Werk

Titel: Knoten mit zwei Brücken.

Autor: Schubert, Horst

Jahr: 1956

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0065|log19

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

SCHUBERT, H.
Math. Zeitschr. Bd. 65, S. 133—170 (1956)

Knoten mit zwei Brücken

Von
HORST SCHUBERT

Brückendarstellungen von Knoten und Verkettungen wurden von TORRES und FOX [*10*] und dem Verfasser [*6*] unabhängig voneinander eingeführt. Da der Kreis der einzige Knoten ist, der eine solche Darstellung mit nur einer Brücke besitzt, liegt es nahe, diejenigen Knoten und Verkettungen zu klassifizieren, die Brückendarstellungen mit zwei Brücken besitzen. Dies sind gerade diejenigen, die früher als *Viergeflechte* Interesse gefunden haben[1]).

Es seien E_1 und E_2 zwei parallele Ebenen im 3-dimensionalen euklidischen Raum R^3. Wir bezeichnen sie als waagerecht und E_1 als die obere von beiden. Eine *Brückendarstellung mit zwei Brücken* besteht aus je zwei Streckenzügen in E_1 und E_2 und vier dazu senkrechten Strecken, die sich zu einer oder zwei orientierten Knotenlinien zusammensetzen.

Ist k eine solche Brückendarstellung, so läßt sich durch Deformation von k eine *Normalform* herstellen, die bei senkrechter Projektion nur endlich viele Doppelpunkte besitzt und bei der die beiden Streckenzüge auf E_2 von den Projektionen der auf E_1 liegenden Streckenzüge abwechselnd getroffen werden, sofern k nicht zwei unverkettete Kreise darstellt (§ 3). Sieht man von den Endpunkten der Streckenzüge ab, so erhält man Unterkreuzungen, deren Anzahl von der Form $2n$ ist. Falls $n \neq 0$ ist, also Unterkreuzungen vorhanden sind, bezeichnen wir $\alpha = n + 1$ als *Torsion* von k. Außerdem betrachten wir für einen auf E_2 liegenden Streckenzug von k den ersten Unterkreuzungspunkt im Sinne der Orientierung von k. Über ihm liegt ein Punkt eines Streckenzuges auf E_1, welcher der m-te Überkreuzungspunkt dieses Streckenzuges sei. Wir setzen $\beta = \alpha - m$, wenn die Unterkreuzung von rechts nach links erfolgt, $\beta = m - \alpha$ im anderen Falle und bezeichnen β als *Kreuzungsklasse* von k. Besitzt die Normalform keine Unterkreuzungen, so stellt sie entweder den Kreis oder zwei unverkettete Kreise dar. Im ersten Falle setzen wir $\alpha = \beta = 1$, im zweiten $\alpha = \beta = 0$. Durch Angabe von α und β ist die Normalform bis auf unwesentliche Deformationen bestimmt, so daß wir sie durch das Paar (α, β) bezeichnen können. Für $\alpha > 1$ ist β ungerade, teilerfremd zu α und $|\beta| < \alpha$, und zu jedem Paar (α, β), das diesen Bedingungen genügt, gehört eine Normalform. Bei ungeradem α stellt die Normalform einen einzigen Knoten dar, bei geradem α zwei verkettete Kreise.

Zwei Normalformen (α, β) und (α', β') stellen genau dann denselben Knoten bzw. dieselbe Verkettung dar, wenn $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ oder $\beta\beta' \equiv 1$ modulo 2α

[1]) Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Viergeflechte und SCHUBERT [*6*] § 2. Über Viergeflechte s. BANKWITZ und SCHUMANN [*1*] und REIDEMEISTER [*4*].

ist (§ 3). Die hier betrachteten Knoten und Verkettungen sind also durch die Brückenzahl 2, die Torsion und die beiden möglichen Werte der Kreuzungsklasse vollständig charakterisiert. Sie sind sämtlich symmetrisch (§ 3). Da aus der Normalform (α, β) durch Spiegelung an einer senkrechten Ebene die Normalform $(\alpha, -\beta)$ entsteht, ist ein Knoten zur Normalform (α, β) genau dann amphicheiral, wenn $\beta^2 \equiv -1$ modulo 2α ist, und nur die Normalform (0,0) stellt eine amphicheirale Verkettung dar.

Zu den betrachteten Knoten gehören die Torusknoten der Umlaufzahl 2. Für diese ist $\beta = \pm 1$ und $\alpha\beta$ die Verschlingungszahl. Ferner gehören hierher diejenigen Schlingknoten, deren Diagonalknoten der Kreis ist (§ 3). Diese besitzen Normalformen der Gestalt $(\alpha, \pm(\alpha - 2))$, womit sich eine Vermutung von H. SEIFERT [9] bestätigt, daß der Kreis und der Viererknoten die einzigen amphicheiralen Schlingknoten sind.

Die hier betrachteten Knoten und Verkettungen stehen in einer engen Beziehung zu den Linsenräumen, die von H. SEIFERT bemerkt wurde. Sei k eine Brückendarstellung mit zwei Brücken. Wird der R^3 zur 3-Sphäre S^3 geschlossen, so ist die zweiblättrige, längs k verzweigte Überlagerung der S^3 ein Linsenraum, und es können alle Linsenräume so dargestellt werden (§ 4). Damit läßt sich die angegebene Klassifikation erhalten bis auf diejenigen Verkettungen, deren Verschlingungszahl null ist. Um auch diese mit zu erfassen, wird der Klassifikationssatz mit kombinatorischen Methoden bewiesen (§§ 5 bis 10).

Im Anhang geben wir Normalformen für diejenigen Knoten der ALEXANDER-BRIGGSschen Tabelle an, für die Brückendarstellungen mit zwei Brücken gefunden wurden.

§ 1. Brückendarstellungen

Es sei $\mathfrak{E}^3$ ein 3-Simplex, das der euklidische Raum R^3 mit einer 3-Sphäre S^3 gemein hat, die Rand eines euklidischen 4-Simplexes ist. R^3 und S^3 seien mit einer festen Orientierung versehen und zwar so, daß die Orientierungen auf $\mathfrak{E}^3$ übereinstimmen. Alle zu betrachtenden Knotenlinien und Flächen sollen in $\mathfrak{E}^3$ liegen, was weder für die Einbettung in den R^3 noch für die Einbettung in die S^3 eine Einschränkung der Allgemeinheit bedeutet[2]). Werden semilineare Abbildungen (s-Abbildungen) des R^3 oder der S^3 ausgeführt[3]), so sollen auch die Bilder der jeweils betrachteten Knotenlinien und Flächen in $\mathfrak{E}^3$ liegen. Die s-Abbildungen des R^3 sind dabei immer noch so abgeändert zu denken, daß sie außerhalb $\mathfrak{E}^3$ die Identität sind und somit eine s-Abbildung der S^3 induzieren. Alle Komplexe sollen stets eine Zerlegung in euklidische Simplexe besitzen.

Sei $\mathfrak{K}$ eine Kugel[4]). $k_1, k_2, \ldots, k_n$ seien Sehnen von $\mathfrak{K}$, d. h. paarweise disjunkte, orientierte Streckenzüge auf $\mathfrak{K}$, die mit dem Rande von $\mathfrak{K}$ nur die

[2]) Vgl. hierzu [6] § 1.

[3]) Über s-Abbildungen s. GRAEUB [3]. Die benutzten Resultate finden sich auch in [7] zusammengestellt. Alle s-Abbildungen sollen orientierungserhaltend sein.

[4]) Wir verstehen hierunter das semilineare Bild eines 3-Simplexes.

Endpunkte gemein haben. Wenn es n paarweise disjunkte Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_n$ auf $\mathfrak{R}$ gibt mit der Eigenschaft, daß der Rand von $\mathfrak{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ aus k_i und einem Streckenzug l_i auf dem Rande von $\mathfrak{R}$ besteht und daß l_i den Durchschnitt von $\mathfrak{e}_i$ mit dem Rande von $\mathfrak{R}$ ausmacht, so sagen wir, daß die *Sehnen* k_i *in* $\mathfrak{R}$ *einfach* sind oder daß eine *Kugel mit n einfachen Sehnen* vorliegt und daß die *Elementarflächenstücke* $\mathfrak{e}_i$ *in die Sehnen* k_i *von* $\mathfrak{R}$ *eingespannt sind.*

Wie wir unten zeigen, stehen Kugeln mit einfachen Sehnen in engem Zusammenhang mit *Brückendarstellungen*, bei denen wir durchweg die folgende Gestalt benutzen wollen: Es seien T_1 und T_2 zwei konzentrische Tetraeder, die bezüglich des gemeinsamen Mittelpunktes Z ähnlich liegen und von denen T_1 das innere bezüglich des R^3 sei. Eine *Brückendarstellung k mit n Brücken* besteht aus je n paarweise disjunkten Streckenzügen auf T_1 und auf T_2 und $2n$ Strecken auf Geraden durch Z, die sich zu einer oder mehreren orientierten Knotenlinien zusammensetzen. Dabei liegt k auf der von T_1 und T_2 berandeten Kugelschale, und wir bezeichnen T_1 als das *innere*, T_2 als das *äußere Grenztetraeder* von k. Es kann angenommen werden, daß k im Inneren des Projektionskegels von Z nach einer (2-dimensionalen) Seite von T_2 liegt, da sich dies stets durch eine *zentrische Abbildung* erreichen läßt, d. h. durch eine s-Abbildung des R^3, welche jedes zu T_1 konzentrische und ähnlich gelegene Tetraeder in sich überführt[5]).

Sei T ein solches Tetraeder zwischen T_1 und T_2. Durch T wird die S^3 in zwei Kugeln $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{L}$ zerlegt, und es bildet k in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{L}$ je n Sehnen. Diese sind in $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{L}$ einfach. Man erhält nämlich Elementarflächenstücke, die in diese Sehnen eingespannt sind, wenn man k von Z aus projiziert. Eine Brückendarstellung mit n Brücken gibt also Anlaß zu einer Zerlegung der S^3 in zwei Kugeln mit je n einfachen Sehnen. Davon gilt auch die Umkehrung:

Satz 1. *Die Verkettung* $\varkappa$ *von* $m \geqq 1$ *Knoten werde durch ein System k von m Knotenlinien dargestellt.* $\varkappa$ *besitzt genau dann eine Brückendarstellung mit n Brücken, wenn sich die* S^3 *durch eine 2-Sphäre so in zwei Kugeln zerlegen läßt, daß k in jeder der beiden Kugeln n einfache Sehnen bildet.*

Beweis. Besitzt $\varkappa$ eine Brückendarstellung k' mit n Brücken, so gibt es nach dem Vorangehenden zu k' eine 2-Sphäre T' mit den genannten Eigenschaften. Eine s-Abbildung, die k' auf k abbildet, führt T' in eine 2-Sphäre der gewünschten Art über.

Sei umgekehrt T eine 2-Sphäre, welche die S^3 so in zwei Kugeln $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{L}$ zerlegt, daß k in $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{L}$ je n einfache Sehnen bildet. In die Sehnen von $\mathfrak{R}$ bzw. $\mathfrak{L}$ spannen wir die Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_i$ bzw. $\mathfrak{f}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ein. Durch eine geeignete s-Abbildung wird T in ein Tetraeder übergeführt, wobei $\mathfrak{R}$ in das Innere von T (bezüglich des R^3) übergehe. Wird T auf seinen Mittelpunkt hinreichend wenig stetig zusammengezogen, so trifft das dabei aus T entstehende Tetraeder jedes der Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_i$ nur in einem einzigen Querschnitt. Es werde T so zu T_1 zusammengezogen. Entsprechend entstehe T_2 aus

[5]) Vgl. [6] § 2.

T durch stetige Dehnung, wobei während der Dehnung das aus T entstehende Tetraeder jedes Elementarflächenstück $\mathfrak{f}_i$ in nur einem Querschnitt treffe. T_1 bzw. T_2 schneidet von $\mathfrak{e}_i$ bzw. $\mathfrak{f}_i$ ein Elementarflächenstück im Inneren von T_1 bzw. im Äußeren von T_2 ab. Über dieses läßt sich das von k herrührende Randstück kombinatorisch isotop in den Schnitt von T_1 bzw. T_2 mit $\mathfrak{e}_i$ bzw. $\mathfrak{f}_i$ deformieren[6]). k ist danach eine verallgemeinerte Brückendarstellung 2. Art mit n Brücken im Sinne von [6] und läßt sich durch eine zentrische Abbildung in eine Brückendarstellung der oben beschriebenen Art überführen[7]).

Hilfssatz 1. *Es sei k ein System von Knotenlinien, dessen Durchschnitt mit der Kugel $\mathfrak{K}$ aus n Sehnen k_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ von $\mathfrak{K}$ bestehe. $\mathfrak{K}$ werde durch ein Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$ so in zwei Kugeln zerlegt, daß die Sehnen k_i auf $\mathfrak{e}$ liegen und von $\mathfrak{e}$ paarweise disjunkte Elementarflächenstücke abschneiden. $\mathfrak{K}'$ sei eine Kugel im Inneren von $\mathfrak{K}$, deren Durchschnitt mit $\mathfrak{e}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{e}'$ ist, das mit jeder der Sehnen k_i genau eine Sehne k_i' von $\mathfrak{K}'$ gemein hat. Dann gibt es eine s-Abbildung, die $\mathfrak{K}'$ auf $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{e}'$ auf $\mathfrak{e}$ und k auf sich abbildet.*

Beweis. Durch eine semilineare Hilfsabbildung kann erreicht werden, daß $\mathfrak{K}$ ein euklidischer Würfel ist, in dem $\mathfrak{e}$ eben und parallel zu einer Würfelseite liegt[8]). Die Abbildung kann zudem so geschehen, daß eine der Sehnen, etwa k_i, eine Strecke auf $\mathfrak{e}$ ist und daß k den Würfelrand in den Endpunkten von k_i geradlinig durchsetzt. Man erkennt nun, daß sich $\mathfrak{K}'+k$ so deformieren läßt, daß k in sich übergeht und k_i so auf $\mathfrak{K}'$ zu liegen kommt, daß die Endpunkte von k_i und nur diese gemeinsame Punkte der Ränder von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ werden, während der Durchschnitt von $\mathfrak{K}'$ mit $\mathfrak{e}$ ein Elementarflächenstück bleibt und sich auf den von k_i verschiedenen Sehnen nicht ändert. Die entsprechende Konstruktion kann der Reihe nach für alle Sehnen von $\mathfrak{K}$ ausgeführt werden. Die Ränder von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ haben dann die Endpunkte der Sehnen k_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ gemein. Der Durchschnitt von $\mathfrak{K}'$ mit $\mathfrak{e}$ ist ein Elementarflächenstück $\mathfrak{e}'$, das die Sehnen k_i enthält und dessen Komplement bezüglich $\mathfrak{e}$ aus n Elementarflächenstücken $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, \ldots, \mathfrak{f}_n$ besteht. Den Rand von $\mathfrak{f}_i$ bilden ein Streckenzug s_i auf dem Rande von $\mathfrak{K}$ und ein Streckenzug s_i' auf dem Rande von $\mathfrak{K}'$, wobei $\mathfrak{f}_i$ mit den Sehnen von $\mathfrak{K}$ nur die Endpunkte von s_i und s_i' gemein hat. Da sich s_i' über $\mathfrak{f}_i$ kombinatorisch isotop in s_i deformieren läßt, kann man $\mathfrak{e}'$ so in $\mathfrak{e}$ überführen, daß k punktweise festbleibt und daß der Rand von $\mathfrak{e}$ der Durchschnitt der Ränder von $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}'$ wird[9]). Das Komplement von $\mathfrak{K}'$ bezüglich $\mathfrak{K}$ besteht dann aus zwei Kugeln, deren Durchschnitt mit k nur aus den Sehnenendpunkten besteht und vermöge deren man den Rand von $\mathfrak{K}'$ in den Rand von $\mathfrak{K}$ bei festem k überführen kann.

---

[6]) GRAEUB [3], S. 33.

[7]) [6] § 2. Der dortige Hilfssatz 1 überträgt sich ohne weiteres auf den hier benötigten Sachverhalt, bei dem statt senkrechter Strecken zwischen waagerechten Ebenen zentral gerichtete Strecken zwischen T_1 und T_2 benötigt werden.

[8]) Vgl. hierzu die Konstruktion in [8] S. 42, 43.

[9]) Vgl. [7] S. 271.

§ 2. Kugeln mit zwei einfachen Sehnen

Für eine Kugel mit zwei einfachen Sehnen sind die beiden Elementarflächenstücke, die man in die beiden Sehnen einspannen kann, bis auf Deformation[10]) eindeutig bestimmt. Dies ergibt sich aus dem Beweis von

Satz 2. *k sei eine Knotenlinie, deren Durchschnitt mit der Kugel $\mathfrak{K}$ aus zwei einfachen Sehnen von $\mathfrak{K}$ bestehe. $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2'$ seien je zwei Elementarflächenstücke auf $\mathfrak{K}$, die in diese Sehnen eingespannt sind. Dann gibt es eine s-Abbildung, die $\mathfrak{K}$ auf sich und $\mathfrak{e}_1'$, $\mathfrak{e}_2'$ auf $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ abbildet und die auf k und außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{K}$ die Identität ist.*

Anmerkung. *Der Satz bleibt richtig, wenn k aus zwei Knotenlinien besteht. Ein entsprechender Satz gilt natürlich für Kugeln mit einer einfachen Sehne, dagegen nicht für mehr als zwei Sehnen.*

Wir beweisen zunächst:

Hilfssatz 2. *Auf einem Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$ seien zwei mittlere Punkte A, B durch zwei doppelpunktfreie Streckenzüge v, w verbunden. Dann läßt sich v auf $\mathfrak{e}$ kombinatorisch isotop in w deformieren.*

Beweis. Durch kombinatorisch isotope Deformation von v läßt sich zunächst erreichen, daß der Durchschnitt von v und w nur aus den Endpunkten und isolierten Schnittpunkten besteht. Haben nun v und w nur die Endpunkte gemein, so beranden sie auf $\mathfrak{e}$ ein Elementarflächenstück, über welches v in w deformiert werden kann. Den Fall, daß v und w noch Schnittpunkte gemein haben, führen wir hierauf zurück durch folgende Reduktion:

Wir zählen die Endpunkte A und B als Schnittpunkte, solange noch mindestens ein echter Schnittpunkt vorhanden ist. Seien C und D zwei auf w aufeinanderfolgende Schnittpunkte. Sie schneiden aus w ein von weiteren Schnittpunkten freies Stück w' aus und aus v ein Stück v', das zusammen mit w' auf $\mathfrak{e}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ berandet. Falls $\mathfrak{g}$ keinen der Punkte A, B im Inneren enthält, so macht v' den Durchschnitt von v und $\mathfrak{g}$ aus, und es kann mindestens ein Schnittpunkt von v und w dadurch beseitigt werden, daß man v' über $\mathfrak{g}$ in w' deformiert und anschließend auf das $\mathfrak{g}$ gegenüberliegende Ufer von w abhebt. Wenn A oder B Endpunkt von w' ist, so ist dieser Punkt beim Abheben festzulassen.

Die geschilderte Reduktion führen wir so oft wie möglich für auf w benachbarte Schnittpunkte aus. Der Durchschnitt von v und w besteht dann nur noch aus den Endpunkten A und B. Der Nachweis erfolgt indirekt. Seien $A = C_0, C_1, \ldots, C_n = B$ die verbliebenen Schnittpunkte von v und w in ihrer Reihenfolge auf w, und nehmen wir an, daß $n > 1$ ist. C_{i-1} und C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ schneiden dann aus w ein Stück w_i und aus v ein Stück v_i aus. Das von C_i nach B führende Stück von v bezeichnen wir mit u_i. Nun beranden w_1 und v_1 auf $\mathfrak{e}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_1$, das nach dem Vorangehenden den Punkt B enthalten muß. u_1 liegt daher auf $\mathfrak{g}_1$ und auch w_2, weil sich v und w in C_1 durchsetzen. C_2 muß auf u_1 liegen (Fig. 1), da andernfalls w_2 von $\mathfrak{g}_1$ ein

[10]) im Sinne von [7] § 1.

von v_2 und w_2 berandetes Elementarflächenstück $\mathfrak{g}'$ abschnitte, das weder A noch B im Inneren enthielte, weil w_1 und damit u_1 nicht auf $\mathfrak{g}'$ liegen könnte. v_2 und w_2 beranden also auf $\mathfrak{g}_1$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_2$, das mit dem Rande von $\mathfrak{g}_1$ nur den Punkt C_1 gemein hat und daher A nicht enthält. Also liegt B und damit u_2 auf $\mathfrak{g}_2$. Diese Schlußweise läßt sich unter jeweiliger Erhöhung der Indizes um 1 wiederholen. Man gelangt so zu einem von v_{n-1} und w_{n-1} berandeten Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_{n-1}$, das den Punkt B, nicht aber A enthält und das auf $\mathfrak{g}_{n-2} < \ldots < \mathfrak{g}_1$ liegt. Dann liegen aber v_n und w_n auf $\mathfrak{g}_{n-1}$ und beranden auf $\mathfrak{g}_{n-1}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_n$, das A nicht enthält und B als Randpunkt besitzt, womit sich ein Widerspruch ergibt und die Behauptung folgt.

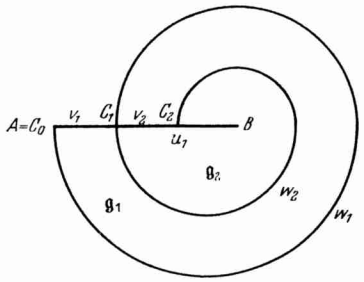

Fig. 1

Beweis von Satz 2. Es seien k_1, k_2 die beiden Sehnen und T der Rand von $\mathfrak{R}$. In k_1 seien $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_1'$ eingespannt, und es seien w bzw. v die auf T liegenden Randstücke von $\mathfrak{e}_1$ bzw. $\mathfrak{e}_1'$. Wir führen zunächst $\mathfrak{e}_1'$ in $\mathfrak{e}_1$ über.

1. Schritt. *Reduktion der Schnitte von w und v.*

Die Reduktion entspricht derjenigen im Beweise von Hilfssatz 2, wobei hier verlangt wird, daß die dort mit v' und w' bezeichneten Stücke von v und w auf T ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ beranden, das keinen der Endpunkte von k_1 und k_2 im Inneren enthält. Sie werde so oft wie möglich ausgeführt. Jede Reduktion läßt sich auch durch eine s-Abbildung erhalten, die T in sich überführt und k punktweise festläßt.

2. Schritt. *Reduktion der Schnitte von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_1'$.*

Durch isotope simpliziale Deformation von $k + T + \mathfrak{e}_1'$, die T in sich überführt, k punktweise festläßt und die Zahl der Schnittpunkte von v und w nicht ändert, kann erreicht werden, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_1'$ aus dem gemeinsamen Randstück k_1 und Schnittlinien besteht, die geschlossen oder möglicherweise Querschnitte sind und die höchstens Punkte von k_1 gemein haben. Querschnitte, deren beide Endpunkte auf k_1 liegen, denken wir uns durch das von den Endpunkten aus k_1 ausgeschnittene Stück geschlossen. Unter den geschlossenen Schnitten gibt es einen auf $\mathfrak{e}_1$ innersten s, der auf $\mathfrak{e}_1$ ein von weiteren Schnitten freies Elementarflächenstück $\mathfrak{f}$ berandet. Auf $\mathfrak{e}_1'$ berandet s ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}'$, wobei $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ mit T höchstens die Endpunkte von k_1 gemein haben. $\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f}'$ beranden auf $\mathfrak{R}$ eine Kugel $\mathfrak{L}$. Gemeinsame Punkte von k und $\mathfrak{L}$ können nur auf s liegen und machen dann entweder nur einen Punkt oder ein zusammenhängendes Stück von k_1 aus. Durch eine s-Abbildung, die auf k und im Komplement von $\mathfrak{R}$ die Identität ist, kann der Schnitt s so beseitigt werden, daß keine neuen Schnitte entstehen. Es werden so der Reihe nach alle geschlossenen Schnitte von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_1'$ beseitigt. Danach sind alle Schnitte verschwunden:

3. Schritt. *Nachweis, daß der Durchschnitt von* $\mathfrak{e}_1$ *und* $\mathfrak{e}_1'$ *nur noch aus* k_1 *besteht.*

Nehmen wir an, daß noch Querschnitte von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_1'$ vorhanden sind. Unter diesen können solche sein, die einen Endpunkt auf k_1 besitzen, der nicht zugleich Endpunkt von k_1 ist. Wir denken uns diese durch ein Stück von k_1 so verlängert, daß beide Endpunkte auf T liegen. Jeder Querschnitt schneidet dann von $\mathfrak{e}_1$ ein Elementarflächenstück ab, das mit T genau ein zusammenhängendes Stück des Randes gemein hat. Sei $\mathfrak{f}$ ein auf $\mathfrak{e}_1$ innerstes solches Elementarflächenstück. Es wird berandet von einem Querschnitt s und einem Stück t von w, und es enthält $\mathfrak{f}$ außer dem Randbogen s keinen weiteren Querschnitt. Von $\mathfrak{e}_1'$ schneidet s ein Elementarflächenstück $\mathfrak{f}'$ ab, das von s und einem Stück t' von v berandet wird, wobei t und t' genau die Endpunkte gemein haben. $\mathfrak{f}+\mathfrak{f}'$ ist ein Elementarflächenstück, das $\mathfrak{K}$ in zwei Kugeln zerlegt. Eine von

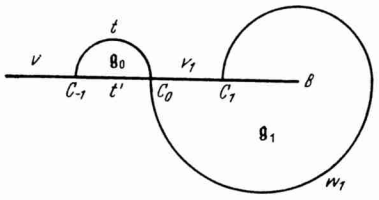

Fig. 2a

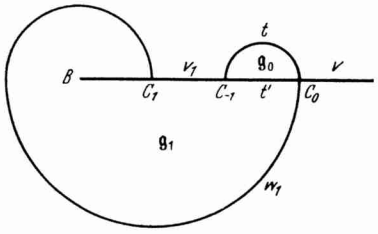

Fig. 2b

beiden, sie heiße $\mathfrak{L}$, enthält keinen Punkt von k_1 im Inneren. Der Durchschnitt von $\mathfrak{L}$ und T ist ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_0$, das von t und t' berandet wird und keinen Endpunkt von k_1 im Inneren enthält. Der Durchschnitt von $\mathfrak{g}_0$ und v besteht daher aus $t' \cdot k_2$ liegt auf $\mathfrak{L}$, weil andernfalls $\mathfrak{g}_0$ keinen der Endpunkte von k_1 und k_2 im Inneren enthielte im Widerspruch zum 1. Schritt.

Seien C_{-1} und C_0 die Endpunkte von t. Mindestens einer von beiden, etwa C_0, ist nicht Endpunkt von k_1. C_0 zerlegt w in zwei Stücke. Dabei sei w_0 dasjenige, das mit t nur den Endpunkt C_0 gemein hat. Wir denken uns w_0 in C_0 entspringend und betrachten den auf w_0 nächsten Schnittpunkt C_1 von v und w. C_0 und C_1 schneiden aus w ein Stück w_1 und aus v ein Stück v_1 aus. w_1 hat mit $\mathfrak{g}_0$ höchstens die Endpunkte gemein, weil sich v und w in C_0 schneiden und der Durchschnitt von $\mathfrak{g}_0$ und v aus t' besteht, und es beranden v_1 und w_1 auf T ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_1$, das mit $\mathfrak{g}_0$ keine inneren Punkte gemein hat. $\mathfrak{g}_1$ enthält mindestens einen der Endpunkte von k_1 im Inneren, da sonst ein Widerspruch zum 1. Schritt vorläge. Es kann auch nur ein Endpunkt von k_1 im Inneren von $\mathfrak{g}_1$ liegen (Fig. 2a und b). Da sich nämlich v und w in C_0 durchsetzen und da $\mathfrak{g}_0$ und $\mathfrak{g}_1$ in der Umgebung von C_0 an verschiedene Ufer von v anstoßen, kann nur eines der beiden Stücke, in welches v durch C_0 zerlegt wird, auf $\mathfrak{g}_1$ liegen, während das andere mit $\mathfrak{g}_1$ nur den Endpunkt C_0 gemein hat. Sei B der auf $\mathfrak{g}_1$ liegende Endpunkt von k_1 und v_0 das von C_0 nach B führende Stück von v. Es kann nun die Schlußweise des Beweises von Hilfssatz 2 auf w_0 und v_0 angewandt werden, womit sich der gesuchte Widerspruch ergibt.

4. Schritt. *Abschluß des Beweises.*

Nach dem Vorangehenden bilden e_1 und e_1' zusammen ein Elementarflächenstück, welches von $\mathfrak{K}$ eine Kugel $\mathfrak{L}$ abschneidet, die k_2 nicht enthält. Der Durchschnitt von $\mathfrak{L}$ und T ist ein von v und w berandetes Elementarflächenstück, über welches v kombinatorisch isotop in w deformiert werden kann. Da man annehmen kann, daß T ein Tetraeder und e_1 eben ist, läßt sich das Deformationsresultat durch eine s-Abbildung erhalten, die k punktweise festläßt, T auf sich abbildet und e_1' so, daß der Durchschnitt von e_1 und e_1' aus dem gemeinsamen Rande besteht[11]). Danach läßt sich e_1' bei festem k und T in e_1 überführen.

e_2' wird nun bei festem $e_1' = e_1$ entsprechend in e_2 übergeführt. Der 3. Schritt ist dabei überflüssig, da man vermöge Hilfssatz 2 schließen kann, daß der 1. Schritt für e_2 und e_2' alle Schnittpunkte der auf T liegenden Randstücke beseitigt.

Aus dem vorangehenden Beweis ergibt sich noch:

Hilfssatz 3. *Es sei $\mathfrak{K}$ eine Kugel mit zwei einfachen Sehnen und T der Rand von $\mathfrak{K}$. e_1, e_2 und e_1', e_2' seien je zwei Elementarflächenstücke auf $\mathfrak{K}$, die in die Sehnen eingespannt sind. Die auf T liegenden Randstücke von e_1' und e_2' sind dann auf T kombinatorisch isotop zu den entsprechenden Randstücken von e_1 und e_2.*

§ 3. Normalformen

Es sei k eine Brückendarstellung im Sinne von § 1 mit zwei Brücken, T_1 das innere, T_2 das äußere Grenztetraeder und Z ihr Mittelpunkt. Die beiden auf T_1 bzw. T_2 liegenden Stücke von k bezeichnen wir als *innere* bzw. *äußere Wege*. Eine Strecke heiße *zentral*, wenn sie auf einer Geraden durch Z liegt. k besteht also aus den beiden inneren Wegen, den beiden äußeren Wegen und vier zentralen Strecken zwischen T_1 und T_2. Eine *Brücke* von k wird von einem inneren Weg und den beiden anstoßenden Strecken gebildet. Projiziert man k von Z aus auf T_2, so bildet sich jede zentrale Strecke in einen Punkt ab, während jeder andere Doppelpunkt der Projektion Bild von genau zwei Punkten auf k ist, nämlich von einem *Überkreuzungspunkt* auf einem inneren Weg und einem *Unterkreuzungspunkt* auf einem äußeren Weg.

Wir normieren die Brückendarstellung dadurch, daß wir Unterkreuzungen so weit wie möglich beseitigen. Seien w_1, w_2 die Projektionen der inneren Wege, v_1, v_2 die äußeren Wege. Zunächst können v_1 und v_2 bei festen Endpunkten auf T_2 so deformiert werden, daß v_1 und v_2 mit w_1 und w_2 nur die Endpunkte und Schnittpunkte gemein haben. Die Endpunkte von v_1 und v_2 zählen als Schnittpunkte, solange auf v_1 bzw. v_2 noch mindestens ein weiterer Schnittpunkt liegt.

Nehmen wir an, daß einer der beiden Wege w_1, w_2, etwa w_1, zweimal hintereinander denselben äußeren Weg, etwa v_2, schneidet. Die beiden

[11]) Vgl. [7] S. 271.

Schnittpunkte schneiden aus w_1 ein von weiteren Schnitten freies Stück w', aus v_2 ein Stück v' aus. Es gibt dann ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$, das von w' und v' berandet wird und das, abgesehen von seinem Rande, außerhalb T_2 liegt. Über $\mathfrak{g}$ läßt sich v' kombinatorisch isotop in w' deformieren und danach so von w' abheben, daß mindestens ein Schnittpunkt verschwunden ist. Die Endpunkte von v_1 und v_2 sind dabei festzulassen. Die angegebene Reduktion werde so oft wie möglich ausgeführt. Danach ist eine Normalform von k erreicht: Entweder haben w_1, w_2 mit v_1, v_2 nur noch die Endpunkte gemein oder jeder der beiden Wege w_1 und w_2 trifft abwechselnd v_1 und v_2. Im

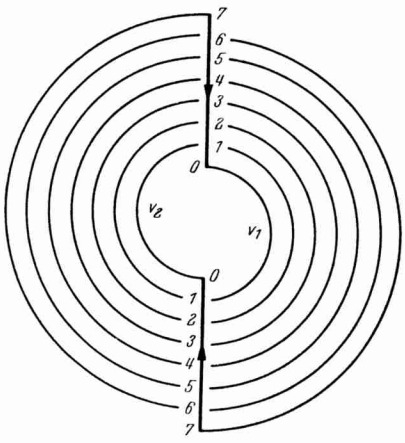

Fig. 3

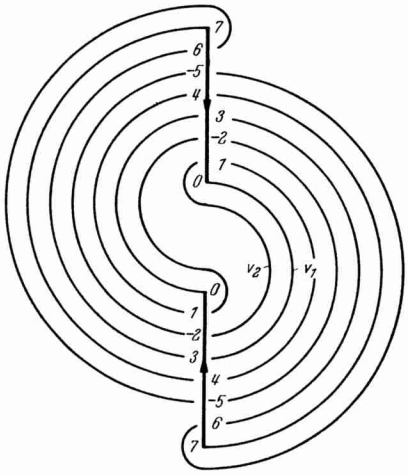

Fig. 4

zweiten Falle trifft auch jeder der beiden Wege v_1 und v_2 abwechselnd w_1 und w_2: Träfe etwa v_1 zweimal hintereinander w_2, so berandeten diese beiden Schnittpunkte auf v_1 ein von weiteren Schnitten freies Stück, während sie auf w_2 ein Stück mit einer ungeraden Anzahl von Schnittpunkten von w_2 mit v_1, v_2 berandeten, weil w_2 abwechselnd v_1 und v_2 trifft. Dies ist aber unmöglich, weil sich w_1, w_2, v_1, v_2 zu einem oder zwei geschlossenen Wegen (mit Doppelpunkten) zusammensetzen.

Besitzt die *Normalform* keine Überkreuzungen, so stellt sie entweder den Kreis oder zwei unverkettete Kreise dar. Im ersten Falle bezeichnen wir sie mit (1, 1), im zweiten Falle mit (0, 0).

Besitzt die *Normalform* k Überkreuzungen, so rechnen wir die Endpunkte der inneren Wege darunter. Jeder innere Weg überkreuzt die äußeren Wege abwechselnd, und jeder äußere Weg unterkreuzt die inneren Wege abwechselnd. Die Anzahl der Überkreuzungen ist von der Form $2n$ mit $n > 2$. Wir bezeichnen $\alpha = n - 1$ als *Torsion*[12]) von k. Fig. 3—5 zeigen Projektionen von Normalformen für $\alpha = 7$. Ist α gerade, so sind die Endpunkte eines äußeren

[12]) Die Abweichung gegenüber der Einleitung beruht darauf, daß hier die Endpunkte der inneren Wege als Überkreuzungen zählen.

Weges von k Endpunkte derselben Brücke, weil die äußeren Wege die beiden inneren abwechselnd unterkreuzen, und es stellt k zwei verkettete Kreise dar. Ist α ungerade, so stellt k einen einzigen Knoten dar.

Seien u_1, u_2 die inneren, v_1, v_2 die äußeren Wege der Normalform k, wobei v_1 unter dem Endpunkt von u_1 entspringe. Für $\alpha > 1$ bezeichnen wir die Überkreuzungspunkte auf u_1 und auf u_2 mit $0, 1, \ldots, \alpha$, und zwar in der Reihenfolge, in der sie entgegen der Orientierung von k auftreten. Den Unterkreuzungspunkten ordnen wir Restklassen modulo 2α zu, die wir durch die ganzen Zahlen des halboffenen Intervalls $(-\alpha, \alpha]$ repräsentieren: Der

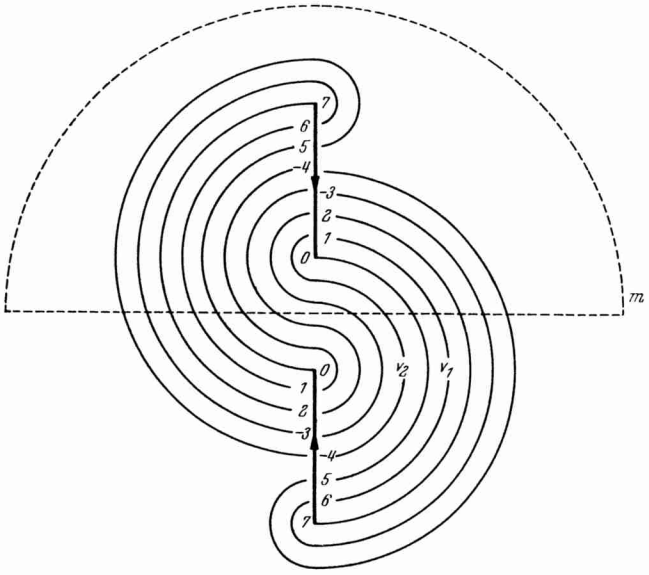

Fig. 5

Unterkreuzungspunkt unter dem Überkreuzungspunkt γ erhält die Restklasse γ zugeordnet, wenn die Unterkreuzung von rechts nach links erfolgt, $-\gamma$ im anderen Falle. Diese Zuordnung ist auch in den Endpunkten von v_1 und v_2 wegen $\gamma = 0$ bzw. $\gamma = \alpha$ sinnvoll (Fig. 3—5). Durch die Unterkreuzungspunkte zerfallen v_1 und v_2 in je α Stücke. Für diese subtrahieren wir die Restklasse des Anfangspunktes von derjenigen des Endpunktes. Die Differenz β ist eine von der Auswahl des Stückes unabhängige Restklasse: v_1, v_2 und die Projektionen w_1, w_2 von u_1, u_2 zerlegen das äußere Grenztetraeder T_2 in 2α Elementarflächenstücke, wobei jedes von je einem Stück von v_1, v_2, w_1, w_2 berandet wird. Sei e ein solches Elementarflächenstück, dessen Ecken den Überkreuzungen der Nummern $\mu, \mu+1$ und $\nu, \nu+1$ entsprechen mögen. Fig. 6a—f zeigt für alle möglichen Orientierungen der Randstücke von e, daß den zu v_1 und v_2 gehörigen Randstücken dieselbe Differenzklasse zugeordnet ist. Dabei sind die zu w_1, w_2 gehörigen Randstücke senkrecht, die zu v_1, v_2 gehörigen Randstücke waagerecht gezeichnet,

und an jeder Ecke ist die zur Unterkreuzung gehörige Restklasse angeschrieben. Da jedes der Elementarflächenstücke, in welche T_2 durch v_1, v_2, w_1 und w_2 zerlegt wird, die Eigenschaft hat, daß seinen beiden zu v_1, v_2 gehörigen Randstücken dieselbe Restklasse zugeordnet wird, ist die Restklasse β für alle Stücke von v_1 und v_2 dieselbe.

Wir bezeichnen β als die *Kreuzungsklasse* der Normalform k. Durchläuft man einen äußeren Weg, etwa v_1, so gelangt man der Reihe nach zu Unterkreuzungen, die abwechselnd unter u_1 und u_2 liegen und denen die Restklassen

$$0, \beta, 2\beta, \ldots, (\alpha - 1)\beta, \alpha\beta \text{ modulo } 2\alpha \tag{1}$$

zugeordnet sind. β ist ungerade wegen $\alpha\beta \equiv \alpha$ modulo 2α und teilerfremd zu α, da in (1) keine Restklasse doppelt auftreten kann. Durch Angabe von α und β ist das Überkreuzungsschema der Normalform k vollständig bestimmt und damit k bis auf eine zentrische Abbildung, welche die von Z ausgehenden Halbgeraden permutiert, also auch der von k dargestellte Knoten bzw. die von k dargestellte Verkettung. Wir bezeichnen daher die *Normalform* mit (α, β).

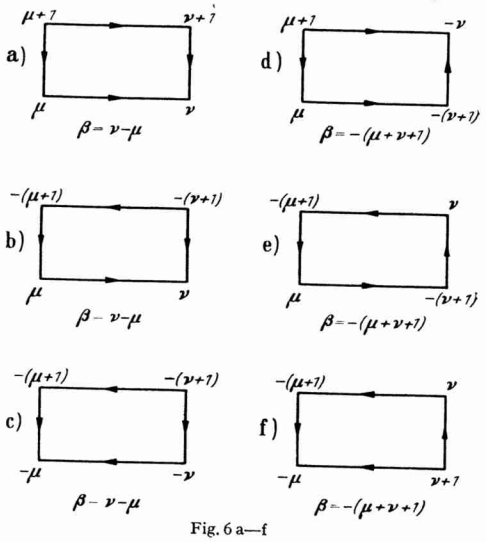

Fig. 6 a—f

Gibt man sich eine ganze Zahl $\alpha \geqq 0$ und für $\alpha > 1$ eine zu α teilerfremde, ungerade ganze Zahl β im Intervall $(-\alpha, \alpha)$ vor, so gehört dazu offenbar auch eine Normalform.

Für spätere Anwendung bemerken wir: Werden bei einer Normalform (α, β) mit $\alpha \geqq 1$ auf dem äußeren Grenztetraeder δ geschlossene, paarweise punktfremde Wege gezeichnet, so daß jeder dieser Wege die äußeren Wege der Normalform trennt, so kann dies so geschehen, daß die geschlossenen Wege die inneren Wege der Normalform abwechselnd unterkreuzen, und zwar je α-mal. Zählt man die so erhaltenen Unterkreuzungen mit, so liest man an Stelle von α und β nun $\bar{\alpha} = \alpha(\delta + 1)$ und $\bar{\beta} = \beta(\delta + 1)$ ab, und es ist $\delta + 1$ der größte gemeinsame Teiler von $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$.

Orientiert man eine Normalform (α, β) um, wobei im Falle einer Verkettung beide Komponenten umzuorientieren sind, so bleiben α und die Unterkreuzungssinne erhalten. Eine bisher mit γ bezeichnete Überkreuzung wird nun mit $\alpha - \gamma$ bezeichnet, und für jedes Stück der äußeren Wege vertauschen sich Anfangs- und Endpunkt, woraus folgt, daß auch β erhalten bleibt. Bezeichnet man eine Verkettung als symmetrisch, wenn sie bei Umorientierung aller Komponenten in sich übergeht, so gilt also

Satz 3. *Knoten und Verkettungen, die Brückendarstellungen mit zwei Brücken besitzen, sind symmetrisch*[13]).

Stellt k eine Verkettung dar und orientiert man nur eine der Komponenten um, so geht β in die Klasse $\alpha+\beta$ modulo 2α über.

Wir hatten bemerkt, daß ein Paar (α, β), das den oben angegebenen Bedingungen genügt, eindeutig einen Knoten bzw. eine Verkettung bestimmt. Das Umgekehrte gilt im allgemeinen nicht. Dies beruht darauf, daß bei der Definition der Kreuzungsklasse die äußeren vor den inneren Wegen ausgezeichnet sind. Es gibt offenbar eine (orientierungserhaltende) s-Abbildung der S^3, welche die Grenztetraeder T_1, T_2 vertauscht und jede zentrale Strecke zwischen T_1 und T_2 wieder in eine solche überführt. Die Normalform (α, β) geht dabei in eine Normalform (α, β') über. Zur Bestimmung von β' bemerken wir zunächst, daß bei der betrachteten Abbildung jeder Unterkreuzung eine gleichsinnige entspricht. Ein Überkreuzungspunkt der Nummer γ $(0 \leq \gamma \leq \alpha)$ geht in einen Unterkreuzungspunkt zur Klasse $(\alpha-\gamma)\beta'$ über, ein Unterkreuzungspunkt zur Klasse $n\beta$ $(0 \leq n \leq \alpha)$ in einen Überkreuzungspunkt der Nummer $\alpha-n$. Wird n zu gegebenem γ so gewählt, daß $n\beta \equiv \varepsilon\gamma$ mit $\varepsilon = \pm 1$ ist (alle Kongruenzen sind modulo 2α zu verstehen), so gibt ε den Unterkreuzungssinn unter dem Überkreuzungspunkt der Nummer γ an, und wegen der Invarianz des Unterkreuzungssinnes bei der betrachteten Abbildung gilt:

$$\varepsilon(\alpha - n) \equiv (\alpha - \gamma)\beta'.$$

Daraus folgt

$$(\alpha - \gamma)\beta\beta' \equiv \varepsilon(\alpha - n)\beta \equiv \varepsilon\alpha\beta - \gamma,$$

und weil β und β' ungerade sind:

$$\gamma\beta\beta' \equiv \gamma,$$

insbesondere für $\gamma = 1$:

$$\beta\beta' \equiv 1.$$

Zwei Normalformen (α, β) und (α, β') stellen also denselben Knoten bzw. dieselbe Verkettung dar, wenn $\beta\beta' \equiv 1$ modulo 2α ist. Dies ist beispielsweise für Fig. 4 und Fig. 5 der Fall. Damit sind aber alle Darstellungsmöglichkeiten erschöpft. Es gilt:

Satz 4. *Zwei Normalformen (α, β) und (α', β') stellen genau dann denselben Knoten bzw. dieselbe Verkettung dar, wenn $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ oder $\beta\beta' \equiv 1$ modulo 2α ist.*

Den Beweis dieses Klassifikationssatzes erbringen wir in den §§ 5—10.

Durch Spiegelung an einer Ebene im R^3 erhält man aus der Normalform (α, β) die Normalform $(\alpha, -\beta)$, weil sich die Unterkreuzungssinne umkehren. Daher gilt:

---

[13]) Für Knoten wurde dies von BANKWITZ und SCHUMANN [1] auf anderem Wege bewiesen.

Korollar zu Satz 4. *Ein durch die Normalform* (α, β) *darstellbarer Knoten ist genau dann amphicheiral, wenn* $\beta^2 \equiv -1$ *modulo* 2α *ist. Keine von* $(0, 0)$ *verschiedene Normalform stellt eine amphicheirale Verkettung dar.*

Für ungerades $\alpha > 1$ und $\beta = \pm 1$ stellt die Normalform (α, β) offenbar einen Torusknoten der Umlaufzahl 2 und der Verschlingungszahl $\alpha\beta$ dar (vgl. Fig. 3). Wegen Satz 4 sind damit alle in Frage kommenden Torusknoten erfaßt, da unter den Torusknoten nur diejenigen der Umlaufzahl 2 eine Brückendarstellung mit zwei Brücken besitzen[14]).

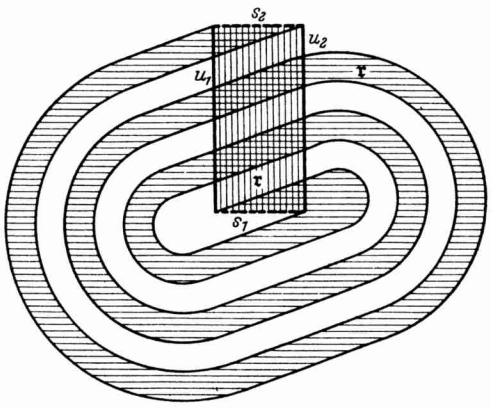

Fig. 7

Satz 5. *Jeder Schlingknoten, der den Kreis als Diagonalknoten besitzt, läßt sich durch eine Normalform der Gestalt* $(\alpha, \pm(\alpha - 2))$ *darstellen. Kreis und Viererknoten sind die einzigen amphicheiralen Schlingknoten*[15]).

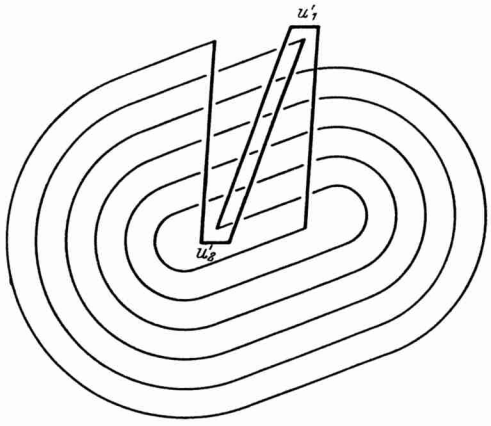

Fig. 8a

Beweis. Schlingknoten, deren Diagonalknoten vom Kreis verschieden ist, besitzen keine Brükkendarstellung mit zwei Brücken (SCHUBERT [6]) und sind nicht amphicheiral (SEIFERT [9]). Der Kreis wird durch die Normalform $(1, 1)$ dargestellt und kann daher im Folgenden ausgeschlossen werden. Wir können annehmen, daß die Verdrillungszahl δ des Schlingknotens positiv ist, da sich negative Verdrillungszahlen durch Spiegelung erhalten lassen. Wir benutzen die Konstruktion

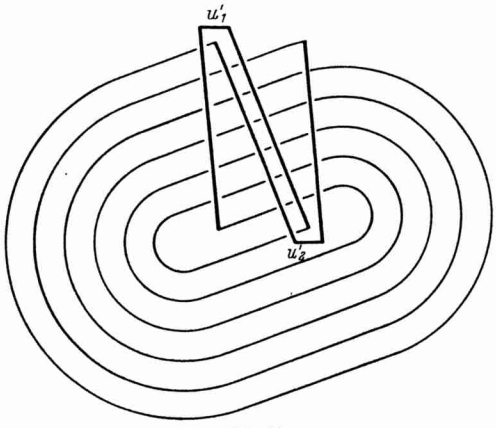

Fig. 8b

[14]) [6] Satz 10.

[15]) Über Schlingknoten s. SEIFERT [9], GRAEUB [3], SCHUBERT [6], [7].

von [6] § 10 und gehen von der Normalform $(2\delta, 1)$ aus. Die beiden Kreise dieser Verkettung können als gleichsinnig orientierte Ränder eines Kreisringes $\mathfrak{r}$ mit der Verdrillungszahl δ aufgefaßt werden (Fig. 7). Es kann angenommen werden, daß der Durchschnitt von $\mathfrak{r}$ mit dem inneren Grenztetraeder T_1 der Normalform ein rechteckiges Elementarflächenstück $\mathfrak{e}$ ist, das die inneren Wege u_1, u_2 der Normalform als Kanten besitzt und dessen beide anderen Kanten s_1, s_2 die äußeren Wege der Normalform nicht überkreuzen. u_1, u_2 werden nun durch zwei Wege u_1', u_2' auf T_1 so ersetzt, daß u_1' bzw. u_2' mit s_1 bzw. s_2 genau die Endpunkte und mit s_2 bzw. s_1 genau einen Schnittpunkt gemein hat und daß u_1' und u_2' die äußeren Wege abwechselnd überkreuzen (Fig. 8a und b). Durch kohärente Orientierung entsteht eine Knotenlinie, die einen Schlingknoten mit der Verdrillungszahl δ darstellt. Die Wahl von u_1', u_2' kann auf zwei zueinander spiegelbildliche Weisen erfolgen, die beiden zugehörigen Schlingknoten unterscheiden sich durch das Vorzeichen der Eigenschnittzahl. In dem einen Falle erhält man die Normalform $(4\delta - 1, 1 - 2\delta)$, im anderen $(4\delta + 1, 1 + 2\delta)$. Wegen Satz 4 und

$$-(4\delta - 3)(1 - 2\delta) \equiv 1 \mod (8\delta - 2)$$

und

$$-(4\delta - 1)(1 + 2\delta) \equiv 1 \mod (8\delta + 2)$$

ergibt sich die erste Aussage des Satzes. Die zweite folgt wegen des Korollars zu Satz 4 aus der Tatsache, daß

$$(\alpha - 2)^2 \equiv -1 \mod 2\alpha$$

nur die Lösungen $\alpha = 1$ und $\alpha = 5$ besitzt, denn es stellt $(1, 1)$ den Kreis, $(5, 3)$ den Viererknoten dar.

§ 4. Die Beziehung zu den Linsenräumen

Satz 6. *Ist k eine Brückendarstellung mit zwei Brücken von der Normalform (α, β), so ist die zweiblättrige, längs k verzweigte Überlagerung der S^3 ein orientierter Linsenraum, der durch das Paar (α, β) charakterisiert ist, wenn β als Restklasse modulo α aufgefaßt wird*[16]).

Beweis. Nach § 1 ist die S^3 orientiert, die Orientierung der Überlagerung entsteht hieraus auf natürliche Weise.

Zu der Normalform k betrachten wir ein zu den Grenztetraedern T_1, T_2 bezüglich des Mittelpunktes Z ähnlich gelegenes Tetraeder T zwischen T_1 und T_2. Die S^3 wird durch T in zwei Kugeln $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ zerlegt, wobei Z auf $\mathfrak{K}$ liege. In $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{L}$ bildet k je zwei einfache Sehnen. In diese spannen wir Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ bzw. $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ dadurch ein, daß wir sie von Z aus auf T projizieren. Die zweiblättrige, längs der Sehnen verzweigte Überlagerung von $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{L}$ ist ein orientierter Vollring $\hat{\mathfrak{K}}$ bzw. $\hat{\mathfrak{L}}$, und es sind $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ bzw. $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ Bilder zweier Meridianflächen von $\hat{\mathfrak{K}}$ bzw. $\hat{\mathfrak{L}}$. Auf T wählen wir einen geschlossenen Weg m, welcher die auf T liegenden Randstücke von

[16]) Dieser Satz stammt von H. SEIFERT.

e_1 und e_2 trennt und die Randstücke von f_1, f_2 abwechselnd und damit je α-mal trifft. In Fig. 5 ist m gestrichelt eingezeichnet. Entsprechend kann auf T ein Weg n gezeichnet werden, so daß dabei die Rollen von e_1, e_2 und f_1, f_2 vertauscht sind und sich m und n in 2α Punkten schneiden. Über m liegen zwei Meridiane von $\hat{\mathfrak{R}}$, sei $\hat{m}$ einer davon. Entsprechend sei $\hat{n}$ ein über n liegender Meridian von $\hat{\mathfrak{L}}$. $\hat{m}$ und $\hat{n}$ schneiden sich in α Punkten, und jeder zweite Schnittpunkt von m und n ist Bild eines Schnittpunktes von $\hat{m}$ und $\hat{n}$. Ist $\alpha = 0$, so ist die Überlagerung der S^3 das topologische Produkt $S^1 \times S^2$. Ist $\alpha > 0$, so orientieren wir $\hat{m}$ und $\hat{n}$ so, daß von $\hat{\mathfrak{R}}$ aus gesehen $\hat{m}$ von $\hat{n}$ von links nach rechts durchsetzt wird. (Der Kreuzungssinn ist in allen Schnittpunkten derselbe.) Geht man nun auf $\hat{n}$ von einem Schnittpunkt zum nächsten, so rückt man auf $\hat{m}$ im Sinne der Orientierung um β Schnittpunkte vor. Dies ist die Behauptung.

Nach REIDEMEISTER [5] ergeben zwei Paare (α, β) und (α', β') denselben orientierten Linsenraum, wenn $\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$ oder $\beta\beta' \equiv 1$ modulo α ist. Damit folgt Satz 4 aus Satz 6 für Knoten, also für ungerades α, weil die ungeraden Restklassen modulo 2α in eineindeutiger Beziehung zu den von null verschiedenen Restklassen modulo α stehen und die Kongruenzen $\beta\beta' \equiv 1$ modulo 2α und $\beta\beta' \equiv 1$ modulo α für ungerade Repräsentanten gleichwertig sind. Für Verkettungen liefert Satz 6 die Klassifikation nur, wenn von der Orientierung der Verkettung abgesehen wird. Wegen Satz 3 kann die Orientierung durch die Verschlingungszahl erfaßt werden, wenn diese nicht null ist. Es gibt jedoch Verkettungen, deren Verschlingungszahl null ist und die nicht in sich übergehen, wenn eine der beiden Komponenten umorientiert wird. Beispiele hierfür sind (32,7), (48,17), (64,15), (64,23), (72,11). Wir müssen daher Satz 4 auf anderem Wege beweisen.

§ 5. Ansatz zum Beweise des Klassifikationssatzes

Um zusätzliche Komplikationen zu vermeiden, schließen wir die Normalformen (0, 0) und (1, 1) im Folgenden aus. Dies ist wegen Satz 6 möglich. Alle anderen Normalformen lassen wir zu, weil eine weitere Einschränkung, die nach Satz 6 möglich wäre, keine Vereinfachung unseres Beweises ergibt.

Seien k und k' zwei Brückendarstellungen mit zwei Brücken desselben Knotens bzw. derselben Verkettung in den Normalformen (α, β) und (α', β'). T_1 sei das innere, T_2 das äußere Grenztetraeder von k und Z ihr gemeinsamer Mittelpunkt. T_1', T_2', Z' sollen die entsprechende Bedeutung für k' haben. Das Tetraeder S' liege zwischen T_1' und T_2' und entstehe aus T_1' durch Dehnung mit dem Zentrum Z'. S' zerlegt die S^3 in zwei Kugeln $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{L}'$, wobei Z' auf $\mathfrak{R}'$ liege. k' bildet in $\mathfrak{R}'$ und $\mathfrak{L}'$ je zwei einfache Sehnen. Werden diese von Z' aus auf S' projiziert, so erhält man je zwei Elementarflächenstücke e_1', e_2' und f_1', f_2', die in die Sehnen von $\mathfrak{R}'$ bzw. $\mathfrak{L}'$ eingespannt sind. Die auf S' liegenden Randbogen dieser Elementarflächenstücke geben das Kreuzungsschema der Normalform k' wieder. Nach Voraussetzung gibt es eine s-Abbildung φ der S^3 auf sich, die k' in k überführt. Die Bilder von $S', e_1', e_2',$

$\mathfrak{f}_1'$, $\mathfrak{f}_2'$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{Q}'$ bezeichnen wir durch die entsprechenden ungestrichenen Buchstaben.

Zum Beweise des Satzes wird φ so abgeändert, daß die Behauptung ersichtlich wird. Hierfür benutzen wir die Schar konzentrischer Tetraeder (T), die aus T_1 durch Dehnung mit dem Zentrum Z entsteht[17]). φ wird zunächst so gewählt werden, daß die Schar (T) zulässig bezüglich S, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ ist und daß $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ keine Ausnahmeecken besitzen. Danach werden die Ausnahmeecken von S, $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ beseitigt (§§ 6—8), wobei wir zulassen, daß neue Ausnahmeecken auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ entstehen, wenn solche von S beseitigt werden. Nachdem alle Ausnahmeecken verschwunden sind, läßt sich zeigen (§ 9), daß S, $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ eines der beiden Grenztetraeder nicht durchsetzen, womit sich schließlich (§ 10) die Behauptung ergibt.

Wir beginnen damit, daß wir zunächst $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und danach $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ in spezielle Lage bringen.

1. Schritt. *Normierung der Gestalt von* $\mathfrak{R}$.

Durch geeignete Änderung von φ soll $\mathfrak{R}$ folgende „wurmförmige" Gestalt erhalten:

1. Die Sehnen von $\mathfrak{R}$ liegen auf zentralen Strecken von k. Je ein Endpunkt dieser beiden Sehnen ist auf dem Rande S von $\mathfrak{R}$ ein Extremum der zentrischen Distanz[18]), während das Schartetraeder durch den anderen Sehnenendpunkt von S ein ausnahmeeckenfreies Elementarflächenstück abschneidet, für welches der eine Sehnenendpunkt mittlerer Punkt, der andere Randpunkt ist. Die beiden so erhaltenen Elementarflächenstücke auf S werden als *Köpfe* bezeichnet, ihr Rand als *Grenzlinie* des Kopfes.

2. Jeder Kopf berandet zusammen mit einem Elementarflächenstück auf dem Schartetraeder durch seine Grenzlinie eine auf $\mathfrak{R}$ liegende Kugel. Auf dieser liegt eines der beiden Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, und zwar so, daß es von den Schartetraedern durch die Endpunkte der zugehörigen Sehne nur in diesen Endpunkten getroffen wird und von den dazwischen liegenden Schartetraedern in nur je einem Querschnitt.

3. $\mathfrak{R}$ liegt zwischen T_1 und T_2. Der Rand S besteht außer den beiden Köpfen aus *Knien* und *Schenkeln*. Jeder Schnitt von S mit einem Schartetraeder berandet auf diesem ein ganz auf $\mathfrak{R}$ liegendes Elementarflächenstück. Es sind also keine „Einstülpungen" vorhanden.

Um zu zeigen, daß wir φ so abändern können, bemerken wir zunächst, daß es auf $\mathfrak{R}'$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{e}'$ gibt, das $\mathfrak{R}'$ so in zwei Kugeln zerlegt, daß $\mathfrak{e}_1'$ und $\mathfrak{e}_2'$ auf $\mathfrak{e}'$ liegen. Man kann $\mathfrak{e}'$ beispielsweise so erhalten, daß man die inneren Wege von k' auf T_1' zu dem Rande eines Elementarflächenstückes ergänzt und diesen Rand von Z' aus auf S' projiziert. Sei q' ein Streckenzug auf $\mathfrak{e}'$, der die beiden Sehnen von $\mathfrak{R}'$ verbindet und mit diesen nur seine Endpunkte gemein hat. Es kann angenommen werden, daß

[17]) Vgl. hierzu und für das Folgende [6] § 3.

[18]) Zwei Punkte haben gleiche zentrische Distanz, wenn sie auf demselben Schartetraeder liegen.

die Bilder der Endpunkte von q' auf zentralen Strecken von k liegen, da sich dies durch eine s-Abbildung erreichen läßt, die k auf sich abbildet. Ferner kann angenommen werden, daß diese Punkte in einer Triangulation des Bildes von e' nicht Ecken sind, andernfalls ist q' geeignet abzuändern. Das Bild von q' ist ein Streckenzug q, der bei festen Enden und festem k kombinatorisch isotop so deformiert werden kann, daß er zwischen T_1 und T_2 liegt. Es kann nun für q eine simpliziale Umgebung so gewählt werden, daß diese eine Kugel $\mathfrak{K}$ der oben beschriebenen Gestalt ausmacht, wobei der Durchschnitt von $\mathfrak{K}$ und dem Bilde von e' aus einem Elementarflächenstück e'' besteht, dessen Durchschnitte mit den Bildern von e_1' und e_2' ebene Elementarflächenstücke sind, die der Forderung 2. genügen. Das Urbild von $\mathfrak{K}$ ist eine Kugel $\mathfrak{K}''$. Für $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$ treffen die Voraussetzungen von Hilfssatz 1 zu, womit man die gewünschte Abänderung von φ erhält.

2. Schritt. *Normierung der Gestalt von* $\mathfrak{f}_1$ *und* $\mathfrak{f}_2$.

$\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ werden von je einem Streckenzug r_1 bzw. r_2 auf S und je einer von k herrührenden Sehne l_1 bzw. l_2 von $\mathfrak{L}$ berandet. Bei festen e_1 und e_2 kann φ so abgeändert werden, daß S und k in sich übergehen und Folgendes gilt:

1. Für r_1 und r_2 sind Extrema der zentrischen Distanz die Endpunkte und die Schnitte mit den Rändern von e_1 und e_2. Die übrigen Extrema liegen auf Knien von S, und zwar so, daß keine zwei aufeinanderfolgenden Extrema auf demselben Knie liegen und daß r_1 und r_2 je α'-mal über jeden Schenkel von S laufen. r_1 und r_2 gehen nicht durch die Ausnahmeecken von S.

2. Soweit l_1 und l_2 mit inneren oder äußeren Wegen von k zusammenfallen, stoßen $\mathfrak{f}_1$, $\mathfrak{f}_2$ von außen an T_1 bzw. von innen an T_2 an.

3. Die Schar (T) ist zulässig in bezug auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$. Diejenigen Sehnenendpunkte, die auf den Grenzlinien der Köpfe von S liegen, sind Extrema der zentrischen Distanz auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$, während die übrigen Extrema der zentrischen Distanz auf r_1 und r_2 nicht zugleich Extrema auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ sind. Auf dem Rande von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ liegen keine Ausnahmeecken bezüglich (T).

4. Alle Ausnahmeecken von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ haben die Ordnung 1, wobei keine zwei Ausnahmeecken dieselbe zentrische Distanz besitzen.

Es ist noch genauer zu sagen, was unter der Zulässigkeit der Schar (T) bezüglich $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ in den Randpunkten von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ verstanden werden soll. Die Forderung 2. fixiert den Sachverhalt für die auf T_1 und T_2 liegenden Randpunkte. Für die übrigen ist Forderung 3. maßgebend. Für einen Randpunkt P, der nicht auf T_1 oder T_2 liegt und der nicht Extremum der zentrischen Distanz auf r_1 oder r_2 ist, wird verlangt, daß in P genau ein Schnitt von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ mit dem Schartetraeder durch P entspringt. Das Verhalten in den Sehnenendpunkten zeigt Fig. 9; Fig. 10 zeigt das Verhalten in einem anderen Extremum der zentrischen Distanz auf r_1 oder r_2.

Forderung 1. läßt sich dadurch erfüllen, daß man φ mit einer s-Abbildung zusammensetzt, die S in sich überführt und auf k, e_1 und e_2 die Identität ist. Betrachtet man nämlich für die Grenzlinien der Schenkel von S die Urbilder

auf S', so findet man geschlossene Wege, welche die auf S' liegenden Randstücke von e_1' und e_2' trennen und die unter Vermeidung dieser Randstücke auf S' kombinatorisch isotop gleichzeitig so deformiert werden können, daß sie die auf S' liegenden Randstücke r_1' und r_2' von f_1' und f_2' je α'-mal schneiden, und zwar dann notwendig abwechselnd, wie in Fig. 5 durch die gestrichelte Linie m angedeutet ist. Für die Grenzlinien der Köpfe ist dabei der zugehörige Sehnenendpunkt als Schnittpunkt zu zählen. Wird φ entsprechend deformiert, so treffen r_1 und r_2 jede Grenzlinie je α'-mal, und anschließend können noch r_1 und r_2 auf S kombinatorisch isotop bei festen Endpunkten und festen Schnittpunkten mit den Rändern von e_1 und e_2 so deformiert werden, daß Forderung 1. erfüllt ist.

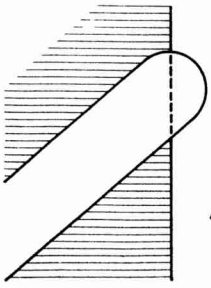

Fig. 9

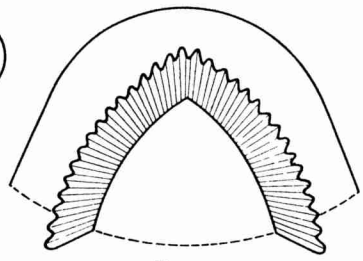

Fig. 10

Forderung 2. ist in naheliegender Weise zu erfüllen: Längs der inneren und äußeren Wege von k drille man f_1 und f_2 in die gewünschte Gestalt, wobei sich Drillungen von f_1 und f_2 um die zentralen Strecken von k ergeben. Das gewünschte Resultat läßt sich durch eine s-Abbildung erreichen, die auf $\mathfrak{R}$ die Identität ist und k in sich überführt.

Forderung 4. für die mittleren Punkte von f_1 und f_2 läßt sich durch [6] Hilfssatz 5 erfüllen, Forderung 3. für die Randpunkte zuvor durch eine entsprechende Konstruktion, wobei an Stelle des dortigen Würfels $\mathfrak{W}$ eine geeignete abgeschlossene Umgebung $\mathfrak{W}$ bezüglich $\mathfrak{L}$ für den jeweils betrachteten Punkt zu verwenden ist und der Schnitt von f_1 bzw. f_2 mit dem Rande von $\mathfrak{W}$ unter Umständen noch geeignet kombinatorisch isotop zu deformieren ist.

3. Schritt. *Veränderungen an Knien und Köpfen von S.*

Wir ändern S noch so ab, daß Folgendes gilt:

1. Haben zwei Punkte auf den Knien und Köpfen von S dieselbe zentrische Distanz, so liegen sie auf demselben Knie oder demselben Kopf.

2. Keine Ausnahmeecke von f_1 und f_2 hat dieselbe zentrische Distanz wie ein Punkt auf einem Knie oder Kopf von S.

Dabei sollen keine neuen Ausnahmeecken auf S, f_1 und f_2 erzeugt werden.

Da r_1 und r_2 nicht durch die Ausnahmeecken von S gehen, kann S in den Ausnahmeecken längs der anstoßenden Schenkel hinreichend wenig so ausgebeult werden[19]), daß keine zwei Ausnahmeecken von S dieselbe zentrische Distanz haben und daß diese zentrischen Distanzen von denjenigen der Sehnenendpunkte und der Ausnahmeecken von f_1 und f_2 verschieden sind. Außerdem kann angenommen werden, daß keine Ausnahmeecke von f_1 und f_2

[19]) Vgl. [6] § 6.

dieselbe zentrische Distanz wie ein Sehnenendpunkt hat. Die beiden Forderungen lassen sich nun dadurch erfüllen, daß die Knie und Köpfe von S bei festen Grenzlinien hinreichend stark zusammengezogen werden.

Wir beschreiben das Zusammenziehen zunächst für ein Knie. Der Anschaulichkeit halber nehmen wir an, daß das betrachtete Knie innerhalb des Projektionskegels von Z nach den „waagerechten" Tetraederseiten liegt, so daß wir die Einbettung in den R^3 benutzen können[20]). Statt von zentrischer Distanz können wir dann von Höhe sprechen. Dabei sei Z der höchste Punkt des Projektionskegels. Ein inneres Knie von S kann als „oberes Knie" aufgefaßt werden. Zur Fixierung der Sprechweise legen wir ein solches zugrunde.

Das betrachtete Knie $\mathfrak{k}$ liegt oberhalb der waagerechten Ebene E durch seine Grenzlinien. Von den auf $\mathfrak{k}$ liegenden Stücken von r_1 und r_2 betrachten wir zuerst dasjenige, es heiße t, das die geringste Höhe erreicht. t kann über ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ auf $\mathfrak{k}$ so deformiert werden, daß t beliebig nahe an E zu liegen kommt. Dabei wird $\mathfrak{g}$ so gewählt, daß es von jeder zu E parallelen Ebene in höchstens einem Querschnitt getroffen wird, was offenbar möglich ist. Gehört t zum Rande von $\mathfrak{f}_1$, so läßt sich $\mathfrak{f}_1$ durch $\mathfrak{g}$ ergänzen und anschließend $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{k}$ bei festem t abheben, indem man die Ecken einer geeigneten Triangulation von $\mathfrak{f}_1 + \mathfrak{g}$, die auf $\mathfrak{g}$, nicht aber auf t liegen, hinreichend wenig waagerecht ins Äußere von $\mathfrak{R}$ verschiebt. Das Resultat läßt sich auch durch eine s-Abbildung erreichen, die S in sich überführt und außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{g}$ die Identität ist. Es können so der Reihe nach alle auf $\mathfrak{k}$ liegenden Stücke von r_1 und r_2 hinreichend nahe an E herandeformiert werden, wobei nur das jeweils benutzte Elementarflächenstück oberhalb der bereits deformierten Stücke von r_1 und r_2 liegen muß. Nachdem dies geschehen ist, kann $\mathfrak{k}$ bei festem $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ so deformiert werden, daß $\mathfrak{k}$ ein Knie bleibt und ganz unterhalb einer waagerechten Ebene liegt, die beliebig dicht oberhalb des höchsten Punktes der auf $\mathfrak{k}$ liegenden Stücke von r_1 und r_2 verläuft.

Für einen Kopf $\mathfrak{k}$ von S benutzen wir entsprechend die Einbettung in den R^3, und wir nehmen an, daß $\mathfrak{k}$ oberhalb der waagerechten Ebene E durch seine Grenzlinie liegt. Innerhalb $\mathfrak{k}$ liegt eines der beiden Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, etwa $\mathfrak{e}_1$. Ähnlich wie im Falle eines Knies können hier die auf $\mathfrak{k}$ liegenden Stücke von r_1 und r_2 an E herandeformiert werden bis auf dasjenige, das im höchsten Punkte von $\mathfrak{k}$ endet. Nur ist hier die entsprechende Abbildung so vorzunehmen, daß $\mathfrak{e}_1$ in sich übergeht und die Schnitte von r_1 und r_2 mit dem Rande von $\mathfrak{e}_1$ Maxima der Höhe auf r_1 und r_2 bleiben, was bei geeigneter Wahl der zur Deformation benutzten Elementarflächenstücke möglich ist. Das Zusammenziehen des Kopfes kann danach so geschehen, daß k auf sich und $\mathfrak{e}_1$ in sich abgebildet wird und daß das im höchsten Punkte von $\mathfrak{k}$ endende Stück von r_1 oder r_2 monoton bleibt.

---

[20]) Vgl. den wiederholt benutzten Sachverhalt in [6].

§ 6. Beseitigung von Ausnahmeecken auf f_1 und f_2

Wir betrachten alle Schartetraeder durch die Ausnahmeecken von f_1 und für jedes solche Schartetraeder die Schnitte mit f_1, die durch die betreffende Ausnahmeecke gehen. Diese Schnitte sind geschlossen oder gehen zum Rande von f_1. Unter den geschlossenen gibt es einen auf f_1 innersten, der auf f_1 ein von weiteren Schnitten freies Elementarflächenstück, also eine *Haube*, berandet. Wir werden zunächst alle Hauben beseitigen.

Die danach verbleibenden Schnitte durch Ausnahmeecken von f_1 mit Schartetraedern führen sämtlich zum Rande von f_1. Dabei gehen von jeder Ausnahmeecke, wegen der Ordnung 1, vier solche Schnitte aus, wodurch f_1 jeweils in vier Elementarflächenstücke zerlegt wird. Wir nennen ein solches Elementarflächenstück einen *Zipfel*, wenn auf ihm keine weitere Ausnahmeecke liegt.

Ein Zipfel von f_1 hat mit dem Rande von f_1 ein Stück t gemein, das entweder auf S oder auf k oder teilweise auf S und teilweise auf k liegt. Es verschwinden alle Ausnahmeecken, wenn man der Reihe nach diejenigen beseitigt, von denen ein zu k punktfremder Zipfel ausgeht. Andernfalls gäbe es dann zwei von derselben Ausnahmeecke ausgehende Zipfel, die in einem Schnitt aneinanderstoßen und S nicht treffen. Das auf dem Rande der beiden Zipfel liegende Stück von k ließe sich über die beiden Zipfel deformieren, und man erhielte, daß k in eine Brückendarstellung mit nur einer Brücke verwandelt werden könnte, also den Kreis darstellte, was ausgeschlossen wurde.

Wir brauchen also nur solche Zipfel zu betrachten, bei denen das mit t bezeichnete Randstück ganz auf S liegt. Wegen des 3. Schrittes von § 5 kann dabei t nicht ganz auf einem Knie oder Kopf von S liegen. Wir betrachten hier nur solche Zipfel, bei denen das Randstück t die Köpfe von S nicht trifft, und behandeln die verbleibenden in § 8.

1. Schritt. *Beseitigung von Hauben.*

Da wir ausgeschlossen haben, daß k zwei unverkettete Kreise darstellt, ist eine Kugel, deren Rand k nicht trifft, entweder punktfremd zu k oder sie enthält k im Inneren. Hierauf beruht es, daß wir die Hauben von f_1 und f_2 nach dem Verfahren von [6] § 5 beseitigen können. Zunächst werden wie dort im 1. Schritt alle diejenigen Ausnahmeecken von f_1 und f_2 beseitigt, durch welche eine geschlossene Schnittlinie von f_1 bzw. f_2 mit dem zugehörigen Schartetraeder geht, die auf dem Schartetraeder ein zu k und S punktfremdes Elementarflächenstück berandet. Insbesondere verschwinden dabei alle Ausnahmeecken von f_1 und f_2 innerhalb T_1 und außerhalb T_2, und es bleiben k und S ungeändert.

Die weitere Beseitigung von Hauben verläuft entsprechend dem 2. bis 5. Schritt von [6] § 5. Bei dem Ausschieben (5. Schritt) ist zu beachten, daß der dort mit h bezeichnete Streckenzug k und S nicht und f_1 und f_2 nur in solchen Punkten treffen darf, die Minima bzw. Maxima der zentrischen Distanz auf f_1 und f_2 sind, je nachdem eine innere oder äußere Haube

beseitigt wird. Diese Wahl von h ist möglich wegen Forderung 3. des 2. Schrittes in § 5.

Bei diesem Vorgang ändert sich die Gestalt von k. Die ursprüngliche Gestalt von k läßt sich jedoch durch eine zentrische Abbildung wieder herstellen: Zur Fixierung der Sprechweise nehmen wir an, daß eine innere Haube beseitigt wurde. Man kann dann zunächst alle bei der Beseitigung der Haube benutzten zentrischen Hilfsabbildungen rückgängig machen, so daß also die Haube durch eine s-Abbildung χ beseitigt wird, die außerhalb T_2 die Identität ist. Nach dem Verfahren von [6] Hilfssatz 1 kann χ durch eine zentrische Abbildung, die im Komplement von T_2 die Identität ist, so abgeändert werden, daß die zentralen Strecken von k in zentrale Strecken übergehen, also festbleiben. k und $\chi(k)$ sind dann Brückendarstellungen mit zwei Brücken im Sinne von § 1 und stimmen in den zentralen Strecken und den äußeren Wegen überein. Die Brücken von k und $\chi(k)$ bilden in der von T_2 berandeten Kugel, die das Innere von T_2 ausmacht, je zwei einfache Sehnen. In die von k herrührenden Sehnen spannen wir Elementarflächenstücke $\mathfrak{m}_1$, $\mathfrak{m}_2$ ein, indem wir die Brücken von k von Z aus auf T_2 projizieren. Entsprechend werden die Elementarflächenstücke $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ in die von $\chi(k)$ herrührenden Sehnen eingespannt. In diese Sehnen können aber auch die Elementarflächenstücke $\chi(\mathfrak{m}_1)$, $\chi(\mathfrak{m}_2)$ eingespannt werden. Nach Hilfssatz 3 sind die auf T_2 liegenden Randstücke von $\mathfrak{n}_1$, $\mathfrak{n}_2$ zu den entsprechenden Randstücken von $\chi(\mathfrak{m}_1)$, $\chi(\mathfrak{m}_2)$ kombinatorisch isotop auf T_2. Da die bezeichneten Randstücke Zentralprojektionen der inneren Wege von $\chi(k)$ und k sind, lassen sich die inneren Wege von $\chi(k)$ auf T_1 kombinatorisch isotop in die inneren Wege von k deformieren, wodurch $\chi(k)$ in k übergeht. Das Deformationsresultat läßt sich auch durch eine zentrische Abbildung erhalten[21]).

2. Schritt. *Beseitigung von Zipfeln, die k und die Köpfe von S nicht treffen.*

Es sei $\mathfrak{z}$ ein Zipfel der genannten Art, etwa auf $\mathfrak{f}_1$. $\mathfrak{z}$ wird berandet von zwei Schnitten s_1, s_2 von $\mathfrak{f}_1$ mit einem Schartetraeder T durch eine Ausnahmeecke A von $\mathfrak{f}_1$, wobei s_1 und s_2 von A ausgehen und zum Rande von $\mathfrak{f}_1$ führen, und einem Randstück t von $\mathfrak{f}_1$, das auf S liegt und die Köpfe von S nicht trifft. Nach der Gestalt von t unterscheiden wir zwei Fälle.

Fall a. t liegt auf einem Knie und den beiden anstoßenden Schenkeln von S.

Das Verfahren besteht darin, daß wir das Stück von S, auf dem t verläuft, vermöge $\mathfrak{z}$ so abbiegen, daß A Extremum der zentrischen Distanz des Randes von $\mathfrak{f}_1$ wird und auf ein Knie von S zu liegen kommt. Es entstehen dabei neue Ausnahmeecken, die jedoch nach dem Verfahren des 1. Schrittes beseitigt werden können.

t liege auf dem Knie $\mathfrak{k}$ und den beiden anstoßenden Schenkeln $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{s}_2$ von S. Zur Fixierung der Sprechweise nehmen wir an, daß $\mathfrak{k}$ ein inneres Knie ist. Durch eine zentrische Abbildung kann erreicht werden, daß $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{s}_2$ und $\mathfrak{z}$ im Inneren des Projektionskegels von Z nach den „waagerechten"

[21]) Vgl. die Konstruktion in [7] S. 144.

Tetraederseiten liegen, so daß wir die Einbettung in den R^3 wie im 3. Schritt von § 5 benutzen und von Höhe statt von zentrischer Distanz sprechen können. Der Sattelpunkt A von $\mathfrak{f}_1$ liegt nun in einer waagerechten Ebene E, in der s_1 und s_2 verlaufen, und es liegt $\mathfrak{z}$ oberhalb E. Der höchste Punkt H von t ist nach dem 2. Schritt von § 5 nicht zugleich höchster Punkt von $\mathfrak{z}$. Daher wird $\mathfrak{z}$ von der waagerechten Ebene durch H in einer geschlossenen Schnittlinie geschnitten und besitzt oberhalb dieser Ebene haubenförmige Gestalt. Durch eine s-Abbildung, die außerhalb einer beliebig kleinen Umgebung von $\mathfrak{z}$, insbesondere auf k, $\mathfrak{f}_2$, $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ und den Köpfen von S die Identität ist und die $\mathfrak{f}_1$ in sich abbildet, kann Folgendes erreicht werden:

Die von S berandete Kugel $\mathfrak{K}$ wird längs $\mathfrak{z}$ und dann noch etwas weiter unterhalb s_1 und s_2 ausgebeult, wobei gleichzeitig $\mathfrak{f}_1$ in sich zusammengezogen wird, und zwar so, daß der ausgebeulte Teil von $\mathfrak{K}$ hinreichend dicht unter $\mathfrak{z}$ liegt und daß auf S nur zwei neue Ausnahmeecken entstehen, nämlich der höchste Punkt H von t und eine neue Ausnahmeecke Q dicht unterhalb A. Das auf $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{k}$ und $\mathfrak{s}_2$ liegende Stück von r_1, das t umfaßt, geht dabei in ein solches durch A über, wobei A das einzige Maximum der Höhe für dieses Stück ist.

Ähnlich wie im 3. Schritt von § 5 werden nun die übrigen auf $\mathfrak{s}_1$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{s}_2$ verlaufenden Stücke von r_1 und r_2 mittels geeigneter Elementarflächenstücke auf S so deformiert, daß auf ihnen die Höhe wieder nur ein einziges Maximum annimmt und daß dieses auf dem ausgebeulten Stück hinreichend dicht über A liegt. Bei dieser Deformation werden die anstoßenden Stücke von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ „mitgezogen". Es entstehen dabei neue Ausnahmeecken auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$. Die zur Deformation benutzten Elementarflächenstücke können jedoch so gewählt werden, daß sie die Ausnahmeecke in den Grenzlinien des Knies $\mathfrak{k}$ vermeiden. Kann ein solches Elementarflächenstück zudem so gewählt werden, daß es auch den höchsten Punkt von $\mathfrak{k}$ vermeidet, so läßt es sich so bestimmen, daß auf dem mitgezogenen Stück von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ nur eine einzige Ausnahmeecke entsteht, die dicht bei H liegt. Muß das benutzte Elementarflächenstück so gewählt werden, daß der höchste Punkt von $\mathfrak{k}$ auf ihm liegt, so läßt es sich einrichten, daß auf dem entsprechend mitgezogenen Stück von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ nur zwei Ausnahmeecken entstehen, die eine dicht bei H, die andere dicht bei dem bisherigen Maximum der Höhe des Randbogens. Durch die neu entstehenden Ausnahmeecken von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ gehen geschlossene Schnittlinien von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ mit den zugehörigen Schartetraedern, wie sich aus der Gestalt von $\mathfrak{k}$ und der Gestalt von $\mathfrak{z}$ oberhalb der waagerechten Ebene durch H ergibt, und können anschließend wieder nach dem Verfahren des 1. Schrittes beseitigt werden. Zuvor ist noch das oberhalb E liegende, ausgebeulte Stück von $\mathfrak{K}$ dicht an E heranzuziehen, so daß $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ festbleiben und Q als einzige Ausnahmeecke des verbeulten Stückes verbleibt. Dies ist möglich, da eine waagerechte Ebene hinreichend dicht über E das ausgebeulte Stück von $\mathfrak{K}$ in nur einem Elementarflächenstück schneidet.

Das geschilderte Verfahren soll für $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ so oft wie möglich angewandt werden.

Fall b. t verläuft über mindestens zwei Knie von S.

Das Schartetraeder T durch die Ausnahmeecke A schneidet S in zwei Schnitten u_1 und u_2, auf denen s_1 und s_2 enden. u_1 und u_2 schneiden aus S einen Kreisring $\mathfrak{s}$ aus, der t enthält und auf dem mindestens zwei Knie liegen. Auf T beranden u_1 und u_2 zwei auf $\mathfrak{R}$ liegende Elementarflächenstücke, die zusammen mit $\mathfrak{s}$ eine auf $\mathfrak{R}$ liegende Kugel $\mathfrak{M}$ beranden. Durch eine s-Abbildung, die k, e_1, e_2 und die Köpfe von S festläßt, kann $\mathfrak{M}$ längs des Zipfels $\mathfrak{z}$ so abgebogen werden, daß s_1 und s_2 ins Innere von $\mathfrak{R}$ geraten, daß S weiterhin aus Knien, Schenkeln und den beiden Köpfen besteht und daß an Stelle der auf $\mathfrak{s}$ liegenden Knie kein oder ein Knie tritt, je nachdem die Anzahl der Knie auf $\mathfrak{s}$ gerade oder ungerade ist, während die übrigen Knie unverändert erhalten bleiben. Die Zahl der Ausnahmeecken von S vermindert sich auf diese Weise um mindestens zwei. Das Beweisverfahren ist hierauf vom 2. Schritt des § 5 an zu wiederholen, und zwar so oft, bis Zipfel der hier betrachteten Art auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ nicht mehr vorhanden sind.

§ 7. Beseitigung der Ausnahmeecken von S

Wir haben soeben einen Sachverhalt betrachtet, der zu einer Reduktion der Ausnahmeecken von S Anlaß gab. Ähnliche Reduktionen können möglich sein, wenn man an Stelle von Ausnahmeecken die Extrema der zentrischen Distanz auf r_1 und r_2 betrachtet. Das Schartetraeder durch ein solches Extremum A, das nicht Sehnenendpunkt ist, schneidet $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ entweder in einer geschlossenen Schnittlinie durch A oder in zwei von A ausgehenden Querschnitten. Im ersten Falle nennen wir das *Extremum A regulär*, im zweiten *singulär*. Zwei der Sehnenendpunkte sind Extrema der zentrischen Distanz auf $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$. Wir bezeichnen auch diese beiden Punkte als reguläre Extrema der zentrischen Distanz auf r_1 und r_2. Die beiden anderen Sehnenendpunkte zählen zu den singulären Extrema. Das Schartetraeder durch einen solchen Punkt schneidet $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$ in einem Querschnitt, der von diesem Punkte ausgeht. Wir beseitigen zunächst Ausnahmeecken von S vermöge der Querschnitte auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$, die von singulären Extrema ausgehen, und danach die restlichen Ausnahmeecken von S. Nach jeder solchen Reduktion ist das Beweisverfahren erneut mit dem 2. Schritt von § 5 zu beginnen.

1. Schritt. *Reduktionen vermöge singulärer Extrema auf Knien.*

Sei A ein solches Extremum der zentrischen Distanz, etwa auf r_1, und es liege A auf dem Knie $\mathfrak{k}$ von S. Das Schartetraeder T durch A schneidet $\mathfrak{f}_1$ in zwei Querschnitten s_1 und s_2, die von A ausgehen. s_1 und s_2 schneiden von $\mathfrak{f}_1$ zwei Elementarflächenstücke $\mathfrak{g}_1$ und $\mathfrak{g}_2$ ab, die von s_1 bzw. s_2 und einem Stück t_1 bzw. t_2 des Randes von $\mathfrak{f}_1$ berandet werden. Eine Reduktion ist möglich, wenn eines der beiden Randstücke t_1, t_2 entweder keinen der beiden Köpfe von S trifft oder nur einen von beiden und dann ein Stück mit k gemein hat. Es liege etwa für t_1 einer dieser beiden Fälle vor.

Fall a. t_1 *trifft keinen der beiden Köpfe von* S.

In diesem Falle liegt t_1 auf S. Seien v_1 und v_2 die Grenzlinien des Knies $\mathfrak{k}$. Nur eine von beiden, etwa v_2, wird von t_1 getroffen, und zwar nur einmal. Wegen des 3. Schrittes von § 5 endet t_1 auf einem Schnitte u von T mit einem Schenkel von S im Endpunkt von s_1. Aus S wird von v_1 und u ein Kreisring $\mathfrak{s}$ ausgeschnitten, auf dem t_1 verläuft. Auf $\mathfrak{s}$ liegt mindestens ein von $\mathfrak{k}$ verschiedenes Knie, und es berandet $\mathfrak{s}$ zusammen mit je einem Elementarflächenstück auf den Schartetraedern durch v_1 und u eine auf $\mathfrak{R}$ liegende Kugel $\mathfrak{M}$. Wie in § 6, 2. Schritt, Fall b kann nun $\mathfrak{M}$ längs $\mathfrak{g}_1$ so abgebogen werden, daß s_1 ins Innere von $\mathfrak{M}$ gelangt, S weiterhin aus Knien, Schenkeln und den beiden Köpfen besteht und mindestens zwei Knie von S verschwinden.

Fall b. t_1 *hat ein Stück mit* k *gemein und trifft nur einen der beiden Köpfe von* S.

Sind v_1 und v_2 wieder die Grenzlinien von $\mathfrak{k}$, so wird auch in diesem Falle nur eine von beiden, etwa v_2, von t_1 getroffen. v_1 zerlegt S in zwei Elementarflächenstücke. Auf einem von beiden, es heiße $\mathfrak{s}$, liegt ein Stück von t_1, während der Rest von t_1 ein Stück von k ausmacht. v_1 berandet auf seinem Schartetraeder ein Elementarflächenstück, das zusammen mit $\mathfrak{s}$ eine auf $\mathfrak{R}$ liegende Kugel $\mathfrak{M}$ berandet. Entsprechend dem Vorangehenden wird $\mathfrak{M}$ längs $\mathfrak{g}_1$ abgebogen, so daß $\mathfrak{s}$ in einen Kopf und ein Stück eines Schenkels übergeht. Der auf $\mathfrak{s}$ liegende Kopf ist hierbei längs k zu verschieben, möglicherweise über innere und äußere Wege von k hinweg. Die hierzu benötigte s-Abbildung ist so zu wählen, daß k in sich übergeht und daß das an den Kopf von $\mathfrak{s}$ anstoßende Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_1$ oder $\mathfrak{e}_2$ wieder die geforderte Gestalt (§ 5, 1. Schritt) erhält.

2. Schritt. *Reduktionen vermöge singulärer Extrema auf den Köpfen.*

Sei A ein solches Extremum der zentrischen Distanz, etwa auf r_1. Ist A nicht Sehnenendpunkt, so gehen von A zwei Querschnitte s_1 und s_2 aus, die auf dem Schartetraeder T durch A liegen. Eine Reduktion ist dann möglich, wenn einer dieser beiden Querschnitte von $\mathfrak{f}_1$ ein Elementarflächenstück abschneidet, das k und den zweiten Kopf von S nicht trifft. Sei dies etwa für s_1 der Fall. s_1 schneidet von $\mathfrak{f}_1$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}_1$ ab, das von s_1 und einem Randstück t_1 von $\mathfrak{f}_1$ berandet wird. t_1 trifft k und den zweiten Kopf von S nicht und endet auf einem Schnitt u von T mit einem Schenkel von S. Auf S berandet u ein Elementarflächenstück $\mathfrak{s}$, das t_1 enthält und auf dem mindestens ein Knie liegt. $\mathfrak{s}$ berandet zusammen mit einem Elementarflächenstück auf T eine auf $\mathfrak{R}$ liegende Kugel $\mathfrak{M}$. Wie oben wird $\mathfrak{M}$ längs $\mathfrak{g}_1$ so abgebogen, daß $\mathfrak{s}$ in einen Kopf und ein Stück eines Schenkels übergeht. Dies kann so geschehen, daß k in sich und das an den Kopf von $\mathfrak{s}$ anstoßende Elementarflächenstück $\mathfrak{e}_1$ oder $\mathfrak{e}_2$ wieder in ein solches mit den geforderten Eigenschaften übergeht.

Ist A Sehnenendpunkt, so wird $\mathfrak{f}_1$ von dem Schartetraeder durch A in einem von A ausgehenden Querschnitt s getroffen. Wenn s von $\mathfrak{f}_1$ ein Elementarflächenstück abschneidet, das den zweiten Kopf von S nicht trifft

und das mit k nur den Punkt A gemein hat, so kann eine Reduktion ausgeführt werden, die der eben beschriebenen entspricht.

3. Schritt. *Vorbereitung für die weitere Reduktion.*

Es sei keine der vorangehenden Reduktionen mehr ausführbar aber noch mindestens ein Knie von S vorhanden. Wir bestimmen ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$, vermöge dessen eine weitere Reduktion möglich ist.

Nehmen wir zunächst an, daß auf $\mathfrak{f}_1$ noch Ausnahmeecken vorhanden sind. Für mindestens eine Ausnahmeecke A tritt dann der Fall ein, daß von A zwei „benachbarte" Zipfel ausgehen, die einen von A ausgehenden Schnitt von $\mathfrak{f}_1$ mit dem Schartetraeder durch A als gemeinsames Randstück besitzen und von denen mindestens einer zu k punktfremd ist. Wenn möglich, wählen wir A so, daß beide Zipfel zu k punktfremd sind, und betrachten den dann vorliegenden Sachverhalt.

Fall a. Auf $\mathfrak{f}_1$ existieren zwei benachbarte Zipfel $\mathfrak{z}_{\vartheta 1}$ und $\mathfrak{z}_{\vartheta 2}$, die k nicht treffen.

$\mathfrak{z}_{\vartheta 1}$ und $\mathfrak{z}_{\vartheta 2}$ haben mit r_1 je ein Stück des Randes t_1 bzw. t_2 gemein. Wegen § 6 führen t_1 und t_2 mindestens je einmal über einen Kopf. Da t_1 und t_2 einen Endpunkt gemein haben und mindestens ein Knie von S vorhanden ist, gibt es auf t_1 oder t_2 mindestens ein Extremum der zentrischen Distanz, das auf einem Knie liegt. Sei dies etwa für t_1 der Fall. Wir betrachten alle Schnitte von $\mathfrak{z}_{\vartheta 1}$ mit Schartetraedern, die durch die Extrema der zentrischen Distanz von t_1 gehen. Sind unter diesen Querschnitte, so gibt es einen solchen q, der von $\mathfrak{z}_{\vartheta 1}$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ abschneidet, das keinen weiteren Querschnitt enthält und das von q und einem Stück t_1' von t_1 berandet wird. Sollte kein Querschnitt vorhanden sein, was sich als unmöglich erweisen wird, so setzen wir $\mathfrak{g}=\mathfrak{z}_{\vartheta 1}$ und $t_1'=t_1$. Wegen der vorangehenden Reduktionen geht t_1' mindestens einmal über einen Kopf $\mathfrak{k}_1$, und es sei A_1 ein Extremum der zentrischen Distanz von t_1', das auf $\mathfrak{k}_1$ liegt. Nach Wahl von q ist A_1 regulär. Das Schartetraeder T_1' durch A_1 schneidet $\mathfrak{g}$ in einer geschlossenen Schnittlinie s_1 durch A_1. $\mathfrak{s}$ sei der an $\mathfrak{k}_1$ anstoßende Schenkel, $\mathfrak{k}_2$ das folgende Knie. Wir dehnen T_1' stetig in dem Sinne[22]), daß aus dem Schnitt von T_1' mit $\mathfrak{k}_1$ ein solcher mit $\mathfrak{s}$ und schließlich ein solcher mit $\mathfrak{k}_2$ entsteht, und verfolgen dabei den aus s_1 entstehenden Schnitt mit $\mathfrak{g}$. Dieser geht zunächst in einen Querschnitt von $\mathfrak{g}$ über, der auf $\mathfrak{k}_1$ entspringt und endet, danach in einen solchen, der auf $\mathfrak{s}$ entspringt und endet, schließlich in einen solchen, dessen Endpunkte auf $\mathfrak{k}_2$ liegen, bis wir zu einem Extremum der zentrischen Distanz von t_1' auf $\mathfrak{k}_2$ gelangen. Dieser Sachverhalt muß nach Wahl von $\mathfrak{g}$ eintreten, weil auf $\mathfrak{g}$ außer q keine Querschnitte durch Extrema der zentrischen Distanz von t_1 und keine Querschnitte durch Ausnahmeecken liegen. Bei stetigem Dehnen von T_1' im angegebenen Sinne geht also s_1 in einen Querschnitt von $\mathfrak{z}_{\vartheta 1}$ über, der von einem Extremum A_2 der zentrischen Distanz von t_1 auf $\mathfrak{k}_2$ ausgeht, und dieser Querschnitt muß q sein. Nach Wahl von t_1 bemerkt man zugleich, daß die Annahme $\mathfrak{g}=\mathfrak{z}_{\vartheta 1}$ widerspruchsvoll ist. Das Auffinden des

[22]) Es sind Dehnungsfaktoren kleiner als 1 zugelassen.

Elementarflächenstückes $\mathfrak{g}$, dessen Gestalt sich aus dem Vorangehenden ergibt, war unser Ziel.

Fall b. Sind $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ zwei benachbarte Zipfel auf $\mathfrak{f}_1$, so trifft einer von beiden k.

In diesem Falle können $\mathfrak{z}_1$ und $\mathfrak{z}_2$ so gewählt werden, daß $\mathfrak{z}_1$ zu k punktfremd ist, während auf dem Rande von $\mathfrak{z}_2$ ein Sehnenendpunkt P liegt. $\mathfrak{z}_1$ bzw. $\mathfrak{z}_2$ hat mit dem Rande von $\mathfrak{f}_1$ ein Stück t_1 bzw. t_2 gemein. t_1 geht über einen Kopf von S; geht t_1 auch über ein Knie, so kann auf $\mathfrak{z}_1$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ wie im Falle a gefunden werden. Andernfalls geht t_2 über alle Knie. Wir betrachten dann alle Schnitte von $\mathfrak{z}_2$ mit Schartetraedern durch Extrema der zentrischen Distanz von t_2. Gibt es darunter einen Querschnitt, der von $\mathfrak{z}_2$ ein zu k punktfremdes Elementarflächenstück abschneidet, so wird das Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ wie im Falle a bestimmt. Die Annahme, daß es keinen solchen Querschnitt von $\mathfrak{z}_2$ gibt, führt zu einem Widerspruch: Wir betrachten das Schartetraeder durch P und dehnen es stetig in dem Sinne, daß der entstehende Querschnitt auf $\mathfrak{z}_2$ von $\mathfrak{z}_2$ ein Elementarflächenstück abschneidet, das P als Randpunkt besitzt, nicht aber die Ausnahmeecke auf dem Rande von $\mathfrak{z}_2$. Nach Annahme könnte dies solange geschehen, bis man erstmals zu einem von P verschiedenen Extremum der zentrischen Distanz von t_2 gelangte, womit sich ein Widerspruch zu Fall b des 1. Schrittes ergibt.

Fall c. Auf $\mathfrak{f}_1$ liegen keine Ausnahmeecken.

Das Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ kann wie im Falle b gefunden werden, wobei $\mathfrak{f}_1$ an die Stelle von $\mathfrak{z}_2$ tritt.

4. Schritt. *Beseitigung der restlichen Ausnahmeecken von S.*

$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{s}$, $\mathfrak{k}_2$ mögen dieselbe Bedeutung wie im 3. Schritt haben, ebenso t_1' und q. Das Schartetraeder durch q sei T_2'. Es schneidet $\mathfrak{k}_2$ in einer geschlossenen Schnittlinie. Ein Stück q' dieses Schnittes berandet zusammen mit t_1' ein Elementarflächenstück $\mathfrak{m}$, das auf dem von $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{s}$ und $\mathfrak{k}_2$ gebildeten „Endstück" von S liegt und das T_2' nicht durchsetzt. Die Ausnahmeecke von $\mathfrak{k}_2$ liegt daher nicht auf $\mathfrak{m}$. Es beranden $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{m}$ und ein von q und q' auf T_2' berandetes Elementarflächenstück $\mathfrak{n}$ zusammen eine Kugel $\mathfrak{M}$, deren Durchschnitt mit dem „Endstück" von S aus $\mathfrak{m}$ besteht und die mit $\mathfrak{n}$ an T_2' ohne Durchdringung anstößt. Vermöge $\mathfrak{M}$ werden wir das Endstück von S so abbiegen, daß das Knie $\mathfrak{k}_2$ verschwindet.

Zur Fixierung der Sprechweise nehmen wir an, daß $\mathfrak{k}_2$ ein äußeres Knie ist. $\mathfrak{M}$ liegt dann innerhalb T_2'. Auf $\mathfrak{m}$ liegt ein Schnittpunkt Q von S und k, der Endpunkt eines auf $\mathfrak{M}$ liegenden Stückes k_1 von k ist. k_1 liegt entweder auf einer zentralen Strecke von k, oder es besteht k_1 aus einem inneren Wege von k und je einem Stück der anstoßenden zentralen Strecken.

Fall a. k_1 liegt auf einer zentralen Strecke von k.

In diesem Falle liegt k_1 zwischen T_2' und dem Schartetraeder durch Q. Wir betrachten die auf $\mathfrak{M}$ liegenden Stücke von S und lassen $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ außer Betracht. Durch Deformation von S erreichen wir zunächst, daß kein äußeres

Knie von S auf $\mathfrak{M}$ liegt: Man kann diese Knie zunächst längs geeigneter, zentrisch monotoner Streckenzüge so ausbeulen[23]), daß die Maxima der zentrischen Distanz außerhalb T_2' gelangen, und anschließend von ihrer Ausnahmeecke her (in das Knie hinein) so, daß die Ausnahmeecken ebenfalls außerhalb T_2' gelangen[24]).

Wenn nun auf k_1 außer dem Endpunkt Q kein weiterer Schnittpunkt mit S liegt, so läßt sich ein Elementarflächenstück $\mathfrak{a}$ so bestimmen[25]), daß erstens $\mathfrak{a}$ berandet wird von k_1, einem zentrisch monotonen Streckenzug m auf $\mathfrak{m}$ von Q nach einem Punkte von T_2' und von einem Streckenzug auf T_2', der die Endpunkte von m und k_1 verbindet, daß zweitens S und k von $\mathfrak{a}$ nur in m und k_1 getroffen werden und daß drittens $\mathfrak{a}$ von jedem Schartetraeder zwischen T_2' und Q in nur einem Querschnitt und von dem Schartetraeder durch Q nur in Q getroffen wird. Daß $\mathfrak{a}$ so bestimmt werden kann, erkennt man, wenn man das Schartetraeder durch Q stetig dehnt, weil die Ausnahmeecke von $\mathfrak{k}_2$ nicht auf $\mathfrak{M}$ liegt. Das Knie $\mathfrak{k}_2$ läßt sich nun dadurch beseitigen, daß man das Endstück von S längs $\mathfrak{a}$ entsprechend dem Fall b des 1. Schrittes abbiegt.

Wenn auf k_1 außer Q noch Schnittpunkte mit S liegen, so sind es die Schnitte von k mit dem von $\mathfrak{k}_1$ verschiedenen Kopf $\mathfrak{k}'$ von S. Wenn der an $\mathfrak{k}'$ anstoßende Schenkel nach außen führt, so schneidet er T_2', weil auf $\mathfrak{M}$ keine äußeren Knie mehr liegen, und es kann $\mathfrak{k}'$ nach dem eben beschriebenen Verfahren längs k_1 außerhalb $\mathfrak{M}$ geschoben werden, worauf das aus $\mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{s}_1$ und $\mathfrak{k}_2$ bestehende Endstück von S wie oben abgebogen werden kann. Wenn der an $\mathfrak{k}'$ anstoßende Schenkel nach innen führt, so läßt sich $\mathfrak{k}'$ längs k_1 ebenfalls aus $\mathfrak{M}$ herausschieben, worauf $\mathfrak{a}$ wie oben bestimmt werden kann.

Fall b. k_1 umfaßt einen inneren Weg von k, hat aber mit S nur einen Endpunkt gemein.

Der Endpunkt Q von k_1 ist Minimum der zentrischen Distanz auf dem Kopf $\mathfrak{k}_1$. Wir beulen zunächst $\mathfrak{k}_1$ längs k_1 so aus, daß der Sehnenendpunkt Q auf die zweite zentrale Strecke von k_1 gerät, daß auf dem ausgebeulten Stück nur ein Extremum der zentrischen Distanz, und zwar ein Minimum innerhalb des Grenztetraeders T_1 von k, entsteht und daß die übrigen Teile von S und die Elementarflächenstücke $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{n}$ festbleiben. Dabei geht k in sich über. Daraufhin wird t_1' über das ausgebeulte Stück so deformiert, daß auf t_1' nur ein Minimum der zentrischen Distanz dicht bei dem jetzigen Endpunkt Q von k_1 entsteht, und dabei wird $\mathfrak{g}$ so mitgezogen, daß auf $\mathfrak{g}$ nur eine einzige Ausnahmeecke in der Nähe des bisherigen Minimums der zentrischen Distanz von t_1' entsteht. Diese liegt dann auf dem Rande einer inneren Haube von $\mathfrak{g}$ und kann daher so beseitigt werden, daß T_2' punktweise festbleibt. Nunmehr wird das aus $\mathfrak{k}_2$, $\mathfrak{s}_1$ und dem deformierten Knie $\mathfrak{k}_1$ bestehende Endstück von S längs k so verbeult, daß es wieder aus einem Knie, einem Schenkel und einem Kopf besteht und daß der auf der Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ liegende Sehnenendpunkt auf dieselbe zentrale Strecke gerät, auf der jetzt Q liegt. Insgesamt wird also der

[23]) Vgl. [6] § 5, 5. Schritt.
[24]) Vgl. [6] § 6, 2. Schritt.
[25]) Vgl. [6] § 6, 1. Schritt.

Kopf $\mathfrak{k}_1$ von einer zentralen Strecke von k über einen inneren Weg hinweg auf eine andere verschoben. Damit entsteht der Fall a.

Fall c. k_1 umfaßt einen inneren Weg von k und schneidet S.

Auf k_1 liegen also jetzt die beiden Schnittpunkte von k mit dem zweiten Kopf $\mathfrak{k}'$ von S. Liegen diese nicht auf derselben zentralen Strecke wie Q, so kann das Verfahren des Falles b angewandt werden. Liegen beide Schnittpunkte auf derselben zentralen Strecke wie Q, so betrachten wir den an $\mathfrak{k}'$ anstoßenden Schenkel. Führt dieser von $\mathfrak{k}'$ nach außen, so kann zunächst $\mathfrak{k}'$ längs k_1 über den inneren Weg hinweg auf die zweite zentrale Strecke geschoben werden und danach $\mathfrak{k}_1$ wie im Falle b.

Nehmen wir nun an, daß die Schnittpunkte von k mit dem zweiten Knie $\mathfrak{k}'$ auf k_1 auf derselben zentralen Strecke wie Q liegen und daß der an $\mathfrak{k}'$ anstoßende Schenkel $\mathfrak{s}'$ von $\mathfrak{k}'$ nach innen führt. Wie im Falle a erreichen wir zunächst, daß auf $\mathfrak{M}$ nur innere Knie liegen. Durch ein entsprechendes Verfahren können wir erreichen, daß auf $\mathfrak{M}$ alle inneren Knie innerhalb des Grenztetraeders T_1 von k gelangen. Auf $\mathfrak{M}$ liegt möglicherweise außer k_1 noch ein zweites Stück k_2 von k ,das dann einen inneren Weg u_2 von k umfaßt. Wenn dies der Fall ist, so heben wir u_2 unter Verlängerung der anstoßenden zentralen Strecken ins Innere von T_1 ab, so daß u_2 auf ein Schartetraeder zwischen T_1 und der äußersten Ausnahmeecke der auf $\mathfrak{M}$ liegenden inneren Knie gelangt. Dadurch wird es möglich, den Kopf $\mathfrak{k}'$ längs k_1 ähnlich wie im Falle b auf die zweite zentrale Strecke zu verschieben. Daraufhin kann u_2 längs eines geeigneten Elementarflächenstückes auf T_1 zurückdeformiert werden und zwar so, daß wieder zentrale Strecken an u_2 anstoßen und daß S und k_1 von u_2 nicht getroffen werden, d. h. man weiche den Schenkeln von S und dem inneren Weg auf k_1 bei der Deformation aus. Die Gestalt von u_2 ändert sich dabei, sie kann jedoch wie im 1. Schritt von § 6 durch eine zentrische Abbildung, die außerhalb T_2' die Identität ist, wiederhergestellt werden. Nunmehr können die innerhalb T_1 liegenden Knie von S vermöge geeigneter Elementarflächenstücke so abgebogen werden, daß sie wieder außerhalb T_1 gelangen, wobei man den inneren Wegen von k offenbar ausweichen kann. Das Verfahren des Falles b ist nunmehr anwendbar.

Bei den vorangehenden Deformationen werden die Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ in Mitleidenschaft gezogen. Die Deformationen können jedoch stets so vorgenommen werden, daß $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ wieder die Forderungen des § 5 erfüllen. Wir haben erhalten, daß sich stets ein Knie von S beseitigen läßt, solange noch Knie vorhanden sind. Da bei keiner Reduktion neue Knie entstehen, können wir weiterhin annehmen, daß S keine Ausnahmeecken besitzt, also aus den beiden Köpfen und einem einzigen Schenkel besteht.

§ 8. Abschließende Reduktionen für $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$

Wir beseitigen zunächst alle noch verbliebenen Ausnahmeecken von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ und nehmen anschließend im 4. Schritt eine Reduktion der Schnitte von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ mit den Grenztetraedern von k vor.

Nehmen wir an, daß etwa auf $\mathfrak{f}_1$ noch Ausnahmeecken vorhanden sind. Wegen § 5, 3. Schritt und § 6, 1. Schritt liegt jede Ausnahmeecke zwischen den Tetraedern durch die Grenzlinien der beiden Köpfe von S. Wir betrachten auf $\mathfrak{f}_1$ alle diejenigen Schnitte mit Schartetraedern, die von Ausnahmeecken und den singulären Extrema der zentrischen Distanz von r_1 ausgehen. Es existiert dann auf $\mathfrak{f}_1$ ein zu k punktfremdes Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$, das entweder ein Zipfel ist oder von einem Querschnitt der angegebenen Art abgeschnitten wird und das keine weiteren solchen Schnitte enthält.

1. Schritt. *Reduktion, falls* $\mathfrak{g}$ *ein Zipfel ist.*

Es sei A die Ausnahmeecke auf dem Rande von $\mathfrak{g}$ und T das Schartetraeder durch A. Mit dem Rande von $\mathfrak{f}_1$ hat $\mathfrak{g}$ ein Stück t_1' gemein, das auf r_1 liegt, und es wird $\mathfrak{g}$ von t_1' und einem Querschnitt q von $\mathfrak{f}_1$ durch A berandet. t_1' führt mindestens einmal über einen Kopf von S, etwa über den Kopf $\mathfrak{k}_1$. Zur Fixierung der Sprechweise nehmen wir an, daß $\mathfrak{k}_1$ der innere der beiden Köpfe ist. Auf $\mathfrak{k}_1$ liegt ein reguläres Minimum A_1 der zentrischen Distanz von t_1'. Das Schartetraeder T' durch A_1 schneidet $\mathfrak{f}_1$ in einer geschlossenen Schnittlinie s durch A_1, die auf $\mathfrak{g}$ liegt. Dehnt man T' stetig, so geht s in einen Schnitt über, der auf S entspringt und endet und in q übergeht, wenn T' in T gedehnt ist. Wäre dies nämlich nicht der Fall, so könnte man die Dehnung über T hinaus fortsetzen, bis der aus s entstandene Schnitt in einen Querschnitt von $\mathfrak{g}$ übergeht, der in einem Extremum der zentrischen Distanz von t_1' auf dem äußeren Kopf von S entspringt, was der Wahl von $\mathfrak{g}$ widerspricht. $\mathfrak{g}$ hat also ähnliche Gestalt wie das im 3. Schritt von § 7 bestimmte, dort ebenfalls mit $\mathfrak{g}$ bezeichnete Elementarflächenstück, und ähnlich wie dort wird eine innerhalb T liegende Kugel $\mathfrak{M}$ bestimmt: q berandet auf T zusammen mit einem geeigneten Stück q' des Schnittes von S und T ein Elementarflächenstück $\mathfrak{n}$, das an $\mathfrak{K}$ von außen in q' anstößt und mit k nur einen Schnittpunkt gemein hat. q' und t_1' beranden auf S ein Elementarflächenstück $\mathfrak{m}$, das innerhalb T liegt und k in einem Sehnenendpunkt Q trifft. $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ beranden eine innerhalb T liegende Kugel $\mathfrak{M}$. Ihr Durchschnitt mit k besteht aus einem Stück k_1 von k, ihr Durchschnitt mit $\mathfrak{K}$ besteht aus $\mathfrak{m}$ nach Bestimmung von $\mathfrak{n}$. k_1 liegt entweder auf einer zentralen Strecke von k oder umfaßt einen inneren Weg. Wir betrachten hier nur den ersten Fall und zeigen im 3. Schritt, daß sich der zweite Fall auf den ersten zurückführen läßt.

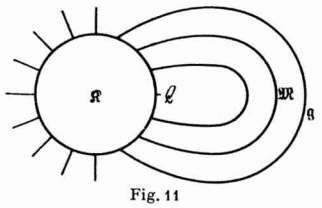

Fig. 11

Im betrachteten Fall liegt der Endpunkt Q von k_1 auf der Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$. Durchläuft man diese Grenzlinie, so trifft man abwechselnd auf die Ränder von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$. Die Schnitte des Tetraeders durch die Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ mit $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ haben daher, soweit sie auf $\mathfrak{M}$ liegen, folgendes Aussehen (Fig. 11): Es sind Schnitte, die auf der Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ entspringen und enden, Q trennt die Endpunkte jeder Schnittlinie auf demjenigen Stück der

Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$, das auf $\mathfrak{m}$ liegt, und der äußerste dieser Schnitte liegt auf $\mathfrak{g}$. Weitere Schnitte können nicht vorhanden sein, weil solche geschlossen sein und auf einer Haube von $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$ liegen müßten, wie man erkennt, wenn man das Schartetraeder durch die Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ in geeignetem Sinne stetig dehnt. Dehnt man das Schartetraeder durch die Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ stetig nach T, so entsteht aus Q ein Querschnitt von $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$, etwa von $\mathfrak{f}_2$, während die übrigen auf $\mathfrak{M}$ liegenden Schnitte ihre Gestalt behalten. Von zwei auf dem Tetraeder benachbarten Schnitten liegt nämlich einer auf $\mathfrak{f}_1$, der andere auf $\mathfrak{f}_2$, so daß eine Veränderung des Schnittbildes nur dann möglich wäre, wenn noch Hauben vorhanden wären. Zugleich bemerkt man, daß von den vier Schnitten, die auf T von A ausgehen, nur die beiden, die zusammen q ausmachen, auf $\mathfrak{n}$ liegen.

Auf $\mathfrak{n}$ liegt ein Querschnitt, der den Endpunkt von k_1 mit einem Punkte von r_2 verbindet und von $\mathfrak{f}_2$ ein ausnahmeeckenfreies, auf $\mathfrak{M}$ liegendes Elementarflächenstück $\mathfrak{a}$ abschneidet, das Q als innersten Punkt besitzt. Längs dieses Elementarflächenstückes kann $\mathfrak{k}_1$ und das anschließende Schenkelstück so ausgebeult werden, daß die Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ außerhalb T gelangt, k in sich übergeht und $\mathfrak{f}_2$ stetig in sich zusammengezogen wird, so daß $\mathfrak{a}$ ins Innere von $\mathfrak{R}$ gelangt, während sich $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ sonst nicht ändern. Nach dem Verfahren des 3. Schrittes von § 5 kann nun $\mathfrak{k}_1$ so zusammengezogen werden, daß $\mathfrak{k}_1$ außerhalb T zu liegen kommt. $\mathfrak{g}$ geht dabei in eine Haube über, und die Ausnahmeecke A kann beseitigt werden. Bei dem Verbeulen von $\mathfrak{k}_1$ ist so vorzugehen, daß das anstoßende der beiden Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ auch anschließend den Forderungen des § 5 genügt.

2. Schritt. *Reduktion, falls* $\mathfrak{g}$ *von einem Querschnitt abgeschnitten wird, der von einem singulären Extremum der zentrischen Distanz von* r_1 *ausgeht.*

Sei t_1 das Stück von r_1, das $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{f}_1$ gemein haben. Da r_1 abwechselnd über die beiden Köpfe von S geht, liegt auf t_1 ein Extremum A_1 der zentrischen Distanz, das nicht Endpunkt ist. Zur Fixierung der Sprechweise nehmen wir wieder an, daß A_1 auf dem inneren der beiden Köpfe von S liegt.

Es sei jetzt T ein Schartetraeder, das den Schenkel von S schneidet, und zwar so dicht an der Grenzlinie des äußeren Kopfes, daß auf T und außerhalb T keine Ausnahmeecken von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ liegen. T schneidet $\mathfrak{g}$ in einem Querschnitt q, und es berandet q zusammen mit einem Stück t_1' von t_1, das A_1 enthält, ein Elementarflächenstück auf $\mathfrak{g}$, dem wir von jetzt an die Bezeichnung $\mathfrak{g}$ erteilen. Nun kann die Kugel $\mathfrak{M}$ wie im 1. Schritt bestimmt werden, wobei die Bezeichnungen entsprechend zu wählen sind. Der Durchschnitt von $\mathfrak{M}$ und k besteht wieder aus einem Stück k_1 von k, wobei k_1 entweder auf einer zentralen Strecke von k liegt oder einen inneren Weg umfaßt. Der zweite Fall wird durch den 3. Schritt auf den ersten zurückgeführt, so daß wir hier nur diesen zu betrachten haben. Der Vorgang entspricht nun dem 1. Schritt. Wie dort kann das Elementarflächenstück $\mathfrak{a}$ bestimmt und S längs $\mathfrak{a}$ so verbeult werden, daß die Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ außerhalb T gelangt aber noch innerhalb des Schartetraeders durch die Grenzlinie des

äußeren Kopfes liegt, und es läßt sich dann $\mathfrak{k}_1$ außerhalb T bringen. Dann hat keine Ausnahmeecke von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ dieselbe zentrische Distanz wie ein Punkt von S, und es verschwinden alle, wenn man Hauben auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ beseitigt, weil von einer Ausnahmeecke nicht alle Schnitte mit dem zugehörigen Schartetraeder zu k führen können (vgl. § 6).

3. Schritt. *Reduktion, falls k_1 in den vorangehenden Schritten einen inneren Weg von k umfaßt.*

Sei u_1 dieser innere Weg, die übrigen Bezeichnungen seien dieselben wie im Vorangehenden. Die Reduktion besteht darin, daß $\mathfrak{k}_1$ über u_1 hinweggezogen wird, worauf der bisher betrachtete Sachverhalt des 1. oder 2. Schrittes entsteht.

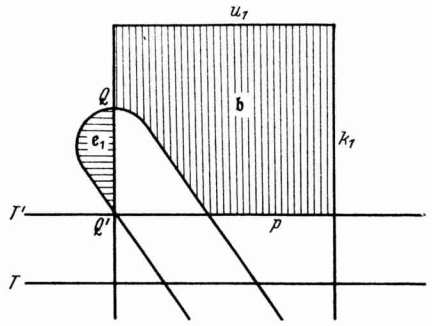

Fig. 12

Der auf $\mathfrak{k}_1$ liegende Endpunkt Q von k_1 ist jetzt der innerste Punkt von S. An $\mathfrak{k}_1$ stößt eines der beiden Elementarflächenstücke e_1, e_2 an, etwa e_1. Die Schnitte von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ mit dem Schartetraeder T' durch die Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ haben, soweit sie auf $\mathfrak{M}$ liegen, das Aussehen von Fig. 11, wobei jetzt nur an Stelle des dort mit Q bezeichneten Punktes ein Querschnitt p etwa von $\mathfrak{f}_2$ tritt, der einen Punkt von k_1 mit einem Punkt von r_2 verbindet. p schneidet von $\mathfrak{f}_2$ ein Elementarflächenstück $\mathfrak{b}$ ab, das auf $\mathfrak{M}$ liegt und das von p, einem Stück von k_1 und einem in Q entspringenden Stück von r_2 berandet wird (Fig. 12). Längs $\mathfrak{b}$ kann $\mathfrak{k}_1$ und das anstoßende Schenkelstück so ausgebeult werden, daß k in sich übergeht, daß auf S keine Ausnahmeecke entsteht und daß $\mathfrak{b}$ ins Innere von $\mathfrak{R}$ gelangt, wobei $\mathfrak{f}_2$ in sich zusammengezogen wird, während sich $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ sonst nicht ändern. e_1 ist dabei so mitzunehmen, daß auf e_1 keine Ausnahmeecken entstehen, daß e_1 an u_1 vom Inneren des Grenztetraeders T_1 her anstößt und daß der innerste Punkt des deformierten Kopfes $\mathfrak{k}_1$ auf dem Rande von e_1 liegt. Bei der Deformation gelangt Q außerhalb T'. Die innerhalb T liegenden Stücke von r_1 und r_2 (T hat die Bedeutung wie im 1. oder 2. Schritt) werden nun auf dem ausgebeulten Stück so deformiert, daß wieder jeweils nur ein Minimum der zentrischen Distanz vorhanden ist und daß dieses dicht bei dem jetzigen Sehnenendpunkt Q außerhalb T' liegt. Die Deformation geschieht wie in § 6, 2. Schritt, Fall a. Die anstoßenden Teile von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ sind mitzuziehen, wobei neue Ausnahmeecken entstehen, die jedoch innerhalb T' liegen. Nun wird $\mathfrak{k}_1$ weiter längs e_1 und eines Teiles von $\mathfrak{b}$ so verbeult, daß der Schnittpunkt Q' mit k, der anfangs auf der Grenzlinie von $\mathfrak{k}_1$ lag, auf dieselbe zentrale Strecke wie Q gelangt, zum Minimum der zentrischen Distanz auf S wird und außerhalb T' zu liegen kommt. Dies muß so geschehen, daß auf S keine Ausnahmeecken entstehen und k in sich übergeht. Q' ist anfangs Minimum der zentrischen

Distanz auf $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$. Das anstoßende Stück von $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$ kann bei der Deformation so mitgezogen werden, daß es außerhalb des Grenztetraeders T_1 verbleibt und keine Ausnahmeecken entstehen, weil e_1 und das betreffende Stück von $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$ nur den Punkt Q' gemein haben. S liegt nunmehr außerhalb T', und die bei der Deformation entstandenen Ausnahmeecken verschwinden, wenn Hauben auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ wieder beseitigt werden. Der gewünschte Sachverhalt ist damit erreicht.

4. Schritt. *Korrektur der Schnitte durch die regulären Extrema.*

Sei A ein solches Extremum etwa auf r_1, das nicht Sehnenendpunkt ist. Das Schartetraeder T durch A schneidet $\mathfrak{f}_1$ in einer geschlossenen Schnittlinie s durch A, und es berandet s auf T ein Elementarflächenstück $\mathfrak{n}$, das mit S nur den Punkt A gemein hat. Auf $\mathfrak{f}_1$ berandet s ein Elementarflächenstück $\mathfrak{m}$. Sei $\mathfrak{k}_1$ der Kopf, auf dem A liegt. $\mathfrak{n}$ trifft die Sehne von $\mathfrak{k}_1$ nicht, und $\mathfrak{m}$ ist punktfremd zu k. Auf $\mathfrak{n}$ liegen daher zwei oder keine Schnittpunkte mit k. Wenn k von $\mathfrak{n}$ nicht getroffen wird, so beranden $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{n}$ eine zu k punktfremde Kugel $\mathfrak{M}$, die mit S nur den Punkt A gemein hat, und in diesem Falle können $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ folgendermaßen deformiert werden:

Auf $\mathfrak{n}$ liegen außer dem Rande s möglicherweise noch geschlossene Schnitte mit $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$. Indem man mit einem auf $\mathfrak{n}$ innersten beginnt, können diese der Reihe nach so beseitigt werden, daß keine Ausnahmeecken entstehen. Anschließend wird $\mathfrak{m}$ über $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{n}$ deformiert und so von $\mathfrak{n}$ abgehoben, daß k, S und A festbleiben, A zum Extremum der zentrischen Distanz auf $\mathfrak{f}_1$ wird und keine Ausnahmeecken entstehen. Das Verfahren soll so oft wie möglich auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ angewandt werden.

§ 9. Nachweis, daß $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ eines der beiden Grenztetraeder von k nicht mehr schneiden und in je einem Stück von k berühren

1. Schritt. *Nachweis, daß auf r_1 und r_2 insgesamt α' reguläre Extrema der zentrischen Distanz vorhanden sind.*

Auf r_1 und r_2 liegen je $\alpha'-1$ Extrema der zentrischen Distanz, die nicht Sehnenendpunkte sind. Unter diesen betrachten wir die singulären. Von jedem solchen Extremum gehen zwei Querschnitte von $\mathfrak{f}_1$ oder $\mathfrak{f}_2$ auf dem zugehörigen Schartetraeder aus, die $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ jeweils in drei Elementarflächenstücke zerlegen, wobei eines von beiden Querschnitten und einem Stück des Randes von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ berandet wird, also „zipfelartige" Gestalt hat, während die anderen beiden von je einem Querschnitt und einem Stück des Randes von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ berandet werden. Auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ betrachten wir alle diese Querschnittpaare zugleich, und es mögen γ_1 bzw. γ_2 solche Paare auf $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ liegen. Von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ werden dann γ_1+2 bzw. γ_2+2 Elementarflächenstücke abgeschnitten, die mit den Querschnitten nur Randpunkte gemein haben, wie durch vollständige Induktion nach γ_1, γ_2 folgt. Sei $\mathfrak{g}$ ein solches Elementarflächenstück, etwa auf $\mathfrak{f}_1$. Für die Lage von $\mathfrak{g}$ sind drei Fälle möglich:

a) $\mathfrak{g}$ trifft k nicht,

b) $\mathfrak{g}$ hat mit k ein Stück gemein, das einen Sehnenendpunkt als Endpunkt besitzt,

c) $\mathfrak{g}$ hat zipfelartige Gestalt und mit r_1 nur einen Punkt, die „Spitze des Zipfels", gemein.

Im Falle a liegen auf dem Rande von $\mathfrak{g}$ genau zwei Extrema der zentrischen Distanz von r_1, nämlich ein singuläres, von dem zwei Querschnitte von $\mathfrak{f}_1$ mit dem zugehörigen Schartetraeder ausgehen, von denen einer oder beide zum Rande von $\mathfrak{g}$ gehören, während das andere Extremum regulär ist. Man erkennt dies, wenn man das Schartetraeder durch das singuläre Extremum in geeignetem Sinne stetig dehnt, so daß auf $\mathfrak{g}$ ein Schnitt entsteht, und diesen Schnitt verfolgt.

Im Falle b erhält man entsprechend zwei Extrema der zentrischen Distanz von r_1, wobei das zweite hier ein Sehnenendpunkt ist. Ist dieses ein reguläres Extremum, so hat $\mathfrak{g}$ mit k nur ein Stück einer zentralen Strecke gemein, andernfalls liegt auf dem Rande von $\mathfrak{g}$ ein innerer oder ein äußerer Weg von k und nur einer.

Im Falle c liegt auf dem Rande von $\mathfrak{g}$ nur ein Extremum der zentrischen Distanz von r_1, nämlich die Spitze des Zipfels, außerdem aber genau ein innerer oder äußerer Weg von k, wie sich durch stetige Dehnung des Schartetraeders durch die Spitze des Zipfels in geeignetem Sinne ergibt.

Berücksichtigt man, daß auf k zwei innere und zwei äußere Wege liegen sowie vier Sehnenendpunkte, von denen zwei reguläre Extrema sind, so bemerkt man, daß für $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ zusammen der Fall b genau viermal, der Fall c genau zweimal, der Fall a also $(\gamma_1+\gamma_2-2)$-mal eintritt.

Betrachten wir nun ein Schartetraeder durch ein reguläres Extremum der zentrischen Distanz auf r_1 oder r_2, das nicht Sehnenendpunkt ist. Wenn man das Tetraeder in geeignetem Sinne stetig dehnt, erkennt man, daß das Extremum auf einem Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ liegt, das zum Fall a gehört. Zugleich ergibt sich, daß γ_1 und γ_2 von null verschieden sind, was oben stillschweigend vorausgesetzt wurde. Wir erhalten, daß auf r_1 und r_2 zusammen $2\gamma_1+2\gamma_2-2$ Extrema der zentrischen Distanz liegen, die nicht Sehnenendpunkte sind. Also ist $\gamma_1+\gamma_2=\alpha'$, und dies ist auch die Anzahl der regulären Extrema der zentrischen Distanz auf r_1 und r_2, weil genau zwei Sehnenendpunkte solche Extrema darstellen.

2. Schritt. *Verhalten der Schnitte von* $\mathfrak{f}_1$ *und* $\mathfrak{f}_2$ *mit einem stetig gedehnten Schartetraeder.*

Es sei T ein Schartetraeder, das den Schenkel von S schneidet. Es liegt also einer der beiden Köpfe von S innerhalb T, der andere außerhalb. Der Schnitt von S und T sei s. Durchläuft man s einmal, so gelangt man abwechselnd zu Schnitten von r_1 und r_2 mit T, und zwar je α'-mal. Der Durchschnitt von T und $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2$ besteht daher (Fig. 13) aus vier Querschnitten q_1, q_2, q_3, q_4, die von s nach je einem der vier Schnittpunkte von k und T führen, und

Querschnitten, die auf s entspringen und enden und dabei jeweils genau einen der Querschnitte q_1, q_2, q_3, q_4 umfassen. Weitere Schnitte von T mit $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ sind nicht vorhanden, weil es auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ keine Ausnahmeecken mehr gibt. Der Querschnitt q_i $(i=1, 2, 3, 4)$ werde von n_i Querschnitten umfaßt, wobei die Numerierung der q_i entsprechend Fig. 13 gewählt sei. Dann ist

$$n_1+n_2+n_3+n_4=\alpha'-2. \tag{1}$$

Zieht man T stetig auf seinen Mittelpunkt zusammen, so ändert sich das Schnittbild erst dann, wenn T durch die Grenzlinie des inneren Kopfes von S geht, und es verschwindet dort einer der Querschnitte q_i. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß dies q_1 ist. Wird T weiter zusammengezogen, so schrumpfen die n_1 Schnitte, die vorher q_1 umfaßten, der Reihe nach auf einen Punkt zusammen wegen des 4. Schrittes von § 9. Man erhält so zunächst n_1+1 reguläre Extrema der zentrischen Distanz von r_1 und r_2. Nehmen wir an, daß $n_2 \leqq n_4$ ist, so verschmelzen bei weiterem Zusammenziehen von T nun n_2 Querschnitte, die q_2 umfassen, mit solchen, die q_4 umfassen, und ein solches Verschmelzen von Querschnitten tritt auch weiterhin solange ein, bis ein Schnitt entsteht, der zwei Punkte von k verbindet. Danach entsteht eine gewisse Anzahl δ geschlossener Schnitte, bis schließlich T durch den innersten Punkt von S geht und zwei Querschnitte auf $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ vorhanden sind, die je zwei Punkte von k verbinden, und δ geschlossene Schnitte, welche die beiden Querschnitte auf T trennen und bei weiterem Zusammenziehen in δ geschlossene Schnitte von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ mit dem inneren Grenztetraeder T_1 übergehen. Das Verschmelzen der Schnitte ist in Fig. 13 gestrichelt angedeutet.

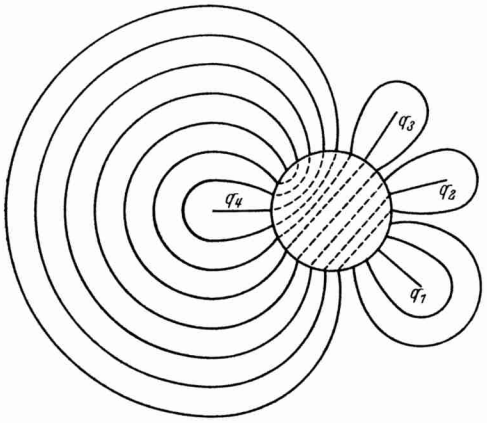

Fig. 13

Um δ zu bestimmen, betrachten wir T in derjenigen Lage, in der q_2 mit einem anderen Querschnitt verschmilzt, und lassen q_2 fort. Auf dem von T aus $\mathfrak{R}$ ausgeschnittenen Elementarflächenstück $\mathfrak{h}$ verbinden wir die Schnitte von T mit $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ entsprechend dem weiteren Verschmelzen (Fig. 14). Wir erhalten dann zwei nicht geschlossene Wege und δ geschlossene, welche die beiden ersten trennen. Auf dem Rande s von $\mathfrak{h}$ liegen zwei Endpunkte und $2n_3+2n_4$ Schnittpunkte mit diesen Wegen. Die beiden auf s liegenden Endpunkte können über $\mathfrak{h}$ hinweg durch einen Weg w_1 so verbunden werden, daß n_3+n_4 Schnittpunkte entstehen. Entsprechend können die beiden anderen Endpunkte der nicht geschlossenen Wege durch einen Weg w_2 außerhalb $\mathfrak{h}$ verbunden werden. Das entstehende Bild kann als Projektion einer Normal-

form mit zwei Brücken aufgefaßt werden, zu der zusätzlich δ geschlossene Wege gezeichnet sind, welche die beiden äußeren Wege trennen und die Brücken abwechselnd unterkreuzen[26]). Zählt man die geschlossenen Wege mit, so liest man n_3+n_4+1 als die der Torsion entsprechende Zahl und n_4-n_2 oder n_2+n_3+1 als Betrag der der Kreuzungsklasse entsprechenden Zahl ab. Nach einer Bemerkung in § 3 erhält man für die Anzahl der geschlossenen Wege jedenfalls:

$$(2) \qquad \delta = (n_4 - n_2, n_3 + n_4 + 1) - 1 = (n_2 + n_3 + 1, n_3 + n_4 + 1) - 1,$$

wobei die Klammer den größten gemeinsamen Teiler bezeichnet.

Wir erhalten: Die Anzahl der Schnitte von T_1 mit $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ ist $(n_2+n_3+1, n_3+n_4+1)-1$, wenn die inneren Wege von k, in denen T_1 von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ berührt wird, nicht als Schnitte gezählt werden. Zugleich hat sich ergeben, daß auf dem inneren Kopf von S insgesamt $n_1+(n_2+n_3+1, n_3+n_4+1)$ reguläre Extrema der zentrischen Distanz von r_1 und r_2 liegen. Diese Aussagen wurden unter der Annahme $n_2 \leqq n_4$ hergeleitet, gelten aber wegen der Symmetrie in n_2 und n_4 allgemein.

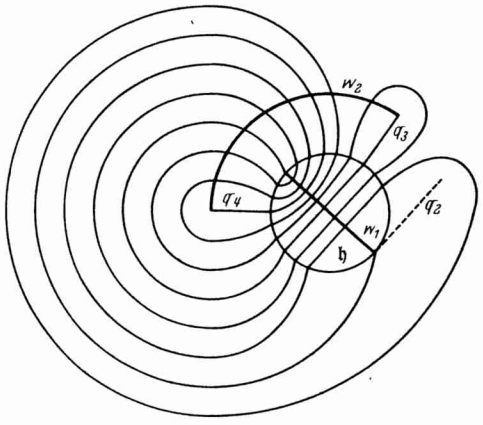

Fig. 14

3. Schritt. *Nachweis, daß eines der beiden Grenztetraeder von* $\mathfrak{f}_1$ *und* $\mathfrak{f}_2$ *nicht geschnitten wird.*

Das im Vorangehenden benutzte Tetraeder T betrachten wir wieder in der Ausgangslage (Fig. 13) und dehnen es stetig bis zur Grenzlinie des äußeren Kopfes von S. Es verschwindet dann einer der Querschnitte q_i. Dies kann nicht q_1 sein, da sonst r_1 oder r_2 mit den Köpfen nur die Endpunkte gemein hätte und somit $\alpha'=1$ wäre, was ausgeschlossen wurde. Es sind zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem q_3 oder einer der beiden Querschnitte q_2, q_4 verschwindet.

Fall a. Auf der Grenzlinie des äußeren Kopfes verschwindet q_2 *oder* q_4.

Wir können annehmen, daß q_2 verschwindet, der andere Fall entsteht durch Umbezeichnung. Entsprechend dem 2. Schritt ergeben sich auf dem äußeren Kopf $n_2+(n_3+n_4+1, n_1+n_4+1)$ reguläre Extrema der zentrischen Distanz von r_1 und r_2. Wegen der beiden vorangehenden Schritte und Gl. (1) muß sein

$$(3) \qquad n_3 + n_4 + 2 = (n_2 + n_3 + 1, n_3 + n_4 + 1) + (n_1 + n_4 + 1, n_3 + n_4 + 1).$$

Diese Beziehung kann aber nur bestehen, wenn einer der beiden größten gemeinsamen Teiler gleich 1, der andere gleich n_3+n_4+1 ist. Hieraus folgt

[26]) Der Sachverhalt läßt sich leicht verfolgen, wenn man das Schartetraeder durch den innersten Punkt von S stetig dehnt.

wegen Gl. (2) und der entsprechenden Gleichung für das äußere Grenztetraeder, daß eines der beiden Grenztetraeder von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ nicht geschnitten wird.

Fall b. Auf der Grenzlinie des äußeren Kopfes verschwindet q_3.

Dieser Fall ist nicht möglich. Entsprechend Gl. (3) erhielte man

(3a) $$n_2 + n_4 + 2 = (n_2 + n_3 + 1, n_3 + n_4 + 1) + (n_1 + n_2 + 1, n_1 + n_4 + 1).$$

Nach Definition von β' erhielte man ferner, daß unter der unwesentlichen Annahme $n_2 \leqq n_4$ entweder $|\beta'| = n_1 + 2n_2 + n_3 + 2$ oder $\alpha' - |\beta'| = n_1 + 2n_2 + n_3 + 2$ wäre. Wegen der Teilerfremdheit von α' und β' und wegen Gl. (1) müßte jedenfalls sein

(4a) $$(n_1 + 2n_2 + n_3 + 2, n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + 2) = 1.$$

Gln. (3a) und (4a) sind gleichwertig mit

$$n_2 + n_4 + 2 = (n_2 + n_3 + 1, n_4 - n_2) + (n_1 + n_2 + 1, n_4 - n_2)$$
$$(n_1 + 2n_2 + n_3 + 2, n_4 - n_2) = 1.$$

Diese Gleichungen widersprechen sich: Die zweite besagt, daß $n_4 \neq n_2$ ist und daß die beiden Teiler von $n_4 - n_2$ auf der rechten Seite der ersten Gleichung zueinander teilerfremd sind. Dann kann aber ihre Summe nicht größer als $n_4 - n_2 + 1$ sein.

4. Schritt. *Nachweis, daß ein Grenztetraeder, das von* $\mathfrak{f}_1$ *und* $\mathfrak{f}_2$ *nicht geschnitten wird, von* $\mathfrak{f}_1$ *und* $\mathfrak{f}_2$ *in je einem Stück von* k *berührt wird.*

Der Nachweis erfolgt indirekt. Nehmen wir etwa an, daß das äußere Grenztetraeder T_2 von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ nicht geschnitten wird und von einem der beiden Elementarflächenstücke, etwa von $\mathfrak{f}_1$, in beiden äußeren Wegen von k berührt wird. Wir können die Bezeichnungen des Falles a im 3. Schritt zugrunde legen. Es gelten also Gln. (1), (2) und (3). Betrachten wir wieder den Schnitt mit einem Schartetraeder T zwischen den beiden Köpfen von S (Fig. 13), so müßten q_1, q_3 und q_4 auf $\mathfrak{f}_1$ und q_2 auf $\mathfrak{f}_2$ liegen. Da auf T die Schnitte mit $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ abwechseln, müßten $n_1 + n_4$ und $n_3 + n_4$ ungerade sein, was der Aussage $(n_1 + n_4 + 1, n_3 + n_4 + 1) = 1$, daß also T_2 nicht geschnitten wird, widerspricht.

§ 10. Abschluß des Beweises

$\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ schneiden eines der beiden Grenztetraeder T_1, T_2 von k nicht. Nehmen wir zunächst an, daß dies für das äußere Grenztetraeder T_2 der Fall ist. Dann gibt es ein Tetraeder T zwischen T_1 und T_2, das S im Inneren enthält und $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ in nur je einem Querschnitt schneidet, wobei dieser Querschnitt $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ in ein außerhalb T liegendes und ein innerhalb T liegendes Elementarflächenstück zerlegt.

Längs der innerhalb T liegenden Stücke von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ beulen wir $\mathfrak{R}$ so aus, daß der Durchschnitt von T und $\mathfrak{R}$ aus zwei Elementarflächenstücken $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ auf S besteht, wobei $\mathfrak{h}_1$ bzw. $\mathfrak{h}_2$ den bisherigen Schnitt von $\mathfrak{f}_1$ bzw. $\mathfrak{f}_2$ mit T umfaßt. Das Ausbeulen soll so geschehen, daß dabei k in sich übergeht und $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ auf die außerhalb T liegenden Stücke zusammengezogen werden. $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ verlieren dabei ihre bisherige Gestalt, jedoch spielt diese

keine Rolle mehr. Nun bildet $\mathfrak{R}$ zusammen mit der Kugel, die das „Äußere" von T bezüglich der S^3 ausmacht, einen Vollring, für den $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ Meridianflächen sind. Dieser Vollring ist unverknotet. Man erhält nämlich leicht eine Seele, die eine verallgemeinerte Brückendarstellung mit einer Brücke ist, wenn man vor dem Ausbeulen die Sehnen von $\mathfrak{R}$ innerhalb $\mathfrak{R}$ durch einen zentrisch monotonen Streckenzug verbindet und diesen vermöge zweier geeigneter Stücke der Brücken von k und eines Weges auf T_2 zu einer Knotenlinie ergänzt. Daraus folgt[27]), daß das Komplement von $\mathfrak{R}$ bezüglich des Inneren von T ein unverknoteter Vollring ist, für den die Ränder von $\mathfrak{h}_1$ und $\mathfrak{h}_2$ Breitenkreise sind, und es läßt sich $\mathfrak{R}$ bei festem k und festem $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ in das Innere von T überführen[28]).

In die Sehnen von $\mathfrak{R}$ und der komplementären Kugel $\mathfrak{L}$ spannen wir nun Elementarflächenstücke $\bar{\mathfrak{e}}_1, \bar{\mathfrak{e}}_2$ bzw. $\bar{\mathfrak{f}}_1, \bar{\mathfrak{f}}_2$ ein, indem wir diese Sehnen von Z aus auf T projizieren. Nach Hilfssatz 3 lassen sich die auf $S = T$ liegenden Randstücke s_1 und s_2 der in die Sehnen von $\mathfrak{R}$ eingespannten Elementarflächenstücke $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ in diejenigen von $\bar{\mathfrak{e}}_1, \bar{\mathfrak{e}}_2$ dadurch überführen, daß man sie auf T kombinatorisch isotop deformiert. Dies kann auch durch eine zentrische Abbildung geschehen, die auf T_1, T_2 und k die Identität ist, und durch eine s-Abbildung, die auf k und außerhalb T die Identität ist, kann noch erreicht werden, daß $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ mit $\bar{\mathfrak{e}}_1, \bar{\mathfrak{e}}_2$ zusammenfallen. Nun sind nach Hilfssatz 3 die auf T liegenden Randstücke r_1 und r_2 von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ kombinatorisch isotop zu den entsprechenden Randstücken $\bar{r}_1$ und $\bar{r}_2$ von $\bar{\mathfrak{f}}_1$ und $\bar{\mathfrak{f}}_2$. Bei dieser Deformation ändert sich das Kreuzungsschema von r_1 und r_2 mit den Randstücken s_1 und s_2 von $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ nicht:

Durch Deformation von s_1, s_2, r_1, r_2, die s_1 und s_2 in sich überführt, kann zunächst erreicht werden, daß der Durchschnitt von r_1 und r_2 mit $\bar{r}_1$ und $\bar{r}_2$ nur aus den Endpunkten und solchen Schnittpunkten besteht, die nicht auf s_1 oder s_2 liegen. Die weitere Deformation erfolgt wie im 1. Schritt des Beweises von Satz 2 (§ 2). Es erfolgen jeweils Deformationen über Elementarflächenstücke $\mathfrak{g}$, die von je einem Stück w' auf $\bar{r}_1$ oder $\bar{r}_2$ und einem Stück v' auf r_1 oder r_2 berandet werden, wobei w' außer seinen Endpunkten keine Schnittpunkte mit r_1 und r_2 besitzt und $\mathfrak{g}$ keinen der Endpunkte von r_1 und r_2 im Inneren enthält. s_1 und s_2 müssen auf einem solchen Elementarflächenstück $\mathfrak{g}$ Querschnitte bilden, die jeweils einen Punkt von w' mit einem Punkt von v' verbinden. Andernfalls würde w' oder v' zweimal hintereinander von s_1 oder s_2 geschnitten. Dies ist aber nicht möglich, weil s_1, s_2 mit r_1, r_2 und mit $\bar{r}_1, \bar{r}_2$ Kreuzungsschemata von Normalformen bilden, wie aus der Wahl der zugehörigen Elementarflächenstücke auf $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{L}$ folgt. Jede Deformation läßt sich also durch eine s-Abbildung von T auf sich bewirken, die s_1 und s_2 in sich überführt, und dies kann auch durch eine zentrische Abbildung geschehen, die auf k, T_1 und T_2 die Identität ist.

Wir haben erreicht, daß r_1 und r_2 mit $\bar{r}_1$ und $\bar{r}_2$ zusammenfallen. Unter der Annahme, daß T_2 von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ nicht geschnitten wird, ergibt sich also

[27]) [7] § 7, Satz 2.
[28]) [7] § 8.

$\alpha = \alpha'$ und $\beta = \beta'$. Wenn T_1 von $\mathfrak{f}_1$ und $\mathfrak{f}_2$ nicht geschnitten wird, läßt sich entsprechend vorgehen, wobei nur $\mathfrak{R}$ in das Äußere eines geeigneten Tetraeders überzuführen ist. Nach § 3 ergibt sich entsprechend $\alpha = \alpha'$ und $\beta\beta' \equiv 1$ modulo 2α. Der Beweis des Satzes ist damit beendet.

Anhang: Knoten der Alexander-Briggsschen Tabelle, für die Darstellungen mit zwei Brücken gefunden wurden

Alle Knoten der ALEXANDER-BRIGGSschen Tabelle[29]) besitzen Brückendarstellungen mit drei Brücken. Dies wurde mit Hilfe der Tatsache festgestellt, daß sich in einer Brückendarstellung eines Knotens eine Brücke stets dann beseitigen läßt, wenn sie von einem der beiden anstoßenden äußeren Wege nicht unterkreuzt wird. Brückendarstellungen mit zwei Brücken wurden für die folgenden Knoten gefunden:

Bezeichnung in Tabelle	Normalform	Bezeichnung in Tabelle	Normalform	Bezeichnung in Tabelle	Normalform
3,1	(3,1)	8,3	(17,13)	9,7	(29,9)
4,1	(5,3)	8,4	(19,5)	9,8	(31,11)
5,1	(5,1)	8,6	(23,7)	9,9	(31,7)
5,2	(7,3)	8,7	(23,5)	9,10	(33,23)
6,1	(9,5)	8,8	(25,9)	9,11	(33,7)
6,2	(11,3)	8,9	(25,7)	9,12	(35,13)
6,3	(13,5)	8,11	(27,17)	9,13	(37,11)
7,1	(7,1)	8,12	(29,17)	9,14	(37,23)
7,2	(11,5)	8,13	(29,11)	9,15	(39,17)
7,3	(13,3)	8,14	(31,13)	9,17	(39,25)
7,4	(15,11)	9,1	(9,1)	9,18	(41,17)
7,5	(17,5)	9,2	(15,7)	9,20	(41,11)
7,6	(19,7)	9,3	(19,3)	9,21	(43,25)
7,7	(21,13)	9,4	(21,5)	9,27	(49,19)
8,1	(13,7)	9,5	(23,17)	9,31	(55,21)
8,2	(17,3)	9,6	(27,5)		

Nach dem Korollar zu Satz 4 sind die Knoten 4,1; 6,3; 8,3; 8,9; 8,12 der Tabelle amphicheiral, was bereits von GOERITZ [2] bemerkt wurde.

Literatur

[1] BANKWITZ, C., u. H. G. SCHUMANN: Über Viergeflechte. Abh. Math. Sem. Hamburg **10**, 263—284 (1934). — [2] GOERITZ, L.: Bemerkungen zur Knotentheorie. Abh. Math. Sem. Hamburg **10**, 201—210 (1934). — [3] GRAEUB, W.: Die semilinearen Abbildungen. Sitzgsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. Kl., 4. Abh. **1950**. — [4] REIDEMEISTER, K.: Knotentheorie. Berlin 1932. — [5] REIDEMEISTER, K.: Homotopieringe und Linsenräume. Abh. Math. Sem. Hamburg **11**, 102—109 (1936). — [6] SCHUBERT, H.: Über eine numerische Knoteninvariante. Math. Z. **61**, 245—288 (1954). — [7] SCHUBERT, H.: Knoten und Vollringe. Acta Math. **90**, 131—286 (1953). — [8] SCHUBERT, H.: Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knotens in Primknoten. Sitzgsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. Kl., 3. Abh. **1949**. — [9] SEIFERT, H.: Schlingknoten. Math. Z. **52**, 62—80 (1949). — [10] TORRES, G., and R. H. FOX: Dual presentations of the group of a knot. Ann. Math. (2) **59**, 211—218 (1954).

[29]) Siehe REIDEMEISTER [4].

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität

(Eingegangen am 8. Dezember 1955)