Werk

Titel: Zur Darstellung von Riemannschen Flächen durch Streckenkomplexe.

Autor: Huckemann, Friedrich

Jahr: 1956

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0065|log28

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

HUCKEMANN, F.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 215—239 (1956)

Zur Darstellung von Riemannschen Flächen durch Streckenkomplexe*)

Von
FRIEDRICH HUCKEMANN

Einleitung

§ 1. Bekannt ist die Konstruktion des Streckenkomplexes für schlichtartige (einfach zusammenhängende) RIEMANNsche Flächen, deren Windungspunkte sich in endlich viele Grundpunkte projizieren[1]): Man verbindet diese Punkte durch eine geschlossene doppelpunktfreie JORDAN-Kurve L und zerschneidet die Fläche über L in allen ihren Blättern; sie zerfällt so in (im allgemeinen unendlich viele) Halbblätter, *Innengebiete* und *Außengebiete*, deren Zusammenhang auf der Fläche man in einem Streckenkomplex wiedergibt. Der Streckenkomplex spiegelt die Verheftung der Halbblätter über gewissen Teilbogen von L wider: zu einem bestimmten Streckenkomplex gehört bei gegebener Zerschneidungskurve und darauf gegebenen Grundpunkten stets eine bis auf zyklische Vertauschung der Grundpunkte wohlbestimmte RIEMANNsche Fläche. $\mathfrak{M}$ sei die Klasse aller einfach zusammenhängenden Flächen, deren Windungspunkte sich in endlich viele Grundpunkte projizieren.

Der Streckenkomplex erwies sich in vielen Problemen der Wertverteilungslehre als ein sehr kräftiges Hilfsmittel, denn er gestattet, jede Fläche $M \in \mathfrak{M}$ durch einen Streckenkomplex in übersichtlicher Weise darzustellen. Allerdings versagt dieses Hilfsmittel zunächst bei RIEMANNschen Flächen, deren Verzweigungsstellen nicht mehr über endlich vielen Grundpunkten liegen, denn dieser Streckenkomplexbegriff S ist auf die Klasse $\mathfrak{M}$ zugeschnitten; andererseits sind die nicht über endlich vielen Grundpunkten verzweigten Flächen natürlich von besonderem Interesse für die Theorie der Wertverteilung: eine Fläche $M \in \mathfrak{M}$ hat als Randstellen beispielsweise nur logarithmische Windungspunkte. Nun gibt der Streckenkomplex nur eine topologische Darstellung des Aufbaus einer RIEMANNschen Fläche aus *Halbblättern*; man wird also fragen, ob es denn nicht möglich sei, auch solche Flächen durch einen Streckenkomplex darzustellen, die zwar die Eigenschaft, nur über endlich vielen Punkten verzweigt zu sein, nicht haben, sich aber immer noch aus Halbblättern aufbauen, also Flächen sind, deren Verzweigungspunkte und Randstellen über einer geschlossenen doppelpunktfreien JORDAN-Kurve L

*) Die Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert; ich sage dafür meinen Dank.

[1]) NEVANLINNA [4], [5] Kap. XI § 2; ELFVING [1]. Man verwendet die Konstruktion hauptsächlich bei der Unterklasse der einfach zusammenhängenden Flächen aus der Klasse der schlichtartigen Flächen.

der Ebene liegen. Es zeigt sich, daß mit einer geeigneten Definition des Streckenkomplexes, die von der bisher gegebenen in einigen Punkten abweicht, die Frage positiv zu beantworten ist.

§ 2. Auch in der Vergangenheit wurden schon Abänderungen und Verallgemeinerungen des Streckenkomplexbegriffes vorgenommen, um den Bereich der Flächen zu erweitern, die sich in einem Streckenkomplex darstellen lassen: Man ordnete jedem Grundpunkt a_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ einer nur über diesen Punkten verzweigten Fläche M ein einfach zusammenhängendes Gebiet G_ν der Art zu, daß $a_\nu \in G_\nu$ und daß zwei verschiedene Gebiete G_ν, G_μ positiven Abstand voneinander haben; schiebt man nun einen Windungspunkt über a_ν in einen beliebigen Punkt $a_\nu' \in G_\nu$ — wobei verschiedene Windungspunkte der Sorte a_ν auch über verschiedene Punkte geschoben werden können — so entsteht aus M eine Fläche M'; dieser wurde der Streckenkomplex der Fläche M zugeordnet. Eine solche Verwendung des Streckenkomplexes findet sich mehrfach in der letzten Zeit.

Eine weitere naheliegende Erweiterung bestände darin, zuzulassen, daß ein Gebiet G_ν mit einem anderen G_μ einen Berührungspunkt gemeinsam habe. Eine Begriffsbildung dieser Art wurde schon von ULLRICH in Vorlesungen und Vorträgen verwendet, sie findet sich in der Literatur später bei seinem Schüler HANCK[2]) und bei TEICHMÜLLER[2]), jedoch in einer Weise, die das Hauptaugenmerk auf bestimmte Anwendungsmöglichkeiten richtet. Dies bedingte, daß die eigentliche Definition eines erweiterten Streckenkomplexbegriffes unterblieb, denn der Blick auf die Anwendung brachte es mit sich, daß der erweiterte Begriff nur so weit beleuchtet wurde, als für die Anwendung erforderlich war.

§ 3. Es erscheint nunmehr natürlich, einen erweiterten Streckenkomplexbegriff axiomatisch einzuführen. Eine Anregung zu dieser Arbeit verdanke ich Gesprächen mit Miss M. L. CARTWRIGHT über diesen Gegenstand, in denen mir das Fehlen einer allgemeinen Definition für den erweiterten Begriff des Streckenkomplexes deutlich wurde. Es zeigt sich, daß eine geeignete Definition eine weit umfassendere Flächenklasse der streckenkomplexmäßigen Darstellung zugänglich macht, als man nach den bisherigen Erweiterungen vielleicht erwartet hätte: Nicht nur ist es nicht erforderlich, daß überhaupt nur über endlich vielen Punkten Verzweigungen vorkommen, sondern es ist nicht einmal notwendig, daß am Rand der einzelnen Halbblätter nur endliche viele Verzweigungspunkte oder Randstellen liegen.

Ich beschränke mich auf diejenigen einfach zusammenhängenden Flächen, die von Funktionen erzeugt werden, welche als Träger eines der drei schlichten Normalgebiete (Einheitskreis, punktierte Ebene, Vollebene) haben, wobei im Fall des Einheitskreises als Träger die Funktion auf keinen Teilbogen des Einheitskreises stetig fortsetzbar sei (so daß also kein JORDAN-Bogen ein Randstück der Fläche bildet).

Zur sprachlichen Vereinfachung will ich die Windungspunkte und Randstellen einer RIEMANNschen Fläche unter den umfassenden Begriff *Singu-*

[2]) HANCK [2], TEICHMÜLLER [7].

laritäten der Fläche unterordnen. Endlich-vielblättrige Windungspunkte sind algebraische Singularitäten; alle übrigen Singularitäten sind transzendent, sie sind insbesondere also keine (inneren) Punkte der Fläche.

§ 4. Ich betrachte am Anfang die topologische Abbildung einfach zusammenhängender RIEMANNscher Flächen, deren Singularitäten nur über einer geschlossenen doppelpunktfreien JORDAN-Kurve L liegen, in die schlichte Ebene (§ 5). Von dort ergeben sich die charakteristischen Eigenschaften des Streckenkomplexes S^*, welche der axiomatischen Einführung des Begriffes zugrunde liegen (§§ 6—9); ebenso wird man auf die Vorschrift geführt, die über die Zuordnung von Streckenkomplex $S^*(W)$ und RIEMANNscher Fläche W zu geben sind (§ 10). Danach wende ich mich der Frage zu, welche Gestalt ein Streckenkomplex S^* haben muß, damit er eine einfach zusammenhängende Fläche darstellt (§ 11); hier wird sich eine notwendige und hinreichende Bedingung ergeben (Satz 1). Eine topologische Abbildung einer im Streckenkomplex dargestellten RIEMANNschen Fläche (§ 12) erlaubt, ein genaues Entsprechen von Randstellen der Fläche und gewissen Strukturen des Streckenkomplexes zu erkennen (§§ 13—19, Sätze 2, 3). Zum Schluß werde ich ein paar typische Beispiele von Flächen geben, die sich nun im Streckenkomplex darstellen lassen (§ 20), und den erweiterten Streckenkomplexbegriff dem bisherigen gegenüberstellen (§ 21).

Konstruktion des Streckenkomplexes und seine Eigenschaften

§ 5. Gegeben sei eine einfach zusammenhängende RIEMANNsche Fläche W als Überlagerung der w-Ebene; ihre sämtlichen Singularitäten mögen über einer geschlossenen doppelpunktfreien JORDAN-Kurve L liegen, so daß also in jedem Punkt P über $p \notin L$ entweder $w-p$ oder w^{-1} Ortsuniformisierende ist. Es werde ferner angenommen, daß in keinem Blatt der Fläche ein Teilbogen von L die Fläche berande. Ausstanzen über L zerlegt W in Halbblätter, die auf W über gewisse Teilbogen von L hinweg zusammenhängen. Sie werden als *Innengebiete* bzw. *Außengebiete* bezeichnet, je nachdem sie zur Linken oder zur Rechten liegen, wenn L in bestimmtem Sinn orientiert wird. Wird W durch konforme Abbildung $z(w)$ in das schlichte Normalgebiet — die Vollebene, die punktierte Ebene $z \neq \infty$ oder den Einheitskreis $|z|<1$ — übergeführt, so erhält man in den Bildern der Halbblätter eine aus Kurvenpolygonen, den *Elementarpolygonen*, gebildete Figur F, die die Verheftung der Halbblätter widerspiegelt. Jede mit F topologisch äquivalente Figur in der Ebene wird als *Netz* N der Fläche W bezeichnet; N entsteht aus W durch eine gewisse topologische Abbildung $h(w)$, umgekehrt W aus N durch die eindeutige Funktion $h^{-1}(z)$. Die Gesamtheit der Randpunkte der Figur F bzw. des topologischen Bildes N heißt der *Rand* des Netzes; die Bilder der über L liegenden Kurven heißen *Netzkurven* oder *Netzlinien*, sie sind Berandungslinien der Elementarpolygone. Ist die Fläche W nicht-kompakt — ist also das schlichte Normalgebiet die punktierte Ebene oder der Einheitskreis — und wird F als Netz gewählt, so ist natürlich der Punkt $z=\infty$ bzw.

die Kreislinie $|z| = 1$ der Rand des Netzes. Der Schnittpunkt P von n Netzlinien ($2 \leq n < \infty$) ist vermittels $h(w)$ Bild eines algebraischen Windungspunktes, in dem n Blätter zusammenhängen; in P treffen $2n$ Elementarpolygone zusammen, solche Punkte nennen wir *Eckpunkte* des Netzes. Ist $N = F$, so ist P ein Kreuzungspunkt der zu $z(w)$ inversen meromorphen Funktion $w(z)$, die die Fläche W erzeugt. Ein keinen Eckpunkt im Innern enthaltendes Stück s einer Netzkurve zwischen zwei Eckpunkten, einem Eckpunkt und dem Rand, oder zwischen Randpunkten des Netzes nennen wir eine *Seite* des Netzes. Ist $N = F$, so ist s Bild eines offenen Regularitätsbogens von $z(w)$. Zwei Elementarpolygone heißen *benachbart*, wenn sie eine Netzseite gemeinsam haben.

Eine Folge von Punkten lauter verschiedener Netzseiten häuft sich nur gegen den Rand des Netzes; wir drücken dies kurz so aus: *Die Seiten des Netzes häufen sich nur gegen seinen Rand.* Zum Beweis dieser topologischen Behauptung darf $N = F$ angenommen werden. Es sei z_0 ein Häufungspunkt von Punkten aus lauter verschiedenen Netzseiten. Dann gibt es entweder eine Folge z_ν von Eckpunkten des Netzes [also von Kreuzungspunkten der Funktion $w(z)$] der Art, daß $\lim z_\nu = z_0$ — in diesem Fall ist z_0 wegen $w'(z_\nu) = 0$ kein innerer Punkt des schlichten Normalgebietes F — oder es gibt ganze abgeschlossene Stücke l_ν auf Netzseiten s_ν, so daß ebenfalls $z_\nu \in l_\nu$ und $\lim z_\nu = z_0$, während Eckpunkte am Ende der Seiten s_ν den Punkt z_0 nicht als Häufungspunkt haben — aber auch diese Annahme schließt aus, daß z_0 ein innerer Punkt von F sei, denn eine (hinreichend kleine) Umgebung eines solchen enthält höchstens von endlich vielen Netzseiten Stücke.

§ 6. Die Verheftung der Halbblätter überträgt sich auf das Aneinanderstoßen der Elementarpolygone im Netz und kann in folgender Weise durch einen *Streckenkomplex* dargestellt werden: In jedem Elementargebiet wird ein Punkt, *Knoten*, markiert, mit einem Ring in den Bildern von Innengebieten, mit einem Kreuz in den Bildern von Außengebieten. Wie die Netzseiten häufen sich die Knoten nur gegen den Rand des Netzes. Jeder Ring wird mit den Kreuzen in den benachbarten Elementarpolygonen, jedes Kreuz mit den benachbarten Ringen durch JORDAN-Bögen, *Glieder*, in der Weise verbunden, daß

(1 a) *jede Netzseite genau einmal (in einem inneren Punkt) geschnitten wird,*

(1 b) *außer in den Ringen und Kreuzen keine Überschneidungen der Glieder auftreten.*

In einem Knoten laufen k Glieder zusammen, wenn k die Anzahl der (Netz-) Seiten am Rand des Elementarpolygons ist, in dem der Knoten liegt; es ist $k \geq 2$, weil kein Teilbogen von L die Fläche W berandet, k kann jedoch unendlich sein. Die nach (1 a), (1 b) erzeugte Figur $S^*(W)$ heißt *Streckenkomplex* der Fläche W[3]).

[3]) Im Gegensatz zum Streckenkomplex S kommen im Streckenkomplex S^* keine Mehrfachbindungen vor: zwei Knoten sind nicht durch benachbarte Glieder verbunden.

Mitunter ist es zweckmäßig, bei der Konstruktion des Streckenkomplexes die Bedingung (1 a) zu verschärfen: Jedem im Sinn der Orientierung auf L von a nach b durchlaufenen offenen Teilbogen $I(a, b)$ werde ein Punkt $l(a, b) \in I(a, b)$ so zugeordnet, daß $l(a, b)$ in beiden Argumenten stetig ist und daß mit $c \in I(a, b)$ auch $l(a, c) \in I\{a, l(a, b)\}$ und $l(c, b) \in I\{l(a, b), b\}$; dies bedeutet eine gewisse Monotonieeigenschaft der Funktion $l(a, b)$ in beiden Argumenten. Diese Zuordnung ist möglich: Ist L' die Kreislinie $|w| = 1$, orientiert in Richtung wachsenden Arguments, so wähle man mit $0 < \psi - \varphi < 2\pi$ einfach $l(e^{i\varphi}, e^{i\psi}) = e^{\frac{1}{2}i(\varphi+\psi)}$ und übertrage die Zuordnung durch topologische Abbildung auf die gegebene Kurve L. Eine Verschärfung von (1 a) ist die zu (1 a) zusätzliche Forderung

(1 a') *Eine Netzseite, die vermittels $h(w)$ Bild des Teilbogens $I(a, b) \subset L$ ist, werde vom Glied des Streckenkomplexes im Punkt $h\{l(a, b)\}$ geschnitten.*

§ 7. Aus (1 a), (1 b) folgt, daß ein innerer Punkt eines Gliedes nie Häufungspunkt von Punkten anderer Glieder ist. Es folgt insbesondere, daß Häufungsmengen von Gliedern JORDAN-Bögen bilden, die ohne eine Netzseite zu treffen von Knoten aus zum Rand des Netzes führen und, eventuell von Knoten abgesehen, im Innern des Netzes keine gemeinsamen Punkte haben. [Man bilde ein Elementarpolygon mit unendlich vielen Seiten topologisch ab auf einen Kreis, in dem die Bilder der Glieder auf Radien liegen.] Wir nennen diese JORDAN-Bögen *Strahlen* des Streckenkomplexes S^*. Jeder Strahl liegt also in einem wohlbestimmten Elementarpolygon, und die Menge der Strahlen ist nirgends dicht.

Diejenigen keinen Knoten im Inneren enthaltenden Teilgebiete der Ebene, in die die Glieder und die Strahlen des Streckenkomplexes S^* das Netz zerlegen, heißen *Elementargebiete*[4]; die Glieder und Strahlen am Rand eines Elementargebietes heißen seine *Seiten*, die am Rand liegenden Knoten seine *Eckknoten*. Weil jeder Strahl einen Knoten mit dem Rand des Netzes verbindet, können höchstens zwei Strahlen ein Elementargebiet beranden; ein Elementargebiet, das genau einen Strahl als Seite besitzt, hat unendlich viele Seiten, weil die Gliederfolge seines Randes gegen den Netzrand streben muß; ein Elementargebiet mit zwei verschiedenen Strahlen als Seiten hat dagegen nur endlich viele Seiten, weil die Knoten, die zu den beiden Strahlen gehören, über eine endliche Zahl von Gliedern miteinander verbunden sind. Ein Elementargebiet mit zwei Strahlen am Rand nennen wir *Strahl-Elementargebiet*. Die Elementargebiete, deren Rand eine endliche — und somit gerade — Anzahl $2n$ von *Gliedern* bildet, entsprechen den Eckpunkten des Netzes, also den n-blättrigen algebraischen Windungspunkten der Fläche W; danach heißen sie *algebraische Elementargebiete*[5]. [Es ist stets $n \geqq 2$, weil für $n = 1$ ja auf W keine Singularität vorliegt, also kein Eckpunkt des Netzes entstehen kann; vgl. Fußnote [3]).] Die Koordinate a des einem algebraischen Elementargebiet

[4]) Elementargebiete können Randpunkte des Netzes am Rand enthalten.

[5]) Ein endlich-vielseitiges Elementargebiet im Streckenkomplex S^* ist nicht notwendig ein algebraisches Elementargebiet.

entsprechenden algebraischen Windungspunktes auf W heißt *Koordinate* des Elementargebietes; dem Elementargebiet ist die komplexe Zahl a *zugeordnet.* Ein Elementargebiet mit unendlich vielen Seiten werde in Anlehnung an die Terminologie, wie sie im Zusammenhang des Streckenkomplexes S üblich ist, *logarithmisches Elementargebiet* genannt[6]; es hat mit dem Rand des Netzes (wenigstens) einen Randpunkt gemeinsam, weil die Netzseiten sich nicht im Innern des Netzes häufen; ebenso hat trivialerweise ein Strahl-Elementargebiet mit dem Rand des Netzes einen Randpunkt gemeinsam. Ein logarithmisches Elementargebiet bedeckt ein Gebiet der z-Ebene, in dem alle Netzlinien, ein Strahl-Elementargebiet bedeckt ein Gebiet, in dem überhaupt alle Wege, die zum Rand des Netzes laufen, für $h^{-1}(z)$ Zielwege mit demselben Zielwert sind. Der Zielwert a ist in allen Halbblättern, deren Knoten Eckknoten des (logarithmischen oder Strahl-) Elementargebietes sind, eine Singularität der Fläche W, und natürlich eine transzendente; das Elementargebiet ist dieser transzendenten Singularität zugeordnet, wie ein algebraisches Elementargebiet einer algebraischen Singularität der Fläche zugeordnet ist. Die Zahl a heißt *Koordinate* des (logarithmischen oder Strahl-) Elementargebietes; sie ist ihm *zugeordnet.* Ein Strahl-Elementargebiet hat zwei Strahlen des Streckenkomplexes als Seiten, jeder ist einer Häufungsstelle von Singularitäten am Rand eines Halbblattes zugeordnet; eine kleine Überlegung zeigt, daß die Koordinaten beider Häufungsstellen gleich sind[7].

Jedem Glied des Streckenkomplexes, das einen Ring mit einem Kreuz verbindet, entspricht ein bestimmter Teilbogen von L, über den die den beiden Knoten zugehörigen Halbblätter verheftet sind; weil von jedem Knoten wenigstens zwei Glieder ausgehen, trennt jedes Glied zwei Elementargebiete, und zwar die beiden, die den beiden Singularitäten am Ende des Teilbogens zugeordnet sind. Zwei Glieder, die beim Umlauf um einen Knoten unmittelbar aufeinander folgen, heißen *benachbart*; ebenso heißen zwei Elementargebiete, die durch ein Glied getrennt werden, benachbart. Die Glieder des Streckenkomplexes S^* können sich, wie wir sahen — anders als die Seiten des Netzes — im Innern des Netzes auf Strahlen häufen; dies tritt genau dann ein, wenn die RIEMANNsche Fläche W Halbblätter enthält, auf deren Rand unendlich viele Singularitäten liegen. Den Häufungspunkten der Singularitäten entsprechen Häufungsmengen von Gliedern und somit von Elementargebieten.

§ 8. Wir schließen im folgenden den im wesentlichen bekannten Fall aus, die RIEMANNsche Fläche W enthalte nur endlich viele Blätter; sie würde als schlichtartige Fläche nur über endlich vielen Punkten verzweigt sein, also schon durch den Streckenkomplex S darstellbar sein. *Wir nehmen ferner an,*

---

[6]) Im Gegensatz zu den Verhältnissen beim Streckenkomplex S braucht einem logarithmischen Elementargebiet im Streckenkomplex S^* als Singularität kein logarithmischer Windungspunkt zuzugehören; auch kann ein Strahl Seite eines logarithmischen Elementargebietes sein.

[7]) Im § 19 werden wir sehen, daß beide Häufungsstellen dieselbe Randstelle definieren.

der unendlich ferne Punkt U der z-Ebene sei der einzige Randpunkt des Netzes; dies läßt sich durch topologische Abbildung stets erreichen.

§ 9. Der Streckenkomplex S^* hat nun offenbar folgende Eigenschaften:

1°. *Die Anzahl der Knoten ist abzählbar unendlich und der Punkt U ist der einzige Häufungspunkt der Knoten.*

2°. *Jedes Glied verbindet einen Ring mit einem Kreuz.*

3°. *Verschiedene Glieder haben außer den Knoten keine gemeinsamen Punkte.*

4°. *Der Streckenkomplex ist zusammenhängend: zwei Knoten sind stets über eine Gliederfolge verbunden.*

5°. *Zwei Knoten sind nicht durch benachbarte Glieder verbunden*[8]).

6°. *Von jedem Knoten gehen mindestens zwei Glieder aus.*

7°. *Kein von einem Knoten verschiedener Punkt eines Gliedes ist Häufungspunkt von Punkten anderer Glieder.* Es folgte

a) *jedes Glied trennt zwei Elementargebiete;*

b) *Häufungsmengen von Gliedern liegen nur auf punktfremden* JORDAN-*Kurven, den Strahlen, die von einem Knoten aus zum Punkt U führen.*

8°. *Jedem Elementargebiet E_ν ist eine komplexe Zahl a_ν zugeordnet.*

9°. *Zwei benachbarten Elementargebieten sind verschiedene Zahlen zugeordnet.*

10°. *Wird ein Ring R genau einmal in positivem Sinn umlaufen, so folgen die den Elementargebieten mit dem Eckknoten R zugeordneten Zahlen in solcher Weise aufeinander, daß die Kurve L genau einmal im Sinn der Orientierung durchlaufen wird; dasselbe gilt beim Umlauf um ein Kreuz in negativem Sinn.*

11°. *Jedem Strahl σ_γ ist eine komplexe Zahl a_γ zugeordnet, nämlich der Grenzwert der Zahlen, die den sich dort häufenden Elementargebieten zugeordnet sind.* [Denn eine Häufungsmenge der Glieder ist auch eine Häufungsmenge von Elementargebieten, und der Grenzwert der Zahlen, die einer gegen σ_γ konvergierenden Folge von Elementargebieten zugeordnet sind, existiert und ist unabhängig von der Folge (vgl. die Ordnungseigenschaft 10°).]

12°. *Der zur Zahl a_ν* bzw. *a_γ gehörige Punkt der Zahlenebene liegt auf einer geschlossenen doppelpunktfreien* JORDAN-*Kurve L.*

13°. *Ein innerer Punkt G^μ eines Gliedes g_ν^μ, das ein Elementargebiet E_ν berandet, kann mit einem inneren Punkt T_ν von E_ν falls E_ν algebraisches, mit dem Randpunkt ∞ von E_ν falls E_ν nicht algebraisches Elementargebiet ist*[9]), *so durch einen — bis eventuell auf den Endpunkt — in E_ν verlaufenden* JORDAN-*Bogen s_ν^μ verbunden werden, daß die Gesamtheit der Bögen s_ν^μ bis auf die Punkte G^μ, T_ν punktfremd sind und sich nicht im Endlichen häufen*[10]).

Die einem Elementargebiet bzw. einem Strahl zugeordnete komplexe Zahl heißt *Koordinate* des Elementargebietes bzw. des Strahles. Der einfacheren

[8]) Vgl. Fußnote [3]).

[9]) Nach 1°, 7°b ist im letzten Fall U ein Randpunkt des Elementargebietes, nach 4° hat es nur einen Randpunkt bei U.

[10]) Wir sagen: Ein Punkt P ist *Häufungspunkt* einer unendlichen Menge von JORDAN-Bögen (Gebieten), wenn es eine Folge von Punkten aus lauter verschiedenen JORDAN-Bögen (Gebieten) gibt, die den Punkt P als Häufungspunkt hat.

Sprechweise wegen bezeichnen wir im folgenden die Elementargebiete und ihre Häufungsmengen einfach auch mit den zugehörigen Koordinaten.

Die Eigenschaften 1° bis 13° sind charakteristisch für den Streckenkomplex S^* einer einfach zusammenhängenden RIEMANNschen Fläche[11]).

Zuordnung der RIEMANNschen Fläche zum Streckenkomplex

§ 10. Es sei nämlich eine orientierte geschlossene doppelpunktfreie JORDAN-Kurve L gegeben, die die Ebene in zwei Gebiete, die Halbblätter, zerlegt, sowie ein Streckenkomplex S^*, der die Bedingungen 1° bis 13° erfüllt. Wir ordnen ihm eine RIEMANNsche Fläche W in der folgenden Weise zu:

Jedem Ring wird das bei positiver Durchlaufung von L links liegende Gebiet, das *Innengebiet*, jedem Kreuz das rechts liegende, das *Außengebiet*, zugeordnet; sind zwei Knoten durch ein Glied verbunden, das die Elementargebiete a_i, a_k trennt (cf. 7°a, 8°), so werden die zugehörigen Halbblätter — es sind nach 2° ein Innen- und ein Außengebiet — über demjenigen Teilbogen s_{ik} $[=I(a_i, a_k)$ bzw. $I(a_k, a_i)$ nach § 6] von L zwischen a_i, a_k (cf. 12°) verheftet, dessen Durchlaufung dem Überschreiten des Gliedes (cf. 10°) entspricht; es ist $a_i \neq a_k$ (cf. 9°). Wir nennen den Bogen s_{ik} *verheftenden* Teilbogen.

Auf diese Weise ist dem Streckenkomplex S^* eine zusammenhängende (cf. 4°) offene zweidimensionale Mannigfaltigkeit W zugeordnet, die eine RIEMANNsche Fläche ist: denn in einem Punkt P über der endlichen Koordinate a (bzw. der Koordinate ∞) in einem Innen- oder Außengebiet oder auf einem verheftenden Teilbogen ist $w-a$ (bzw. w^{-1}) Ortsuniformisierende; ein Endpunkt P eines verheftenden Teilbogens werde genau dann zur Fläche hinzugenommen, wenn er zu einem algebraischen Elementargebiet gehört. Nach 2° wird ein solches Elementargebiet von einer geraden Zahl $2n$ von Gliedern berandet [$n \geqq 2$ (cf. 5°)], ein n-maliger Umlauf um P führt also ins ursprüngliche Halbblatt zurück. Hat P die endliche Koordinate a (bzw. die Koordinate ∞), so ist $(w-a)^{1/n}$ (bzw. $w^{-1/n}$) Ortsuniformisierende in P. P ist also ein algebraischer Windungspunkt, in dem $n \geqq 2$ Blätter zusammenhängen. Die Nachbarrelation zwischen Ortsuniformisierenden, deren Definitionsgebiete einen nicht leeren Durchschnitt haben, ist offenbar direkt konform.

Logarithmische Elementargebiete, Strahl-Elementargebiete und Strahlen fassen wir unter den Begriff *Randelement* des Streckenkomplexes S^*[12]); einem Randelement ist zwar formal eine komplexe Zahl a zugeordnet (nach 8° oder 11°), ihm entspricht aber kein (innerer) Punkt der Fläche W, sondern eine *Randstelle* von W über a[13]).

---

[11]) Die Eigenschaft 1° ist natürlich einfach eine Folge der Verabredung von § 8, die Eigenschaft 5° ist mehr formaler Natur, vgl. dazu § 21, Fußnote [20]). Die Anzahl der Elementargebiete ist abzählbar, denn jeder Knoten ist nach 7° Eckknoten von höchstens abzählbar vielen Elementargebieten. Die Anzahl der Strahlen kann dagegen überabzählbar sein.

[12]) Unter diesen Begriff fallen noch andere Elemente des Streckenkomplexes; vgl. dazu § 16.

[13]) Es ist dabei möglich, daß verschiedenen Randelementen von S^* dieselbe Randstelle von W entspricht. Genaueres in §§ 17—19.

§ 11. Es gilt nun der

Satz 1. *Erfüllt der Streckenkomplex die Bedingungen* 1° *bis* 13°, *so ist die zugeordnete* RIEMANN*sche Fläche W (schlichtartig) und einfach zusammenhängend. Umgekehrt hat jede unendlich-vielblättrige einfach zusammenhängende* RIEMANN*sche Fläche, die nur über einer geschlossen doppelpunktfreien* JORDAN*-Kurve L Singularitäten trägt und von keinem Teilbogen von L berandet wird, einen Streckenkomplex S*, der die Bedingungen* 1° *bis* 13° *erfüllt.*

Der zweite Teil des Satzes ist das bereits in § 9 gewonnenes Ergebnis. Zum Beweis des ersten Teiles weisen wir zunächst nach, daß jeder Rückkehrschnitt die Fläche W zerlegt, daß W also schlichtartig ist. Der einfache Zusammenhang von W folgt dann daraus, daß einer der beiden Teile, in die ein Rückkehrschnitt die Fläche zerlegt, kompakt ist[14]). Auf eine topologische Deformation des Rückkehrschnittes kommt es hierbei nicht an[15]).

Wir bilden jeden Knoten K_n von S^* ab auf einen bestimmten *festen* inneren Punkt P_i bzw. P_a des zugeordneten Innen- bzw. Außengebietes, und jedes Glied zwischen zwei Knoten topologisch ab auf eine Kurve, die nach Wahl einer Funktion $l(a, b)$ die beiden in den zugehörigen Halbblättern ausgezeichneten Punkte P_i, P_a über den inneren Punkt $l(a, b)$ des verheftenden Teilbogens $I(a, b)$ miteinander verbindet [cf. § 6] und mit diesem nur den Punkt $l(a, b)$ gemein hat. Die Abbildung der Glieder geschehe in der Weise, daß die Projektionen zweier solcher Bildkurven in die w-Ebene genau dann zusammenfallen, wenn sie den verheftenden Teilbogen über demselben Punkt von L treffen, während sie sonst nur zwei Punkte, nämlich P_i und P_a, gemeinsam haben. So erhalten wir im Streckenkomplex S^* das topologische Bild eines gewissen Kurvenzuges auf W.

Sei $\mathfrak{r}$ ein Rückkehrschnitt auf W. Er ist kompakt und kann als Polygonzug angenommen werden. Wir zeigen zunächst, daß $\mathfrak{r}$ nur durch endlich viele Halbblätter läuft. Die Annahme nämlich, $\mathfrak{r}$ liefe durch unendlich viele, würde erlauben, in jedem dieser Halbblätter H_ν genau einen Punkt w_ν von $\mathfrak{r}$ zu markieren. Wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{r}$ muß die Punktfolge w_ν einen Häufungspunkt P der Koordinate p auf W haben. In der Umgebung von P würden unendlich viele Blätter zusammenhängen, andererseits ist (mit ganzzahligem n) entweder $(w-p)^{1/n}$ oder $w^{-1/n}$ Ortsuniformisierende in P, eine hinreichend kleine Umgebung von P enthält also Punkte aus höchstens n Blättern. Aus dem Widerspruch folgt: die Annahme oben war irrig.

Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{r}$ die Fläche W zerlegt. Es kann abgesehen werden von dem Fall, daß $\mathfrak{r}$ durch einen Windungspunkt hindurchläuft. [Dann kann nämlich $\mathfrak{r}$ in der Umgebung des Windungspunktes in eine Kurve topologisch deformiert werden, die den Windungspunkt in geeigneter Weise umschlingt[15]).] Wir dürfen aber sogar annehmen, daß $\mathfrak{r}$ eine *einfache Folge* H_ν von Halbblättern, d.h. jedes nur einmal, durchläuft, also daß der Durchschnitt von $\mathfrak{r}$ mit H_ν zusammenhängend ist. Um dies einzusehen, stellen wir $\mathfrak{r}$ in Parameterform

[14]) Der Beweis schließt sich Gedankengängen von ELFVING [*1*], S. 11 f., an.

[15]) Zur topologischen Deformation von Wegen s. z. B. NEVANLINNA [*6*], S. 59.

als $\mathfrak{r}(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, dar; die Punkte $\mathfrak{r}(0)$ und $\mathfrak{r}(1)$ und nur diese fallen zusammen. Nehmen wir an, es gebe im Intervall $(0, 1)$ zwei Zahlen t', t'' $(t' < t'')$, so daß $\mathfrak{r}(t') \in H_\nu$, $\mathfrak{r}(t'') \in H_\nu$, $\mathfrak{r}(0) \notin H_\nu$ aber $\mathfrak{r}(t^*) \notin H_\nu$, wo $t' < t^* < t''$, so verbinden wir $\mathfrak{r}(t')$ mit $\mathfrak{r}(t'')$ durch eine in H_ν verlaufende doppelpunktfreie *Querkurve* $\bar{\mathfrak{r}}(t)$, $t' \leqq t \leqq t''$, die mit $\mathfrak{r}$ nur die Punkte $\mathfrak{r}(t') = \bar{\mathfrak{r}}(t')$ und $\mathfrak{r}(t'') = \bar{\mathfrak{r}}(t'')$ gemein hat. $\mathfrak{r}(t)$ und $\bar{\mathfrak{r}}(t)$ bestimmen zusammen zwei verschiedene Rückkehrschnitte, die nur dann beide die Fläche zerlegen, wenn $\mathfrak{r}$ schon diese Eigenschaft hatte.

Weiter dürfen wir annehmen, daß $\mathfrak{r}$ nicht über ein und denselben verheftenden Teilbogen b_ν in das Halbblatt H_ν eintritt und es verläßt, denn in diesem Fall bildet ein Teilbogen von b_ν eine Querkurve, die $\mathfrak{r}$ in zwei Teile zerlegt, von denen einer, nämlich der in und am Rand von H_ν verlaufende, die Fläche gewiß zerlegt. Als geschlossene Kurve, die eine einfache Folge von Halbblättern durchläuft und einen verheftenden Teilbogen nicht zweimal trifft, ist $\mathfrak{r}$ topologisch äquivalent entweder mit einem in einem einzigen Halbblatt liegenden Kreis — dann zerlegt $\mathfrak{r}$ gewiß die Fläche — oder mit dem Bild einer endlich viele Knoten genau einmal treffenden geschlossenen doppelpunktfreien (cf. 3°) Kurve $\mathfrak{s}$ aus Gliedern von S^*, in der jedes überhaupt durchlaufene Glied genau einmal in bestimmter Richtung durchlaufen wird. Jede doppelpunktfreie Kurve $\bar{\mathfrak{s}}$ aus Gliedern von S^*, die zwischen zwei verschiedenen Knoten von $\mathfrak{s}$ verläuft, und bis auf diese ihre Endpunkte innerhalb des von $\mathfrak{s}$ eingeschlossenen Gebietes G, hat als Bild auf W eine Querkurve $\bar{\mathfrak{r}}$ von $\mathfrak{r}$; $\mathfrak{s}$ umschließt als Urbild einer Kurve, die nur endlich viele Halbblätter trifft, endlich viele algebraische Elementargebiete (cf. 1°), es gibt daher nur endlich viele Gliedzugkurven $\bar{\mathfrak{s}}$ der betrachteten Art. Die Zerlegung von $\mathfrak{s}$ durch, bis eventuell auf die Endpunkte, ganz innerhalb G verlaufende Gliedzugkurven $\bar{\mathfrak{s}}$ führt schließlich auf die Ränder von endlich vielen algebraischen Elementargebieten. Nun ist eine Gliedzugkurve $\mathfrak{s}^*$, die ein $2n$-eckiges algebraisches Elementargebiet umschließt, offenbar auf eine Kurve $\mathfrak{r}^*$ auf W abgebildet, die einen n-blättrigen Windungspunkt einmal umschlingt; eine solche Kurve zerlegt die Fläche. Es zerlegt also auch $\mathfrak{r}$ die Fläche W; damit ist die Schlichtartigkeit von W bewiesen.

Es bleibt noch zu zeigen, daß von den zwei Teilen W_1, W_2, in die $\mathfrak{r}$ die Fläche W zerlegt, der eine kompakt ist. Dies ist offenbar gewiß dann der Fall, wenn $\mathfrak{r}$ eine Kurve $\mathfrak{r}^*$ ist, die einen algebraischen Windungspunkt einmal umschlingt, oder eine Kurve, die in *einem* Halbblatt verläuft. Im allgemeinen Fall dürfen wir wieder annehmen, $\mathfrak{r}$ durchlaufe eine einfache Folge von Halbblättern und trete ein in ein Halbblatt und verlasse es nicht über denselben verheftenden Teilbogen, denn die beiden Rückkehrschnitte, die durch $\mathfrak{r}$ und eine Querkurve $\bar{\mathfrak{r}}$ bestimmt werden, umschließen nur dann beide kompakte Teilstücke von W, wenn $\mathfrak{r}$ schon diese Eigenschaft hat. Wir betrachten die zu $\mathfrak{r}$ topologisch äquivalente Gliedzugkurve $\mathfrak{s}$ und die Gesamtheit der oben eingeführten Gliedzugkurven $\bar{\mathfrak{s}}$, die das Gebiet G in endlich viele algebraische Elementargebiete zerlegen. Seien S_1, S_2 zwei Punkte auf diesen Gliedzugkurven, die nicht auf $\mathfrak{s}$ liegen. Die zugehörigen Bildpunkte R_1, R_2 auf W werden durch $\mathfrak{r}$ nicht getrennt: S_1, S_2 sind ja durch Teile von Gliedzugkurven

verbunden, die $\mathfrak{r}$ nicht überschreiten. Demnach liegen die Bilder aller nicht auf $\mathfrak{s}$ liegenden Punkte der Kurven $\bar{\mathfrak{s}}$ in ein und demselben der beiden Teilgebiete, in die $\mathfrak{r}$ die Fläche W zerlegt, etwa in W_1. W_1 wird selbst durch die Bilder $\bar{\mathfrak{r}}$ der Kurven $\bar{\mathfrak{s}}$ in endlich viele Teilgebiete zerlegt, die nach Hinzunahme der Punkte auf den Kurven $\bar{\mathfrak{r}}$ sämtlich kompakte Teilflächenstücke von W sind, denn sie sind abgeschlossene Umgebungen algebraischer Windungspunkte. Es ist also auch W_1 kompakt; damit ist der einfache Zusammenhang von W bewiesen.

§ 12. Vom Streckenkomplex S^* gelangen wir zum Netz N von W in der folgenden Weise. In jedem Elementargebiet E_ν der Koordinate a_ν, das am Rand m Glieder g_ν^μ $(1 \leqq m \leqq \infty)$ besitzt, wird ein Punkt T_ν markiert — seine Lage wird später genauer festgelegt —; von ihm aus werden in E_ν m JORDAN-Kurven s_ν^μ $(\mu = 1, 2, \ldots, m)$ gezogen, und zwar werde jedes Randglied g_ν^μ von E_ν durch genau eine solche Kurve s_ν^μ mit T_ν verbunden; zwei verschiedene Kurven mögen, außer eventuell T_ν, im Innern von E_ν keine gemeinsamen Punkte haben. In dem Punkt T_ν treffen sich m solche Kurven, wir nennen ihn einen *Treffpunkt* der *Koordinate* a_ν; die Kurven s_ν^μ nennen wir *Treffkurven* oder *Trefflinien* (es wird sich zeigen, daß die Kurven s_ν^μ nach der näheren Bestimmung im folgenden Absatz die Netzkurven eines Netzes von W bilden, so daß also die Treffpunkte in den algebraischen Elementargebieten die Eckpunkte des Netzes sind). Jedes Glied trennt zwei Elementargebiete, es enden auf ihm also zwei Treffkurven; beide mögen das Glied im selben inneren Punkt treffen, die Vereinigung beider nennen wir eine *Treffseite*. T_ν sei, falls E_ν ein algebraisches Elementargebiet, ein innerer Punkt von E_ν; falls E_ν ein logarithmisches Elementargebiet oder ein Strahl-Elementargebiet ist, sei T_ν der (erreichbare) Randpunkt U von E_ν (cf. 13°). Eine Treffkurve hat offenbar mit keinem Strahl des Streckenkomplexes endliche Punkte gemeinsam. Wir wählen ferner (nach 13°) die Treffkurven so, daß sie keinen endlichen Häufungspunkt haben und insbesondere also keinen endlichen Punkt eines Strahles zum Häufungspunkt haben.

Eine Treffseite s, die zwei Treffpunkte in Elementargebieten (der Koordinaten) a_i, a_k verbindet, werde durch eine topologische Funktion $f(z)$ auf denjenigen Teilbogen von L zwischen a_i, a_k abgebildet, dessen Durchlaufung dem Überschreiten des von s getroffenen Gliedes nach 10° entspricht.

Wir nennen ein von Treffkurven berandetes (eventuell erst im Unendlichen) geschlossenes Polygon ein *Elementarpolygon*, wenn keine Treffkurve in seinem Inneren liegt[16]). Jedes Elementarpolygon Q_k enthält in seinem Inneren einen Knoten K_k; es kann topologisch auf das Halbblatt H_k abgebildet werden, das von K_k repräsentiert wird, in einer Weise, daß die Singularitäten am Ende der verheftenden Teilbogen von H_k in die am Rand von Q_k liegenden Treffpunkte derselben Koordinate abgebildet werden. Die Abbildungsfunktion ist bei geeigneter Wahl eine Fortsetzung von $f(z)$ — wir bezeichnen sie ebenfalls durch $f(z)$ —, denn die Singularitäten von H_k liegen über den Koordinaten der

[16]) Elementarpolygone können den Punkt U zum mehrfachen Randpunkt haben; die Struktur eines Elementarpolygons in der Umgebung von U kann sehr kompliziert sein.

Treffpunkte am Rand von Q_k und über den Häufungspunkten dieser Koordinaten. Die topologischen Bilder der algebraischen Singularitäten am Rand von H_k sind gerade die Treffpunkte $T_r \neq U$ am Rand von Q_k, alle anderen Singularitäten werden in U abgebildet. Eine Treffseite s am Rand von Q_k zwischen zwei Treffpunkten enthält keinen Treffpunkt im Inneren; sie ist topologisches Bild desjenigen singularitätenfreien Teilbogens über L, über den H_k mit $H_m = f(Q_m)$ zusammenhängt, wenn K_m der Innenknoten des Elementarpolygons Q_m ist, den man von K_k aus erreicht, indem man das von s geschnittene Glied des Streckenkomplexes durchläuft: Die beiden Elementarpolygone Q_k, Q_m stoßen also genau längs derjenigen Treffseite zusammen, über deren topologisches Bild die zugeordneten Halbblätter verheftet sind. Die aus den Elementarpolygonen gebildete Figur ist also ein Netz der Fläche W. Wir haben so eine topologische Abbildung der Fläche W in die punktierte Ebene $|z| < \infty$, vermittelt durch $f^{-1}(w) = h(w)$, die Umkehrung von $f(z)$. Die Konstruktion des Netzes, die eine topologische Abbildung von W auf die punktierte Ebene darstellt, zeigt wieder die Schlichtartigkeit und den einfachen Zusammenhang von W. Sie hat außerdem noch besondere Bedeutung für die Behandlung von Randstellenproblemen im folgenden Abschnitt.

Die Randstellen

§ 13. Wie ist nun die Verteilung der Randstellen bei einer im Streckenkomplex dargestellten einfach zusammenhängenden RIEMANNschen Fläche?

Jeder Zielweg $\mathfrak{a}$ einer analytischen Funktion $w(z)$ mit dem Zielwert a definiert eine Randstelle[17]) der erzeugten RIEMANNschen Fläche W über dem Zielwert a — um lästige Fallunterscheidungen zu vermeiden, sei hier und bei den späteren Untersuchungen dieses Abschnitts stets $a \neq \infty$ angenommen. Zwei verschiedene Zielwege $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ mit demselben Zielwert a definieren dann und nur dann dieselbe Randstelle der Fläche, wenn es möglich ist, zu jedem $\varepsilon > 0$ einen die beiden Zielwege verbindenden dritten Weg $\mathfrak{c}_\varepsilon$ zu finden, auf dem $|w(z) - a| < \varepsilon$ bleibt. $\mathfrak{c}_\varepsilon$ nennen wir eine *ε-Verbindung* oder einen *ε-Verbindungsweg* der beiden Zielwege. Die Gesamtheit der Stellen auf der Fläche, deren Urbilder durch eine ε-Verbindung mit dem Zielweg $\mathfrak{a}$ verbunden werden können, heißt eine *ε-Umgebung* U_ε der durch den Zielweg definierten Randstelle. U_ε ist eine Überlagerung der Kreisscheibe $|w - a| < \varepsilon$. Bekannt ist die folgende (unvollständige) Klassifikation[17]): Eine Randstelle heißt *unmittelbar*, wenn für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ „in keinem Blatt von U_ε ein innerer Punkt über $w = a$ liegt", d.h. wenn die Spurpunkte von U_ε schon in der punktierten Kreisscheibe $0 < |w - a| < \varepsilon$ liegen; eine Randstelle heißt *mittelbar*, wenn für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ „in jedem Blatt von U_ε ein innerer Punkt über $w = a$ liegt", d.h. für die von uns betrachteten Flächen, die nur über einer geschlossenen doppelpunktfreien JORDAN-Kurve L Singularitäten tragen: wenn jeder Weg, der von einem beliebigen nicht über L liegenden Punkt $P \in U_\varepsilon$ aus gegen die Koordinate a strebt ohne L ander-

[17]) Vgl. IVERSEN [3], ULLRICH [8].

weitig zu treffen, über a einen inneren Punkt findet. Es gibt Randstellen, die weder mittelbar noch unmittelbar sind.

Bei topologischer Abbildung des Definitionsgebietes der Funktion $w(z)$ geht ein Zielweg in einen Zielweg über, zwei Zielwege, die durch eine ε-Verbindung verbunden werden können, gehen in ebensolche über. Daher kann bei der Erklärung der Begriffe „Zielweg", „Randstelle" an Stelle der ein analytisches Bild erzeugenden Funktion $w(z)$ die ein topologisches Bild erzeugende Funktion $f(z)$ ebenso verwendet werden. Ebensowenig ändert eine topologische Abbildung der w-Ebene, die die Kurve L in eine vorgegebene Kurve L' mit denselben Eigenschaften deformiert, etwas am Zielwertcharakter eines Weges oder daran, daß zwei Wege gleiche oder verschiedene Randstellen definieren.

§ 14. Zur Untersuchung des Zusammenhanges zwischen dem Streckenkomplex S^* einer RIEMANNschen Fläche W und ihren Randstellen sei daher der Einfachheit halber angenommen, L sei die reelle Achse, orientiert in Richtung wachsenden Realteiles $\Re(w)$; das durch $f(z)$ vermittelte Bild eines die obere bzw. die untere Halbebene repräsentierenden Knotens sei der Punkt $w=i$ bzw. $w=-i$; einem Glied $g(a, b)$, dessen Überschreiten dem Durchlaufen der reellen Achse in Richtung der Orientierung von a nach b entspricht, ordne $f(z)$ das durch die drei Punkte i, $l(a, b)$, $-i$ bestimmte Orthokreisbogenstück $k(a, b)$ zur reellen Achse zu, welches die Endpunkte $i, -i$ hat und die reelle Achse im Punkt $l(a, b)$ schneidet [vgl. (1 a')]. Das Netz werde nach § 12 so zum Streckenkomplex S^* konstruiert, daß die Konfiguration Netz-Streckenkomplex die Bedingungen (1 a), (1 a'), (1 b) erfüllt. Dies ist möglich, denn die Bedingung (1 a'), die als einzige durch die Konstruktion nicht schon von selbst erfüllt ist, bedeutet nur, daß der Schnittpunkt der Netzseite mit einem Glied $g(a, b)$ durch $f(z)$ über die Koordinate $l(a, b)$ abgebildet wird.

Aus (1 a') und aus den Eigenschaften der Funktion $l(a, b)$ erhält man nach einer kleinen Überlegung drei Lemmen.

Lemma 1. *Jeder Zielweg, der in einem logarithmischen Elementargebiet oder in einem Strahl-Elementargebiet der Koordinate a verläuft, hat den Zielwert a.*

Lemma 2. *Stoßen zwei logarithmische Elementargebiete längs einer unendlichen Gliederfolge aneinander, so ist ein Weg, der diese Gliederfolge immer wieder trifft, kein Zielweg.*

Lemma 3. *a) Jeder Weg, der in einem Strahl-Elementargebiet zum Punkt U läuft, ist Zielweg mit der Koordinate des Elementargebietes als Zielwert; b) für zwei verschiedene derartige Zielwege gibt es zu jedem $\varepsilon>0$ eine ε-Verbindung.*

§ 15. Sei gegeben ein Zielweg $\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(t)$, $0\leqq t<\infty$, im Netz. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, er sei doppelpunktfrei, treffe keinen Knoten im Netz und sein Zielwert sei Null; von einer Stelle ab trifft er entweder überhaupt kein Glied von S^* mehr, oder er trifft immer wieder Glieder. Im ersten Fall liegt er entweder auf einem Strahl — dem Zielweg entspricht also ein Strahl σ des Streckenkomplexes — oder $\mathfrak{a}$ liegt

in einem logarithmischen Elementargebiet oder einem Strahl-Elementargebiet (einschließlich des Randes) [denn algebraische Elementargebiete reichen nicht bis zum Rand des Netzes] der Koordinate Null (Lemma 1). Im zweiten Fall durchläuft $\mathfrak{a}$ von jeder Stelle an noch unendlich viele verschiedene Elementargebiete (wobei dasselbe Elementargebiet unendlich oft getroffen werden kann). [Es ist nämlich unmöglich, daß $\mathfrak{a}$ nur eine (von Eins verschiedene) endliche Anzahl n von Elementargebieten immer wieder trifft: Weil $\mathfrak{a}$ zum Rand des Netzes läuft, scheiden algebraische Elementargebiete, wegen der endlichen Anzahl Strahl-Elementargebiete aus, während man nach Lemma 2 logarithmische Elementargebiete ausschließt]. Wir dürfen annehmen, $\mathfrak{a}$ habe dann weder mit Gliedern noch mit Strahlen des Streckenkomplexes ein Kontinuum gemeinsam. Sei nun a_α die Koordinate des Elementargebietes E_α aus der von $\mathfrak{a}$ durchlaufenen Folge $\{E_\alpha\}$ von Elementargebieten. Vom Zielweg mehrfach getroffene Elementargebiete kommen in der Folge $\{E_\alpha\}$ entsprechend oft vor.

Die nach der Reihenfolge der Durchlaufung geordnete Folge $\{E_\alpha\}$ braucht nicht den Ordnungstypus ω der Folge der natürlichen Zahlen zu haben. Ordnet man jedem Elementargebiet $E_\alpha \in \{E_\alpha\}$ den Parameterwert t_α eines Punktes von $\mathfrak{a}$ innerhalb E_α zu, so erhält man eine zu $\{E_\alpha\}$ ähnliche geordnete, nirgends dichte Menge $\{t_\alpha\}$ in $0 \leqq t < \infty$; jedem Häufungspunkt t' der Folge $\{t_\alpha\}$ entspricht eine Häufungsmenge $E_{t'}$ von $\{E_\alpha\}$, also ein Strahl σ des Streckenkomplexes. Die Gesamtheit $\{\overline{E}_\alpha\}$ aus den Elementargebieten E_α und ihren Häufungsmengen bildet also eine nach wachsendem Parameter t geordnete Menge; wir nennen $\alpha = t_\alpha$ die *Indexzahl* eines Elementargebietes oder Strahles in der Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$. Die Menge $\{\alpha\}$ der Indexzahlen der Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$ ist auf der Zahlengeraden abgeschlossen und nirgends dicht.

In $\{\overline{E}_\alpha\}$ kommen entweder unendlich viele nur logarithmische, oder endlich viele logarithmische und unendlich viele algebraische, oder unendlich viele logarithmische und unendlich viele algebraische Elementargebiete noch von jeder Stelle des Zielweges ab vor. Es sei $\{E_{\alpha_\nu}\}$ $\nu = 1, 2, \ldots$, eine abzählbar unendliche Teilfolge verschiedener Elementargebiete von $\{E_\alpha\}$ derart, daß $\lim \alpha_\nu = \infty$. Entweder gibt es in $\{E_\alpha\}$ eine Unterfolge $\{E_{\alpha_\nu}\}$, die gegen einen Strahl konvergiert, oder jede Unterfolge $\{E_{\alpha_\nu}\}$ hat als Häufungspunkt [18]) nur den Punkt U.

Jedes Elementargebiet E_α, von E_0 abgesehen, hat als Nachbarn in der Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$ entweder zwei andere Elementargebiete, oder ein Elementargebiet und einen Strahl, oder zwei Strahlen. Es sei E_α ein Elementargebiet, das als rechten (linken), also späteren (früheren) Nachbarn in der Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$ ein Elementargebiet E_{α^*} hat; e_α sei eine Netzseite, die die Treffpunkte T_α, T_{α^*} der Elementargebiete E_α, E_{α^*} verbindet. Es gilt dann

Lemma 4. *Ist $a = 0$ der Zielwert des Zielweges $\mathfrak{a}$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl t_ε derart, daß für jedes Elementargebiet $E_\alpha \in \{E_\alpha\}$, das einen Nachbarn E_{α^*} in der Folge $\{E_\alpha\}$ hat, mit $\alpha > t_\varepsilon$ (wenigstens) eine Netzseite e_α ein topologisches Bild $f(e_\alpha)$ besitzt, das ganz über der Scheibe $|w| < \varepsilon$ liegt.*

[18]) Vgl. Fußnote [10]).

Korollar 1. *Es ist* $|a_\alpha| < \varepsilon$, $|a_{\alpha^*}| < \varepsilon$.

Korollar 2. *Für die Koordinate a' eines vom Zielweg für $t > t_\varepsilon$ getroffenen Strahls σ' oder eines Strahl-Elementargebietes E' gilt* $|a'| \leqq \varepsilon$.

Korollar 3. *Ein Strahl, der Häufungsmenge der unendliche Folge $\{E_{\alpha_\nu}\}$ von Elementargebieten ist, die ein Zielweg vom Zielwert Null durchläuft, hat die Koordinate Null.*

Lemma 4 ist eine einfache Konsequenz der beiden folgenden Hilfssätze; Korollar 1 ist trivial, die Korollare 2, 3 folgen sofort aus dem Lemma zusammen mit dem Korollar 1.

Hilfssatz 1. *Ein Glied, dessen Überschreiten der Durchlaufung des Intervalles $I(a'a'')$ auf L von a' nach a'' im Sinn der Orientierung entspricht, wird durch $f(z)$ auf einen Weg über der w-Ebene abgebildet, auf dem* $|w| \geqq \min\{l(a', a''), 1\}$ *ist.*

Der Hilfssatz ist eine triviale Folge aus der Definition der Abbildung $f(z)$.

Hilfssatz 2. *Sei $\mathfrak{z}$ ein Weg, der zwei verschiedenen Seiten g', g'' eines Elementargebietes E der Koordinate a verbindet, während das Elementargebiet E' der Koordinate a' durch g' von E getrennt werde, und entweder das Elementargebiet E'' der Koordinate a'' durch g'' von E getrennt werde oder g'' ein Strahl der Koordinate $a''[=a]$ sei. Sei $\mathfrak{w}$ das durch die topologische Abbildung $f(z)$ gewonnene Bild des Weges $\mathfrak{z}$. Dann ist*

$$\operatorname*{Max}_{w \in \mathfrak{w}} |w| = \operatorname*{Max}_{z \in \mathfrak{z}} |f(z)| \geqq \operatorname{Min}(|a|, |a'|, |a''|, 1). \tag{2}$$

Beweis. Es sei zunächst g'' ein Glied des Streckenkomplexes. Die Ungleichung (2) ist trivial, wenn $\mathfrak{z}$ durch den Treffpunkt von E läuft. Andernfalls unterscheiden wir zwei Fälle. a) Die Vereinigung der beiden durch g', g'' bestimmten abgeschlossenen Teilbogen von L hat den Punkt a als inneren Punkt. Wir dürfen annehmen, die Koordinaten der Elementargebiete folgen in der Reihe a', a, a'' im Sinn der Orientierung von L aufeinander. Jeder Weg $f(\mathfrak{z})$, den einen Punkt von $k(a', a)$ mit einem Punkt von $k(a, a'')$ verbindet, genügt der Relation $\operatorname*{Max}_{z \in \mathfrak{z}} |f(z)| \geqq \operatorname{Min}(|a|, \operatorname{Max}(|a'|, |a''|), 1)$, also auch der Relation (2). b) Die beiden durch g', g'' bestimmten Teilbogen von L haben den Punkt a als Randpunkt. $\mathfrak{z}$ schneidet dann eine Netzseite, die ein Intervall (a, a_0) der reellen Achse bestimmt, das mit dem Intervall (a', a) keinen inneren Punkt gemein hat. Ähnlich wie oben folgt

$$\operatorname*{Max}_{z \in \mathfrak{z}} |f(z)| \geqq \operatorname{Min}(|a|, \operatorname{Max}(|a'|, |a_0|), 1),$$

und hieraus (2). Läßt man das Intervall (a, a'') sich auf den Punkt a zusammenziehen, erhält man in der Grenze den Hilfssatz für den Fall, daß g'' kein Glied, sondern ein Strahl des Streckenkomplexes ist.

Aus dem Hilfssatz 2 folgt nun für drei unmittelbar aufeinanderfolgende Elemente $E_{\alpha^*}, E_\alpha, E_{\alpha^{**}}$ der Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$ mit $\alpha^* < \alpha < \alpha^{**}$, wo E_α ein Elementargebiet, $E_{\alpha^*}, E_{\alpha^{**}}$ entweder zwei Elementargebiete, oder ein Elementargebiet

und ein Strahl sind, sogleich $\lim_{\alpha\to\infty} \mathrm{Min}(|a_\alpha|, |a_{\alpha^*}|, |a_{\alpha^{**}}|) = 0$; aus Hilfssatz 1 folgt dann nach $\lim a_\alpha = \lim a_{\alpha^*} = \lim a_{\alpha^{**}} = 0$ das Lemma 4.

§ 16. Wir erhalten als Ergebnis: Nur folgenden Elementen von S^* können Randstellen von W entsprechen:

a) einem logarithmischen Elementargebiet oder einem Strahl-Elementargebiet,

b) einem Strahl,

c) einer Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$ von Elementargebieten und Strahlen (nicht notwendig vom Ordnungstypus ω), in der die Indexzahlen eine abgeschlossene dichte Zahlmenge $0 \leqq \alpha < \infty$ mit $\lim \alpha = \infty$ durchlaufen, wenn

(c 1) jede Teilfolge $E_{\alpha_\nu} \in \{\overline{E}_\alpha\}$ verschiedener Elementargebiete vom Ordnungstypus ω, die Elementargebiete beliebig hoher Indexzahl enthält, gegen den Punkt U konvergiert,

(c 2) zwei verschiedene Elementargebiete oder Strahlen $\overline{E}_{\alpha'}, \overline{E}_{\alpha''} \in \{\overline{E}_\alpha\}$ durch einen JORDAN-Bogen verbunden werden können, der die zwischen $E_{\alpha'}, E_{\alpha''}$ liegenden Elementargebiete und Strahlen der Folge der Reihe nach, und sonst keine weiteren, durchläuft und insbesondere den Punkt U nicht enthält,

(c 3) es für je zwei in der Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$ benachbarte Elementargebiete E_α, E_{α^*} Netzseiten e_α gibt, die die Treffpunkte der Elementargebiete verbinden, so daß die Projektionen der Bilder $f(e_\alpha)$ gegen einen Punkt konvergieren [cf. Lemma 4].

Diese drei Gruppen a), b), c) von Elementen des Streckenkomplexes nennen wir *Randelemente* des Streckenkomplexes und bezeichnen sie der Reihe nach als *Gebiets-Randelement, Strahl-Randelement, Punkt-Randelement (Gebiets-Element, Strahl-Element, Punkt-Element);* die Konvergenzkoordinate aus (c 3) heiße *Koordinate* des Punkt-Randelements.

Wir sagen, ein Zielweg $\mathfrak{a}$ *definiert* ein Gebiets-Randelement, wenn er von einer Stelle ab in einem Gebiets-Randelement, also in einem logarithmischen Elementargebiet oder einem Strahl-Elementargebiet liegt; $\mathfrak{a}$ definiert ein Strahl-Randelement σ der Koordinate a, wenn $\mathfrak{a}$ entweder schließlich im Elementarpolygon des Strahl-Randelementes (cf. 7° b) läuft und den Zielwert a hat, oder wenn $\mathfrak{a}$ eine Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$, $0 \leqq \alpha < \infty$ von Elementargebieten und Strahlen durchläuft, in der eine Unterfolge $\{E_{\alpha_\nu}\}$ vom Typ ω mit $\lim \alpha_\nu = \infty$ sich gegen σ häuft. Der Zielweg $\mathfrak{a}$ definiert ein Punkt-Randelement, wenn eine Teilfolge $\{\overline{E}_{\alpha_\nu}\}$ mit $\lim \alpha_\nu = \infty$ der von $\mathfrak{a}$ durchlaufenen Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$ von Elementargebieten und Strahlen auch Teilfolge einer ein Punkt-Randelement bestimmenden Folge $\{\overline{E}^*_{\alpha_\nu}\}$ ist.

Über den Zusammenhang zwischen den Rand-Elementen des Streckenkomplexes und Randstellen der zugeordneten RIEMANNschen Fläche gilt

Satz 2. *Jedem Randelement von S^* ist in eindeutiger Weise eine Randstelle zugeordnet.*

Der Satz besagt ein zweifaches: 1. Es gibt zu jedem Randelement einen Zielweg, der es definiert; 2. alle ein bestimmtes Randelement definierenden Zielwege definieren dieselbe Randstelle. Den Beweis des Satzes führen wir in diesen zwei Schritten.

§ 17. Jedem Randelement entspricht zunächst (wenigstens) eine Randstelle von W: Es gibt zu jedem Randelement einen dieses Element definierenden Weg, der Zielweg ist.

a) Ein Weg, der auf einer Netzseite zum Treffpunkt eines logarithmischen Elementargebietes der Koordinate a läuft, ist Zielweg mit dem Zielwert a; ebenso ist ein Weg, der in einem Strahl-Elementargebiet der Koordinate a zum Punkt U läuft, ein Zielweg mit dem Zielwert a.

b) Sei gegeben ein Strahlelement σ der Koordinate a. Zu ihm gehört (cf. 7°) ein wohlbestimmter Knoten K_a, der in einem Elementarpolygon Q_a liegt. Sei $\mathfrak{w}$ ein Weg im Halbblatt $H_a = f(Q_a)$, der gegen die Koordinate a strebt. Sein Urbild $f^{-1}(\mathfrak{w})$ strebt gegen U (cf. § 12), ist also ein Zielweg mit dem Zielwert a.

c) Gegeben sei ein Punktelement der Koordinate a, also eine Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$ von Elementargebieten und Strahlen, die die Bedingungen (c1), (c2), (c3) erfüllt [$0 \leqq \alpha < \infty$, $\lim \alpha = \infty$, $\{\alpha\}$ nirgends dicht]; $\bar{a}_\alpha$ sei die Koordinate des Elementargebietes bzw. Strahles $\overline{E}_\alpha$. Wir dürfen $a = 0$ annehmen. Sei Σ_β die Gesamtheit der Strahlen in der Teilfolge $E^{(\beta)} = \{\overline{E}_\alpha\}_{\alpha > \beta}$ von $\{\overline{E}_\alpha\}$. Nach Bedingung (c1) ist $\bigcap_\beta \Sigma_\beta$ leer.

Ist Σ_β für ein gewisses β leer, so ist die Teilfolge $E^{(\beta)}$ eine Folge $\{E_n\}$ benachbarter Elementargebiete vom Typ ω, die Koordinate von E_n sei a_n. Sind alle Elementargebiete der Folge $\{E_n\}$ algebraisch, so ist nach (c3) die Folge $\{e_n\}$ der Netzseiten, die die Treffpunkte in aufeinanderfolgenden Elementargebieten verbinden, ein Zielweg. Enthält $\{E_n\}$ logarithmische Elementargebiete, so konstruieren wir einen Zielweg $\mathfrak{z}$ in folgender Weise. Wir nehmen an, $\mathfrak{z}$ sei schon bis zu dem Punkt $P_m \in E_m$ fortgesetzt. Ist E_m ein algebraisches Elementargebiet, so sei P_m der Treffpunkt von E_m; ist E_m ein logarithmisches Elementargebiet, so sei $P_m \in E_m$ ein Punkt einer Netzseite e_{m-1}, die die Treffpunkte T_{m-1} und T_m von E_{m-1} und E_m verbindet, mit $|f(P_m) - a_m| < 2^{-m}$. Wir betrachten die Netzseite e_m, die die Treffpunkte T_m und T_{m+1} von E_m und E_{m+1} verbindet. Ist E_m ein algebraisches Elementargebiet, so werde $\mathfrak{z}$ von P_m aus auf e_m nach P_{m+1} fortgesetzt. Ist E_m ein logarithmisches Elementargebiet, so betrachten wir auf e_m einen Punkt $Q_m \in E_m$, für den $|f(Q_m) - a_m| < 2^{-m}$. P_m und Q_m werden in E_m durch eine endliche Zahl von Netzkurven voneinander getrennt. Zwei benachbarte schneiden mit dem Rand von E_m aus E_m ein Gebiet heraus, dessen Bild den in der oberen oder den in der unteren Halbebene liegenden Teil der punktierten Scheibe $0 < |w - a_m| < \varepsilon$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ enthält. Es können daher P_m und Q_m durch einen Weg $\mathfrak{c}_m$ verbunden werden, dessen Bild die 2^{-m}-Umgebung der Koordinate a_m nicht verläßt. Ist E_m ein logarithmisches Elementargebiet, so werde $\mathfrak{z}$ von P_m aus auf $\mathfrak{c}_m$ und dem zwischen Q_m und P_{m+1} liegenden Teil von e_m nach P_{m+1}

fortgesetzt. In dieser Weise fortsetzend erhält man auf Grund von (c3) einen Zielweg mit dem Zielwert $a = \lim a_m$ $(= 0)$.

Ist dagegen Σ_β für kein β leer, so sei $\sigma_0 \in \Sigma_{\beta_0}$ ein beliebiger Strahl. Er definiert ein Halbblatt H_0. In H_0 gibt es nach der Ordnungseigenschaft von $\{\overline{E}_\alpha\}$ einen *letzten* Strahl $\sigma_0' \in \{\overline{E}_\alpha\}$, der insbesondere selbst höchstens einseitige Häufungsmenge anderer Strahlen, und zwar niedrigerer Indexzahlen, ist [man beachte, daß jeder Strahl in einem wohlbestimmten Elementarpolygon liegt]. Es gibt daher zwei andere Indexzahlen β_0', β_1 mit $\beta_0 < \beta_0' \leqq \beta_1$ derart, daß $\bigcup_{\beta_0'}^{\beta_1} \overline{E}_\alpha$ keinen Strahl enthält und daß ebenso zwischen σ_0' und $E_{\beta_0'}$ in der Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$ kein Strahl vorkommt. In $\Sigma_{\beta_0'}$ gibt es wieder einen ersten Strahl σ_1. Dieser definiert ein Halbblatt H_1, in diesem gibt es wieder einen letzten Strahl σ_1', usf. Auf diese Weise erhält man eine Folge H_ν von lauter verschiedenen Halbblättern und von ersten und letzten Strahlen σ_ν, σ_ν' in ihnen [$\sigma_\nu = \sigma_\nu'$ ist natürlich möglich]. Diese Folge kann nicht abbrechen, weil Σ_β für kein β leer ist, überdies haben die Strahlen σ_ν, σ_ν' in $\{\overline{E}_\alpha\}$ für hinreichend großes ν beliebig große Indexzahlen α [cf. (c2)]: Denn ein Weg, der sämtliche Strahlen σ_ν, σ_ν' $(\nu = 1, 2, \ldots)$ trifft, konvergiert notwendig gegen den Punkt U, weil eine unendliche Menge von Strahlen, von denen höchstens zwei denselben Knoten bestimmen, außer dem Punkt U keinen Häufungspunkt hat [cf. § 12, Abs. 1, und (c 2)].

Ein Zielweg, der das gegebene Punkt-Randelement $\{\overline{E}_\alpha\}$ der Koordinate 0 definiert, wird auf folgende Weise konstruiert. Zunächst streben die Koordinaten m_ν, m_ν' der Strahlen σ_ν, σ_ν' gegen Null [cf. (c3)]. Auf jedem Strahl σ_ν bzw. σ_ν' wird ein Punkt P_ν bzw. P_ν' markiert, für den $|f(P_\nu) - m_\nu| < 2^{-\nu}$ bzw. $|f(P_\nu') - m_\nu'| < 2^{-\nu}$. Von P_ν, P_ν' aus wird ein so kurzer JORDAN-Bogen $\mathfrak{z}_\nu$ bzw. $\mathfrak{z}_\nu'$ nach der Seite fallender bzw. wachsender Indexzahlen in den getroffenen Elementargebieten derart gezogen, daß nur Elementargebiete der Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$ [cf. (c2)] getroffen werden, insbesondere also kein weiterer Strahl, und daß ferner das Bild $f(\mathfrak{z}_\nu)$, $f(\mathfrak{z}_\nu')$ im Kreis $|w - m_\nu| < 2^{-\nu}$ bzw. $|w - m_\nu'| < 2^{-\nu}$ enthalten ist; letzteres ist wegen der Stetigkeit von $f(z)$ möglich. Es ende $\mathfrak{z}_\nu$ bzw. $\mathfrak{z}_\nu'$ im Punkt $B_\nu \in E_{\beta_\nu}$ bzw. im Punkt $B_\nu' \in E_{\beta_\nu'}$ und es sei $\beta_\nu' \leqq \beta_{\nu+1}$. Man kann nun leicht einen Zielweg finden, der die Punkte $P_\nu, P_\nu', B_\nu', B_{\nu+1}, P_{\nu+1}$, $(\nu = 1, 2, \ldots)$ verbindet: Man verbinde dazu P_ν mit P_ν' durch einen Weg $\mathfrak{p}_\nu$, dessen Bild ganz im Kreis $|w| < |m_\nu| + |m_\nu'| + 2^{-\nu}$ liegt; das ist möglich, denn $f(P_\nu)$, $f(P_\nu')$ sind zwei Punkte in H_ν, die schon diese Bedingung erfüllen. Die Endpunkte B_ν', $B_{\nu+1}$ der JORDAN-Bögen $\mathfrak{z}_\nu'$, $\mathfrak{z}_{\nu+1}$ liegen in Elementargebieten $E_{\beta_\nu'}$, $E_{\beta_{\nu+1}}$, die entweder zusammenfallen oder in der Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$ durch endlich viele sich aneinanderschließende logarithmische und algebraische Elementargebiete getrennt sind, das Maximum der Beträge ihrer Koordinaten sei $m_{\nu,\nu+1}$. Im letzten Fall, oder wenn im ersten Fall $E_{\beta_\nu'} = E_{\beta_{\nu+1}}$ kein Strahl-Elementargebiet ist, können B_ν', $B_{\nu+1}$ durch einen Weg $\mathfrak{p}_{\nu,\nu+1}$ verbunden werden, dessen Bild in $|w| \leqq |m_\nu| + |m_\nu'| + m_{\nu,\nu+1} + 2^{-\nu} + k_\nu$ $(\lim k_\nu = 0)$ enthalten ist [cf. (c2), (c3) und die für $\cap \Sigma_\beta = \emptyset$ besprochene Konstruktion]. Ist

aber $E_{\beta'_\nu} = E_{\beta_{\nu+1}}$ ein Strahl-Elementargebiet, so können B'_ν, $B_{\nu+1}$ — wie eine kleine Überlegung unmittelbar zeigt — durch einen Weg $\mathfrak{p}_{\nu,\nu+1}$ mit derselben oben angegebenen Eigenschaft verbunden werden. Da nach (c3) auch $\lim m_{\nu,\nu+1} = 0$, ist der Weg $\overset{\infty}{\underset{\nu=0}{\cup}} \{\mathfrak{z}_\nu \cup \mathfrak{p}_\nu \cup \mathfrak{z}'_\nu \cup \mathfrak{p}_{\nu,\nu+1}\}$ ein Zielweg mit dem Zielwert Null, der das Punkt-Randelement $\{\overline{E}_\alpha\}$ definiert.

§ 18. Allen drei Arten von Randelementen ist aber auch *nur eine* Randstelle von W zugeordnet. Für Strahl-Elementargebiete ist dies bereits in Lemma 3 ausgesagt. Für die übrigen Randelemente erkennen wir das auf folgende Weise. Zwei verschiedene Zielwege, die dasselbe Randelement definieren, haben (cf. Lemma 1 für logarithmische Elementargebiete, Lemma 4 mit Korollaren für Strahl- und Punkt-Randelemente) jedenfalls denselben Zielwert.

Seien zunächst in einem logarithmischen Elementargebiet E der Koordinate $a \neq \infty$ zwei Zielwege $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ gegeben. $\mathfrak{a}$ sei, wie wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, eine Netzkurve. Eine ähnliche Überlegung, wie sie in § 17c) Abs. 2 angestellt wurde, um zu zeigen, daß die Punkte P_m, Q_m in einem logarithmischen Elementargebiet E_m durch eine Kurve verbunden werden können, auf deren Bild $|w - a_m| < 2^{-m}$ bleibt, ergibt, daß jeder Punkt $P \in \mathfrak{a}'$ mit $|f(P) - a| < \varepsilon$ für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ durch eine im Elementargebiet E verlaufende ε-Verbindung $\mathfrak{c}_\varepsilon$ mit dem Weg $\mathfrak{a}$ verbunden werden kann; beide Zielwege definieren also dieselbe Randstelle. Die Randstelle ist genau dann ein *logarithmischer Windungspunkt*, wenn die Koordinaten der Nachbargebiete von E im Streckenkomplex die Zahl a nicht zum Häufungspunkt haben. Dann und nur dann ist nämlich für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ das Netzbild der ε-Umgebung der Randstelle, die durch E bestimmt ist, ganz in E enthalten und — mit $a = 0$ — ein Zweig von $\log w$ eine in der ε-Umgebung der Randstelle eindeutige und einwertige Funktion.

Ein Strahl-Randelement σ der Koordinate $a \neq \infty$ definiert zunächst eindeutig den Knoten K, von dem aus es nach U läuft. Sei $\mathfrak{a}$ ein σ definierender Zielweg, der in dem Elementarpolygon Q verläuft, das K enthält, und sei ein weiterer Zielweg $\mathfrak{a}'$ gegeben. Entweder verläuft $\mathfrak{a}'$ schließlich ebenfalls in Q — dann definiert $\mathfrak{a}'$ trivialerweise dieselbe Randstelle wie $\mathfrak{a}$ — oder $\mathfrak{a}'$ durchläuft (unter anderen) eine Folge $\{E_n^*\}$ von logarithmischen und algebraischen Elementargebieten der Koordinaten a_n^*, die alle K als Eckknoten haben und gegen σ konvergieren, während von jeder Stelle ab $\mathfrak{a}'$ noch unendlich viele Elementargebiete der Folge $\{E_n^*\}$ trifft. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir dürfen annehmen, m sei so groß, daß für die Koordinate a_m^* von $E_m^* \in \{E_n^*\}$ die Ungleichung $|a_m^* - a| < \frac{\varepsilon}{4}$ gilt, und daß für einen Punkt $P_m \in E_m^*$ von $\mathfrak{a}'$ gilt $|f(P_m) - a| < \frac{\varepsilon}{4}$, also $|f(P_m) - a_m^*| < \frac{\varepsilon}{2}$. Ist E_m^* ein algebraisches Elementargebiet, zu dem der algebraische Windungspunkt A_m^* auf W gehört, so ist auf der Geraden $\mathfrak{g}_m = \overline{f(P_m)\, A_m^*}$ offenbar $|w - a| \leq |w - a_m^*| + |a_m^* - a| < \varepsilon$. Der am Rand von

$f(Q)$ liegende Punkt A_m^* kann offenbar mit $f(\mathfrak{a})$ in $f(Q)$ durch einen Weg $\mathfrak{w}_m$ verbunden werden, dessen Projektion sich von der Koordinate a um weniger als ε entfernt. Das Urbild von $\mathfrak{w}_m \cup \mathfrak{g}_m$ ist dann eine ε-Verbindung beider Zielwege. Ist E_m^* ein logarithmisches Elementargebiet, so kann (cf. § 17) P_m mit einem Punkt $Q_m \in E_m^*$ am Rand von Q durch eine Kurve verbunden werden, auf der $|w - a_m^*| < \frac{\varepsilon}{2}$, also $|w - a| < \varepsilon$ bleibt. Zwischen Q_m und $\mathfrak{a}$ kann wie oben eine ε-Verbindung gefunden werden; die Zielwege $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$ definieren also dieselbe Randstelle. Ganz ähnlich sieht man ein, daß zwei Zielwege, die dasselbe Punkt-Randelement definieren, auch dieselbe Randstelle definieren, denn beide haben von jeder Stelle ab immer wieder Elementargebiete gemein, in deren Bildern sich die Bilder der Zielwege schließlich beliebig nahekommen. Satz 2 ist somit bewiesen.

§ 19. Bisher haben wir gefunden, daß jedem Randelement des Streckenkomplexes in eindeutiger Weise eine Randstelle der dargestellten RIEMANNschen Fläche entspricht. Um den Zusammenhang zwischen Randelementen und Randstellen völlig zu klären, muß folgende Frage beantwortet werden: *Wann gehört zu zwei verschiedenen Randelementen R_1, R_2 dieselbe Randstelle der Fläche?* [Beide Randelemente müssen natürlich dieselbe Koordinate haben.] Auskunft hierüber gibt

Satz 3. *Notwendig und hinreichend dafür, daß zwei Randelemente R_1, R_2 der Koordinate $a \neq \infty$ dieselbe Randstelle über a bestimmen, ist, daß sie für jedes $\varepsilon > 0$ durch eine Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ von Elementargebieten und Strahlen verbunden sind, die folgende Bedingungen erfüllen.*

(B_1) *Für jedes z auf einer (geeigneten) Netzseite, die die Treffpunkte von algebraischen oder logarithmischen Elementargebieten verbinden, die Nachbarn in der Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ sind, ist $|f(z) - a| < \varepsilon$.*

(B_2) *Die Koordinaten $\bar{a}_\alpha(\varepsilon)$ der Elemente der Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ unterscheiden sich dem Betrag nach um höchstens ε von der Zahl a.*

Die Randelemente R_1, R_2 heißen *verbunden durch* $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$, wenn

(V_1) die Indexzahlen α eine abgeschlossene nirgends dichte Zahlmenge $0 \leq \alpha \leq 1$ bilden;

(V_2) das erste Element $\overline{E}_0(\varepsilon)$ der Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ ein Elementargebiet des Randelementes R_1 oder, falls R_1 ein Strahl σ_1 ist, dieser Strahl ist, das letzte Element $\overline{E}_1(\varepsilon)$ der Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ ein Elementargebiet des Randelementes R_2 oder, falls R_2 ein Strahl σ_2 ist, dieser Strahl ist;

(V_3) die Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ die Bedingung (c2) aus § 16 erfüllt.

Ein Elementargebiet eines Gebiets-Randelementes ist hierbei nur das logarithmische Elementargebiet bzw. das Strahl-Elementargebiet selbst, ein Elementargebiet eines Strahl- oder Punkt-Randelementes ist ein Elementargebiet einer Folge $\{\overline{E}_\alpha\}$, die das Randelement definiert. Strahl-Randelemente, die vom selben Knoten ausgehen und dieselbe Koordinate haben, bestimmen

danach[19]) — wie auch leicht direkt zu ersehen — dieselbe Randstelle. Aus Satz 3 folgt sofort [cf. Korollare 1, 2 von Lemma 4] als

Korollar. *Notwendig dafür, daß R_1, R_2 dieselbe Randstelle definieren, ist, daß R_1, R_2 sich für jedes $\varepsilon > 0$ durch eine Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ von Elementargebieten und Strahlen verbinden lassen, für deren Koordinaten $\overline{a}_\alpha(\varepsilon)$ die Beziehung $|\overline{a}_\alpha(\varepsilon) - a| < \varepsilon$ gilt.*

Beweis. Sind die zwei Randelemente R_1, R_2 ein logarithmisches Elementargebiet E_l und ein Strahl σ, der Seite von E_l ist, bzw. zwei Strahl-Elemente σ_1, σ_2, die beide Seiten eines Strahl-Elementargebietes E_s sind, dann definieren offenbar R_1, R_2 einerseits dieselbe Randstelle, andererseits erfüllen sie die Bedingungen (B_1), (B_2) [es bilden $\{\sigma, E_l\} = \{\overline{E}_0, \overline{E}_1\}$ bzw. $\{\sigma_1, E_s, \sigma_2\} = \{\overline{E}_0, \overline{E}_{\frac{1}{2}}, \overline{E}_1\}$ für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$]; stehen R_1, R_2 in dieser speziellen Beziehung, gilt also Satz 3. Daß aber auch im allgemeinen die Bedingungen (B_1), (B_2) zunächst hinreichend sind, ist trivial nach den Konstruktionen des § 17, denn ähnliche Konstruktionen, wie diejenigen, die im § 17 einen ein Randelement definierenden Zielweg lieferten, liefern eine ε-Verbindung der beiden Zielwege, die R_1, R_2 definieren. Die Notwendigkeit von (B_1), (B_2) erkennt man aus folgender Betrachtung, in der ohne Beschränkung der Allgemeinheit $a = 0$ angenommen sei.

Angenommen, die Randelemente R_1, R_2 definieren dieselbe Randstelle, während es für hinreichend kleines $\varepsilon > 0$ nicht möglich sei, R_1 und R_2 durch eine Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ mit den Eigenschaften (B_1), (B_2) zu verbinden. Zunächst einmal ist die Bedingung (B_1) nur dann leer, wenn R_1, R_2 entweder ein Strahl σ und ein logarithmisches oder Strahl-Elementargebiet mit der Seite σ sind, oder wenn R_1, R_2 zwei Strahlen sind, die ein Strahl-Elementargebiet beranden, also in dem bereits erledigten Fall. In allen anderen Fällen ist die Bedingung (B_1) nicht leer, wir dürfen unter Benutzung von Hilfsatz 1 also annehmen, es gebe in jeder verbindenden Folge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ [also einer Folge, die (V_1), (V_2), (V_3) erfüllt] wenigstens zwei in der Folge benachbarte Elementargebiete E', E'' mit der Eigenschaft

$(\overline{B})$ *jede Netzseite e', die die Treffpunkte T', T'' von E', E'' verbindet, hat ein Bild $f(e')$, das die ganze Strecke $M_1 \leqq \Re(w) \leqq M_2 (M_1 < M_2)$ der reellen Achse überdeckt.*

Die Annahme, es gebe dennoch eine ε-Verbindung der beiden Zielwege $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2$, die die Randelemente R_1, R_2 definieren, führt auf einen Widerspruch: Sei nämlich $\mathfrak{c}_\varepsilon$ eine ε-Verbindung der beiden Zielwege, die die Elementargebietsfolge $\{\overline{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ definiert. Weil für $z \in \mathfrak{c}_\varepsilon$, insbesondere für den Schnittpunkt von $\mathfrak{c}_\varepsilon$ mit dem E', E'' trennenden Glied e', auch $|f(z)| < \varepsilon$ und weil $\varepsilon > 0$ beliebig klein angenommen werden kann, muß mit $(\overline{B})$ nach Hilfssatz 1 dann $M_1 < 0 < M_2$ gelten. Über $(\overline{B})$ hinaus haben wir daher mit

$$M = \operatorname{Min}(-M_1, M_2):$$

$(\overline{B}^*)$ *$f(e')$ überdeckt die ganze Strecke $|\Re(w)| < M$, $M > 0$, der reellen Achse.*

[19]) Vgl. § 7, vorletzter Absatz, und Lemma 3.

Es ist insbesondere also $|a'| \geqq M$, $|a''| \geqq M$ mit a', a'' als Koordinaten von E', E''. Entweder hat wenigstens eines der Elementargebiete E', $E'' \in \{\bar{E}_\alpha(\varepsilon)\}$ zwei Elementargebiete als Nachbarn in der Folge $\{\bar{E}_\alpha\}$ (die auch übereinstimmen können), oder es sind E', E'' benachbarte logarithmische Elementargebiete, die beide je einen Strahl σ' bzw. σ'' am Rand besitzen, wobei jeder dieser Strahlen von $\mathfrak{c}_\varepsilon$ getroffen wird. Im ersten Fall habe etwa E' außer E'' noch ein Elementargebiet E der Koordinate a als Nachbarn in der Folge. Nach Hilfssatz 2 gilt für die Koordinate a von E die Ungleichung $|a| < \varepsilon$. Wegen $l(-M, 0) < 0$ und $l(0, M) > 0$ und der Stetigkeit und Monotonie der Funktion $l(a, b)$ in beiden Argumenten gibt es ein (kleines) positives ε_1, so daß $l(-M, u) < \gamma_1 < 0$ und $l(u, M) > \gamma_2 > 0$ für $|u| < \varepsilon_1$. Für den Schnittpunkt P von $\mathfrak{c}_\varepsilon$ mit dem E, E' trennenden Glied gilt also für $\varepsilon \leqq \varepsilon_1$ die Beziehung $|f(P)| > \operatorname{Min}(-\gamma_1, \gamma_2) = \gamma > 0$. Es gibt also auf dem Weg $\mathfrak{c}_\varepsilon$ Stellen, an denen $|f(z)| > \gamma > 0$. Wählt man $0 < \varepsilon < \operatorname{Min}(\varepsilon_1, \gamma)$, so ist im ersten Fall $\mathfrak{c}_\varepsilon$ gegen die Annahme keine ε-Verbindung der Zielwege $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$. Im zweiten Fall folgt ein Widerspruch daraus, daß für $z \in \sigma'$ bzw. $z \in \sigma''$ auch $|f(z)| > \operatorname{Min}(|a'|, |a''|, 1) > \varepsilon$ ist. Beide Zielwege definieren also verschiedene Randstellen über $w = 0$. Damit ist der Beweis von Satz 3 erbracht.

Beispiele

§ 20. Drei Beispiele mögen nun die bisherigen Ausführungen veranschaulichen.

a) $w_1(z) = z \sin z$ erzeugt eine RIEMANNsche Fläche W_1. Die algebraischen Singularitäten liegen über der reellen Achse, ihre Koordinaten sind die Funktionswerte von $w_1(z)$ in den (reellen) Nullstellen der Ableitung. Transzendente Singularitäten liegen nur über der Koordinate $w = \infty$, dem einzigen Zielwert von $w_1(z)$. Zur Konstruktion des Streckenkomplexes $S^*(W_1)$ kann als doppelpunktfreie geschlossene Zerschneidungskurve L die reelle Achse gewählt werden. Durch Bestimmung der reellen Züge von $w_1(z)$ erhält man ein Netz und hieraus den Streckenkomplex $S^*(W_1)$ der Fig. 1. $S^*(W_1)$ besteht aus einer Leiter von viereckigen algebraischen Elementargebieten, die nach beiden Seiten ins Unendliche führt; er ist bis auf die Koordinaten der algebraischen Windungspunkte gleich dem Streckenkomplex S der von $\sin z$ erzeugten Fläche, dem Sinus-Streckenkomplex, und hat, wie dieser, zwei logarithmische Elementargebiete der Koordinate ∞. $S^*(W_1)$ ist (einschließlich der Koordinaten der Elementargebiete) symmetrisch zum algebraischen Elementargebiet E_0 der Koordinate $a_0 = 0$. Das in der Leiter an n-ter Stelle auf E_0 folgende Elementargebiet sei E_n, seine Koordinate a_n hat das Vorzeichen von $(-1)^{n-1}$. Es wächst $(-1)^{n-1} a_n \sim n$ monoton gegen ∞. Nach Satz 3 bestimmen die beiden logarithmischen Elementargebiete der Koordinate ∞ nur eine einzige Randstelle über ∞, sie ist trivialerweise unmittelbar, weil W_1 über $w_1 = \infty$ überhaupt keinen (inneren) Punkt hat; sie ist aber kein logarithmischer Windungspunkt [§ 18, Abs. 2]. Die beiden in Fig. 1 nach links und rechts führenden Folgen viereckiger Elementargebiete bestimmen nach Satz 2

keine Randstelle, denn sie definieren kein Rand-Element: Die Bilder der Netzseiten, die zwei aufeinanderfolgende Treffpunkte verbinden, konvergieren nicht gegen einen Punkt (sondern sie streben sogar gegen die in $w_1 = \infty$ punktierte reelle Achse). Jede andere Folge von Elementargebieten, die ein Randelement von $S^*(W_1)$ definiert, enthält immer wieder eines der logarithmischen Elementargebiete, definiert also dieselbe Randstelle wie dieses. W_1 hat an Randstellen also nur eine einzige, und zwar eine unmittelbare, über $w_1 = \infty$.

b) $w_2(z) = z^{-1}\sin z$ erzeugt eine RIEMANNsche Fläche W_2. Wie bei W_1 liegen die algebraischen Singularitäten von W_2 nur über der reellen Achse, transzendente liegen nur über den Koordinaten $w_2 = 0, \infty$ den einzigen Zielwerten von $w_2(z)$. Wie oben erhält man den Streckenkomplex $S^*(W_2)$ in Fig. 2. $S^*(W_2)$ ist wieder bis auf die Koordinaten der algebraischen Elementargebiete der Sinus-Streckenkomplex. Wie $S^*(W_1)$ ist $S^*(W_2)$ symmetrisch

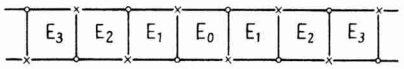

Fig. 1

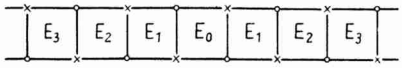

Fig. 2

zu einem Elementargebiet E_0; dessen Koordinate a_0 ist Eins. Für die Koordinate a_n des auf E_0 in der Leiter an n-ter Stelle folgende Elementargebiet gilt $(-1)^n \cdot a_n \sim n^{-1}$ monoton fallend. Die beiden von den logarithmischen Elementargebieten gebildeten Randelemente der Koordinate ∞ bestimmen (nach dem Korollar von Satz 3) zwei *verschiedene* Randstellen über $w_2 = \infty$, und zwar *logarithmische Windungspunkte* [§ 18, Abs. 2]. Die beiden Punkt-Randelemente, die von den in Fig. 2 nach links und rechts führenden Folgen viereckiger Elementargebiete gebildet werden, bestimmen (nach Satz 2) Randstellen über $w_2 = 0$, und zwar (nach Satz 3) zwei verschiedene; diese sind trivialerweise mittelbar, denn von jedem Punkt $P \in W_2$ gelangt man bei radialer Annäherung an die Koordinate Null zu einem Flächenpunkt über $w_2 = 0$, weil in keinem Halbblatt von W_2 über $w_2 = 0$ eine Singularität liegt. $S^*(W_2)$ hat offenbar keine weiteren Randelemente, W_2 also keine weiteren Randstellen.

c) $w(z) = e^z - z^{-1}$ erzeugt eine RIEMANNsche Fläche W_3. Die unendlich vielen Nullstellen von $w'(z) = e^z + z^{-2}$ sind alle einfach und nicht-reell; sie liegen sämtlich auf der durch $|e^z| = z^{-2}$ gegebenen Kurve C. Die in $\Im(z) > 0$ liegenden seien $z_1, z_2, \ldots$, der Reihe nach angeordnet, wie sie beim Durchlaufen des in $\Im(z) > 0$ liegenden Teiles C^+ von C, ausgehend vom Schnittpunkt mit der reellen Achse, getroffen werden. Es ist

$$w_\nu = w(z_\nu) = e^{z_\nu} - z_\nu^{-1} = -z_\nu^{-2} - z_\nu^{-1}.$$

Man berechnet leicht, daß sowohl der Realteil $\Re(w_\nu)$ als auch der Imaginärteil $\Im(w_\nu)$ eigentlich monoton in ν gegen Null fallen. Die transzendenten Singularitäten von W_3 liegen über den Zielwertkoordinaten $w = 0, \infty$ von $w(z)$. Durchläuft man C^+ in der nach $z = \infty$ weisenden Richtung, so ist $\Re(z)$ monoton fallend; auf dem in $\Im(z) > 0$, $\Re(z) < 0$ liegenden Teil von C^+ ist $\Re\{g(z)\}$,

mit $g(z) = -z^{-2} - z^{-1}$, monoton fallend. Ferner ist $\Re(z_1) > 0$, $\Re(z_2) < 0$; der zwischen z_2 und ∞ liegende Teil von C^+ wird durch $g(z)$ auf einen Kurvenbogen L_1 abgebildet. Sei L_2 das w_1, w_2 verbindende Geradenstück (das mit L_1 nur den Punkt w_2 gemeinsam hat), L_3 das Geradenstück $\Re(w) = \Re(w_1)$, $\Im(w_1) \leqq \Im(w) < \infty$ und seien $\bar{L}_1, \bar{L}_2, \bar{L}_3$ die Spiegelungen von L_1, L_2, L_3 an der reellen Achse. Es ist dann

$$L = L_1 \cup L_2 \cup L_3 \cup \bar{L}_1 \cup \bar{L}_2 \cup \bar{L}_3$$

eine (stückweise analytische) doppelpunktfreie geschlossene Kurve, die durch alle Koordinaten von Singularitäten der Fläche W_3 hindurchgeht. Man erhält das Netz von W_3 in den Urbildern von L in der z-Ebene und aus ihm den Streckenkomplex $S^*(W_3)$ in Fig. 3. $S^*(W_3)$ besteht aus einer Folge F von Knoten und Gliedern, die ein logarithmisches Elementargebiet E der Koordinate ∞ begrenzt; ein Innenknoten F_0 der Folge ist außerdem über ein Glied s' mit einem Außenknoten K', dieser über ein Glied s'' mit einem Innenknoten K'' verbunden; K'' selbst ist mit allen Außenknoten der Folge F durch Glieder verbunden, er ist also Eckknoten einer unendlichen Folge $\{E_\nu\}$ ($\nu = \ldots, -2, -1, 1, 2, \ldots$) von viereckigen Elementargebieten. $E_1, E_2, \ldots$ seien der Reihe nach die oberhalb der Glieder s', s'' liegenden Elementargebiete, $E_{-1}, E_{-2}, \ldots$ die unterhalb liegenden. Die Koordinate von E_ν ist w_ν für $\nu > 0$, $\overline{w}_\nu$ für $\nu < 0$. Es ist $\lim w_\nu = \lim \overline{w}_\nu = 0$.

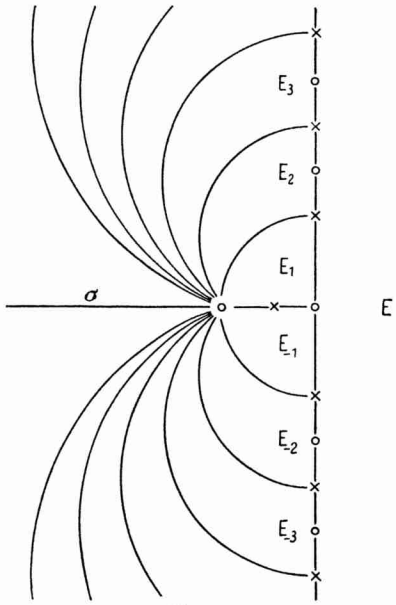

Fig. 3

$S^*(W_3)$ hat als Randelemente das logarithmische Elementargebiet E der Koordinate ∞ und ein Strahl-Randelement σ der Koordinate 0, das durch die Folge $\{E_\nu\}$ definiert wird. Ihnen entsprechen: eine Randstelle von W_3 über ∞ — die nach § 18 ein logarithmischer Windungspunkt, also eine unmittelbare Randstelle ist — und eine Randstelle über 0. Diese ist weder mittelbar noch unmittelbar: im Halbblatt H'', das zum Knoten K'' gehört, erreicht man von keinem Punkt aus bei Annäherung an die Koordinate 0 einen Flächenpunkt über 0; in allen anderen Halbblättern von W_3 hingegen liegen innere Punkte über der Koordinate 0.

Beziehungen zwischen den Streckenkomplexbegriffen

§ 21. Ist einer RIEMANNschen Fläche W ein Streckenkomplex S bzw. ein Streckenkomplex S^* zugeordnet, so wurde dieser mit $S(W)$ bzw. $S^*(W)$ bezeichnet. Trivialerweise umfaßt der Definitionsbereich $\mathfrak{S}^*$ des Funktionals S^*

den Definitionsbereich $\mathfrak{S}$ des Funktionals S. Ist $W \in \mathfrak{S}$, liegen also die Singularitäten von W über endlich vielen Grundpunkten, so erhält man $S^*(W)$ aus $S(W)$ dadurch, daß man in $S(W)$ alle zwischen zwei Knoten verlaufenden Bündel benachbarter Glieder durch ein einziges Glied ersetzt. Umgekehrt erhält man bei einer Fläche $W \in \mathfrak{S}$, deren Streckenkomplex $S^*(W)$ gegeben ist, $S(W)$ dadurch, daß man ein Glied, dessen Überschreiten dem Durchlaufen des Bogens s von L entspricht, durch ein Bündel von $k+1$ benachbarten Gliedern ersetzt, wenn k die Anzahl der Grundpunkte im Innern von s ist, über denen W überhaupt verzweigt ist[20]).

Erweiterungen in ähnlicher Richtung, wie sie in § 2 für den Streckenkomplex S erwähnt wurden, sind auch für S^* durchzuführen: Gegeben seien n einfach zusammenhängende Gebiete G_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ in der Ebene, von denen jedes durch L in zwei Teilgebiete zerlegt wird, während zwei verschiedene Gebiete G_ν, G_μ höchstens Randpunkte gemeinsam haben. Es sei $W \in \mathfrak{S}^*$ eine Fläche, die in jedem Blatt $B_\varkappa$ höchstens je eine Singularität $a_\nu^{(\varkappa)} \in G_\nu$ enthält. Jeder Fläche, die aus W dadurch hervorgeht, daß die Windungspunkte $a_\nu^{(\varkappa)}$ innerhalb G verschoben werden, werde als Streckenkomplex $S^*(W)$ zugeordnet. Auf Einzelheiten will ich hier jedoch nicht eingehen.

Literatur

[1] ELFVING, G.: Über eine Klasse von Riemannschen Flächen und ihre Uniformisierung. Acta Soc. Sci. Fennicae, Nova Ser. **2**, Nr. 3, 1—60 (1934). — [2] HANCK, H.: Über die Ableitungsfestigkeit gewisser Verzweigungseigenschaften. Dissertation Göttingen **1935**. — [3] IVERSEN, F.: Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes. Thèse de Helsingfors **1914**. — [4] NEVANLINNA, R.: Über die Riemannsche Fläche einer analytischen Funktion. Verh. Internat. Math. Kongreß 1 Zürich 1932. — [5] NEVANLINNA, R.: Eindeutige Analytische Funktionen. Berlin: Springer 1936; 2. Aufl. 1953. — [6] NEVANLINNA, R.: Uniformisierung. Berlin: Springer 1953. — [7] TEICHMÜLLER, O.: Vermutungen und Sätze über die Wertverteilung gebrochener Funktionen endlicher Ordnung. Dtsch. Math. **4**, 163—190 (1939). — [8] ULLRICH, E.: Flächenbau und Wachstumsordnung bei gebrochenen Funktionen. Jber. Deutsch. Math. Verein. **46**, 232—274 (1936).

[20]) Man könnte natürlich auch beim Streckenkomplex S^* (wie man es beim Streckenkomplex S tut) Mehrfachbindungen zulassen, in der Weise, daß zweiseitigen Elementargebieten nicht-singuläre Stellen der Fläche über L zugeordnet sind.

Gießen, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 3. September 1955)