_n W$ ist homöomorph zu W, also kompakt. Schreibt man nämlich für $xy = z$ auch $x = z/y$ oder $y = x\backslash z$ und setzt man $b = s_n b_n$, wobei man sich auf $b \neq 0$ beschränken kann, so ist $b_n = (a/a_n)\backslash b$ und es bleibt noch zu zeigen, daß mit a_n auch die b_n gegen 0 konvergieren, also schließlich in W liegen. Hierzu muß man auf die geometrische Definition der Multiplikation zurückgehen. Die Abbildung $x \to (a/x)\backslash b$ wird für $a \neq 0$, $b \neq 0$ durch eine Projektivität der Geraden $0 \cup v$ gegeben, und zwar bildet man $0 \cup v$ perspektiv auf das Geradenbüschel in u ab, $0 \cup v \simeq u$ und weiter

$$u \simeq 0 \cup e \simeq v \simeq a \cup u \simeq 0 \simeq b \cup u \simeq v \simeq 0 \cup e \simeq u \simeq 0 \cup v.$$

Sie stellt also einen Homöomorphismus von $0 \cup v$ dar. Dabei geht, wie man nachrechnet, 0 in sich über, also jede gegen 0 konvergente Folge wieder in eine solche.



Aus den beiden eben bewiesenen Sätzen folgt:

Eine lokalkompakte projektive Ebene ist lokal von abzählbarer Basis und σ-kompakt.

Denn beide Eigenschaften übertragen sich von den Faktoren auf das Produkt zweier topologischer Räume, also von dem Ternärkörper auf die affine Ebene. Die abzählbare Umgebungsbasis ist dann natürlich auch in der projektiven Ebene vorhanden. Ferner ist die projektive Gerade σ-kompakt, also auch die projektive Ebene als Vereinigung zweier σ-kompakter Räume, nämlich der affinen Ebene und der ,,uneigentlichen" Geraden $u \cup v$.

Jetzt wird die Existenz einer abzählbaren Basis gezeigt. Der Beweis wird zuerst für eine kompakte Teilmenge K eines zu der Ebene gehörigen Ternärkörpers T geführt. Er beruht auf den folgenden Gedanken: Bei einem kompakten Raum K erzeugen die Umgebungen der Diagonale D von $K \times K$ [die offenen Mengen von $K \times K$, welche die Menge D der Paare $x \times x$ $(x \in K)$ enthalten] eine uniforme Struktur, und zwar die einzige, welche mit der Topologie von K verträglich ist (BOURBAKI [**1951**], Top. gén. II § 4, Th. 1).

Diese Umgebungen von D sollen als ,,Bänder" bezeichnet werden. Gibt es nun eine abzählbare Basis für den Filter der Bänder und gilt außerdem für den topologischen Raum die Lindelöfsche Überdeckungseigenschaft, die besagt, daß sich aus jeder Überdeckung mit offenen Mengen abzählbar viele dieser offenen Mengen auswählen lassen, die den Raum auch schon überdecken, so hat der Raum eine abzählbare Basis. Es wird sich nun zeigen, daß man die Bänder der uniformen Struktur von K auf die folgende Weise erhalten kann: Man nimmt die Menge aller Punkte, die auf irgendeiner von den Geraden liegen, die zu einer Umgebung der Geraden $0 \cup e$ (in der Topologie des Raumes $\mathfrak{G}$ aller Geraden) gehören und schränkt diese Menge auf $K \times K$ ein. Nun zeigt man zunächst, daß zugleich mit P auch der Raum $\mathfrak{G}$ lokal von abzählbarer Basis ist. Damit hat man dann eine abzählbare Basis für den Bandfilter der uniformen Struktur von K gefunden. Die Lindelöfsche Überdeckungseigenschaft ergibt sich als Abschwächung der Kompaktheit von K. Mit Hilfe der σ-Kompaktheit von T kann man dann eine abzählbare Basis für T angeben. Die Konstruktion einer solchen für P macht hierauf keine Schwierigkeiten mehr.

Durchführung des Beweises. Es werde der Schluß vorweggenommen, daß aus dem Vorhandensein einer abzählbaren Basis für den Bandfilter und der Lindelöfschen Überdeckungseigenschaft die Existenz einer abzählbaren Basis folgt. Nach den definierenden Eigenschaften einer uniformen Struktur von K kann man bei Vorhandensein einer abzählbaren Basis für den Filter der Bänder induktiv eine Folge $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ von Bändern angeben, die den folgenden Bedingungen genügen: Die B_i bilden eine Basis für die uniforme Struktur, jedes B_i ist eine offene Menge in $K \times K$, $B_{i+1}^2 \subseteqq B_i = B_i^{-1}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Dabei bedeutet B^{-1} die Menge der Paare $y \times x$ mit $x \times y \in B$ und B^2 die Menge der Paare $x \times z$, für die es ein y gibt mit $x \times y \in B$ und $y \times z \in B$. Ferner werde mit $V(x, B)$ die Menge der y bezeichnet, für die $x \times y \in B$. Die $V(x, B_i)$ bilden dann eine Umgebungsbasis für den Punkt x. Läßt man x alle Punkte des Raumes K durchlaufen, so erhält man eine Basis für das System der offenen Mengen von K.

Hieraus muß nun eine passende abzählbare Teilmenge ausgesucht werden, die auch noch eine Basis für die offenen Mengen bildet. Nach der Lindelöfschen Überdeckungseigenschaft kann man K für jedes feste i mit abzählbar vielen $V(x_{ik}, B_{i+1})$ überdecken. Wenn man jetzt zeigen kann, daß jedes $V(x, B_i)$ ein $V(x_{ik}, B_{i+1})$ enthält, das seinerseits noch Umgebung von x ist, dann ist damit bewiesen, daß die Gesamtheit der $V(x_{ik}, B_{i+1})$ $(i, k = 1, 2, \ldots)$ eine abzählbare Basis der gewünschten Art ist. Da nun die $V(x_{ik}, B_{i+1})$ den ganzen Raum überdecken, gibt es ein x_{ik} mit $x \in V(x_{ik}, B_{i+1})$, d.h. $x_{ik} \times x \in B_{i+1}$ oder $x \times x_{ik} \in B_{i+1}$. Gilt jetzt noch $x_{ik} \times y \in B_{i+1}$, also $y \in V(x_{ik}, B_{i+1})$, so folgt $x \times y \in B_i$, $y \in V(x, B_i)$, und daher $x \in V(x_{ik}, B_{i+1}) \subseteqq V(x, B_i)$.

Um nun zu zeigen, daß die Bänder von K in der angegebenen Weise erhalten werden können, geht man so vor: Es sei $B(M, N)$ die Menge der Paare $x \times y \in K \times K$ mit $y \in \tau(M, x, N)$, wo $\tau(M, X, N)$ entsprechend der Komplexmultiplikation in der Gruppentheorie zu verstehen ist. Läßt man jetzt M eine abzählbare Basis von Umgebungen der 1 in der Topologie von T durchlaufen und N eine abzählbare Basis von Umgebuugen der 0 (man kann sich hierbei auf offene Mengen M, N beschränken), so erhält man in der Gesamtheit der $B(M, N)$ eine abzählbare Basis für den Filter der Bänder von K. Dazu muß man nur noch nachweisen, daß die $B(M, N)$ den Bandfilter erzeugen, der zu der Topologie von K gehört. Zum Nachweis der Bandfiltereigenschaft ist nur zu zeigen, daß es zu gegebenem M, N Mengen M', N' mit $B^{-1}(M', N') \circ B(M', N') \subseteqq B(M, N)$ gibt. B^{-1} ist wie vorher erklärt, $B \circ C$ ist das relationstheoretische Produkt von B und C, also die Menge der $x \times z$, für die es ein y gibt mit $x \times y \in B$ und $y \times z \in C$. Sind M, N offene Mengen von T, so ist $B(M, N)$ eine offene Menge von $K \times K$, wie sich folgendermaßen ergibt: Die Menge der Geraden der Form $y = \tau(m, x, n)$ mit $m \in M$, $n \in N$ bildet eine offene Umgebung $\mathfrak{S}$ von $0 \smile e$. Betrachtet man eine solche Gerade als Verbindungsgerade von (x, y) mit einem zweiten Punkt $(x', \tau(m, x', n))$ auf ihr, so folgt aus den Stetigkeitsforderungen, daß es eine Umgebung V von (x, y) und eine Umgebung V' des zweiten Punktes so gibt, daß die Verbindungsgerade eines Punktes aus V mit einem Punkt aus V' stets zu $\mathfrak{S}$ gehört. Dann liegt V in der Vereinigung $[\mathfrak{S}]$ aller als Punktmengen aufgefaßten Geraden S aus $\mathfrak{S}$, d.h. $[\mathfrak{S}]$ ist offen, $B(M, N) = [\mathfrak{S}] \cap K \times K$. Für $x \in K$ ist $x \times \tau(1, x, 0) = x \times x \in B(M, N)$. Wegen der Stetigkeit von τ gibt es offene Umgebungen M_x, N_x, O_x von $1, 0, x$, so daß

$$\tau(M_x, O_x, N_x) \times \tau(M_x, O_x, N_x) \cap K \times K \subseteqq B(M, N).$$

Man kann die kompakte Menge K mit endlich vielen $O_{x_1}, \ldots, O_{x_n}$ der O_x überdecken. Setzt man $M' = \bigcap\limits_{i=1}^{n} M_{x_i}$, $N' = \bigcap\limits_{i=1}^{n} N_{x_i}$, so ist

$$B^{-1}(M', N') \circ B(M', N') = \bigcup_{x \in K} \tau(M', x, N') \times \tau(M', x, N') \cap K \times K,$$

also wirklich in $B(M, N)$ enthalten. Für offene M, N bilden daher die $B(M, N)$ eine Basis von offenen Bändern, erzeugen also auf K eine Topologie, die höchstens gröber ist, als die auf K vorgegebene. Nun ist aber der Durchschnitt der $B(M, N)$, wenn man M, N das System der Umgebungen von $1, 0$ durchlaufen läßt, nichts anderes als die Diagonale D von K (wegen der Stetigkeit von τ). Daher ist die von den $B(M, N)$ erzeugte Topologie regulär. Nun kann eine kompakte Topologie nicht echt feiner sein, als irgendeine andere reguläre Topologie auf demselben Raum; denn ist E' ein Hausdorff-Raum, E dieselbe Punktmenge mit einer kompakten Topologie, die feiner oder gleich der von E' ist, dann ist die identische Abbildung von E auf E' stetig, führt also die abgeschlossenen Mengen von E, die ja in E kompakt sind, in kompakte Mengen von E' über, und kompakte Mengen eines Hausdorff-Raumes sind wieder abgeschlossen: Die Topologie von E' ist auch feiner oder gleich der von E, d.h. die beiden Topologien sind gleich. Also muß die von den $B(M, N)$ erzeugte Topologie mit der gegebenen auf K übereinstimmen.

Hiermit ist bewiesen: Jede kompakte Teilmenge K von T hat eine abzählbare Basis für die Topologie. Nun stellt man, was nach dem Beweis für die σ-Kompaktheit von T möglich ist, T dar als Vereinigung von abzählbar vielen offenen Mengen Q_n, so daß jedes Q_n in einer kompakten Menge enthalten ist. Dann hat jedes Q_n eine abzählbare Basis. Nimmt man alle diese zusammen, so erhält man eine abzählbare Basis von T. Mit T hat auch $T \times T$ und damit jede affine Ebene eine abzählbare Basis. Überdeckt man jetzt P mit drei offenen Mengen, von denen jede eine ganze Gerade nicht enthält, und nimmt man die abzählbaren Basen für diese offenen Mengen zusammen, so erhält man schließlich auch die abzählbare Basis für P.

§ 4. Kompaktheit der projektiven Ebene

Die reelle affine Ebene ist lokalkompakt, die reelle projektive Ebene ist sogar kompakt. Das legt die Frage nahe, ob oder unter welchen Voraussetzungen aus der lokalen Kompaktheit einer topologischen projektiven Ebene ihre Kompaktheit folgt. Ein erstes Ergebnis in dieser Richtung, das wegen seiner schlechten Zugänglichkeit hier mit Beweis wiedergegeben werden soll, stammt von Skornjakov [**1954**]:

Eine topologische projektive Ebene, deren Geraden kompakt sind, ist selbst kompakt.

Damit ist die gestellte Frage darauf zurückgeführt, wann die Geraden einer lokalkompakten Ebene kompakt sind; denn sind die Geraden kompakt, so ist die Ebene lokalkompakt, und ist die projektive Ebene kompakt, so auch die projektiven Geraden als abgeschlossene Punktmengen in der Ebene. Der Hauptschritt des Beweises ist nun der folgende: Sind die Geraden einer projektiven Ebene kompakt und ist $\mathfrak{L}$ eine kompakte Menge im Raum $\mathfrak{G}$ aller Geraden, so daß die Menge $[\mathfrak{L}]$ der Punkte, die auf irgendeiner Geraden aus $\mathfrak{L}$ liegen (d.h. die Vereinigung aller als Punktmengen aufgefaßten Geraden L aus $\mathfrak{L}$) nicht der ganze Raum P ist, so ist $[\mathfrak{L}]$ kompakt. Um das einzusehen, bedient sich Skornjakov eines Kompaktheitskriteriums, das überabzählbare absteigende Folgen abgeschlossener Mengen verwendet. Wegen der bewiesenen Existenz einer abzählbaren Basis kommt man aber mit abzählbaren Folgen aus und kann das übliche Kriterium benutzen. Um für eine Folge nicht leerer abgeschlossener Mengen $A_n \subseteqq [\mathfrak{L}]$ zu beweisen, daß sie nicht leeren Durchschnitt hat, wählt man einen Punkt p, der nicht in $[\mathfrak{L}]$ liegt und eine nicht durch p gehende Gerade G, und zeigt zunächst, daß jede abgeschlossene Menge $A \subseteqq [\mathfrak{L}]$ bei der Projektion aus p auf G, d.h. der Abbildung $x \rightarrow (x \cup p) \cap G$ von A auf eine Menge B in G, wieder in eine abgeschlossene Menge übergeht. Hierbei geht wesentlich die Kompaktheit von $\mathfrak{L}$ ein, und zwar so: Jedem Punkt x aus B ordnet man irgendeine Gerade L_x aus $\mathfrak{L}$ zu, die durch irgendeinen Urbildpunkt von x hindurchgeht. Diese Auswahl der L_x werde jetzt festgehalten. Häuft sich eine Menge von Punkten x aus B gegen einen Punkt z, der dann natürlich auch auf G liegt, so kann man eine Gerade L aus $\mathfrak{L}$ finden, gegen die sich die entsprechenden L_x häufen, genauer gesagt, eine Gerade L, so daß es in jeder beliebigen Umgebung von L Geraden L_x mit x beliebig nahe bei z gibt. Wäre das nämlich nicht der Fall, so gäbe es zu jeder Geraden L aus $\mathfrak{L}$ eine Umgebung $\mathfrak{S}$ und dazu eine Umgebung V von z, so daß $L_x \notin \mathfrak{S}$ für alle $x \in V \cap B$ gilt. Nun könnte $\mathfrak{L}$ mit endlich vielen der $\mathfrak{S}$ überdeckt werden, und dann wäre der Durchschnitt der entsprechenden endlich vielen V frei von Punkten x aus B im Widerspruch dazu, daß sich die x gegen z häufen. Für die so gefundene Gerade L ist $y = L \cap (p \cup z)$ Häufungspunkt von A; denn in einer beliebigen Umgebung von y findet sich ein Punkt $L_x \cap (p \cup x)$, d.h. ein nach Definition zu A gehöriger Urbildpunkt von x. Da A abgeschlossen war, gehört y zu A. Bei der Projektion geht y in den Punkt z über, der somit zu B gehört, d.h. B ist abgeschlossen. Die A_n gehen also bei der Projektion in eine absteigende Folge nicht leerer abgeschlossener Mengen $B_n \subseteqq G$ über. Da G kompakt ist, haben alle B_n wenigstens einen Punkt q gemeinsam. Die Gerade $H = p \cup q$ hat nun mit allen A_n einen nicht leeren Durchschnitt. Da auch H kompakt ist, muß der Durchschnitt der A_n mit H noch Punkte gemeinsam haben, und damit ist die Behauptung über die Kompaktheit von $[\mathfrak{L}]$ bewiesen. Um jetzt zur Kompaktheit von ganz P zu gelangen, sucht man P zu überdecken mit einer Menge $[\mathfrak{L}]$ der eben betrachteten Art und einer kompakten Umgebung eines nicht zu $[\mathfrak{L}]$ gehörigen Punktes. Das gelingt auf folgende Weise: Es seien p, p_1, p_2 nicht kollineare Punkte. Auf der Geraden $p \cup p_i$ wählt man nun kompakte Mengen U_i, V_i, deren Vereinigung die ganze Gerade $p \cup p_i$ selbst ist, und zwar so, daß $p_i \notin U_i$ und $p \notin V_i$. Dann ist die zu $U_1 \times U_2$ homöomorphe Menge $K = (U_1 \cup p_2) \cap (U_2 \cup p_1)$ kompakt. Ebenso ist die zu $V_1 \times V_2$ homöomorphe Geradenmenge $V_1 \cup V_2$ eine kompakte Menge in $\mathfrak{G}$. Nach dem ersten Beweisschritt ist also $[V_1 \cup V_2]$ kompakt. Wegen $p_i \in V_i$ überdeckt $[V_1 \cup V_2]$ aber $P - K$. Daher ist P als Vereinigung von zwei kompakten Mengen kompakt.

Skornjakov schließt nun irrtümlicherweise, daß man die Geraden einer lokalkompakten topologischen projektiven Ebene durch Projektion einer kompakten Umgebung eines Punktes aus diesem Punkt als Projektionszentrum als stetiges Bild einer kompakten Menge erhalten könne, und daß sie somit selbst kompakt seien. Dabei übersieht er, daß die Projektion im Zentrum selbst nicht erklärt ist und dort auch nicht stetig ergänzt werden kann, und daß die um das Zentrum verminderte Umgebung im allgemeinen nicht mehr kompakt sein wird. Das Versagen seiner Schlußweise zeigt sich schon an der diskreten Ebene, die Skornjakov nicht ausschließt. In ihr ist jeder Punkt eine kompakte Umgebung von sich selbst; also ist sie lokalkompakt. Kompakt ist sie aber nur, wenn sie endlich ist. Weitere Beispiele lokalkompakter, aber nicht kompakter topologischer projektiver Ebenen sind nicht bekannt.

Es gibt nun aber einige, in ihrem Wesen ganz verschiedene, Zusatzvoraussetzungen, unter denen der Schluß von der lokalen Kompaktheit der Ebene auf die „globale" Kompaktheit gezogen werden kann. Die erste ist rein topologischer Art und besagt den Zusammenhang der topologischen Ebene; die zweite setzt die topologische Struktur der Ebene in nähere Beziehung zur geometrischen, und zwar soll die Topologie durch die Anordnung der Ebene hervorgerufen werden; die dritte schließlich ist von rein geometrischer, oder man kann auch sagen, algebraischer Natur, indem sie gewisse Spezialfälle des Schließungssatzes von Desargues fordert, die bei Übersetzung in die Sprache des Ternärkörpers zu bestimmten schwachen Assoziativitätsgesetzen für die Multiplikation führen. Auf alle diese Dinge wird an späteren Stellen eingegangen werden.

§ 5. Zusammenhangsverhältnisse in lokalkompakten Ebenen

Ein topologischer Raum heißt zusammenhängend, wenn er nicht in die Summe zweier nicht leerer offener Mengen zerlegt werden kann. (Dabei soll unter „Summe" die Vereinigung paarweise disjunkter Mengen verstanden werden.) Da das Komplement einer offenen Menge abgeschlossen ist, bedeutet Zusammenhang nichts anderes, als daß es in dem Raum keine zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen gibt außer der leeren Menge und dem ganzen Raum selbst. Unter der zusammenhängenden Komponente eines Punktes x in einem topologischen Raum versteht man die größte, den Punkt x enthaltende zusammenhängende Menge in dem Raum. Sie ergibt sich als Vereinigung aller den Punkt enthaltenden zusammenhängenden Mengen und ist immer vorhanden. Ein Raum, in dem die zusammenhängende Komponente jedes Punktes nur aus dem Punkt selbst besteht, heißt völlig unzusammenhängend. Als den Rand $rd A$ einer Menge A bezeichnet man die Differenz zwischen der kleinsten abgeschlossenen Menge, welche A umfaßt, und der größten offenen Menge, die in A enthalten ist. Genau die zugleich offenen und abgeschlossenen Mengen haben also keinen Rand. Hat ein Punkt eine randlose Umgebung, so muß die Komponente des Punktes in dieser enthalten sein; denn sonst ergäbe sich eine Zerlegung der Komponente in die Summe zweier abgeschlossener Mengen. Der Durchschnitt aller randlosen Umgebungen eines Punktes x heißt die Quasikomponente von x und umfaßt nach dem eben Gesagten die zusammenhängende Komponente von x. Bestehen alle Quasikomponenten in einem Raum nur aus einzelnen Punkten, so heißt der Raum nirgends zusammenhängend. Gibt es sogar zu jedem Punkt beliebig kleine randlose Umgebungen, mit anderen Worten, bilden die randlosen Umgebungen eines Punktes eine Basis für seinen Umgebungsfilter, so heißt der Raum nulldimensional.

Für beliebige topologische projektive Ebenen war früher bewiesen worden (SALZMANN [**1955**]):

Nimmt man aus einer zusammenhängenden projektiven Ebene einen Punkt oder eine ganze Gerade heraus, so ist die verbleibende Punktmenge auch noch zusammenhängend. Die Geraden einer zusammenhängenden projektiven oder affinen Ebene sind zusammenhängend. Ist die projektive Ebene nicht zusammenhängend, so ist sie sogar nirgends zusammenhängend (und mit ihr natürlich auch alle Untermengen).

Für lokalkompakte projektive Ebenen lassen sich diese Aussagen wesentlich einfacher beweisen, als im allgemeinen Fall, und auch noch verschärfen. Die wichtigste Verschärfung ist die, daß eine lokalkompakte zusammenhängende projektive Ebene auch lokalzusammenhängend ist; das bedeutet, daß es zu jedem Punkt beliebig kleine zusammenhängende Umgebungen gibt. Zuerst ergibt sich anknüpfend an den Beweis für die Existenz einer abzählbaren Umgebungsbasis in einem lokalkompakten Ternärkörper:

Ein lokalkompakter topologischer Ternärkörper (und insbesondere eine Gerade einer lokalkompakten affinen Ebene) *ist entweder nulldimensional oder zusammenhängend und lokalzusammenhängend.*

Die Homöomorphismen eines topologischen Raumes, die einen Punkt x festlassen, führen nämlich auch die zusammenhängende Komponente von x in sich über. Bei einem topologischen Ternärkörper bilden diese Homöomorphismen aber wegen der zweifachen Transitivität der Gruppe aller Homöomorphismen eine Gruppe, die auf den von x verschiedenen Punkten noch einfach transitiv ist. Enthält also die zusammenhängende Komponente eines Punktes noch einen weiteren Punkt, so enthält sie sogar alle Punkte. Daher ist ein topologischer Ternärkörper entweder völlig unzusammenhängend oder zusammenhängend. Man kann diesen selben Schluß auch mit der Quasikomponente durchführen und erhält dann etwas stärker: Ein topologischer Ternärkörper ist entweder nirgends zusammenhängend oder zusammenhängend. Nun sei W eine kompakte Umgebung von 0. Im ersten Fall besteht dann die Quasikomponente von 0 in dem kompakten Raum W erst recht nur aus dem Element 0 allein. Um hieraus die Nulldimensionalität zu beweisen, muß man zu einer beliebig kleinen, ganz in W enthaltenen, offenen Umgebung U von 0 eine randlose Umgebung von 0 angeben können, die in U enthalten ist. Die Menge $W - U$ ist abgeschlossen und daher kompakt. Für jeden Punkt x aus $W - U$ kann man, da ja der Durchschnitt aller randlosen Umgebungen von 0 nur aus dem Element 0 selbst besteht, eine randlose Umgebung V_x von 0 finden, die den Punkt x nicht enthält. $W - V_x$ ist eine Umgebung von x in dem Raum W. Die kompakte Menge $W - U$ kann mit endlich vielen $W - V_{x_1}, \ldots, W - V_{x_n}$ dieser Umgebungen überdeckt werden, dann ist der Durchschnitt $\bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$ in U enthalten, und er ist eine randlose Umgebung von 0.

Im zweiten Fall, wo der Ternärkörper zusammenhängend ist, kann also auch die in einer kompakten Umgebung W von 0 gebildete Quasikomponente C von 0 nicht nur aus dem Element 0 allein bestehen. C ist als Durchschnitt abgeschlossener Mengen abgeschlossen und daher kompakt. Darum gibt es, wie in § 3 bewiesen, eine Umgebung V von 0 mit $VC \subsetneqq W$. (Hierbei ist VC das Komplexprodukt in der multiplikativen Loop des Ternärkörpers.) Sieht man VC an als die Vereinigung der Mengen vC, wo v die Menge V durchläuft, so zeigt sich, daß VC als Vereinigung von zusammenhängenden Mengen mit paarweise nicht leerem Durchschnitt (0 ist enthalten in vC) selbst zusammenhängend ist; sieht man VC an als die Vereinigung der Mengen Vc, wo c die Menge C durchläuft, so ergibt sich weiter, daß VC eine ganze Umgebung von 0 enthält und damit selbst Umgebung von 0 ist. Die abgeschlossene Hülle $\overline{VC}$ von VC ist zusammenhängend und als Untermenge von W kompakt. Für eine gegen 0 konvergente Folge a_n bilden also die $a_n\overline{VC}$, wie in § 3 bewiesen, eine Basis von Umgebungen der 0. Jede Menge $a_n\overline{VC}$ ist homöomorph zu $\overline{VC}$ und somit zusammenhängend. Für jeden anderen Punkt des Ternärkörpers gilt Entsprechendes. Damit ist in diesem Fall der lokale Zusammenhang des Ternärkörpers bewiesen. Ist nun eine Gerade einer affinen Ebene nulldimensional, so auch die affine Ebene selbst als topologisches Produkt zweier Geraden, aber dann ist auch die projektive Ebene nulldimensional und folglich nicht zusammenhängend. Umgekehrt überträgt sich auch Zusammenhang und lokaler Zusammenhang von der affinen Geraden auf die affine Ebene und weiter auf die projektive Ebene, die ja die abgeschlossene Hülle der affinen Ebene ist. (Die abgeschlossene Hülle einer zusammenhängenden Menge ist immer zusammenhängend.) Damit hat man:

Eine lokalkompakte projektive Ebene ist entweder nulldimensional oder zusammenhängend und lokalzusammenhängend. Diese Eigenschaften kommen gleichzeitig mit der Ebene auch ihren Geraden zu.

Nun ergibt sich ganz einfach:

Eine zusammenhängende lokalkompakte projektive Ebene ist kompakt.

Nach dem früher Bewiesenen hat man dazu nur noch zu zeigen: Die Geraden einer zusammenhängenden lokalkompakten projektiven Ebene sind kompakt. Dazu betrachtet man eine kompakte Umgebung V eines Punktes p, die eine ganze Gerade G nicht trifft. Der Rand $rd\,V$ von V ist als abgeschlossene Teilmenge von V kompakt, und er enthält nicht den Punkt p. Nun wird behauptet: Projiziert man $rd\,V$ aus p auf die (nicht durch p gehende) Gerade G, so erhält man als Bild die ganze Gerade G. Es sei x ein beliebiger Punkt von G; dann muß also gezeigt werden, daß die Gerade $p \cup x$ mit $rd\,V$ wenigstens einen Punkt gemeinsam hat, der bei der Projektion in x übergeht. Nun schneiden die „ebenen“ Umgebungen von p aus einer Geraden durch p die „linearen“ Umgebungen von p in der Topologie der Geraden aus. Hätte der Rand von V mit $p \cup x$ keinen Punkt gemeinsam, so bedeutete das, daß es in der linearen Topologie auf $p \cup x$ eine randlose Umgebung von p gäbe, die aber nicht die ganze Gerade $p \cup x$ wäre. Dann wäre aber $p \cup x$ nicht zusammenhängend im Widerspruch zu dem vorherigen Satz. Also ist G und damit jede Gerade als stetiges Bild einer kompakten Menge kompakt.

§ 6. Kompaktheit angeordneter Ebenen

Eine Ebene heißt angeordnet, wenn auf ihren Geraden eine Trennbeziehung erklärt ist, die bei Projektionen erhalten bleibt. Dabei ist eine Trennbeziehung eine symmetrische Relation $ab|cd$ zwischen Paaren a, b und c, d von Punkten auf einer Geraden, die erklärt ist, wenn je zwei der vier Punkte verschieden sind, und die den folgenden Bedingungen genügt: Es gilt genau eine der drei Beziehungen $ab|cd$, $bc|ad$, $ca|bd$; aus $ab|cd$ folgt $ba|cd$; aus $ab|cd$ und $bc|de$ folgt $cd|ea$. In einer angeordneten projektiven Ebene macht man einen Ternärkörper zu einer angeordneten Menge, indem man, mit der Bezeichnung ∞ für den Punkt v, festsetzt:

$a<0$ genau für $1a|0\infty$; $0<a$ für $a \neq 0$ sonst;

falls $0<a$, sei $a<b$ genau für $0b|a\infty$; $b<a$ für $b \neq a$ sonst;

falls $a<0$, sei $b<a$ genau für $0b|a\infty$; $a<b$ für $b \neq a$ sonst.

Eine geordnete Menge wird zu einem topologischen Raum, wenn man als Umgebungen eines Punktes x die offenen Intervalle (a, b) nimmt, die den Punkt x enthalten, also die Mengen der z mit $a<z<b$, wenn $a<x<b$. Führt man in einer angeordneten projektiven Ebene auf diese Weise eine Topologie ein, so wird die Ebene dadurch zu einer topologischen projektiven Ebene im hier gebrauchten Sinne. Dazu muß man über das bei PICKERT [**1955**], S. 269 Bewiesene hinaus nur noch zeigen, daß es sich nicht um die diskrete

Topologie handeln kann. Wäre nämlich der Ternärkörper durch die Anordnung diskret topologisiert, so gäbe es ein Intervall (a, b), das nur das Element 0 enthielte. Das kann aber nicht sein; denn (s. z.B. PICKERT [**1955**], S. 234) es gibt in einer angeordneten Ebene zwischen je zwei Punkten einen (und damit sogar unendlich viele) weitere.

Mit Hilfe der Invarianz der Trennbeziehung gegenüber Projektionen kann man Monotoniegesetze für die multiplikative Loop herleiten und zwar gilt $ac<bc$ und $ca<cb$ genau dann, wenn $0<c$ und $a<b$ oder wenn $c<0$ und $b<a$ ist. Beweis. Die Multiplikation von rechts- bzw. von links mit einem festen Element $w\neq 0, \infty$ ist eine Projektivität der Geraden $0\cup v$ und läßt also die Trennbeziehung ungeändert, d.h. $xy|z\infty$ ist gleichwertig mit $xw\ yw|zw\infty$ und ebenso mit $wx\ wy|wz\infty$. Im Fall $c<0<a<b$ gilt $1c|0\infty$ und $0b|a\infty$. Hieraus folgt $a\,ac|0\infty$ und $0\,bc|ac\infty$. Nun ist aber (s. z.B. PICKERT [**1955**], S. 226) $pq|0\infty$ dasselbe wie $p<0<q$ oder $q<0<p$. Wegen $0<a$ ist also $ac<0$ und damit $bc<ac$. Die anderen Fälle erledigen sich vollkommen analog, da die Negation der Trennbeziehung ebenso wie diese selbst invariant gegenüber Projektivitäten ist.

Für einen Ternärkörper einer topologischen projektiven Ebene ist die Abbildung $x\to x'=x\backslash 1$, ergänzt durch die Festsetzungen $0'=\infty\ (=v)$, $\infty'=0$, als die durch die Hintereinanderausführung der Projektionen der Geraden $0\cup v$ aus u auf die Gerade $e\cup v$, dieser aus 0 auf die Gerade $e\cup u$, weiter aus v auf die Gerade $0\cup e$ und schließlich aus u zurück auf $0\cup v$ entstehende Projektivität ein Homöomorphismus von $0\cup v$. Man kann also die Umgebungen von ∞ mit Hilfe dieser Abbildung aus denen von 0 gewinnen. Um nun zu beweisen, daß aus der lokalen Kompaktheit der angeordneten Ebene (in der Ordnungstopologie) ihre Kompaktheit folgt, konstruiert man unter Ausnutzung der Monotonieeigenschaften der Multiplikation eine kompakte Umgebung von ∞ und eine solche von 0, die zusammen den um den Punkt ∞ vermehrten Ternärkörper überdecken. Dazu nimmt man eine Umgebung (a, b) von 0, deren abgeschlossene Hülle kompakt ist. Diese abgeschlossene Hülle besteht aus dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, d.h. aus (a, b) und den hinzugenommenen Endpunkten a, b, da ja nach dem vorher Bemerkten der Ternärkörper dicht geordnet ist, also zwischen je zwei Elementen noch weitere liegen. Mit $[a, b]$ ist aber auch jedes Intervall $[ca, cb]$ für $0<c$ eine kompakte Umgebung von 0. Andererseits geht $[a, b]$ bei der Abbildung $x\to x'$ in eine kompakte Umgebung von ∞ über. Aus $0<x<b$ wird dabei $b'<x'$; denn x' ist definiert durch $xx'=1$, deswegen bedeutet $b'<x'$ dasselbe wie $xb'<1=bb'$. Dabei ist $0<b'$; denn $b'<0$ hätte $bb'=1<0$ zur Folge. Also ist $xb'<1$ weiter gleichwertig mit $x<b$. Entsprechend wird $a<x<0$ zu $x'<a'$. Es gibt also eine kompakte Umgebung von ∞ in der Form der Menge aller z mit $z\leq a'$ oder $b'\leq z$. Es gilt, nun noch ein Element c zu finden, so daß $(a', b')\subsetneq [ca, cb]$. Dazu wählt man zuerst ein Hilfselement d mit $0<d$, so daß da gleich einem beliebigen Element $h<a'$ wird und dann c mit $d<c$, so daß $b'<cb$. Damit hat man die Kompaktheit der Geraden $0\cup v$ bewiesen und es hat sich ergeben:

Ist eine angeordnete projektive Ebene lokalkompakt in der Ordnungstopologie, so ist sie kompakt.

Weiter folgt in diesem Fall noch:

Ist eine angeordnete projektive Ebene lokalkompakt in der Ordnungstopologie, so ist sie archimedisch angeordnet.

Hierfür ist zu zeigen, daß die additive Loop jedes Ternärkörpers der Ebene archimedisch angeordnet ist, daß also für beliebige Elemente a, b aus $0<a<b$ oder $b<a<0$ die Existenz einer natürlichen Zahl n folgt, für die $b<a\cdot n$ bzw. $a\cdot n<b$ gilt, wobei $a\cdot n$ rekursiv definiert ist durch $a\cdot 1=a$, $a\cdot(n+1)=a\cdot n+a$. Im ersten Fall $0<a<b$ ergibt sich die Existenz einer solchen Zahl n so: Wäre niemals $b<a\cdot n$, so wäre $a\cdot n\in[0, b]$ für jedes n. Nun ist $[0, b]$ aber kompakt, wie vorher für ein beliebiges abgeschlossenes Intervall gezeigt wurde. Also hätte die Folge $a\cdot n$ einen Häufungspunkt c in $[0, b]$. Außerdem ist die Folge $a\cdot n$ (wegen der Monotoniegesetze der Addition) monoton, und daher hätte man dann sogar die Konvergenz $\lim\limits_{n\to\infty} a\cdot n=c$. Daraus folgte $\lim\limits_{n\to\infty} a\cdot n+a=\lim\limits_{n\to\infty} a\cdot(n+1)=c+a$. Die Folgen $a\cdot n$ und $a\cdot(n+1)$ müssen aber den gleichen Grenzwert haben. Dann müßte $c=c+a$ sein und $a=0$. Das ist ein Widerspruch. Im zweiten Fall schließt man analog.

Im bisherigen ersten Teil der Arbeit wurden an den Ternärkörper nur topologische oder allenfalls ordnungstheoretische Forderungen gestellt, aber keinerlei besondere algebraische Rechenregeln für die ternäre Verknüpfung verlangt, die sich geometrisch durch gewisse Schließungssätze ausdrücken. Das soll nun im zweiten Teil der Arbeit geschehen, und zwar werden diese geometrischen Schließungssätze der einfacheren Formulierung halber meist in ihrer algebraischen Form für einen Ternärkörper ausgesprochen. Die Übersetzung in die geometrische Redeweise findet man bei PICKERT [**1955**]. Man kann dann einmal fragen, inwieweit sich bei hinreichender „Anständigkeit" des Ternärkörpers weitere Folgerungsbeziehungen zwischen topologischen Eigenschaften der Ebene ergeben. Ein Beispiel hierfür bietet die Frage nach der Kompaktheit lokalkompakter Ebenen und nach ihren möglichen topologischen Dimensionen. Zum anderen kann man auch unter topologischen Voraussetzungen nach engeren Abhängigkeiten der Rechenregeln voneinander fragen, als sie für Ternärkörper ohne Topologie bestehen. Besonders starke derartige Verbindungen werden sich ergeben, wenn die Geraden der Ebene homöomorph zu einer reellen projektiven Geraden sind. Schließlich läßt sich auch noch die Frage nach der Einbettbarkeit topologischer Ternärkörper in topologische projektive Ebenen, d.h. nach der Existenz solcher Ebenen, die einen zu dem gegebenen topologischen Ternärkörper stetig isomorphen Ternärkörper haben, weiter fördern. Bisher kannte man die Antwort darauf in zwei Extremfällen, nämlich für die (algebraisch besonders „anständigen") Schiefkörper und für die (topologisch „anständigen") zusammenhängenden lokalkompakten Ternärkörper: Jeder topologische Schiefkörper läßt sich als Ternärkörper einer eindeutig bestimmten topologischen (desarguesschen) projektiven Ebene auffassen (s. z.B. PICKERT [**1955**], S. 265). Jeder zusammenhängende lokalkompakte Ternärkörper gehört ebenso zu einer eindeutig bestimmten topologischen projektiven Ebene (SKORNJAKOV [**1954**]).

§ 7. Kompaktheit spezieller lokalkompakter Ebenen

Um in einer lokalkompakten projektiven Ebene die Kompaktheit der Geraden (und damit auch der Ebene) beweisen zu können, muß man eine Möglichkeit haben, genügend große kompakte Mengen angeben zu können, man muß also etwa die kompakten Umgebungen eines Punktes hinreichend stark „aufblähen" können. Das legt den folgenden Ansatz nahe: Man betrachtet für einen Punkt p, der nicht auf der Geraden G liegt, die Gruppe der (p, G)-Kollineationen. Kollineation soll eine eineindeutige Selbstabbildung der Ebene heißen, welche auch die Gesamtheit der Geraden (aufgefaßt als Punktmengen) umkehrbar eindeutig in sich überführt, (p, G)-Kollineation eine solche, die jede Gerade durch p und jeden Punkt auf G einzeln festläßt. Für die Gruppe der (p, G)-Kollineationen soll verlangt werden, daß sie auf den von p verschiedenen und nicht auf G liegenden Punkten einer jeden Geraden durch p transitiv sei. Diese (p, G)-Transitivität der Ebene bedeutet genau die Gültigkeit des desarguesschen Schließungssatzes mit Zentrum p und Achse G (s. z.B. PICKERT [**1955**], S. 76). Wählt man $p=0$ und $G=u\cup v$, so hat die (p, G)-Transitivität der Ebene die Assoziativität der Multiplikation eines zu $0, u, v$ gehörigen Ternärkörpers zur Folge (PICKERT [**1955**], S. 104). Es zeigt sich, daß man für den Beweis der Kompaktheit von $0\cup v$ mit einer viel schwächeren Voraussetzung auskommt: Die multiplikative Loop eines Ternärkörpers soll eine Alternativloop sein, d.h. je zwei Elemente der Loop sollen in einer assoziativen Unterloop (einer Untergruppe der Loop) liegen. Dann kann man sich wieder der Abbildung $x\to x'=x\backslash 1$ bedienen, um den um das Element $\infty=v$ vermehrten Ternärkörper mit zwei kompakten Mengen zu überdecken. Man geht dabei aus von einer kompakten Umgebung W von 0. Diese liefert bei dem Homöomorphismus $x\to x'$ eine kompakte Umgebung W' von ∞. Um jetzt die kompakte Menge W durch Multiplikation mit irgendeinem Element so zu strecken, daß sie das Komplement von W' umfaßt, sucht man erst einmal ein Element a mit der Eigenschaft, daß W echt in aW enthalten ist. Das besagt aber nichts anderes, als daß $a^{-1}W$ echt in W enthalten sein soll; denn aus $w=av$ folgt, daß w der von a und v erzeugten Loop angehört, also mit a und v zusammen in einer Gruppe liegt. Daher ist $w=av$ gleichwertig mit $a^{-1}w=v$ und $W\subset aW$ gleichwertig mit $a^{-1}W\subset W$. Ein a, das diese Forderung erfüllt, kann man aber leicht finden, da es ja, wie schon in § 3 bewiesen, zu jeder beliebig kleinen Umgebung U von 0 eine Umgebung V von 0 mit $VW\subseteqq U$ gibt. Man braucht dann für $U\subset W$ nur $a=v^{-1}$ für ein von 0 verschiedenes Element v von V zu setzen. Jetzt ergibt sich durch eine Induktion, daß die Mengen $a^n W$ eine aufsteigende Folge von kompakten Umgebungen von 0 bilden. Da nämlich $a(a^n W)$ die Gesamtheit der Elemente $a(a^n w)=a^{n+1}w$ mit w in W ist, gilt $a(a^n W)=a^{n+1}W$ und aus $W\subset aW$ folgt durch wiederholte Multiplikation mit a von links $a^n W\subset a^{n+1}W$

für jedes n. Als homöomorphes Bild von W sind alle Mengen $a^n W$ kompakt. In der Folge dieser Mengen gibt es eine, die das Komplement von W' umfaßt; denn wäre das nicht der Fall, so könnte man für jedes n ein Element b_n finden, welches weder in $a^n W$ noch in W' läge. Für die zweite Bedingung kann man auch $b_n^{-1} \notin W$ schreiben, sie hätte also zur Folge, daß sich die b_n^{-1} nicht gegen 0 häufen könnten. Unter Berücksichtigung der Gruppeneigenschaft der von a und einem b_n erzeugten Loop bedeutet $b_n \notin a^n W$ dasselbe wie $a^{-n} b_n \notin W$. Nun hat aber die über a gemachte Voraussetzung die Konvergenz von a^{-n} gegen 0 zur Folge. Es ist nämlich $a^{-n} W \subset W$ für alle n, insbesondere liegen also alle a^{-n} in der kompakten Menge Ww^{-1}, wenn man für w irgendein von 0 verschiedenes Element aus W nimmt. Daher müssen die a^{-n} einen Häufungspunkt haben. Die Annahme, es gäbe einen solchen Häufungspunkt $c \neq 0$ führt auf einen Widerspruch: Gäbe es eine Teilfolge $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$ der n, für welche $\lim\limits_{i\to\infty} a^{-n_i} = c \neq 0$ wäre, so wäre $\lim\limits_{i\to\infty} a^{-n_{2i}} a^{n_i} = cc^{-1} = 1$ und die a^{-n} häuften sich auch gegen 1. Dann häuften sich aber die $a^{-n} w$ für jedes w aus W in w und jedes solche w läge als Häufungspunkt von Punkten aus der abgeschlossenen Menge $a^{-1} W$ selbst in $a^{-1} W$ im Widerspruch dazu, daß $a^{-1} W$ eine echte Teilmenge von W sein sollte. Jetzt kann man aus der ersten Bedingung über die b_n folgern, daß doch $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{-1} = 0$ gelten müßte und damit ist dann gezeigt, daß es solche b_n überhaupt nicht geben kann. Für jedes feste n ist nämlich $\lim\limits_{p\to\infty} a^{-p} b_n = 0$; für hinreichend große p liegt also $a^{-p} b_n$ in W. Es sei p_r die kleinste Zahl, für die das der Fall ist. Nach Konstruktion ist $p_n > n$, und $a^{-p_n} b_n$ kann nicht zu $a^{-1} W$ gehören, weil sonst p_n nicht minimal wäre. Daher liegen die $a^{-p_n} b_n$ alle in der Menge $W - a^{-1} W$, deren abgeschlossene Hülle K kompakt ist und den Punkt 0 nicht enthält ($a^{-1} W$ ist ja eine Umgebung von 0). Bei dem Übergang von x zu $x' = x^{-1}$ geht also K in die kompakte Teilmenge K' des Ternärkörpers T über. Es ist $b_n^{-1} \in K' a^{-p_n}$ und diese Mengen liegen schließlich in beliebig kleinen Umgebungen von 0, da K' kompakt und $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-p_n} = 0$ ist, also die $K' a^{-p_n}$ nach dem Beweis in § 3 einen gegen 0 konvergenten Filter bilden. Damit hat man bewiesen:

Ist die multiplikative Loop eines Ternärkörpers einer lokalkompakten projektiven Ebene eine Alternativloop oder ist insbesondere die Ebene (p, G)-transitiv für ein nicht inzidentes Paar p, G, so ist die Ebene kompakt.

§ 8. Topologisches Lemma

Für das Folgende wird ein topologisches Lemma gebraucht. Es bezeichne R den Raum der reellen Zahlen, S den Raum der reellen Zahlen modulo 1, also die eindimensionale Sphäre, n eine natürliche Zahl und q eine natürliche Zahl oder ∞; $T = R^n \times S^q$ sei das topologische Produkt von n Faktoren R und q Faktoren S.

Dann ist die Kompaktifizierung $T + \infty$ von T durch einen Punkt ∞ nicht homogen.

Beweis. T ist lokalkompakt, aber wegen $n \geqq 1$ nicht kompakt. Daher läßt es sich auf genau eine Weise durch einen Punkt ∞ kompakt abschließen, und zwar so, daß man die Komplemente der kompakten Teilmengen von T in $T + \infty$ als Basis für den Umgebungsfilter in ∞ nimmt (BOURBAKI [**1951**], Top. gén. I, § 10, Th. 3). Jede kompakte Menge in R^n ist für ein geeignetes positives k in einer n-dimensionalen Kugel $K_n(k)$ vom Radius k enthalten, also jede kompakte Menge in T in einer geeigneten Menge $K_n(k) \times S^q$. Das Komplement von $K_n(k)$ in R^n hat die Form $(k, \infty) \times S_{n-1}$, wobei (k, ∞) das offene Intervall aller reellen Zahlen $> k$ bedeutet und S_{n-1} die $(n-1)$-dimensionale Sphäre. Die Mengen

$$U_k = (k, \infty) \times S_{n-1} \times S^q + \infty \qquad (k \geqq 1)$$

bilden also eine Basis für den Umgebungsfilter von ∞ bei der kompakten Abschließung von T durch ∞. Um die Inhomogenität nachzuweisen, vergleicht man die Umgebungsfilter in $0 = 0^n \times 0^q$ und ∞. Die Gesamtheit der Mengen

$$V = V(t, p) = (-t, t)^{n+p} \times S^r \quad (0 < t < \tfrac{1}{2},\ p \geqq 1,\ p + r = q)$$

bildet eine Basis für den Umgebungsfilter in 0. Die Homogenität von $T + \infty$ würde insbesondere die Existenz eines Homöomorphismus σ bedeuten, der 0 in ∞ überführt. Dann muß es eine geeignete Menge V mit $V^\sigma \subseteqq U_1$ geben und eine Zahl k mit $U_k \subseteqq V^\sigma$. Wegen $0^\sigma = \infty$ gilt dann auch noch zwischen den punktierten Mengen die Einschachtelung

$$U_k - \infty \subseteqq (V - 0)^\sigma = V^\sigma - \infty \subseteqq U_1 - \infty.$$

Hieraus ergibt sich bei Betrachtung der Homotopieverhältnisse ein Widerspruch: Es sei $c > k$. Dann ist die Abbildung

$$x \to x^\gamma = c \times x \times 0^q$$

eine topologische Abbildung der $(n-1)$-Sphäre S_{n-1} in $U_k - \infty$. Das Bild S_{n-1}^γ ist in $U_1 - \infty$ nicht zusammenziehbar; denn eine Abbildung in einen Produktraum liefert genau dann ein zusammenziehbares Bild, wenn die Projektionen auf die Komponenten des Produktraumes zusammenziehbar sind. Die Projektion der Abbildung γ auf die Komponente S_{n-1} von $U_1 - \infty$ ist aber die identische Abbildung und eine Sphäre ist in sich nicht zusammenziehbar (KURATOWSKI [**1952**], S. 277; ALEXANDROFF-HOPF [**1935**], S. 513). Dagegen kann man S_{n-1}^γ in der vollen Umgebung U_k auf den Punkt ∞ zusammenziehen. Sei nämlich $x^{\gamma(s)} = cs \times x \times 0^q$ $(s \geqq 1)$. Dann hängt $x^{\gamma(s)}$ stetig von x und s ab, und für $s \to \infty$ liegt $S_{n-1}^{\gamma(s)}$ schließlich in jeder Umgebung U_m von ∞. Daher ist S_{n-1}^γ erst recht in der größeren Menge V^σ zusammenziehbar. Nun hat aber die zu $R^{n+p} \times S^r$ homöomorphe Menge V^σ die Eigenschaft, daß jede in ihr gelegene zusammenziehbare $(n-1)$-Sphäre zusammenziehbar bleibt, wenn man aus V^σ einen nicht auf ihr gelegenen Punkt herausnimmt. Sei nämlich φ die topologische Abbildung von S_{n-1} in $R^{n+p}\times S^r$ und $0^{n+p}\times 0^r=0\times 0$ der herauszunehmende Punkt; χ sei die Projektion von φ auf den Faktor R^{n+p}, ψ die Projektion auf S^r. Da 0×0 nicht auf S^{φ}_{n-1} liegen soll, ist $x^{\chi}\neq 0$ oder $x^{\psi}\neq 0$ für jeden Punkt x von S_{n-1}. Wegen der Umkehrbarkeit von φ ist außerdem $x^{\chi}\neq y^{\chi}$ oder $x^{\psi}\neq y^{\psi}$ für je zwei verschiedene Punkte x, y von S_{n-1}. Daher wird die Teilmenge N aller Punkte x von S_{n-1} mit $x^{\psi}=0$ durch χ umkehrbar eindeutig und stetig in $R^{n+p}-0$ abgebildet. N^{χ} ist eine höchstens $(n-1)$-dimensionale kompakte Teilmenge des punktierten mindestens $(n+1)$-dimensionalen euklidischen Raumes $R^{n+p}-0$, läßt sich also dort auf einen Punkt zusammenziehen (ALEXANDROFF-HOPF [**1935**], S. 399, 405). Mit I als Bezeichnung für das abgeschlossene Intervall der reellen Zahlen zwischen 0 und 1 wird diese Zusammenziehung beschrieben durch eine stetige Abbildung α von $N\times I$ in $R^{n+p}-0$, die auf $N\times 0$ in natürlicher Weise mit χ übereinstimmt und auf $N\times 1$ den Wert $a\neq 0$ annimmt. α läßt sich zu einer stetigen Abbildung β von $S_{n-1}\times I$ in R^{n+p} fortsetzen, die noch auf $S_{n-1}\times 0$ die Abbildung χ darstellt. Zieht man nun weiter die kompakte Menge $(S_{n-1}\times 1)^{\beta}$ im Raum R^{n+p} unter Festhalten des Punktes a stetig auf a zusammen, so hat man insgesamt die Menge S^{χ}_{n-1} in R^{n+p} stetig in den Punkt a übergeführt, ohne daß dabei ein Punkt aus N^{χ} durch 0 hindurchgegangen wäre. Anschließend kann man wegen der vorausgesetzten Zusammenziehbarkeit der Sphäre S^{φ}_{n-1} ihre Projektion S^{ψ}_{n-1} im Raum S^r stetig in einen Punkt b überführen. Diese beiden Deformationen hintereinander ergeben eine Zusammenziehung von S^{φ}_{n-1} auf den Punkt $a\times b$, die ganz in dem punktierten Raum $R^{n+p}\times S^r-0\times 0$ vor sich geht.

Damit ist die Bemerkung über die Zusammenziehbarkeit der $(n-1)$-Sphären in V^{σ} bewiesen, d. h. S^{γ}_{n-1} ist zusammenziehbar in $V^{\sigma}-\infty$ und hieraus würde erst recht die Zusammenziehbarkeit in der umfassenderen Menge $U_1-\infty$ folgen. Dieser Widerspruch beweist die Inhomogenität von $T+\infty$.

Bemerkung. In dem Sonderfall $n=1$ läßt sich dieser Beweis viel einfacher führen. Dann besteht nämlich $S_{n-1}=S_0$ aus einem Punktepaar. Die Mengen $U_k-\infty$ haben daher genau zwei zusammenhängende Komponenten und jede Komponente von $U_1-\infty$ enthält eine Komponente von $U_k-\infty$. Andererseits ist $(V-0)^{\sigma}$ zusammenhängend, also ganz in einer Komponente von $U_1-\infty$ enthalten. Diese beiden Tatsachen zusammen widersprechen der Einschachtelung $U_k-\infty\leqq(V-0)^{\sigma}\leqq U_1-\infty$.

§ 9. Die topologische Dimension lokalkompakter projektiver Ebenen

Das topologische Lemma soll nun ausgenutzt werden, um Aussagen über die topologische Dimension gewisser lokalkompakter projektiver Ebenen und über die Struktur ihrer additiven Loop zu machen. Für einen regulären Raum mit abzählbarer Basis (und ein solcher liegt ja bei einer lokalkompakten Ebene vor) wird die topologische Dimension rekursiv erklärt. Genau die leere Menge soll (-1)-dimensional sein, und ein Raum soll die Dimension n

haben, wenn jeder seiner Punkte eine Basis von Umgebungen mit $(n-1)$-dimensionalem Rand hat, aber nicht jeder Punkt eine solche mit $(n-2)$-dimensionalem Rand. Die anderen geläufigen Definitionen für eine topologische Dimension stimmen bei der betrachteten Raumklasse mit der hier gegebenen überein (HUREWICZ-WALLMANN [**1948**]). Für die nicht zusammenhängenden lokalkompakten Ebenen war in § 5 gezeigt worden, daß sie die Dimension 0 haben. Betrachtung der bekannten zusammenhängenden lokalkompakten Ebenen (etwa mit dem reellen oder komplexen Zahlkörper als Ternärkörper) läßt die Vermutung aufkommen, daß die Dimension dieser Ebenen eine endliche gerade Zahl sein muß. Da es beispielsweise einen eindimensionalen topologischen Raum gibt, dessen Produkt mit sich selbst wieder die Dimension 1 hat (ERDÖS [**1940**]), ist es auch bei endlicher Dimension einer topologischen Ebene nicht selbstverständlich, daß ihre Dimension gerade ist. Für beliebige lokalkompakte Ebenen ist die Vermutung noch nicht bestätigt, wohl aber gelingt das unter der Zusatzvoraussetzung, daß die Ebene einen Ternärkörper hat, dessen additive Loop eine kommutative Gruppe ist. Es handelt sich dann also um eine lokalkompakte kommutative Gruppe, die nach dem in § 5 und § 3 Bewiesenen zusammenhängend und lokalzusammenhängend ist und eine abzählbare Basis besitzt. Die Struktur dieser Gruppen ist vollständig bekannt (PONTRJAGIN [**1946**]). Mit R als der additiven Gruppe der reellen Zahlen und S als der additiven Gruppe der reellen Zahlen modulo 1 ist die additive Gruppe des Ternärkörpers das direkte Produkt von endlich vielen Faktoren R und höchstens abzählbar vielen Faktoren S, d.h. $T = R^n \times S^q$. Hierbei ist zunächst $0 \leq q \leq \omega_0$ und n eine natürliche Zahl; denn wäre $n=0$, so entfiele der erste Bestandteil des direkten Produktes und T wäre als das Produkt der kompakten Mengen S selbst kompakt. Das kann aber nicht sein, da sonst der Punkt ∞, der T zur projektiven Geraden ergänzt, als Komplement einer kompakten und daher abgeschlossenen Menge offen wäre und somit die projektive Gerade in einem und daher in allen Punkten diskret, was von vornherein ausgeschlossen war. Nun ist aber die projektive Gerade $T + \infty$ ein homogener topologischer Raum, also kann nach dem topologischen Lemma nicht auch $0 < q$ sein, d.h. es folgt $q = 0$. Damit ist bewiesen:

Ist die additive Loop eines Ternärkörpers einer lokalkompakten zusammenhängenden projektiven Ebene eine kommutative Gruppe, so ist sie für eine geeignete natürliche Zahl n das n-fache direkte Produkt der additiven Gruppe der reellen Zahlen. Die projektive Ebene hat dann die topologische Dimension $2n$.

Insbesondere gibt es also dann in der additiven Gruppe außer der 0 keine Elemente endlicher Ordnung und das ergibt eine Folgerung über Antifanoebenen, das sind solche Ebenen, in denen jedes vollständige Viereck kollineare Diagonalpunkte hat. In einer solchen Ebene erfüllt jedes Element x der additiven Loop die Gleichung $x + x = 0$ und hieraus folgt das kommutative und assoziative Gesetz für die Addition (PICKERT [**1955**], S. 60). Also:

Eine lokalkompakte Antifanoebene ist notwendig nulldimensional.

§ 10. Projektive Ebenen, die zur reellen projektiven Ebene homöomorph sind

Die erste Frage, die sich bei zur reellen Ebene homöomorphen projektiven Ebene erhebt, ist die, ob ihre Geraden auch zur reellen Geraden homöomorph sind. Diese Frage ist zu bejahen. Beweis. Zunächst weiß man aus § 5, daß die projektiven Geraden einer zur reellen Ebene homöomorphen Ebene zusammenhängende und lokalzusammenhängende Mengen sind, denen als abgeschlossenen Teilmengen eines kompakten Raumes mit abzählbarer Basis dieselben Eigenschaften zukommen. Von einem solchen Raum weiß man (KURATOWSKI [**1952**], S. 184), daß er sogar lokal kurvenmäßig zusammenhängend ist, d.h. es gibt (beliebig kleine) Umgebungen eines Punktes x, so daß jeder Punkt y einer solchen Umgebung mit x durch eine zu dem reellen Intervall $I=[0, 1]$ homöomorphe Menge (d.i. eine einfache Kurve) in dieser Umgebung verbunden ist. Die doppelte Transitivität der Homöomorphismengruppe der affinen Geraden ergibt daraus sofort, daß in der affinen Geraden je zwei Punkte durch eine einfache Kurve verbunden sind. Es wird sich jetzt sogar zeigen, daß diese einfache Kurve eindeutig bestimmt ist. Gäbe es nämlich zwei verschiedene einfache Kurven, die zwei Punkte miteinander verbinden, so erhielte man nach Weglassen geeigneter Kurvenstücke eine einfache geschlossene Kurve, d.h. eine Jordan-Kurve in der affinen Geraden. Diese Jordan-Kurve läßt sich nun innerhalb der affinen Geraden auf einen Punkt zusammenziehen, und zwar durch eine Schar von (bis auf den Schluß) homöomorphen Abbildungen. Sei nämlich die Jordan-Kurve dargestellt durch $a(s)$ $(s \in S)$ und eine die Punkte 0 und 1 verbindende einfache Kurve durch $b(t)$ $(t \in I)$ mit $b(0)=1$ und $b(1)=0$. Dann ist $c_t(s)=a(s)\,b(t)$ stetig in s, t und $c_0(s)=a(s)$, $c_1(s)=0$. Da nun die betrachtete Ebene lokaleuklidisch ist, liegt eine hinreichend kleine Jordan-Kurve der affinen Geraden ganz in einer offenen euklidischen Kreisscheibe, teilt diese also in ein Inneres und ein Äußeres. Wegen der Zusammenziehbarkeit der Jordan-Kurve in der affinen Geraden muß das Innere der Jordan-Kurve ganz der affinen Geraden angehören, dann wäre aber die Gerade zweidimensional und die Ebene vierdimensional, ein Widerspruch.

Spricht man dieses Zwischenergebnis, daß in der affinen Geraden je zwei Punkte eindeutig durch eine einfache Kurve verbunden sind, projektiv aus, so erhält man die Aussage: Zu drei (paarweise verschiedenen) Punkten p, q, r gibt es in der projektiven Geraden genau eine einfache Kurve K mit den Endpunkten p, q, welche r nicht enthält. Ist 0 irgendein von p und q verschiedener Punkt aus K, so gibt es auch genau eine einfache Kurve L mit den Endpunkten p, q, die 0 nicht enthält. Diese muß dann durch r und ebenso natürlich durch jeden anderen nicht auf K gelegenen Punkt hindurchgehen. Die beiden einfachen Kurven K und L füllen also zusammen die ganze projektive Gerade aus. Sie haben aber nur die Endpunkte p, q gemeinsam; denn gäbe es einen von p, q verschiedenen Punkt x, der zugleich K und L angehörte, so müßte die einfache Kurve M, die p mit q verbindet und x nicht enthält, sowohl durch 0 wie durch r hindurchgehen, da sie ja von K und L

verschieden ist. Nun gibt es eine Projektivität, die 0 mit p und r mit q vertauscht (man kann sie leicht durch Hintereinander-Ausführung von drei Projektionen angeben). Diese würde aus M eine einfache Kurve mit den Endpunkten $0, r$ machen, die p und q enthielte. Weglassen der Endstücke ergäbe eine einfache Kurve von p nach q, die weder durch 0 noch durch r hindurchginge, also wieder von K und L verschieden wäre. Eine solche kann es aber nicht geben. Damit ist gezeigt, daß die projektive Gerade eine einfache geschlossene Kurve ist, also:

Die projektiven Geraden einer zur reellen Ebene homöomorphen projektiven Ebene sind eindimensionale Sphären, die affinen Geraden sind homöomorph zur Menge der reellen Zahlen.

§ 11. Topologische Loops, die zur reellen Geraden homöomorph sind

Ist ein Ternärkörper homöomorph zur reellen Geraden, so bestehen zwischen den in ihm möglichen Rechenregeln engere Abhängigkeiten, als bei anderen lokalkompakten Ternärkörpern. Das wird dadurch bedingt, daß die von den reellen Zahlen übertragene Anordnung in gewisser Weise mit den Ternärkörper-Verknüpfungen verträglich ist. Zunächst werde nur die additive Loop betrachtet. Von ihr soll vorausgesetzt werden, daß jedes ihrer Elemente eine assoziative Untergruppe der Loop erzeugt; eine solche Loop nennt man auch potenzassoziativ (im Gedanken an multiplikativ geschriebene Loops). In Anlehnung an BOURBAKI ([**1947**], Top. gén. V, § 2) ergibt sich, daß eine solche zur Menge der reellen Zahlen homöomorphe topologische Loop angeordnet und sogar archimedisch angeordnet ist. Daß es sich um eine angeordnete Loop handelt, bedeutet, daß aus $x<y$ folgt $x+z<y+z$ und $z+x<z+y$. Dabei werde die Beziehung $x>0$ durch den Homöomorphismus von den reellen Zahlen her übertragen und $x<y$ definiert durch $y-x>0$, wobei $y-x$ dasjenige Element der Loop sein soll, das $(y-x)+x=y$ erfüllt. Dann ist die durch $f(z)=(y+z)-(x+z)$ gegebene Abbildung f, da die Loopoperationen ja stetig sind, eine stetige Funktion. Im Fall $x<y$ ist $f(0)>0$ und $f(z)\neq 0$ für jedes z, da ja $f(z)=0$ dasselbe bedeutet wie $y+z=x+z$ oder $y=x$. Nun bildet f die (zusammenhängende) Loop auf eine zusammenhängende Punktmenge ab, die ein Element >0 enthält, aber nicht die 0 selbst, also nur aus Elementen >0 besteht. Damit ist die Rechtsmonotonie der Addition bewiesen. Jetzt folgen nachträglich auch die Anordnungsgesetze für die Beziehung $<$. Die Linksmonotonie ergibt sich ganz analog. Für eine natürliche Zahl n wird $a\cdot n$ induktiv definiert durch $a\cdot 1=a$, $a\cdot(n+1)=a\cdot n+a$. Ist $0<a$ und $0<b$ und wäre $a\cdot n\leq b$ für jedes n, so konvergierte die monoton wachsende Folge $\{a\cdot n\}_{n=1}^{\infty}$ gegen ein Element $c\leq b$ und dann müßte die Folge $\{a\cdot(n+1)\}_{n=1}^{\infty}$ sowohl gegen c wie auch gegen $c+a$ konvergieren. Also gibt es Zahlen n mit $a\cdot n>b$. Entsprechendes gilt für $b<a<0$, d.h. die Loop ist archimedisch angeordnet.

Jetzt läßt sich in Verschärfung des Satzes von PICKERT [**1955**], S. 246 beweisen:

Eine archimedisch angeordnete potenzassoziative Loop ist isomorph zu einer Untergruppe der additiven Gruppe der reellen Zahlen.

Der Beweis entspricht dem bei BOURBAKI [**1947**], Top. gén. V, § 2 für Gruppen gegebenen. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden. Im ersten Fall gibt es ein Element e, das unmittelbarer Nachfolger von 0 ist. Dann folgt durch eine naheliegende Induktion, daß $e \cdot (n+1)$ unmittelbarer Nachfolger von $e \cdot n$ ist für jedes ganze n und wegen der archimedischen Anordnung erschöpfen die Elemente $e \cdot n$ die ganze Loop, die also isomorph zur Gruppe der ganzen Zahlen ist. Im zweiten Fall gibt es keinen unmittelbaren Nachfolger von 0 und die Loop ist dicht geordnet. Für Elemente $x > 0$ und beliebige y werde $y : x$ als die größte (positive und negative) ganze Zahl n mit $x \cdot n \leq y$ erklärt. Wählt man noch ein festes Element $e > 0$, so ist

$$a^{\varrho} = \lim_{x \to 0} \frac{a : x}{e : x}$$

für jedes Element a vorhanden und > 0 genau für $a > 0$, wie eine leichte, für $a > 0$ und $a < 0$ getrennt durchzuführende Rechnung zeigt, die genau mit der bei BOURBAKI angegebenen übereinstimmt. Wegen $a : x + b : x \leq (a+b) : x \leq a : x + b : x + 2$ ist ϱ ein Homomorphismus der Loop in die additive Gruppe der reellen Zahlen, und da aus $a < b$ die Existenz eines Elementes $c > 0$ mit $a + c = b$, also $a^{\varrho} + c^{\varrho} = b^{\varrho}$ und $a^{\varrho} < b^{\varrho}$ folgt, ist ϱ sogar ein Isomorphismus. Weiter gilt:

Eine zur Gruppe der reellen Zahlen homöomorphe potenzassoziative Loop ist sogar mit ihr isomorph;

denn die Gruppe der reellen Zahlen hat keine zusammenhängende echte Untergruppe.

§ 12. Zur reellen Ebene homöomorphe Translationsebenen

Eine Ebene, in der nach Auszeichnung einer uneigentlichen Geraden die Translationen transitiv sind auf der Menge der eigentlichen Punkte, heißt Translationsebene. Ihr Ternärkörper (T, τ) (mit u, v auf der uneigentlichen Geraden) ist ein Quasikörper, d.h. außer den Auflösbarkeitsbedingungen gilt $\tau(s, x, t) = s x + t$, mit der Addition bildet T eine Gruppe und es ist stets $a(b+c) = ab + ac$. Nun gilt:

Eine zur reellen Ebene homöomorphe Translationsebene ist mit der reellen Ebene isomorph.

Beweis. Die additive Gruppe des Quasikörpers stimmt mit der additiven Gruppe des reellen Körpers überein. Kern des Quasikörpers nennt man die Menge aller Elemente x, die $(ab)x = a(bx)$ und $(a+b)x = ax + bx$ für alle Paare a, b erfüllen. Der Kern eines Quasikörpers ist ein Schiefkörper, der das Element 1 enthält. Wegen der Stetigkeit der Abbildungen $x \to (ab)x - a(bx)$ und $x \to (a+b)x - (ax + bx)$ ist der Kern eines topologischen Quasikörpers als Durchschnitt von Urbildern der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ abgeschlossen. Mit 1 liegt nun der ganze von 1 erzeugte Körper der rationalen Zahlen (die

Charakteristik ist 0 wegen der Anordnung) im Kern. Diese Menge liegt aber überall dicht in dem Quasikörper, der daher mit seinem Kern übereinstimmt und der Körper der reellen Zahlen ist.

§ 13. Zur reellen Ebene homöomorphe Neokörperebenen

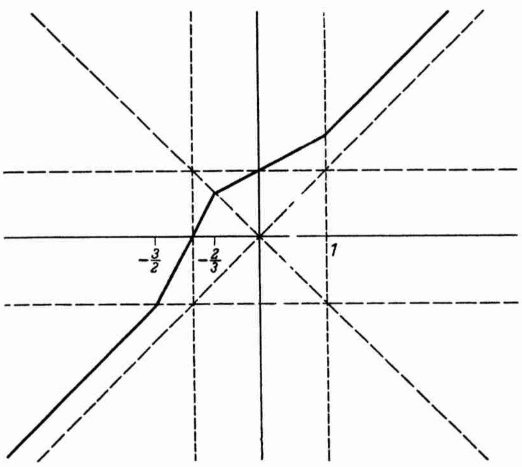
Nach dem Ergebnis der beiden letzten Paragraphen genügt [neben der „Zerlegbarkeitsbedingung" $\tau(s, x, t) = s\,x + t$] schon die Forderung der Potenzassoziativität der Addition und das eine Distributivgesetz, um für einen zum Körper der reellen Zahlen homöomorphen Ternärkörper zu erzwingen, daß er mit diesem isomorph ist. Auf die Forderung der Potenzassoziativität der Addition kann man dabei auch dann nicht verzichten, wenn man sehr viel stärkere Bedingungen für die Multiplikation voraussetzt, wie das folgende Beispiel zeigt:

Es gibt einen zur Menge der reellen Zahlen homöomorphen echten kommutativen (planaren) Neokörper mit kommutativer und kürzbarer Addition.

Als Neokörper wird dabei ein Ternärkörper (T, τ) bezeichnet mit $\tau(s, x, t) = s\,x + t$ und assoziativer und beiderseits distributiver Multiplikation. Ein kommutativer Neokörper erfüllt außerdem noch das kommutative Gesetz der Multiplikation. Die Kürzbarkeit bedeutet bei kommutativer Addition die Gültigkeit von $(-x) + (x + y) = y$. Mit dem Beispiel ist gleichzeitig die Frage von PICKERT [**1956**] nach der Existenz echter Neokörper mit Kürzungsregel beantwortet. Das Beispiel ergibt sich durch geeignete Anwendung des Gedankens von MOULTON [**1902**], die Geraden der gewöhnlichen reellen Ebene durch passende geknickte Linien zu ersetzen. Man erhält es dadurch, daß man die Multiplikation des reellen Körpers beibehält und eine neue Addition $\oplus$ einführt durch die Definition

$$\begin{aligned} x \oplus t &= x + \tfrac{1}{2}t \quad &&\text{für} \quad t^{-1}x \leqq -\tfrac{3}{2} \quad \text{oder} \quad t^{-1}x \geqq 1 \\ &= \tfrac{1}{2}x + t \quad &&\text{für} \quad -\tfrac{2}{3} \leqq t^{-1}x \leqq 1 \\ &= 2x + 2t \quad &&\text{für} \quad -\tfrac{3}{2} \leqq t^{-1}x \leqq -\tfrac{2}{3}. \end{aligned}$$

Man sieht sofort, daß die neue Addition kommutativ ist und rechnet leicht $(-1) \oplus (1 \oplus x) = x$ nach, woraus mit Hilfe der Distributivität, die sich unmittelbar aus der Definition ergibt (die Fallunterscheidung richtet sich nur nach dem Wert von $t^{-1}x$), die Kürzungsregel folgt. In der Figur bedeutet die getroffene Festsetzung, daß die geknickte „Gerade" die Gleichung $y = x \oplus 1$ erhält. Alle anderen Geraden außer den



Achsenparallelen erhält man daraus durch Streckung in der x- und y-Richtung.

Daß man so tatsächlich einen Neokörper erhält, erfordert den Nachweis (PAIGE [**1950**]), daß für $s \neq s'$ die Gleichung $s x \oplus t = s' x \oplus t'$ eindeutig nach x auflösbar ist. Hierzu betrachtet man die stetige reelle Funktion f mit $f(x) = (s x \oplus t) - (s' x \oplus t')$. Ist $s = 0$ oder $s' = 0$ oder haben s und s' verschiedenes Vorzeichen, so ist f eine streng monotone Funktion, deren Ableitung, abgesehen von drei Stellen, überall erklärt ist und für die $|f'(x)| = |s - s'| > 0$ bei genügend großem Absolutwert von x gilt. Daher hat f in diesen Fällen genau eine Nullstelle. In den anderen Fällen kann man durch Wahl der Bezeichnung erreichen, daß s' der absolut kleinere der beiden Werte s, s' ist. Da die Auflösung der betrachteten Gleichung gleichwertig ist mit der Auflösung der aus ihr durch Multiplikation mit s'^{-1} hervorgehenden Gleichung, kann man sich auf $s' = 1 < s$ beschränken. Im Fall $t = t'$ ist nichts mehr zu beweisen; sonst kann man auch noch annehmen, daß $t < t'$ ist; der gegenteilige Fall läßt sich nämlich durch Wechsel des Vorzeichens von x und Multiplikation der Gleichung mit (-1) hierauf zurückführen. Für hinreichend großen Absolutwert von x gilt immer der erste Fall der Definition von $\oplus$ und es ist $f'(x) = s - 1 > 0$. Daher existiert mindestens eine Nullstelle von f. Mittels der Monotoniegesetze für die Verknüpfung $\oplus$ folgt wegen der vorausgesetzten Ungleichungen für s, t, t' aus $x \leq 0$ stets $f(x) < 0$. Man kann sich also auf die Betrachtung der Funktion f im Intervall $x > 0$ beschränken. Für einen Wert x, bei dem nicht $f'(x) \geq \frac{s-1}{2}$ gilt, bei dem also ein Knick vorliegt oder die Ableitung einen Wert $< \frac{s-1}{2}$ hat, liegt entweder für die Definition von $s x \oplus t$ der zweite Fall vor, aber für die Definition von $x \oplus t'$ der erste oder dritte Fall, oder $s x \oplus t$ ist nach dem ersten oder zweiten Fall definiert und $x \oplus t'$ nach dem dritten. Bei jeder dieser Möglichkeiten ergibt sich $f(x) \neq 0$, und zwar so: Sei

(1) $0 < t < t'$. Dann wäre $s x \leq t$ und $x \geq t'$. Dies führt aber wegen $x < s x$ auf einen Widerspruch.

(2) $t < 0 < t'$. Dann ist $s x \leq -\frac{2}{3} t$ und $x \geq t'$, also

$$s x \oplus t \leq (-\tfrac{2}{3} \oplus 1) t < 0 < x \oplus t'.$$

(3) $t < t' < 0$. Dann ist entweder $s x \leq -\frac{2}{3} t$ und $x \geq -\frac{2}{3} t'$, also

$$s x \oplus t \leq (-\tfrac{2}{3} \oplus 1) t < (-\tfrac{2}{3} \oplus 1) t' \leq x \oplus t';$$

oder es ist $s x \geq -\frac{3}{2} t$ und $x \leq -\frac{3}{2} t'$, also

$$s x \oplus t \geq (-\tfrac{3}{2} \oplus 1) t > (-\tfrac{3}{2} \oplus 1) t' \geq x \oplus t'.$$

An jeder Nullstelle x der stetigen Funktion f ist also $f'(x)$ vorhanden und $\geq \frac{s-1}{2} > 0$. Daher kann f höchstens eine Nullstelle haben. Damit ist gezeigt, daß die angegebene Konstruktion wirklich einen (planaren) Neokörper liefert.

Kann man also im allgemeinen bei einem zur Menge der reellen Zahlen homöomorphen Neokörper nichts über die Addition aussagen, so gilt doch wenigstens für die Multiplikation:

Die multiplikative Gruppe $T^\times$ eines zum Körper der reellen Zahlen homöomorphen Neokörpers T ist isomorph zur multiplikativen Gruppe $R^\times$ dieses Körpers.

Da es nichtkommutative zu $R^\times$ homöomorphe Gruppen gibt (etwa die Erweiterung der Gruppe der positiven reellen Zahlen durch den Automorphismus $x \to x^{-1}$), aber wie sich zeigen wird, alle kommutativen zu $R^\times$ homöomorphen Gruppen mit $R^\times$ isomorph sind, handelt es sich beim Beweis im wesentlichen um den Nachweis der Kommutativität von $T^\times$. Zunächst ergibt sich aus den bekannten Sätzen über topologische Gruppen (Bourbaki [**1947**], Top. gén. V, § 2), daß die zusammenhängende Komponente H des Elementes 1 von T isomorph ist zur Gruppe der positiven reellen Zahlen. Nun betrachtet man die durch $x + x^\varepsilon = 0$ erklärte Abbildung ε. Wegen $0^\varepsilon = 0$ stellt ε einen Homöomorphismus von $T^\times$ dar, vertauscht also die beiden zusammenhängenden Komponenten von $T^\times$ oder läßt sie fest. Das letzte kann aber nicht der Fall sein; denn die additive Loop $(T, +)$ ist nach § 11 eine angeordnete Loop und H besteht bei der dort eingeführten Anordnung aus allen Elementen > 0, also ist $H + H \subseteq H$, während $H + H^\varepsilon$ das Element 0 enthält, so daß also H und H^ε verschieden sind und $T^\times = H \cup H^\varepsilon$ ist. Wegen $(a + a^\varepsilon) b = b(a + a^\varepsilon) = 0$ gilt $ab + a^\varepsilon b = ba + ba^\varepsilon$. Für a, b in H folgt also aus der Kommutativität von H auch $a^\varepsilon b = ba^\varepsilon$ und mit Hilfe dieser Beziehung ergibt sich auf dieselbe Weise $a^\varepsilon b^\varepsilon = b^\varepsilon a^\varepsilon$, so daß also $T^\times$ kommutativ ist.

Um jetzt den Isomorphismus zu den reellen Zahlen von der zusammenhängenden Komponente H von 1 auf die ganze Gruppe $T^\times$ auszudehnen, sucht man ein Element e im Komplement H' von H in $T^\times$ mit $e^2 = 1$. Die Abbildung $x \to ax$ mit einem festen Element a aus H' ist ein Homöomorphismus von $T^\times$ und führt H in eine zusammenhängende Menge über, die das Element a enthält, sie vertauscht also die beiden zusammenhängenden Komponenten H und H' von T. Daher ist $aH' = H$ und insbesondere a^2 ein Element h aus H. In H ist jedes Element ein Quadrat, also läßt sich h in der Form b^2 mit b in H schreiben. Wegen der Kommutativität von $T^\times$ ist jetzt $(ab^{-1})^2 = 1$ und $e = ab^{-1}$ liegt in H'. Bezeichnet ϱ die isomorphe Abbildung von H auf die Gruppe der positiven reellen Zahlen, so setzt die Abbildung $ex \to -x^\varrho$ für x in H den Isomorphismus auf die ganze Gruppe $T^\times$ fort.

§ 14. Topologische Alternativkörper

Es ist bekannt (s. z.B. Pickert [**1955**], S. 265), daß jeder topologische Schiefkörper eine topologische (desarguessche) Ebene definiert. Dieses Ergebnis läßt sich auf Alternativkörper ausdehnen:

Zu einem topologischen Alternativkörper gibt es bis auf Isomorphie genau eine topologische projektive Ebene, die den Alternativkörper zum Ternärkörper hat und in ihm die gegebene Topologie induziert.

Beweis. Nach dem üblichen Verfahren wird zu dem Alternativkörper T eine projektive Ebene konstruiert, indem man alle Paare (x, y) mit $x, y \in T$ als eigentliche Punkte nimmt, die Mengen $[s, t]$ der Punkte (x, y) mit $sx+t=y$ und die Mengen $[r]$ der Punkte (r, y) mit $y \in T$ als affine Geraden. Dazu kommen die Punkte (z), die eingeführt werden als Schnittpunkte aller Geraden $[z, t]$ mit $t \in T$ und der Punkt (∞) als Schnittpunkt der Geraden $[r]$ mit $r \in T$ als uneigentliche Punkte, die alle zusammen die uneigentliche Gerade $[\infty]$ bilden.

Wenn es überhaupt eine Topologisierung der so gebildeten projektiven Ebene gibt, die auf T die gegebene Topologie hervorruft, so ist diese Topologie der Ebene eindeutig durch die von T bestimmt, und zwar so, daß die affine Ebene topologisches Produkt von T mit sich selbst wird. Das bedeutet, daß die Gesamtheit der Mengen $U \times V$, wo U Umgebung von x und V Umgebung von y ist, eine Basis für den Umgebungsfilter des Punktes (x, y) bilden muß. Weiter werden jetzt die Umgebungen für die uneigentlichen Punkte und die Geraden in geeigneter Weise definiert und dann wird nachgerechnet, daß bei diesen Umgebungsdefinitionen Verbinden und Schneiden wirklich stetige Operationen werden. Damit sind dann die Umgebungsdefinitionen auch gerechtfertigt. Für den Umgebungsfilter des Punktes (z) nimmt man als Basis die Gesamtheit der Mengen, die für eine Umgebung U von 0 und eine Umgebung V von z aus allen Punkten (x, y) mit $x^{-1} \in U$ und $yx^{-1} \in V$ und allen Punkten (w) mit $w \in V$ bestehen. Für den Umgebungsfilter des Punktes (∞) nimmt man als Basis die Gesamtheit der Mengen, die für eine Umgebung U von 0 aus allen Punkten (x, y) mit $y^{-1} \in U$ und $xy^{-1} \in U$ und allen Punkten (w) mit $w^{-1} \in U$ bestehen. Die Umgebungen für die Geraden gehen daraus durch Vertauschen von x mit s und y mit $-t$ bei Umkehrung der Multiplikationsreihenfolge und Ersetzen der runden Klammern durch eckige hervor, womit eine Dualität zwischen Punkt- und Geradentopologie gegeben ist. Wenn man die Stetigkeit des Verbindens nachgerechnet hat, ergibt sich mit Hilfe dieser Dualität auch die des Schneidens.

Der Nachweis der Stetigkeit muß für die verschiedenen Typen von Verbindungsgeraden getrennt geführt werden, verläuft jedoch immer nach dem gleichen Schema.

(1) Verbindung von (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit $x_1 \neq x_2$.

Die Verbindungsgerade ist vom Typ $[s, t]$ und bestimmt sich durch $y_i = s x_i + t$ $(i=1, 2)$. Es ist $s=(y_1-y_2)(x_1-x_2)^{-1}$, $t=y_1-sx_1$. Also hängen s, t wegen $x_1-x_2 \neq 0$ stetig von x_1, y_1, x_2, y_2 ab.

(2) Verbindung von (p, q_1) und (p, q_2).

Die Verbindungsgerade ist $[p]$. Eine Umgebung von $[p]$ ist bestimmt durch Angabe einer Umgebung U von 0 und einer Umgebung V von p und besteht aus allen Geraden $[s, t]$ mit $s^{-1} \in U$, $-s^{-1}t \in V$ und allen Geraden $[r]$ mit $r \in V$. Man muß Umgebungen W_i von (p, q_i) finden, so daß alle Verbindungsgeraden eines Punktes (x_1, y_1) von W_1 mit einem Punkt (x_2, y_2) von W_2 in einer solchen vorgegebenen Umgebung von $[p]$ liegen. Ist $x_1 \neq x_2$ und hat man W_1, W_2 so klein gewählt, daß stets $y_1 \neq y_2$ ist, so gilt $s^{-1} = (x_1 - x_2)(y_1 - y_2)^{-1}$, $-s^{-1}t = x_1 - s^{-1}y_1$. Daher kann man durch geeignete Wahl von W_1 und W_2 erreichen, daß $s^{-1} \in U$ und $-s^{-1}t \in V$. Ist $x_1 = x_2 = r$, so ist $[r]$ die Verbindungsgerade der beiden Punkte, und indem man die W_i gegebenenfalls noch verkleinert, erreicht man auch noch $r \in V$.

(3) Verbindung von (p, q) und (z).

Die Verbindungsgerade ist $[z, t]$ mit $q = zp + t$. Zu einer Umgebung U von z und einer Umgebung V von $-zp + q$ muß man also eine Umgebung W von (p, q) und eine Umgebung Z von (z) angeben, so daß die Verbindungsgerade eines Punktes (x, y) aus W mit einem Punkt (u, v) aus Z oder einem Punkt (w) aus Z von der Form $[s, t]$ mit $s \in U$, $t \in V$ ist. Daß die Verbindungsgerade vom Typ $[s, t]$ ist, bedeutet $x \neq u$. Man kann sich W und Z von vornherein so klein gewählt denken, daß das stets der Fall ist. Aus $y = sx + t$ und $v = su + t$ folgt dann, wenn man t eliminiert, die Gleichung $s - (sx)u^{-1} = vu^{-1} - yu^{-1}$. Ihre rechte Seite soll mit a abgekürzt werden. Weiter erhält man hieraus

$$s = (au)(u - x)^{-1} = a + (ax)(u - x)^{-1} = a + (ax)\left(u^{-1}(1 - xu^{-1})^{-1}\right)$$

und, wenn man für a seinen Wert einsetzt,

$$s = vu^{-1} - yu^{-1} + \left((vu^{-1} - yu^{-1})x\right)\left(u^{-1}(1 - xu^{-1})^{-1}\right).$$

Die Umgebung Z von (z) ist dadurch gegeben, daß u^{-1} in einer Umgebung von 0 und vu^{-1} in einer Umgebung von z liegen, und Z wird dadurch beliebig klein, daß man diese Umgebungen beliebig klein wählt. Nun hängt s stetig von x, y, u^{-1}, vu^{-1} ab, und wenn nur W und Z genügend klein sind, so ist $s \in U$, und man kann auch noch erreichen, daß $t = -sx + y$ in V liegt.

Die Verbindungsgerade von (x, y) mit (w) hat die Form $[w, t]$, wo w in einer durch Z bestimmten Umgebung von z liegt und $y = wx + t$ ist. Für hinreichend kleines W und Z gilt also $w \in U$ und $t \in V$. Daher kann man W und Z so klein wählen, daß gleichzeitig diese und die vorher gestellten Forderungen erfüllt werden.

(4) Verbindung von (p, q) und (∞).

Die Verbindungsgerade ist $[p]$. Eine Umgebung von $[p]$ ist wie in (2) bestimmt. Man muß eine Umgebung W von (p, q) und eine Umgebung Z von (∞) finden, so daß die Verbindungsgeraden vom Typ $[s, t]$ eines Punktes (x, y) aus W mit einem Punkt (u, v) aus Z oder einem Punkt (w) aus Z die Bedingungen $s^{-1} \in U$, $-s^{-1}t \in V$ erfüllen und die Geraden vom Typ $[r]$ die Bedingung $r \in V$.

Ist $x \neq u$, so ist die zugehörige Verbindungsgerade vom Typ $[s, t]$. Aus $s = 0$ folgt $y = v$. Da aber die Umgebungen von (∞) dadurch gekennzeichnet sind, daß v^{-1} und uv^{-1} in einer Umgebung von 0 liegen, kann man W und Z von vornherein so klein gewählt denken, daß $y \neq v$, also $s \neq 0$ ist. Die Gleichungen $y = sx + t$ und $v = su + t$ kann man dann umformen zu $s^{-1}y = x + s^{-1}t$

und $s^{-1}=uv^{-1}+(s^{-1}t)v^{-1}$. Elimination von $s^{-1}t$ ergibt $s^{-1}-(s^{-1}y)v^{-1}=uv^{-1}-xv^{-1}$. Eine entsprechende Umformung wie bei (3) führt auf die Gleichung

$$s^{-1}=uv^{-1}-xv^{-1}+\left((uv^{-1}-xv^{-1})\,y\right)\left(v^{-1}(1-yv^{-1})^{-1}\right).$$

Wegen $y\neq v$ ist hier $1-yv^{-1}\neq 0$ und daher dieser Ausdruck erklärt. s^{-1} hängt also stetig von x, y, v^{-1}, uv^{-1} ab und für hinreichend kleines W und Z ist $s^{-1}\in U$ und $-s^{-1}t=-s^{-1}y+x\in V$.

Ist $x=u=r$, so ist $[r]$ die zugehörige Verbindungsgerade und für eine hinreichend kleine Umgebung W ist $r\in V$.

Die Verbindungsgerade von (x, y) mit (w) ist von der Form $[w, t]$ mit $y=wx+t$. Für eine hinreichend kleine Umgebung Z von (∞) liegt w^{-1} in der betrachteten Umgebung U von 0 und bei passender Wahl von W kann man auch noch $-w^{-1}t=-w^{-1}y+x\in V$ erreichen.

(5) Verbindung von (z_1) und (z_2).

Die Verbindungsgerade ist $[\infty]$. Eine Umgebung von $[\infty]$ besteht aus allen Geraden $[s, t]$ mit $t^{-1}\in U$, $t^{-1}s\in U$ und allen Geraden $[r]$ mit $r^{-1}\in U$, wo U eine Umgebung von 0 ist. Man muß Umgebungen Z_i von (z_i) finden, so daß die Verbindungsgeraden eines Punktes aus Z_1 mit einem Punkt aus Z_2 stets in der gegebenen Umgebung von $[\infty]$ liegen. Z_i besteht aus den Punkten (u_i, v_i), wo u_i^{-1} in einer Umgebung von 0 und $v_i u_i^{-1}$ in einer Umgebung von z_i liegt, und aus den Punkten (w_i) mit w_i aus einer Umgebung von z_i. Die Verbindungsgerade von (u_1, v_1) mit (u_2, v_2) ist im Fall $u_1=u_2=r$ von der Form $[r]$ und für hinreichend kleine Umgebungen Z_i liegt r^{-1} in U. Im Fall $u_1\neq u_2$ erhält man aus $v_i=su_i+t$ $(i=1, 2)$ durch Elimination von s die Gleichung $t^{-1}=(u_1^{-1}-u_2^{-1})(v_1u_1^{-1}-v_2u_2^{-1})^{-1}$ und weiter $t^{-1}s=t^{-1}(v_1u_1^{-1})-u_1^{-1}$. Für hinreichend kleine Umgebungen Z_i liegen t^{-1} und $t^{-1}s$ in U. Die Verbindungsgerade von (u, v) aus Z_1 mit (w) aus Z_2 ist $[w, t]$ mit $v=wu+t$. Hieraus berechnet sich $t^{-1}=u^{-1}(vu^{-1}-w)^{-1}$ und $t^{-1}w=t^{-1}(vu^{-1})-u^{-1}$. Für hinreichend kleine Z_i liegt also wieder die Verbindungsgerade in der gegebenen Umgebung von $[\infty]$.

Die Verbindungsgerade von $(w_1)\in Z_1$ mit $(w_2)\in Z_2$ ist $[\infty]$ selbst.

(6) Verbindung von (z) und (∞).

Die Verbindungsgerade ist $[\infty]$ und eine Umgebung von ihr sei wie in (5) gegeben. Man muß eine Umgebung Z von (z) und eine Umgebung W von (∞) finden, so daß die Verbindungsgerade eines Punktes (x, y) aus Z oder eines Punktes (s) aus Z mit einem Punkt (u, v) aus W oder (w) aus W stets in der betrachteten Umgebung von $[\infty]$ liegt. Ist $x=u$, so ist $[u]$ die Verbindungsgerade von (x, y) und (u, v), und es ist $u^{-1}\in U$, wenn man nur Z genügend klein gewählt hat. Für $x\neq u$ bestimmt sich die Verbindungsgerade $[s, t]$ aus $y=sx+t$ und $v=su+t$. Ist $u=0$ und sind Z sowie W hinreichend klein, so ist $t^{-1}\in U$ und $t^{-1}s=t^{-1}(yx^{-1})-x^{-1}\in U$. Ist $y=v$, so ist $s=0$ und für hinreichend kleines Z und W ist wieder $t^{-1}\in U$, $t^{-1}s=0\in U$. Ist $y\neq v$, so ist

$s \neq 0$. Wäre $t = 0$, so wäre $(yx^{-1})(uv^{-1}) = 1$. Man kann Z und W von vornherein so klein gewählt denken, daß dies nicht der Fall sein kann. Dann muß also auch $t \neq 0$ sein. Jetzt kann man $y = sx + t$ und $v = su + t$ umformen zu $t^{-1}(yx^{-1}) = t^{-1}s + x^{-1}$ und $t^{-1} = (t^{-1}s)(uv^{-1}) + v^{-1}$. Daraus ergibt sich durch Elimination von $t^{-1}s$ die Gleichung

$$t^{-1} - \bigl(t^{-1}(yx^{-1})\bigr)(uv^{-1}) = v^{-1} - x^{-1}(uv^{-1}).$$

Mit den Abkürzungen $a = yx^{-1}$, $b = uv^{-1}$, $c = v^{-1} - x^{-1}(uv^{-1})$ liegen für hinreichend kleine Umgebungen Z und W die Elemente b, c in einer beliebig kleinen Umgebung von 0. Da der Fall $u = 0$ schon behandelt ist, kann man sich auf $u \neq 0$ beschränken, also $b \neq 0$ annehmen. Z und W waren darüber hinaus so gewählt, daß $b^{-1} \neq a$ ist. Nun ergibt sich

$$t^{-1} = (cb^{-1})(b^{-1} - a)^{-1} = c + (ca)(b^{-1} - a)^{-1} = c + (ca)\bigl(b(1 - ab)^{-1}\bigr).$$

Man kann also durch Wahl von Z und W erreichen, daß $t^{-1} \in U$, und ebenso, daß $t^{-1}s = t^{-1}(yx^{-1}) - x^{-1} \in U$.

Für (x, y) aus Z und (w) aus W bestimmt sich die Verbindungsgerade $[w, t]$ aus $y = wx + t$. Dabei kann man $t \neq 0$ annehmen; denn $t = 0$ hat $w^{-1}(yx^{-1}) = 1$ zur Folge und man kann sich W und Z von vornherein so klein gewählt denken, daß dies nicht der Fall ist. Dann ist $t^{-1} = -x^{-1}\bigl(w^{-1}(1 - (yx^{-1})w^{-1})^{-1}\bigr)$ und liegt für genügend kleine Umgebungen W und Z in U. Dasselbe gilt auch für $t^{-1}w = t^{-1}(yx^{-1}) - x^{-1}$.

Für (s) aus Z und (u, v) aus W erhält man die Verbindungsgerade $[s, t]$ aus $v = su + t$. Für hinreichend kleine Umgebungen W und Z ist $t \neq 0$. Im Fall $u \neq 0$ ist $(t^{-1}s)(uv^{-1}) + v^{-1} = t^{-1}$ und $t^{-1} = v^{-1} + (v^{-1}s)(vu^{-1} - s)^{-1} = v^{-1} + (v^{-1}s)\bigl((uv^{-1})(1 - s(uv^{-1}))^{-1}\bigr)$. Im Fall $u = 0$ ist $t^{-1} = v^{-1}$. Wählt man W und Z hinreichend klein, so ist also $t^{-1} \in U$ und $t^{-1}s \in U$.

Damit ist in jedem der möglichen Fälle gezeigt, daß die Verbindungsgerade zweier Punkte stetig von den beiden Punkten abhängt. Nach der vorausgeschickten Bemerkung gilt auch die duale Aussage. Die angegebene Konstruktion liefert also wirklich eine topologische projektive Ebene.

Literatur

ALEXANDROFF-HOPF:
[**1935**] Topologie. Berlin.
N. BOURBAKI:
[**1947**] Topologie générale V. Paris.
[**1951**] Topologie générale I, 2. Aufl. Paris.
P. ERDÖS:
[**1940**] The dimension of the rational points in Hilbert space. Ann. of Math. **41**, 734—736; MRev. **2**, 178; Zbl. **25**, 187.
H. FREUDENTHAL:
[**1957**] Kompakte projektive Ebenen. Illinois J. of Math. **1**, 9—13.
HUREWICZ-WALLMANN:
[**1948**] Dimension theory. Princeton.

C. KURATOWSKI:
[**1952**] Topologie II, 2. Aufl. Warschau.
F. R. MOULTON:
[**1902**] A simple non-desargian plane geometry. Trans. Amer. Math. Soc. **3**, 192—195; FdM **33**, 497.
L. J. PAIGE:
[**1950**] Neo fields. Duke Math. J. **16**, 39—60; Zbl. **40**, 305.
G. PICKERT:
[**1955**] Projektive Ebenen. Berlin-Göttingen-Heidelberg.
[**1956**] Projektive Ebenen über Neokörpern. Wiss. Z. Univ. Jena **1955/56**, 131—135.
L. PONTRJAGIN:
[**1946**] Topological groups. Princeton.
H. SALZMANN:
[**1955**] Über den Zusammenhang in topologischen projektiven Ebenen. Math. Z. **61**, 489—494; Zbl. **64**, 178.
L. A. SKORNJAKOV:
[**1954**] Topologische projektive Ebenen. [Russ.] Trudy Moskov. Mat. Obšč. **3**, 347—373; MRev. **16**, 60.

Mathematisches Seminar der Universität Frankfurt a. M.

(Eingegangen am 24. Dezember 1956)