Werk

Titel: Über die Zurückführung partieller Differentialgleichnugen auf gewöhnliche.

Autor: Sonner, Hans

Jahr: 1956

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0065|log42

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

SONNER, H.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 483—493 (1956)

Über die Zurückführung partieller Differentialgleichungen auf gewöhnliche

Von
HANS SONNER

Einleitung. Die Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen in *vollständigen normierten Räumen*, wie sie etwa bei BOURBAKI [4] durchgeführt wird, ist unter passenden Umständen geeignet, die Lösung partieller Differentialgleichungen auf die von gewöhnlichen zurückzuführen. Der Gedanke besteht darin, erstens jeder partiellen Differentialgleichung von $p+1$ unabhängigen reellen Veränderlichen eine gewöhnliche Differentialgleichung zuzuordnen, deren Lösungen Funktionen mit *Werten im Raume der Funktionen* von p reellen Variablen sind, und zweitens den Raum dieser Funktionen durch Einführung einer Norm zu einem vollständigen normierten Raum zu machen.

Nun lehren einfachste Beispiele (vgl. § 1, Bemerkung), daß mit jeder Funktion dieses Raumes auch deren sämtliche partiellen Ableitungen zum Raume gehören. Bei der Bildung der Norm muß dies berücksichtigt werden, was dazu führt, von vornherein unendlich oft differenzierbare, ableitungsbeschränkte Funktionen zu betrachten, d.h. Funktionen, deren sämtliche Ableitungen eine gemeinsame Schranke besitzen.

Wegen der Normiertheit unseres Funktionenraumes können wir Abbildungen von Intervallen der reellen Zahlengeraden in diesen Raum betrachten und von Ableitungen sprechen. In diesem Sinn wird in § 1 jeder Differentialgleichung, die wir uns in Normalform gegeben denken, eine gewöhnliche Differentialgleichung zugeordnet; ferner wird der Begriff der Lösung einer partiellen Differentialgleichung präzisiert. Das Studium des Raumes der unendlich oft differenzierbaren, ableitungsbeschränkten Funktionen ist dem § 2 vorbehalten. In § 3 wird gezeigt, daß sich die „starken" Lösungen der partiellen Gleichung aus den Lösungen der zugehörigen gewöhnlichen Gleichung gewinnen lassen. Um zu Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zu gelangen, wird in § 4 die LIPSCHITZ-Bedingung in verschärfter Form eingeführt. Mit ihrer Hilfe wird in § 5 ein Existenzsatz formuliert, der dem entsprechenden Satz bei gewöhnlichen Gleichungen wörtlich nachgebildet ist. Nach demselben Muster würden sich (was hier nicht durchgeführt ist) auch Sätze über die Stetigkeit bezüglich eines Parameters und über die Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen übertragen lassen. An zwei Beispielen wird das Verfahren erläutert. Der Schluß bringt eine Abgrenzung des in der vorliegenden Arbeit dargelegten Verfahrens gegenüber dem von CAUCHY und KOWALEWSKI herrührenden Verfahren.

Zeichenerklärung. Im folgenden bezeichne $\mathbf{N}$ (bzw. $\mathbf{N}^*$) die Menge der natürlichen Zahlen (bzw. $\neq 0$), $\mathbf{R}$ die Menge der reellen Zahlen, $\mathbf{C}$ die Menge

der komplexen Zahlen, $A \times B$ bzw. $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i$ kartesische Produkte, $I-A$ das Komplement von A bezüglich I, D_i die partielle Ableitung nach der i-ten Variablen, etwa $\langle a, b \rangle$ das links abgeschlossene, rechts offene Intervall mit den Endpunkten a und b. Fette Buchstaben bedeuten Vektoren. Ein Mengentripel (G, A, B) mit $G \subset A \times B$ nennen wir (nach BOURBAKI) Korrespondenz, eine Korrespondenz (G, A, B), bei der es zu jedem $x \in A$ ein und nur ein $y \in B$ mit $(x, y) \in G$ gibt, Funktion. Setzen wir $f = (G, A, B,)$ so wird dieses y mit $f(x)$ bezeichnet. Ist der Graph G einer Funktion (G, A, B) Graph einer Relation der Gestalt „$x \in A$ und $y \in B$ und $y = T$", wo T ein Term ist, in dem x vorkommt, so schreiben wir statt (G, A, B) eindrucksvoller $x \to T$ $(x \in A,\ T \in B)$ oder im Zusammenhang auch kurz $x \to T$. Ist u eine von $p+1$ Variablen abhängige Funktion, so bezeichne u_{t_0} die der Identität $u_{t_0}(t_1, \ldots, t_p) = u(t_0, t_1, \ldots, t_p)$ genügende partielle Funktion. $f \circ g$ sei die der Identität $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$ genügende Komposition der Funktionen f und g.

§ 1. Der Begriff der Lösung

Gegeben seien eine Familie $(I_i)_{0 \leq i \leq p}$ von $p+1$ nicht auf einen Punkt reduzierten, in $\mathbf{R}$ enthaltenen Intervallen, ein vollständiger normierter Raum E über $\mathbf{R}$ und eine Familie $(H_i)_{0 \leq i \leq p}$ von $p+1$ offenen, nicht leeren Teilen von E. Sei ferner f eine Abbildung von $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i \times \prod_{0 \leq i \leq p} H_i$ in E. Wir sagen, daß eine in $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i$ erklärte Funktion u mit Werten in E *Lösung* der Differentialgleichung

$$D_0 \mathsf{x} = \mathsf{f}(t_0, t_1, \ldots, t_p, \mathsf{x}, D_1 \mathsf{x}, \ldots, D_p \mathsf{x}) \tag{1}$$

ist, wenn erstens u stetig ist und stetige partielle Ableitungen $D_1 \mathsf{u}, \ldots, D_p \mathsf{u}$ besitzt, und zweitens ein abzählbarer Teil A von I_0 existiert, so daß u in jedem Punkt t des Produktes $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i'$ mit $I_0' = I_0 - A$ und $I_j' = I_j$ $(1 \leq j \leq p)$ eine partielle Ableitung $D_0 \mathsf{u}(t)$ mit $D_0 \mathsf{u}(t) = \mathsf{f}\big(t, \mathsf{u}(t), D_1 \mathsf{u}(t), \ldots, D_p \mathsf{u}(t)\big)$ hat. Falls für A der *leere* Teil von I_0 gewählt werden kann, sprechen wir von einer *strengen* Lösung der Gl. (1) in $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i$. (1) heißt genauer „partielle Differentialgleichung erster Ordnung in Normalform". Man beachte, daß die hier gegebene Definition der Lösung im Falle $p = 0$ mit der üblichen für gewöhnliche Differentialgleichungen übereinstimmt.

Die der Variablen t_0 eingeräumte Sonderstellung erlaubt in vielen Fällen, die Lösung einer partiellen Differentialgleichung von $p+1$ Veränderlichen auf die einer gewöhnlichen Differentialgleichung zurückzuführen. Bezeichne zu diesem Zweck $\tilde{E}$ die Menge aller in $Q = \prod_{1 \leq j \leq p} I_j$ erklärten unendlich oft differenzierbaren, ableitungsbeschränkten Funktionen $\tilde{\mathsf{x}}$ mit Werten in E, $\|\tilde{\mathsf{x}}\|$ das Supremum der Menge aller Zahlen $\|\tilde{\mathsf{x}}(\tau)\|$ $(\tau \in Q)$, $[\tilde{\mathsf{x}}]$ das (endliche) Supremum der Menge aller Zahlen $\|D_1^{n_1} \ldots D_p^{n_p} \tilde{\mathsf{x}}\|$ $\big((n_1, \ldots, n_p) \in \mathbf{N}^p\big)$ und schließlich $\tilde{H}$ die Menge aller Funktionen $\tilde{\mathsf{x}} \in \tilde{E}$, für die die abgeschlossene Hülle $\overline{Q'}$ des

Bildes Q' durch $\tau \to \left(\tilde{\mathfrak{x}}(\tau), D_1\tilde{\mathfrak{x}}(\tau), \ldots, D_p\tilde{\mathfrak{x}}(\tau)\right)$ von Q kompakter Teil des Produktraumes $\prod_{0\leq i\leq p} H_i$ ist. Zu $t_0 \in I_0$ und $\tilde{\mathfrak{x}} \in \tilde{H}$ bilden wir die Funktion

$$\tau \to \mathfrak{f}\left(t_0, \tau, \tilde{\mathfrak{x}}(\tau), D_1\tilde{\mathfrak{x}}(\tau), \ldots, D_p\tilde{\mathfrak{x}}(\tau)\right) \left(\tau \in Q, \mathfrak{f}(t_0, \tau, \tilde{\mathfrak{x}}(\tau), D_1\tilde{\mathfrak{x}}(\tau), \ldots, D_p\tilde{\mathfrak{x}}(\tau)) \in E\right)$$

und geben ihr den Namen $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$. Das Zeichen $\tilde{\mathfrak{f}}$ behalten wir der Korrespondenz $(\Phi, I_0 \times \tilde{H}, \tilde{E})$ vor, wobei Φ die Menge aller Paare $\left((t_0, \tilde{\mathfrak{x}}), \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})\right)$ mit $(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) \in I_0 \times \tilde{H}$ und $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) \in \tilde{E}$ ist. Falls $\tilde{\mathfrak{x}} \to [\tilde{\mathfrak{x}}]$ die Menge $\tilde{E}$ zu einem vollständigen normierten Raum macht, können wir Abbildungen eines Intervalls der reellen Zahlengeraden in diesen Raum betrachten und Ableitungen erklären. In diesem Sinn betrachten wir statt (1) die (gewöhnliche) Differentialgleichung

$$\tilde{\mathfrak{x}}' = \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}). \tag{2}$$

Für eine Lösung $\mathfrak{u}$ von (1) bezeichne $\tilde{\mathfrak{u}}$ die Korrespondenz $(\Psi, I_0, \tilde{E})$, wobei Ψ die Menge aller Paare $(t_0, \mathfrak{u}_{t_0})$ mit $t_0 \in I_0$ und $\mathfrak{u}_{t_0} \in \tilde{E}$ ist. Diese kann man, wie wir sehen werden, unter geeigneten Umständen als Lösung von (2) deuten. Wir sagen, eine Lösung $\mathfrak{u}$ von (1) in $\prod_{0\leq i\leq p} I_i$ gehe in die Funktion $\tilde{\mathfrak{x}}_* \in \tilde{H}$ im Punkt $t_* \in I_0$ über, wenn $\mathfrak{u}_{t_*} = \tilde{\mathfrak{x}}_*$ ist.

Beispiele. 1. Die homogene lineare Differentialgleichung

$$D_0 x = a(t_0, t_1) \cdot x + b(t_0, t_1) \cdot D_1 x$$

besitzt im Falle konstanter Koeffizienten die Lösung $(t_0, t_1) \to e^{at_0} \cdot \tilde{x}_*(t_1 + b_1 t_0)$, die wir u nennen. Diese geht in die Funktion $\tilde{x}_*$ im Punkt 0 über. Die zugeordnete Gleichung $\tilde{x}' = a_{t_0} \cdot \tilde{x} + b_{t_0} \cdot D_1\tilde{x}$ besitzt im Falle konstanter Koeffizienten die zugeordnete Lösung $t_0 \to u_{t_0}$. Diese nimmt den Wert (lies Funktion) $\tilde{x}_*$ im Punkt 0 an.

2. Die hyperbolische Gleichung $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a(x, y)$ läßt sich mit unserer Bezeichnungsweise als lineares System erster Ordnung in der Normalform

$$D_0\xi_1 = \xi_2, \quad D_0\xi_2 = D_1\xi_3 + a(t_0, t_1), \quad D_0\xi_3 = D_1\xi_2$$

schreiben. Die Funktion $\mathfrak{f}$ lautet $\left(t_0, t_1, (\xi_{0\varrho})_{1\leq\varrho\leq 3}, (\xi_{1\varrho})_{1\leq\varrho\leq 3}\right) \to \left(\xi_{02}, \xi_{13} + a(t_0, t_1), \xi_{12}\right)$. Dem partiellen Differentialgleichungssystem ist das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\tilde{\xi}_1' = \tilde{\xi}_2, \quad \tilde{\xi}_2' = D_1\tilde{\xi}_3 + a_{t_0}, \quad \tilde{\xi}_3' = D_1\tilde{\xi}_2$$

zugeordnet. $\tilde{\mathfrak{f}}$ hat das Aussehen $\left(t_0, (\tilde{\xi}_\varrho)_{1\leq\varrho\leq 3}\right) \to \left(\tilde{\xi}_2, D_1\tilde{\xi}_3 + a_{t_0}, D_1\tilde{\xi}_2\right)$. Dabei haben wir $\mathfrak{x} = (\xi_\varrho)_{1\leq\varrho\leq 3}$, $\mathfrak{x}_0 = (\xi_{0\varrho})_{1\leq\varrho\leq 3}$, $\mathfrak{x}_1 = (\xi_{1\varrho})_{1\leq\varrho\leq 3}$, $\tilde{\mathfrak{x}} = (\tilde{\xi}_\varrho)_{1\leq\varrho\leq 3}$ gesetzt.

Bemerkung. Zu den partiellen Differentialgleichungen $D_0\mathfrak{x} = D_j\mathfrak{x}$ $(1 \leq j \leq p)$ gehören die gewöhnlichen Differentialgleichungen $\tilde{\mathfrak{x}}' = D_j\tilde{\mathfrak{x}}$ $(1 \leq j \leq p)$. Also ist $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) = D_j\tilde{\mathfrak{x}}$ $(1 \leq j \leq p)$. Soll mit $\tilde{\mathfrak{x}}$ auch $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ Element von $\tilde{E}$ sein, so muß notwendig mit $\tilde{\mathfrak{x}}$ auch die partielle Ableitung $D_j\tilde{\mathfrak{x}}$ $(1 \leq j \leq p)$ zu $\tilde{E}$ gehören; d.h. die Funktionen von $\tilde{E}$ sind unendlich oft differenzierbar.

§ 2. Der Raum der unendlich oft differenzierbaren, ableitungsbeschränkten Funktionen

Satz 1. *Sei E ein vollständiger normierter Raum über* R. *Dann ist der mit der Norm* $[\tilde{\mathsf{x}}]$ *versehene Vektorraum* $\tilde{E}$ *ein vollständiger normierter, nur aus Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen bestehender Raum über* R.

Die Vektor- und Normeigenschaften ergeben sich aus den entsprechenden Eigenschaften von E und der Linearität der Ableitungen. Es genügt also, die Vollständigkeit nachzuweisen. Sei zu diesem Zweck $\mathfrak{F}$ ein CAUCHY-Filter (bezüglich der Norm $[\tilde{\mathsf{x}}]$) auf $\tilde{E}$. Offenbar ist dann auch für jedes p-Tupel $(n_1, \ldots, n_p)$ von N^p das System $\mathfrak{B}^{(n_1, \cdots, n_p)}$, das aus $\mathfrak{F}$ entsteht, indem man in jeder Menge von $\mathfrak{F}$ die Funktionen $\tilde{\mathsf{x}}$ durch die Ableitungen $D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} \tilde{\mathsf{x}}$ ersetzt, Basis eines CAUCHY-Filters $\mathfrak{F}^{(n_1, \cdots, n_p)}$ auf der Menge $\mathfrak{B}(Q, E)$ aller beschränkten Abbildungen von Q in E (bezüglich der Norm $\|\tilde{\mathsf{x}}\|$). Wegen der Vollständigkeit von E konvergieren diese Filter $\mathfrak{F}^{(n_1, \cdots, n_p)}$ gleichmäßig gegen gewisse (beschränkte) Funktionen $\tilde{\mathsf{x}}^{(n_1, \cdots, n_p)}$, die notwendig mit den Ableitungen $D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} \tilde{\mathsf{x}}_0$ von $\tilde{\mathsf{x}}_0 = \tilde{\mathsf{x}}^{(0, \cdots, 0)}$ übereinstimmen.

Um die Endlichkeit von $[\tilde{\mathsf{x}}_0]$ und die Konvergenz von $\mathfrak{F}$ gegen $\tilde{\mathsf{x}}_0$ bezüglich der Norm $[\tilde{\mathsf{x}}]$ zu zeigen, wähle man zu $\varepsilon > 0$ ein $A \in \mathfrak{F}$ so, daß für alle Paare $\tilde{\mathsf{x}}, \tilde{\mathsf{y}}$ von A und alle p-Tupel $(n_1, \ldots, n_p)$ von N^p die Ungleichung $\|D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} (\tilde{\mathsf{x}} - \tilde{\mathsf{y}})\| \leqq \varepsilon$ gilt. Schafft man nach Anwendung der Dreiecksungleichung das $\tilde{\mathsf{y}}$ enthaltende Glied auf die rechte Seite und beachtet die gleichmäßige Konvergenz der Filter $\mathfrak{F}^{(n_1, \cdots, n_p)}$, so kommt für ein festes $\tilde{\mathsf{y}}$ schließlich $[\tilde{\mathsf{x}}_0] \leqq \varepsilon + [\tilde{\mathsf{y}}]$, also die Endlichkeit von $\tilde{\mathsf{x}}_0$. Geht man dagegen in der obigen Ungleichung sofort zum Limes über, so gilt für alle $\tilde{\mathsf{y}} \in A$ die Relation $[\tilde{\mathsf{x}}_0 - \tilde{\mathsf{y}}] \leqq \varepsilon$, d.h. die behauptete Konvergenz.

Die Stetigkeit der partiellen Ableitung $\tilde{\mathsf{y}} = D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} \tilde{\mathsf{x}}$ ergibt sich aus der Abschätzung

$$\|\tilde{\mathsf{y}}(\tau') - \tilde{\mathsf{y}}(\tau)\| = \Big\| \sum_{1 \leq k \leq p} \big(\tilde{\mathsf{y}}(t_1', \ldots, t_{k-1}', t_k', t_{k+1}, \ldots, t_p) - \tilde{\mathsf{y}}(t_1', \ldots, t_{k-1}', t_k, t_{k+1}, \ldots, t_p)\big) \Big\|$$
$$\leqq \sum_{1 \leq k \leq p} |t_k' - t_p| \cdot \big(\|D_k \tilde{\mathsf{y}}\| + o_k(t' - t)\big) \leqq ([\tilde{\mathsf{x}}] + 1) \sum_{1 \leq k \leq p} |t_k' - t_k|,$$

falls τ' hinreichend nahe bei τ liegt.

Satz 2. (a) *Für jede stetige lineare Abbildung* U *von E in E ist mit* $\tilde{\mathsf{x}}$ *auch* $\mathsf{U} \circ \tilde{\mathsf{x}}$ *eine Funktion von* $\tilde{E}$, *und es gilt* $[\mathsf{U} \circ \tilde{\mathsf{x}}] \leqq \|\mathsf{U}\| \cdot [\tilde{\mathsf{x}}]$.

(b) *Für jedes p-Tupel $(n_1, \ldots, n_p)$ von* N^p *ist mit* $\tilde{\mathsf{x}}$ *auch* $D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} \tilde{\mathsf{x}}$ *eine Funktion von* $\tilde{E}$, *und es gilt* $[D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} \tilde{\mathsf{x}}] \leqq [\tilde{\mathsf{x}}]$.

(a) Mit $\tilde{\mathsf{x}}$ ist wegen der Stetigkeit der linearen Abbildung auch $\mathsf{U} \circ \tilde{\mathsf{x}}$ unendlich oft differenzierbar und es gilt $D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} (\mathsf{U} \circ \tilde{\mathsf{x}}) = \mathsf{U} \circ (D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} \tilde{\mathsf{x}})$, also wegen der Beschränktheit einer stetigen linearen Abbildung

$$\|D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} (\mathsf{U} \circ \tilde{\mathsf{x}})\| \leqq \|\mathsf{U}\| \cdot \|D_p^{n_p} \ldots D_1^{n_1} \tilde{\mathsf{x}}\| \quad \text{oder} \quad [\mathsf{U} \circ \tilde{\mathsf{x}}] \leqq \|\mathsf{U}\| \cdot [\tilde{\mathsf{x}}].$$

(b) Ergibt sich sofort aus der Definition von $[\tilde{\mathsf{x}}]$.

Satz 3. *Sei* $(H_i)_{0 \leq i \leq p}$ *eine Familie von offenen Teilen von E. Dann ist* $\tilde{H}$ *ein offener Teil von* $\tilde{E}$.

Wir wählen zu vorgegebenem $\tilde{\mathfrak{x}} \in \tilde{H}$ ein $\varrho > 0$ so, daß die abgeschlossenen Kugeln mit dem Radius ϱ und dem Zentrum $(\tilde{\mathfrak{x}}(\tau), D_1\tilde{\mathfrak{x}}(\tau), \ldots, D_p\tilde{\mathfrak{x}}(\tau))$ $(\tau \in Q)$ noch in $\prod_{0 \leq i \leq p} H_i$ liegen, was nach Definition von $\tilde{H}$ und der Offenheit von $\prod_{0 \leq i \leq p} H_i$ möglich ist. Dann gehört, wie man leicht nachrechnet, die aus allen Funktionen $\tilde{\mathfrak{y}} \in \tilde{E}$ mit $[\tilde{\mathfrak{x}} - \tilde{\mathfrak{y}}] \leq \varrho$ bestehende Umgebung von $\tilde{\mathfrak{x}}$ zu $\tilde{H}$.

Bemerkung. Wie das Beispiel $E = \mathsf{R}$, $I_i = \langle 0, 1 \rangle$ $(0 \leq i \leq p)$, $H_0 = \rangle 0, 1 \langle$, $H_1 = \rangle 2, 3 \langle$, $H_j = \mathsf{R}\,(2 \leq j \leq p)$ lehrt, gibt es Familien $(H_i)_{0 \leq i \leq p}$ von nichtleeren Mengen H_i, die zu leerem $\tilde{H}$ führen.

§ 3. Zusammenhang der Lösungen

Satz 4. *Sei t_* ein Punkt von I_0, $\tilde{\mathfrak{x}}_*$ eine Funktion von $\tilde{H}$, $\mathfrak{u}$ eine in $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i$ erklärte Funktion mit Werten in E. Ist die zugehörige Korrespondenz $\tilde{\mathfrak{u}}$ Lösung der Gl. (2) in I_0 und nimmt sie den Wert $\tilde{\mathfrak{x}}_*$ im Punkt t_* an, so ist $\mathfrak{u}$ Lösung der Gl. (1) in $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i$ und geht in die Funktion $\tilde{\mathfrak{x}}_*$ im Punkt t_* über.*

(a) Die Stetigkeit von $\mathfrak{u}$ ergibt sich aus der Abschätzung

$$\|\mathfrak{u}(t_0', \tau) - \mathfrak{u}(t_0, \tau)\| \leq [\mathfrak{u}_{t_0'} - \mathfrak{u}_{t_0}] + \|\mathfrak{u}(t_0, \tau') - \mathfrak{u}(t_0, \tau)\|;$$

das erste Glied der rechten Seite kann wegen der Stetigkeit der Funktion $t_0 \to \mathfrak{u}_{t_0}$ im Punkt t_0, das zweite wegen der Stetigkeit der Funktion $\mathfrak{u}_{t_0}$ im Punkt τ beliebig klein gemacht werden.

(b) Da $t_0 \to \mathfrak{u}_{t_0}$ als Lösung von (2) das Intervall I_0 in den Raum $\tilde{E}$ der unendlich oft differenzierbaren, ableitungsbeschränkten Funktionen abbildet, ist $\mathfrak{u}_{t_0}$ für alle $t_0 \in I_0$ unendlich oft differenzierbar und ableitungsbeschränkt.

(c) Bei festem $\tau \in Q$ ist $t_0 \to \mathfrak{u}(t_0, \tau)$ in jedem Punkt t_0 von I_0 differenzierbar, in dem es auch $t_0 \to \mathfrak{u}_{t_0}$ ist; denn zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Umgebung V von t_0, so daß für alle t_0' von V die Relation

$$\left[\frac{\tilde{\mathfrak{u}}(t_0') - \tilde{\mathfrak{u}}(t_0)}{t_0' - t_0} - \tilde{\mathfrak{u}}'(t_0)\right] \leq \varepsilon$$

gilt. Daraus folgt für alle t_0' von V die Ungleichung

$$\left\| \frac{\mathfrak{u}(t_0', \tau) - \mathfrak{u}(t_0, \tau)}{t_0' - t_0} - D_0\mathfrak{u}(t_0, \tau) \right\| \leq \varepsilon,$$

wobei $D_0\mathfrak{u}(t_0, \tau)$ für den Wert der Funktion $\tilde{\mathfrak{u}}'(t_0)$ im Punkt τ geschrieben ist. Nun gilt in jedem Punkt t_0 des Komplements bezüglich I_0 einer abzählbaren Menge A die Gleichung $\tilde{\mathfrak{u}}'(t_0) = \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{u}}(t_0))$, also in jedem Punkt t des Produktes $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i'$ mit $I_0' = I_0 - A$ und $I_i' = I_j\,(1 \leq j \leq p)$ nach dem eben Bewiesenen $D_0\mathfrak{u}(t) = \mathfrak{f}(t, \mathfrak{u}(t), D_1\mathfrak{u}(t), \ldots, D_p\mathfrak{u}(t))$.

(d) Es ist $\mathfrak{u}_{t_*}$ gleich dem Wert der Lösung $t_0 \to \mathfrak{u}_{t_0}$ für den Punkt t_*, also gleich $\mathfrak{x}_*$.

Bemerkung. Daß nicht jede Lösung $\mathfrak{u}$ von (1) zu einer Lösung $\tilde{\mathfrak{u}}$ von (2) führt, lehrt die Differentialgleichung $D_0 x = t_1 x$. Wir setzen, um etwas

Bestimmtes vor Augen zu haben, $I_0 = I_1 = \langle 1, 2\rangle$, $E = H_0 = H_1 = \mathsf{C}$. Zu ihr gehört die gewöhnliche Gleichung $\tilde{x}' = \tilde{f}(t_0, \tilde{x}) = \varphi \cdot \tilde{x}$, wobei φ die kanonische Abbildung von I_1 in C bedeutet. Offensichtlich ist $(t_0, t_1) \to e^{t_0 t_1}$ strenge Lösung der partiellen Gleichung und geht in die Funktion $t_1 \to e^{t_1}$ im Punkt $t_* = 1$ über; wir geben ihr den Namen u. Dagegen ist $\tilde{u}$ nicht Lösung der gewöhnlichen Gleichung; denn es ist $\|D_1^n u_{t_0}\| = t_0^n \cdot e^{2t_0}$, also $[u_{t_0}] = e^2$, falls $t_0 = 1$ ist, $= \infty$, falls $t_0 > 1$ ist. Es gehört also das Paar (t_0, u_{t_0}) nur für $t_0 = t_* = 1$ zum Graph von $\tilde{u}$.

Definition 1. *Wir nennen* starke *Lösung von* (1) *jede Lösung* u *von* (1), *für die die zugehörige Korrespondenz* $\tilde{\mathsf{u}}$ *Lösung der Gl.* (2) *ist.*

Satz 5. *Sei* u *eine starke Lösung von* (1). *Dann ist für jedes feste* $t_0 \in I$ *die Funktion* u_{t_0} *unendlich oft differenzierbar und ableitungsbeschränkt. Ferner ist die Familie der Funktionen* $t_0 \to D_1^{n_1} \dots D_p^{n_p} \mathsf{u}(t_0, \tau)$ $(\tau \in Q, (n_1, \dots, n_p) \in \mathsf{N}^p)$ *gleichgradig stetig.*

Die erste Behauptung ergibt sich unmittelbar aus Definition 1, die zweite auf Grund der Abschätzung

$$\|D_1^{n_1} \dots D_p^{n_p} \mathsf{u}(t_0', \tau) - D_1^{n_1} \dots D_p^{n_p} \mathsf{u}(t_0, \tau)\| \leq \|D_1^{n_1} \dots D_p^{n_p} \mathsf{u}_{t_0'} - D_1^{n_1} \dots D_p^{n_p} \mathsf{u}_{t_0}\| \leq$$
$$\leq [\mathsf{u}_{t_0'} - \mathsf{u}_{t_0}]$$

und der Stetigkeit von $t_0 \to \mathsf{u}_{t_0}$.

§ 4. Die verschärfte LIPSCHITZ-Bedingung

Um zu Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen zu gelangen, ist es nützlich, der Funktion f gewisse Bedingungen aufzuerlegen. Diese drücken sich am einfachsten in der Korrespondenz $\tilde{\mathsf{f}}$ aus.

Definition 2. *Man sagt, daß eine Abbildung* f *von* $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i \times \prod_{0 \leq i \leq p} H_i$ *in* E verschärft Lipschitzsch (*bzw.* verschärft lokal Lipschitzsch) *ist, falls erstens* $\tilde{H}$ *nicht leer, zweitens* $\tilde{\mathsf{f}}$ *eine Funktion und drittens* $\tilde{\mathsf{f}}$ *Lipschitzsch (bzw. lokal Lipschitzsch) bezüglich der Norm* $[\tilde{\mathsf{x}}]$ *ist. Wenn* f *verschärft Lipschitzsch (bzw. verschärft lokal Lipschitzsch) in* $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i \times \prod_{0 \leq i \leq p} H_i$ *ist, heißt die Gleichung* $D_0 \mathsf{x} = \mathsf{f}(t_0, \dots, t_p, \mathsf{x}, D_1 \mathsf{x}, \dots, D_p \mathsf{x})$ *verschärft Lipschitzsch (bzw. verschärft lokal Lipschitzsch) in* $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i \times \prod_{0 \leq i \leq p} H_i$.

Die zweite Bedingung besagt, daß für jeden Punkt t_0 von I_0 und für jede Funktion $\tilde{\mathsf{x}}$ von $\tilde{H}$ die Funktion $\tau \to \mathsf{f}\big(t_0, \tau, \tilde{\mathsf{x}}(\tau), D_1 \tilde{\mathsf{x}}(\tau), \dots, D_p \tilde{\mathsf{x}}(\tau)\big)$ zu $\tilde{E}$ gehört. Sie muß also insbesondere unendlich oft differenzierbar sein, was man in allgemeinen normierten Räumen der Funktion f nicht ohne weiteres ansieht. Wie man in vielen Fällen auf konstruktivem Wege zu derartigen Funktionen gelangt, die überdies noch verschärft Lipschitzsch sind, lehrt der folgende Satz.

Satz 6. (a) *Mit den Funktionen* f *und* g *und für* $\alpha \in \mathsf{R}$ *sind auch die Funktionen* $\mathsf{f} + \mathsf{g}$ *und* $\alpha \cdot \mathsf{f}$ *verschärft Lipschitzsch in* $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i \times \prod_{0 \leq i \leq p} H_i$.

(b) *Ist* U *eine stetige lineare Abbildung von* E *in* E, *dann ist mit* f *auch die Funktion* $\mathsf{U} \circ \mathsf{f}$ *verschärft Lipschitzsch in* $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i \times \prod_{0 \leq i \leq p} H_i$.

(a) Zunächst ist $\widetilde{H}$ nicht leer. Ferner beachte man, daß mit $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ und $\tilde{\mathfrak{g}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ auch $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) + \tilde{\mathfrak{g}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ und $\alpha \cdot \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ zu $\widetilde{E}$ gehören (Satz 1) und mit $t_0 \to \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ und $t_0 \to \tilde{\mathfrak{g}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ auch $t_0 \to \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) + \tilde{\mathfrak{g}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ und $t_0 \to \alpha \cdot \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ Regelfunktionen sind. Schließlich gelten nach Satz 1 die Ungleichungen

$$[(\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) + \tilde{\mathfrak{g}}(t_0, \tilde{\mathfrak{g}})) - (\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{y}}) + \tilde{\mathfrak{g}}(t_0, \tilde{\mathfrak{y}}))] \leqq (k_1 + k_2)\,[\tilde{\mathfrak{x}} - \tilde{\mathfrak{y}}],$$

$$[\alpha \cdot \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) - \alpha \cdot \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{y}})] \leqq |\alpha| \cdot k \cdot [\tilde{\mathfrak{x}} - \tilde{\mathfrak{y}}],$$

wo k_1, k_2, k LIPSCHITZ-Konstanten sind.

(b) Wiederum ist $\widetilde{H}$ nicht leer. Ferner bedenke man, daß mit $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ auch die Funktion $\mathsf{U} \circ \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ zu $\widetilde{E}$ gehört (Satz 2) und mit $t_0 \to \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ wegen der Stetigkeit von U auch $t_0 \to \mathsf{U} \circ \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ Regelfunktion ist. Endlich gilt nach Satz 2 die Ungleichung

$$[\mathsf{U} \circ \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) - \mathsf{U} \circ \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{y}})] \leqq \|\mathsf{U}\| \cdot k \cdot [\tilde{\mathfrak{x}} - \tilde{\mathfrak{y}}],$$

wo k eine LIPSCHITZ-Konstante ist.

Bemerkung. Der Satz gilt auch, wenn man die Werte „verschärft Lipschitzsch" überall durch „verschärft lokal Lipschitzsch" ersetzt.

Beispiele. 1. Gegeben sei eine Abbildung $\mathfrak{a}$ von $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i$ in E mit $\mathfrak{a}_{t_0} \in \widetilde{E}$; ferner sei $t_0 \to \mathfrak{a}_{t_0}$ Regelfunktion. Dann ist die Funktion

$$(t_0, \ldots, t_p, \mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_p) \to \mathfrak{a}(t_0, \ldots, t_p)$$

verschärft Lipschitzsch in $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i \times E^{p+1}$. In der Tat ist zunächst $\widetilde{H}$ nicht leer. Wegen $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) = \mathfrak{a}_{t_0}$ ist mit $\mathfrak{a}_{t_0}$ auch $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \mathfrak{x})$ zu $\widetilde{E}$ gehörig und mit $t_0 \to \mathfrak{a}_{t_0}$ auch $t_0 \to \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ Regelfunktion. Die LIPSCHITZ-Bedingung ist wegen $[\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) - \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{y}})] = 0$ in trivialer Weise erfüllt.

2. Für alle $0 \leqq i \leqq p$ ist die Funktion $(t_0, \ldots, t_p, \mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_p) \to \mathfrak{x}_i$ verschärft Lipschitzsch in $\mathsf{R}^{p+1} \times E^{p+1}$. Wiederum ist $\widetilde{H}$ nicht leer. Wegen $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) = \tilde{\mathfrak{x}}$ (bzw. $D_j \tilde{\mathfrak{x}}, j \geqq 1$) gehört (nach Satz 2) mit $\tilde{\mathfrak{x}}$ auch $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ zu $\widetilde{E}$; ferner ist $t_0 \to \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$ konstant, also Regelfunktion. Die LIPSCHITZ-Bedingung ist wegen $[\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}}) - \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{y}})] \leqq [\tilde{\mathfrak{x}} - \tilde{\mathfrak{y}}]$ mit der Konstanten 1 erfüllt.

3. Für jede Familie $(a_i)_{0 \leqq i \leqq p}$ von reellen Zahlen ist nach obigem und Satz 5 die Funktion $(t_0, \ldots, t_p, \mathfrak{x}_0, \ldots, \mathfrak{x}_p) \to \sum_{0 \leqq i \leqq p} a_i \mathfrak{x}_i$ verschärft Lipschitzsch in $\mathsf{R}^{p+1} \times E^{p+1}$ (vgl. 1., Beispiel 1).

4. Sei $p = 1$, $E = \mathsf{C}^3$, a eine Abbildung von $I_0 \times I_1$ in C mit $a_{t_0} \in \widetilde{\mathsf{C}}$; ferner sei $t_0 \to a_{t_0}$ Regelfunktion. Dann ist die Funktion

$$(t_0, t_1, (\xi_{0\varrho})_{1 \leqq \varrho \leqq 3}, \quad (\xi_{1\varrho})_{1 \leqq \varrho \leqq 3}) \to (\xi_{02}, \xi_{13} + a(t_0, t_1), \xi_{12})$$

verschärft Lipschitzsch in $(I_0 \times I_1) \times (\mathsf{C}^3 \times \mathsf{C}^3)$; denn es sind die Abbildungen

$$(t_0, t_1, (\xi_{0\varrho}), (\xi_{1\varrho})) \to (0, a(t_0, t_1), 0)$$

$$(t_0, t_1, (\xi_{0\varrho}), (\xi_{1\varrho})) \to (\xi_{01}, \xi_{02}, \xi_{03}) \to (\xi_{02}, 0, 0)$$

$$(t_0, t_1, (\xi_{0\varrho}), (\xi_{1\varrho})) \to (\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}) \to (0, \xi_{13}, \xi_{12})$$

nach obigem und Satz 5 verschärft Lipschitzsch, also auch deren Summe (vgl. § 1, Beispiel 2).

5. Die Funktion $(t_0, t_1, x_0, x_1) \to t_1 \cdot x_0$ ist nicht lokal verschärft Lipschitzsch; denn es ist $D_1^{n_1} \tilde{f}(t_0, \tilde{x}) = \varphi \cdot D_1^{n_1} \tilde{x} + n \cdot D_1^{n-1} \tilde{x}$, wobei φ die kanonische Abbildung von I_1 in $\mathbf{C}$ bedeutet. Wählen wir für $\tilde{x}$ speziell die (zu $\tilde{E}$) gehörige Funktion $t_1 \to e^{t_1}$, so geht $\tilde{f}(t_0, \tilde{x})$ in die Funktion

$$t_1 \to t_1 e^{t_1} + n e^{t_1} \geqq (1 + n) \cdot e$$

über. Wegen $\sup_{n \in \mathbf{N}} (1+n) \cdot e = \infty$ ist also $\tilde{f}$ keine Funktion (vgl. § 3, Bemerkung).

§ 5. Existenzsätze

Der folgende Satz ist eine wörtliche Übertragung des entsprechenden, für gewöhnliche Differentialgleichungen geltenden Satzes (vgl. [4]).

Hauptsatz. *Seien $(I_i)_{0 \leq i \leq p}$ eine Familie von nicht auf einen Punkt reduzierten, in $\mathbf{R}$ enthaltenen Intervallen, $t_* \in I_0$ der Anfang von I_0, $(H_i)_{0 \leq i \leq p}$ eine Familie von offenen, nicht leeren Teilen von E, $\mathfrak{f}$ eine in $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i \times \prod_{0 \leq i \leq p} H_i$ verschärft lokal* LIPSCHITZsche *Funktion.*

(a) *Zu jedem $\tilde{\mathfrak{x}}_* \in \tilde{H}$ existiert ein größtes Intervall $J \subset I_0$ mit dem Anfang $t_* \in J$ derart, daß in dem Produkt $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i'$ mit $I_0' = J$ und $I_j' = I_j$ $(1 \leq j \leq p)$ eine starke Lösung $\mathfrak{u}$ der Gleichung $D_0 \mathfrak{x} = \mathfrak{f}(t_0, \ldots, t_p, \mathfrak{x}, D_1 \mathfrak{x}, \ldots, D_p \mathfrak{x})$ existiert, die (bzw. deren Ableitung $D_j \mathfrak{u}$, $1 \leq j \leq p$) ihre Werte in H_0 (bzw. H_j) annimmt und in die Funktion $\tilde{\mathfrak{x}}_*$ im Punkt t_* übergeht; diese Lösung ist eindeutig.*

(b) *Wenn $J \neq J_0$, dann ist J ein halb-offenes Intervall $\langle t^*, \beta \langle$ von endlicher Länge; überdies ist für jeden kompakten Teil $K \subset \tilde{H}$ auch das reziproke Bild durch $t_0 \to \mathfrak{u}_{t_0}$ von K ein kompakter Teil von $\mathbf{R}$.*

(c) *Wenn J beschränkt ist, und wenn $\tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \mathfrak{u}_{t_0})$ in J beschränkt ist, dann hat $t_0 \to \mathfrak{u}_{t_0}$ einen linksseitigen Grenzwert $\tilde{\mathfrak{c}}$ im Endpunkt von J; wenn überdies $J \neq I_0$, dann ist $\tilde{\mathfrak{c}}$ ein Begrenzungspunkt von $\tilde{H}$ in $\tilde{E}$.*

Auf $\tilde{\mathfrak{f}}$ umgeschrieben, lauten die Voraussetzungen: Seien $I_0 \subset \mathbf{R}$ ein (nicht auf einen Punkt reduziertes) Intervall, $t_* \in I_0$ der Anfang von I_0, $\tilde{H}$ ein offener, nicht leerer Teil von $\tilde{E}$ (Satz 3 und Definition 2), $\tilde{\mathfrak{f}}$ eine in $I_0 \times \tilde{H}$ lokal LIPSCHITZsche Funktion (Definition 2). Daraus folgt die Existenz eines Intervalls $J \subset I_0$ und einer Lösung $\tilde{\mathfrak{u}}$ der Gleichung $\tilde{\mathfrak{x}}' = \tilde{\mathfrak{f}}(t_0, \tilde{\mathfrak{x}})$, die die Eigenschaften (a), (b), (c) — sinngemäß abgewandelt — des vorstehenden Satzes besitzt. Wir bilden eine in $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i'$ erklärte Funktion $\mathfrak{u}$ mit Werten in E, indem wir jedem Punkt (t_0, τ) des Produktes $\prod_{0 \leq i \leq p} I_i'$ den Wert der Funktion $\tilde{\mathfrak{u}}(t_0)$ für den Punkt τ zuordnen. Offensichtlich stimmt $t_0 \to \mathfrak{u}_{t_0}$ mit $\tilde{\mathfrak{u}}$ überein, woraus sich zusammen mit Satz 4 und Definition 1 die Behauptung ergibt.

Bemerkung. Man wird zunächst die Verwendung der mit einer Tilde versehenen Größen $\tilde{E}$, $\tilde{H}$, $\tilde{\mathfrak{c}}$ in der Formulierung des Satzes als problemfremd empfinden. Überlegt man sich jedoch, daß die Lösungsfläche durch gleich-

mäßiges Fortschreiten längs der I_0-Achse auf der ganzen Breite der Q-Achse entsteht, so erscheint diese Auffassung als die naturgegebene. (Siehe Fig. 1!)

Beispiele. 1. Wir betrachten die lineare homogene Gleichung $D_0 x = a x + b \cdot D_1 x$ mit konstanten Koeffizienten. Sie ist verschärft lokal Lipschitzsch (vgl. § 4, Beispiel 3). Die zugehörige gewöhnliche Gleichung lautet $\tilde{x}' = a\tilde{x} + b \cdot D_1 \tilde{x}$ oder $\tilde{x}' = A \cdot \tilde{x}$, wobei A die stetige lineare Abbildung $\tilde{x} \to a\tilde{x} + b \cdot D_1 \tilde{x}$ bedeutet (vgl. § 1, Beispiel 1). Wir setzen die Lösung $\tilde{u}$ in der Form $t_0 \to C(t_0, t_*) \cdot \tilde{x}_*$ an; $C(t_0, t_*)$ nennt man die Resolvente der linearen Gleichung. Nach bekannten Sätzen ist $C(t_0, t_*) = \exp\big(A \cdot (t_0 - t_*)\big)$, also $\tilde{u}(t_0) = \exp\big(A \cdot (t_0 - t_*)\big) \cdot \tilde{x}_* = \sum_{n \in \mathbf{N}} (A^n \cdot \tilde{x}_*) \frac{(t_0 - t_*)^n}{n!}$. Wir berechnen:

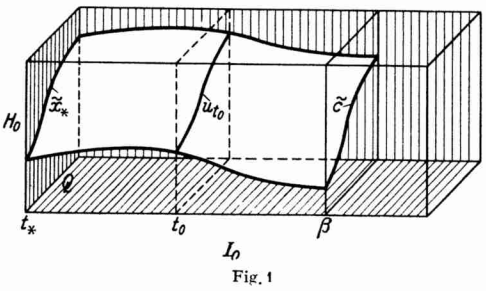

Fig. 1

$$A^n \tilde{x}_* = \sum_{0 \le \nu \le n} \binom{n}{\nu} a^\nu \cdot D_1^{n-\nu} \tilde{x}_* \cdot b^{n-\nu},$$

also

$$\tilde{u}(t_0) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}} \frac{1}{\nu!} a^\nu (t_0 - t_*)^\nu \cdot \sum_{\mu \in \mathbf{N}} \frac{1}{\mu!} b^\mu (t_0 - t_*)^\mu \cdot D_1^\mu \tilde{x}_*$$

und schließlich, wenn wir zu u übergehen,

$$u(t_0, t_1) = e^{a(t_0 - t_*)} \cdot \tilde{x}_*\big(t_1 + b(t_0 - t_*)\big).$$

2. Wir befassen uns jetzt mit der hyperbolischen Gleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = a(x, y),$$

in unserer Schreibweise

$$D_0 \xi_1 = \xi_2, \quad D_0 \xi_2 = D_1 \xi_3 + a(t_0, t_1), \quad D_0 \xi_3 = D_1 \xi_2.$$

Sie ist verschärft lokal Lipschitzsch (vgl. § 4, Beispiel 4). Die zugehörige gewöhnliche Gleichung lautet

$$\tilde{\xi}_1' = \tilde{\xi}_2, \quad \tilde{\xi}_2' = D_1 \tilde{\xi}_3 + a_{t_0}, \quad \tilde{\xi}_3' = D_1 \tilde{\xi}_2$$

oder $(\tilde{\xi}_\varrho')_{1 \le \varrho \le 3} = A \cdot (\tilde{\xi}_\varrho)_{1 \le \varrho \le 3} + \mathfrak{b}(t_0)$, wobei A die stetige homogene lineare Abbildung $(\tilde{\xi}_\varrho)_{1 \le \varrho \le 3} \to (\tilde{\xi}_2, D_1 \tilde{\xi}_3, D_1 \tilde{\xi}_2)$, $\mathfrak{b}(t_0)$ die Funktion $t_1 \to \big(0, a(t_0, t_1), 0\big)$ bedeuten (vgl. § 1, Beispiel 2). Wir setzen die Lösung $\tilde{\mathfrak{u}}$ der homogenen Gleichung in der Form $t_0 \to \tilde{C}(t_0, t_*) \cdot \tilde{\mathfrak{x}}_*$ an, wo wiederum $C(t_0, t_*)$ die Resolvente der linearen Gleichung ist. Wie bekannt, läßt sich $C(t_0, t_*)$ in der Gestalt $\exp\big(A \cdot (t_0 - t_*)\big)$, also $\tilde{\mathfrak{u}}(t_0)$ in der Gestalt $\exp\big(A \cdot (t_0 - t_*)\big) \cdot \tilde{\mathfrak{x}}_* = \sum_{n \in \mathbf{N}} (A^n \cdot \tilde{\mathfrak{x}}_*) \frac{(t_0 - t_*)^n}{n!}$ schreiben. Die Berechnung ergibt

$$A^{2n} \cdot \tilde{\mathfrak{x}}_* = (D_1^{2n-1} \tilde{\xi}_{*3}, D_1^{2n} \tilde{\xi}_{*2}, D_1^{2n} \tilde{\xi}_{*3}) \quad (n \in \mathbf{N}^*),$$

$$A^{2n+1} \cdot \tilde{\mathfrak{x}}_* = (D_1^{2n} \tilde{\xi}_{*2}, D_1^{2n+1} \tilde{\xi}_{*3}, D_1^{2n+1} \tilde{\xi}_{*2}) \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Beschränken wir uns auf die allein interessierende erste Komponente und bezeichnen ihren Wert für den Punkt (t_0, t_1) (ohne Verwechslungen befürchten zu müssen) mit $u(t_0, t_1)$, so kommt unter Beachtung von $\tilde{\xi}_{*2} = D_1 \tilde{\xi}_{*1}$ schließlich

$$u(t_0, t_1) = \sum_{n \in \mathbf{N}} D_1^{2n} \cdot \tilde{\xi}_{*1}(t_1) \cdot \frac{(t_0 - t_*)^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n \in \mathbf{N}} D_1^{2n} \tilde{\xi}_{*2}(t_1) \frac{(t_0 - t_*)^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\tilde{\xi}_{*1}(t_1 + (t_0 - t_*)) + \tilde{\xi}_{*1}(t_1 - (t_0 - t_*)) \right) + \frac{1}{2} \int_{t_1 - (t_0 - t_*)}^{t_1 + (t_0 - t_*)} \tilde{\xi}_{*2}(\tau)\, d\tau .$$

§ 6. Beziehungen zum Satz von CAUCHY-KOWALEWSKI

Im Falle $E = \mathbf{R}^n$ zerfällt die partielle Differentialgleichung

$$D_0 \mathbf{x} = \mathbf{f}(t_0, \ldots, t_p, \mathbf{x}, D_1 \mathbf{x}, \ldots, D_p \mathbf{x})$$

in ein endliches Normalsystem

$$D_0 \xi_\varrho = f_\varrho \left(t_0, \ldots, t_p, (\xi_\sigma)_{1 \leqq \sigma \leqq n}, (D_1 \xi_\sigma)_{1 \leqq \sigma \leqq n}, \ldots, (D_p \xi_\sigma)_{1 \leqq \sigma \leqq n} \right) \quad (1 \leqq \varrho \leqq n)$$

von skalaren partiellen Differentialgleichungen, das man unter geeigneten Voraussetzungen nach dem CAUCHY-KOWALEWSKIschen Verfahren (vgl. [2] und [5]) lösen kann. Diese bestehen wesentlich in der Holomorphie der rechten Seiten des obigen Gleichungssystems und der Anfangswerte, während für die Anwendung unseres Verfahrens die rechten Seiten einer verschärften LIPSCHITZ-Bedingung genügen und die Anfangswerte unendlich oft differenzierbar und ableitungsbeschränkt sein müssen. Dies bedeutet zwar ebenfalls die Holomorphie der Anfangswerte und (in gewissem Sinne) der rechten Seiten des Gleichungssystems, noch dazu mit einer sehr einschneidenden Wachstumsbeschränkung der Koeffizienten der Potenzreihen, aber nur hinsichtlich der Variablen $t_1, \ldots, t_p$; bezüglich t_0 genügt es, Regelfunktionen vorauszusetzen.

Die unterschiedlichen Hypothesen bewirken naturgemäß unterschiedliche Eigenschaften der Lösungen. Der Satz von CAUCHY-KOWALEWSKI garantiert von vornherein die Existenz einer holomorphen Lösung bezüglich aller Variablen $t_0, \ldots, t_p$, während der Hauptsatz dieser Arbeit die Holomorphie, genauer sogar die unbeschränkte Differenzierbarkeit und Ableitungsbeschränktheit bezüglich der Variablen $t_1, \ldots, t_p$, hinsichtlich der Variablen t_0 jedoch nur die Differenzierbarkeit auf dem Komplement einer abzählbaren Menge (Stammfunktion einer Regelfunktion) sicherstellt. Trotz der etwa bezüglich t_0 auftretenden Knickstellen bleibt dabei in bemerkenswerter Weise die Eindeutigkeit — solange es sich um starke Lösungen handelt — gewährleistet. Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß nach CAUCHY-KOWALEWSKI die Existenz der Lösung nur in einer Umgebung eines Punktes $(t_0, \ldots, t_p)$ nachgewiesen wird, während die Lösung nach unserem Verfahren auf der gesamten Breite Q eines p-dimensionalen Intervalls in einer Umgebung des Anfangspunktes t_* erklärt werden kann.

Beispiele. 1. Die rechte Seite der Gleichung

$$D_0 x = |t_0| \cdot t_1$$

ist eine in $\mathbf{R}^4$ erklärte, verschärft LIPSCHITZsche, jedoch nicht holomorphe Funktion $(t_0, t_1, x_0, x_1) \to |t_0| \cdot t_1$ mit Werten in $\mathbf{R}$. Während der Existenzbeweis von CAUCHY-KOWALEWSKI versagt, liefert unser Satz als Lösung die im Punkt t_* in $\tilde{x}_*$ übergehende Funktion

$$(t_0, t_1) \to \tfrac{1}{2}(t_0|t_0| - t_*|t_*|) \cdot t_1 + \tilde{x}_*(t_1),$$

die allerdings nur bezüglich t_1 holomorph ist.

2. Die rechte Seite der Gleichung

$$D_0 x = t_0(1 - t_1)^{\frac{1}{2}}$$

ist eine in $\mathbf{R} \times]-1, 1[\times \mathbf{R}^2$ erklärte holomorphe Funktion

$$(t_0, t_1, x_0, x_1) \to t_0(1 - t_1)^{\frac{1}{2}}$$

mit Werten in $\mathbf{R}$, die wegen

$$\left|(D^n)_0^{t_1}(1 - t_1)^{\frac{1}{2}}\right| \geqq (n-1)!/2^n \qquad (n \geqq 1)$$

in keinem Punkte von der Form $(t_0, 0, x_0, x_1)$ enthaltenden Teil von $\mathbf{R} \times]-1, 1[\times \mathbf{R}^2$ verschärft lokal Lipschitzsch ist. Während unser Existenzbeweis versagt, liefert der CAUCHY-KOWALEWSKIsche Satz als Lösung die im Punkt t_* in $\tilde{x}_*$ übergehende holomorphe Funktion

$$(t_0, t_1) \to \tfrac{1}{2}(t_0^2 - t_*^2) \cdot (1 - t_1)^{\frac{1}{2}} + \tilde{x}_*(t_1).$$

3. Die rechte Seite der Gleichung

$$D_0 x = t_0 t_1$$

ist eine in $\mathbf{R}^4$ erklärte holomorphe, verschärft LIPSCHITZsche Funktion $(t_0, t_1, x_0, x_1) \to t_0 t_1$ mit Werten in $\mathbf{R}$. Sowohl der CAUCHY-KOWALEWSKIsche als auch unser Satz liefern als Lösung die im Punkt t_* in $\tilde{x}_*$ übergehende holomorphe Funktion

$$(t_0, t_1) \to \tfrac{1}{2}(t_0^2 - t_*^2) \cdot t_1 + \tilde{x}_*(t_1),$$

falls $\tilde{x}_*$ holomorph (bei CAUCHY-KOWALEWSKI) bzw. unendlich oft differenzierbar und ableitungsbeschränkt (bei uns) ist.

Literatur

[1] WAŻEWSKI, T.: Über die Bedingungen der Existenz der Integrale partieller Differentialgleichungen erster Ordnung. Math. Z. **43** (1938). — [2] GOURSAT, E.: Cours d'analyse mathématique, tome II, p. 360. Paris 1942. — [3] BOURBAKI, N.: Topologie générale, chap. IX, X. Paris 1948 bzw. 1949. — [4] BOURBAKI, N.: Fonctions d'une variable réelle, chap. IV. Paris 1951. — [5] SAUER, R.: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1952.

München, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 10. Februar 1956)