Werk

Titel: Über die konforme Abbildung veränderlicher Gebiete.

Autor: Gaier, Dieter

Jahr: 1956

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0064|log40

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

GAIER, D.
Math. Zeitschr. Bd. 64, S. 385—424 (1956)

Über die konforme Abbildung veränderlicher Gebiete*)

Von
DIETER GAIER

Inhaltsverzeichnis

Seite
Einleitung 385
Teil I. Vorbereitungen
§ 1. Definitionen und Bezeichnungen 387
§ 2. Funktionentheoretische Hilfssätze 388
§ 3. Topologische Hilfssätze 391
Teil II. Verhalten der Funktionen, die $|z|<1$ auf $\mathfrak{G}_n$ abbilden
§ 4. Ein allgemeiner Konvergenzsatz 394
§ 5. Eine andere Form des Konvergenzsatzes 397
§ 6. Untersuchungen für den Fall, daß $\mathfrak{G}_0$ nicht erreichbare Randpunkte besitzt 401
§ 7. Der Sonderfall der JORDAN-Gebiete 403
§ 8. Lokale Abänderung von $\mathfrak{G}_0$ 405
§ 9. Benützung anderer Normen 409
Teil III. Verhalten der Funktionen, die $\mathfrak{G}_n$ auf $|w|<1$ abbilden
§ 10. Arten von stetiger Konvergenz 412
§ 11. Ein Satz für stetige Konvergenz 413
§ 12. Ein Satz für stetige Konvergenz im weiteren Sinne 417
§ 13. Die Sonderfälle $\mathfrak{G}_n < \mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ 418
§ 14. Einige Folgerungen im Fall $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ 421
Literaturverzeichnis 423

Einleitung

Die Fragestellung, die dieser Arbeit zugrunde liegt, läßt sich einordnen in die allgemeine Theorie der Gebietsfunktionen. Gegeben sei ein einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet $\mathfrak{G}_0$ in der z-Ebene. Diesem Gebiet lassen sich auf verschiedene Weise Funktionen $F(z; \mathfrak{G}_0)$ (z.B. nach Festlegung eines Aufpunkts die GREENsche Funktion von $\mathfrak{G}_0$) oder Funktionale $F(\mathfrak{G}_0)$ (z.B. der siebte Koeffizient in der Potenzreihenentwicklung für die normierte Abbildungsfunktion $g(w)$ von $\mathfrak{G}_0$ auf $|w|<1$) zuordnen. Es ist nun eine wichtige Aufgabe, mit der sich die Theorie der Gebietsfunktionen befaßt, die Abhängigkeit einer solchen Funktion $F(z; \mathfrak{G}_0)$ bzw. eines solchen Funktionals $F(\mathfrak{G}_0)$ bei einer Veränderung des Gebiets $\mathfrak{G}_0$ festzustellen. Besonders

*) Diese Arbeit ist im Juli 1955 von der Fakultät für Natur- und Geisteswissenschaften der Technischen Hochschule Stuttgart als Habilitationsschrift angenommen worden. Die Untersuchungen wurden zum überwiegenden Teil zu der Zeit durchgeführt, als der Verfasser mit Unterstützung der Office of Naval Research of the United States Government der Harvard-Universität (Cambridge/USA.) angehörte. Für zahlreiche Hinweise und Anregungen ist der Verfasser Herrn Professor WALSH, für verschiedene Ratschläge während der Durchführung der Arbeit Herrn Professor LÖSCH zu großem Dank verpflichtet.

wird dabei interessieren, ob bei einer stetigen Veränderung von $\mathfrak{G}_0$ (in einem gewissen Sinne) sich auch die Gebietsfunktion bzw. das Funktional stetig ändert (in einem gewissen Sinne).

In unserem Fall handelt es sich um zweierlei verwandte Gebietsfunktionen.

Erstens sei $F(z; \mathfrak{G}_0) = f_0(z)$ die Funktion, die $|z| < 1$ konform und normiert auf das Gebiet $\mathfrak{G}_0$ abbildet, das wir uns zu diesem Zweck in eine w-Ebene gelegt denken und das $w = 0$ im Innern enthalte; normiert heißt dabei $f_0(0) = 0$, $f_0'(0) > 0$. Unsere Frage ist nun also die, ob sich $f_0(z)$ stetig mit $\mathfrak{G}_0$ ändert. Anders ausgedrückt: Gegeben sei eine Folge von einfach zusammenhängenden und endlichen Gebieten $\mathfrak{G}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ der w-Ebene, die alle $w = 0$ enthalten und die durch $w = f_n(z)$ konform und normiert auf $|z| < 1$ abgebildet seien. Gesucht werden topologische Bedingungen für die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — die den Begriff der „Konvergenz von $\mathfrak{G}_n$ gegen $\mathfrak{G}_0$" präzisieren sollen —, unter denen die Funktionen $f_n(z)$ gegen $f_0(z)$ konvergieren.

Was die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{f_n(z)\}$ gegen $f_0(z)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $|z| < 1$ angeht, sind sogar schon vor der Klärung der Randabbildungsfragen bei einer festen konformen Abbildung abschließende Ergebnisse erzielt worden:

Satz A (CARATHÉODORY)[1]. *Die Folge $\{f_n(z)\}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f_0(z)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $|z| < 1$, wenn die Folge $\{\mathfrak{G}_n\}$ gegen $\mathfrak{G}_0$ konvergiert (im Sinne von § 1).*

Uns interessiert nun in Teil II der Arbeit vor allem die Frage, unter welchen topologischen Annahmen für die $\mathfrak{G}_n$ man die gleichmäßige Konvergenz der Folge $\{f_n(z)\}$ gegen $f_0(z)$ sogar im gesamten (offenen) Einheitskreis $|z| < 1$ behaupten kann. Diesbezüglich liegen notwendige und hinreichende Bedingungen von COURANT und RADÓ vor für den Sonderfall, daß $\mathfrak{G}_0$ und die $\mathfrak{G}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ sämtlich JORDAN-Gebiete sind. Wir lösen die Frage für allgemeine $\mathfrak{G}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ vollständig, falls $\mathfrak{G}_0$ nur erreichbare Randpunkte besitzt, und zwar sind die topologischen Bedingungen für die $\mathfrak{G}_n$ erstens $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ und zweitens eine gewisse Forderung über die Glattheit der Ränder R_n von $\mathfrak{G}_n$ (§ 4). Die beiden Bedingungen lassen sich zusammenfassen in eine einzige, die verlangt, daß der in einem gewissen Sinne genommene Abstand d_n der Ränder R_n von R_0 mit $n \to \infty$ gegen Null strebt (§ 5). Nach einigen Überlegungen bezüglich des allgemeinen Falls, bei dem $\mathfrak{G}_0$ auch nicht erreichbare Randpunkte besitzt (§ 6), wird der Sonderfall der JORDAN-Gebiete nochmals behandelt (§ 7), und gestützt auf die dort gewonnenen Ergebnisse betrachten wir in § 8 solche $\mathfrak{G}_n$, die aus einem allgemeinen $\mathfrak{G}_0$ (das nicht erreichbare Randpunkte besitzen darf) in spezieller Weise hervorgehen. Schließlich wird der Grad der Approximation von $f_0(z)$ durch $f_n(z)$ $(|z| < 1)$ vermittels Flächen- und Linienintegralen gemessen (§ 9).

Als zweite Gebietsfunktion $F(z; \mathfrak{G}_0)$ betrachten wir in Teil III die Funktion $f_0(z)$, die $\mathfrak{G}_0$ (in der z-Ebene liegend, $z = 0$ enthaltend) konform und

[1] Vgl. CARATHÉODORY [5], S. 126 und [7], S. 73ff. In [5] wird noch gleichmäßige Beschränktheit aller $\mathfrak{G}_n$ angenommen.

normiert auf $|w|<1$ abbildet. Das Problem lautet wieder: Ändert sich $f_0(z)$ stetig mit $\mathfrak{G}_0$? Oder in Analogie zur obigen Fragestellung: Welches sind die topologischen Bedingungen für die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n=0, 1, \ldots)$, unter denen die Funktionen $f_n(z)$ gegen $f_0(z)$ konvergieren? Eine zu Satz A parallele Auskunft gibt

Satz B (BIEBERBACH)[2]). *Die Folge $\{f_n(z)\}$ konvergiert genau dann gleichmäßig gegen $f_0(z)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{G}_0$, wenn die Folge $\{\mathfrak{G}_n\}$ gegen $\mathfrak{G}_0$ konvergiert (im Sinne von § 1).*

Wenn wir uns jedoch nicht auf abgeschlossene Teile von $\mathfrak{G}_0$ beschränken wollen, so tritt im Vergleich zu vorhin noch die zusätzliche Schwierigkeit auf, daß die $f_n(z)$ im allgemeinen kein gemeinsames Definitionsgebiet haben[3]). Es ist daher zweckmäßiger, statt der gleichmäßigen Konvergenz der Funktionen $f_n(z)$ gegen $f_0(z)$ gewisse Arten von „stetiger Konvergenz" zu untersuchen (§§ 11—13); erst im Sonderfall $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ können wir wieder über $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(z \in \mathfrak{G}_0,\ n \to \infty)$ Aussagen machen (§ 14).

Diesen Untersuchungen in Teil II und III vorangehend sind in Teil I neben einer kurzen Zusammenstellung der verwendeten Begriffe (§ 1) zwei Paragraphen mit funktionentheoretischen und topologischen Hilfssätzen (§§ 2—3). Besonders die erstgenannten Hilfssätze sind grundlegend wichtig beim Beweis unserer Konvergenzsätze; die einheitliche Methode zu ihrer Gewinnung ist das „Prinzip des DIRICHLETschen Integrals".

Nicht behandelt werden in dieser Arbeit Fragen, die sich mit der numerischen Erfassung der Abweichung der Funktionen $f_n(z)$ von $f_0(z)$ befassen, also z.B. Fragen um die JULIAsche Variationsformel ([*19*] und [*16*]) und die Theorie der konformen Abbildung kreisnaher Gebiete, soweit numerische Gesichtspunkte vorherrschend sind (z.B. [*2*], [*3*], [*14*], [*20*], [*23*], [*25*], [*26*], [*36*]). Ebensowenig beschäftigen wir uns mit der Approximation der Ableitungen $f_0^{(p)}(z)$ durch $f_n^{(p)}(z)$ für $n \to \infty$ (z.B. [*24*], [*29*], [*34*], [*37*], [*39*]), und schließlich werden auch Konvergenzsätze für allgemeinere, topologische Abbildungsfunktionen nicht berücksichtigt ([*21*]).

Teil I

Vorbereitungen

§1. Definitionen und Bezeichnungen

Wir erläutern zunächst einige Begriffe, die in der Arbeit benützt werden[4]).

Es sei $\mathfrak{G}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet der z-Ebene, das den Punkt $z=0$ enthalte; es heißt *endlich* (bzw. *beschränkt*), wenn $z=\infty$ nicht innerer (bzw. äußerer) Punkt von $\mathfrak{G}$ ist.

Ein endlicher Punkt P des Randes R von $\mathfrak{G}$ ist *erreichbar*, wenn es einen von $z=0$ nach P verlaufenden JORDAN-Bogen C_1 gibt, der abgesehen vom

[2]) Dieser Satz ist enthalten in einem allgemeineren, der sich bei BIEBERBACH [*4*], S. 13 findet. Schwächere Formen jenes Satzes sind schon in [*1*], insbes. S. 557.

[3]) Bei Satz B spielt das keine Rolle; denn $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ hat zur Folge, daß jeder abgeschlossene Teil von $\mathfrak{G}_0$ in $\mathfrak{G}_n$ enthalten ist für $n > \bar{n}$.

[4]) Vgl. dazu CARATHÉODORY ([*5*], [*6*]) und GATTEGNO-OSTROWSKI ([*17*], [*18*]).

Punkt P ganz in $\mathfrak{G}$ liegt; die erreichbaren Randpunkte liegen dicht auf R, d.h. jeder Punkt von R ist Häufungspunkt erreichbarer Randpunkte.

Verbindet ein JORDAN-Bogen C_2 zwei verschiedene Randpunkte P_1, P_2 von $\mathfrak{G}$ und verläuft sonst völlig in $\mathfrak{G}$, so heißt C_2 ein *Querschnitt* in $\mathfrak{G}$ und dieser zerlegt $\mathfrak{G}$ in zwei Teilgebiete $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2$. Liegt der Punkt $z=0$ nicht auf C_2, so enthalte z.B. $\mathfrak{G}_1$ diesen Punkt. Wir sagen dann, $\mathfrak{G}_2$ sei der durch C_2 erzeugte *Abschnitt* von $\mathfrak{G}$ oder ein Punkt aus $\mathfrak{G}_2$ werde durch C_2 *abgeschnitten* (oder auch *abgetrennt*). $\mathfrak{G}_2$ ist ein *δ-Abschnitt*, wenn C_2 einen Durchmesser $\leq\delta$ hat; C_2 heißt in diesem Falle *δ-Querschnitt*.

Will man bei der konformen Abbildung des endlichen Gebiets $\mathfrak{G}$ auf $|w|<1$ durch $z=f(w)$ auch die Abbildung des Randes R untersuchen, so zerlegt man R zweckmäßig in eine Menge von *Primenden*. Das zu dem Punkt w_0 ($|w_0|=1$) gehörige Primende $\mathfrak{P}=f(w_0)$ von $\mathfrak{G}$ ist die Menge aller Häufungspunkte von Folgen $\{f(w_n)\}$, wenn $\{w_n\}$ beliebig gegen w_0 konvergiert ($|w_n|<1$). Jedes solche Primende ist entweder ein einziger Randpunkt von $\mathfrak{G}$ oder aber ein abgeschlossenes Kontinuum von Punkten von R; *verschiedene Primenden* (d.h. Primenden, die zu verschiedenen w-Werten gehören) können gemeinsame Punkte haben oder sogar aus denselben Punkten bestehen. Sind verschiedene Primenden eines Gebiets $\mathfrak{G}$ fremd, so sagen wir, $\mathfrak{G}$ habe nur *einfache Primenden*.

Wichtig ist, daß sich die Primenden von $\mathfrak{G}$ rein topologisch charakterisieren lassen. Ist $\{C_n\}$ eine Folge von Querschnitten in $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}_n$ ihre Abschnitte, $\mathfrak{A}_{n+1}\subset\mathfrak{A}_n$, und strebt der Durchmesser von C_n gegen Null, so ist die Punktmenge $\bigcap_n \overline{\mathfrak{A}}_n$ ein Primende $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}$. Die Punktfolge $\{z_k\}$ strebt gegen $\mathfrak{P}$, wenn zu jedem n_0 ein k_0 existiert derart, daß $z_k\in\mathfrak{A}_{n_0}$ $(k>k_0)$. Für die C_n, die $\mathfrak{P}$ definieren, kann man konzentrische Kreisbogen wählen, deren Mittelpunkt ein gewisser Punkt auf $\mathfrak{P}$ *(Hauptpunkt)* ist ([6], S. 343).

Besitzt $\mathfrak{P}=f(w_0)$ einen erreichbaren Randpunkt z_0 (und dann nur einen), so ist z_0 Hauptpunkt von $\mathfrak{P}$. In diesem Falle ist auch die Abbildungsfunktion $z=f(w)$ bei Annäherung an w_0 „stetig im Winkelraum", d.h. es ist $\lim_{w\to w_0} f(w)=z_0$ bei Annäherung im Winkelraum.

Nun sei $\{\mathfrak{G}_n\}$ eine Folge einfach zusammenhängender endlicher Gebiete der z-Ebene, die alle $z=0$ im Innern enthalten. Gibt es keine Kreisscheibe um $z=0$, die allen $\mathfrak{G}_n$ angehört, so heißt $z=0$ der *Kern* $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}(\mathfrak{G}_n)$ der Gebietsfolge. Andernfalls wird das größte, $z=0$ enthaltende Gebiet $\mathfrak{K}=\mathfrak{K}(\mathfrak{G}_n)$ mit der Eigenschaft, daß jeder abgeschlossene Teil von $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{G}_n$ liegt für $n>n_0$, als *Kern* der Gebietsfolge bezeichnet. Die Folge $\{\mathfrak{G}_n\}$ heißt *konvergent gegen* $\mathfrak{K}$, wenn jede Teilfolge von $\{\mathfrak{G}_n\}$ den Kern $\mathfrak{K}$ hat; wir schreiben dann $\mathfrak{G}_n\to\mathfrak{K}$. Die ausgearteten Fälle, daß $\mathfrak{K}$ aus der ganzen Ebene besteht oder identisch ist mit $z=0$, sind im folgenden ohne Bedeutung.

§2. Funktionentheoretische Hilfssätze

Beim Beweis unserer Sätze über das Verhalten von Abbildungsfunktionen $f_n(z)$ sind vor allem drei Hilfssätze über das Randverhalten einer festen konformen Abbildung von Bedeutung.

Hilfssatz 1 (WOLFF). *Der Kreis $|z|<1$ sei durch $w=f(z)$ konform auf das einfach zusammenhängende Gebiet $\mathfrak{G}$ endlicher Fläche A abgebildet. Der in $|z|<1$ liegende Teil von $|z-z_0|=r$ sei mit $k(r)$ bezeichnet ($|z_0|=1$; $0<r<1$), und $L(r)\leqq\infty$ sei die Länge des Bildes von $k(r)$ bei der Abbildung durch $w=f(z)$.*

(i) *Dann ist $L(r)<\infty$ f.ü. in $0<r<1$, und es ist im* LEBESGUE*schen Sinne*

$$\int_a^b \frac{L^2(r)}{r}\,dr\leqq\pi A \qquad (0\leqq a<b\leqq 1).$$

(ii) *Daraus folgt, daß es zu jedem r ein ϱ mit $r<\varrho<\sqrt{r}$ gibt derart, daß das Bild von $k(\varrho)$ ein Querschnitt in $\mathfrak{G}$ der Länge $L(\varrho)\leqq\left(\frac{2\pi A}{\log 1/r}\right)^{\frac{1}{2}}$ ist.*

Eine entsprechende Aussage für die Umkehrfunktion liefert der folgende

Hilfssatz 2 (FERRAND). *Es sei $\mathfrak{G}$ ein beliebiges, endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet, z_0 ein endlicher Randpunkt von $\mathfrak{G}$, und $D\leqq\infty$ der Durchmesser von $\mathfrak{G}$. Der Durchschnitt von $|z-z_0|=r\left(r<\frac{D}{2}\right)$ mit $\mathfrak{G}$ ist eine höchstens abzählbare Menge von Kreisbogen $k_i(r)$, deren Bilder bei der konformen Abbildung $w=f(z)$ von $\mathfrak{G}$ auf $|w|<1$ die Längen $l_i(r)\leqq\infty$ haben mögen, und es sei $L(r)=\sum_i l_i(r)$ gesetzt.*

(i) *Dann ist $L(r)<\infty$ f.ü. in $0<r<\frac{D}{2}$, und es ist im* LEBESGUE*schen Sinne*

$$\int_a^b \frac{L^2(r)}{r}\,dr\leqq 2\pi^2 \qquad \left(0\leqq a<b\leqq\frac{D}{2}\right).$$

(ii) *Daraus folgt, daß es zu jedem $r<\min\left(1,\frac{D^2}{4}\right)$ ein ϱ mit $r<\varrho<\sqrt{r}$ gibt derart, daß $L(\varrho)\leqq\frac{2\pi}{(\log 1/r)^{\frac{1}{2}}}$ ist.*

Wir benötigen eine Erweiterung von Hilfssatz 1, da wir es gelegentlich mit Gebieten zu tun haben, deren Fläche $A=\infty$ ist.

Hilfssatz 3. *Der Kreis $|z|<1$ sei durch $w=f(z)$ konform auf das einfach zusammenhängende, endliche Gebiet $\mathfrak{G}$ abgebildet. Für eine gewisse Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $|z|<1$ sei das Bild von $\mathfrak{M}$ in der w-Ebene vom endlichen inneren Flächenmaß A. Die höchstens abzählbar vielen Teile von $k(r)$ (Hilfssatz 1), deren Punkte innere Punkte von $\mathfrak{M}$ sind, seien mit $k_i(r)$ bezeichnet, und deren Bilder bei der Abbildung durch $w=f(z)$ mögen eine Länge $l_i(r)\leqq\infty$ haben; schließlich sei noch $L(r)=\sum_i l_i(r)\leqq\infty$ gesetzt.*

(i) *Dann gilt* (i) *von Hilfssatz 1.*

(ii) *Daraus folgt, daß es zu jedem r ein ϱ mit $r<\varrho<\sqrt{r}$ gibt derart, daß $L(\varrho)\leqq\left(\frac{2\pi A}{\log 1/r}\right)^{\frac{1}{2}}$ ist.*

Man beachte, daß die Normierung von $f(z)$ in Hilfssatz 1—3 keine Rolle spielt.

Historisch ist folgendes zu bemerken. Allen drei Hilfssätzen liegt die sog. „Methode des DIRICHLETschen Integrals" zugrunde, was in diesem Zusammenhang soviel heißt wie: Abschätzung von Kurvenlängen durch Gebietsflächen mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung. Diese Methode geht auf COURANT zurück (vgl. [*10*], insbes. S. 104—105). Hilfssatz 1 stammt im wesentlichen von WOLFF ([*41*], S. 217—218), leicht schwächere Formen finden sich aber schon in WOLFF [*40*], S. 96 und TSUJI [*31*], S. 93—95; in obiger Form steht er bei WARSCHAWSKI [*36*], S. 337—338. Hilfssatz 2 wurde von FERRAND bewiesen ([*13*], S. 150—152); in GATTEGNO-OSTROWSKI ([*17*], S. 50) wird der Satz versehentlich WOLFF [*41*] zugeschrieben.

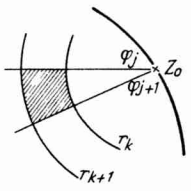

Fig. 1

Obwohl die Beweise der Hilfssätze ähnlich verlaufen, wollen wir doch in Anbetracht ihrer Wichtigkeit für unsere Entwicklungen wenigstens Hilfssatz 3 beweisen.

Beweis von Hilfssatz 3. Wir überziehen den Ring $a \leq |z-z_0| \leq b$ mit einem Polarkoordinatennetz (r, φ), dessen größte Maschenweite (Durchmesser der Maschen) ε_ν sei ($\{\varepsilon_\nu\}$ sei eine Nullfolge); das $(\nu+1)$-te Netz gehe durch Unterteilung (z.B. Halbierung) aus dem ν-ten Netz hervor. Sämtliche (endlich vielen) offenen Maschen des ν-ten Netzes, die samt Rand nur innere Punkte von $\mathfrak{M}$ enthalten, fassen wir zu einer offenen Menge $O^{(\nu)} \subset \mathfrak{M} \subset (|z| < 1)$ zusammen. Die endlich vielen Kreisbogenstücke von $|z-z_0| = r$ $(a \leq r \leq b)$, die in $\overline{O^{(\nu)}}$ liegen, seien mit $k_i(r, \varepsilon_\nu)$ bezeichnet, und es ist sofort klar, daß einerseits

$$\bigcup_i k_i(r, \varepsilon_\nu) \subset \bigcup_i k_i(r) \tag{2.1}$$

ist, andererseits aber auch

$$\lim_{\varepsilon_\nu \to 0} \bigcup_i k_i(r, \varepsilon_\nu) = \bigcup_i k_i(r).$$

Das Bild von $k_i(r, \varepsilon_\nu)$ liegt völlig in $\mathfrak{G}$ drin, sei mit $\gamma_i(r, \varepsilon_\nu)$ bezeichnet und habe eine Länge $l_i(r, \varepsilon_\nu) < \infty$, und schließlich setzen wir noch $L(r, \varepsilon_\nu) = \sum_i l_i(r, \varepsilon_\nu) < \infty$, wobei wegen der monotonen Verfeinerung unseres Netzes

(2.2) *$L(r, \varepsilon_\nu)$ bei festem r und $\varepsilon_\nu \to 0$ monoton gegen $L(r)$ wächst.*

Dann ist

$$L(r, \varepsilon_\nu) = \sum_i l_i(r, \varepsilon_\nu) = \int_{\sum_i k_i(r, \varepsilon_\nu)} |f'(z)|\,|dz| = \int |f'(z_0 + r e^{i\varphi})|\, r\, d\varphi$$

($\int$ über endlich viele φ-Intervalle erstreckt), also vermöge der SCHWARZschen Ungleichung

$$\begin{aligned} L^2(r, \varepsilon_\nu) &= \left(\int |f'(z_0 + r e^{i\varphi})| \sqrt{r}\, \sqrt{r}\, d\varphi\right)^2 \\ &\leq \int |f'(z_0 + r e^{i\varphi})|^2 r\, d\varphi \cdot \int r\, d\varphi < \int |f'(z_0 + r e^{i\varphi})|^2 r\, d\varphi \cdot r\pi. \end{aligned}$$

Integriert man diese Ungleichung über r im Intervall $r_k<r<r_{k+1}$, wo ja nach Konstruktion die φ-Intervalle sich nicht ändern, so erhält man

$$\int_{r_k}^{r_{k+1}} \frac{L^2(r,\varepsilon_\nu)}{r}\,dr < \pi\cdot\int_{r_k}^{r_{k+1}}\int |f'(z_0+re^{i\varphi})|^2\, r\,d\varphi\,dr,$$

und rechts steht die Fläche des Bildes des Teils von $O^{(\nu)}$, der in $r_k\leqq r\leqq r_{k+1}$ liegt, multipliziert mit π. Summiert man noch über die endlich vielen k-Werte auf, so kommt

$$\int_a^b \frac{L^2(r,\varepsilon_\nu)}{r}\,dr < \pi\cdot A.$$

Wegen (2.2) ist die Funktionenfolge $\left\{\frac{L^2(r,\varepsilon_\nu)}{r}\right\}$ bei festem r und $\nu\to\infty$ monoton wachsend und besitzt daher (vgl. z.B. TITCHMARSH [*30*], S. 346—347) f.ü. in $\langle a,b\rangle$ eine endliche Grenzfunktion $\frac{L^2(r)}{r}$ derart, daß

$$\int_a^b \frac{L^2(r)}{r}\,dr\leqq\pi\cdot A$$

gilt, d.h. (i) ist bewiesen. Daraus folgt nun aber sofort (ii). Wäre nämlich $L(\varrho)>\left(\frac{2\pi A}{\log 1/r}\right)^{\frac{1}{2}}$ für alle ϱ in $\langle r,\sqrt{r}\rangle$, so wäre auch

$$\int_r^{\sqrt{r}}\frac{L^2(\varrho)}{\varrho}\,d\varrho>\frac{2\pi A}{\log 1/r}\cdot\log\frac{\sqrt{r}}{r}=\pi\cdot A,$$

im Widerspruch zu (i).

§3. Topologische Hilfssätze

Um die Beweisführung in den nachfolgenden Sätzen nicht unterbrechen zu müssen, führen wir noch zwei einfache topologische Hilfssätze an.

Hilfssatz 4. *Es sei $\mathfrak{G}$ ein beschränktes, einfach zusammenhängendes Gebiet, das $|w|<m$ enthält, und dessen Rand R von endlich vielen Kreisscheiben k_i vom Radius $\delta<\frac{m}{8}$ überdeckt sei; jede Scheibe enthalte tatsächlich einen Randpunkt von $\mathfrak{G}$. In jedem k_i wähle man einen Punkt P_i und verbinde P_i mit P_j genau dann durch eine Gerade, wenn der Abstand $P_i, P_j<4\delta$ beträgt. (Insbesondere werden P_i und P_j verbunden, wenn $k_i\cap k_j\neq 0$ ist.)*

Dann gibt es einen (sich eventuell überschlagenden) geschlossenen Polygonzug π, bestehend aus Strecken P_iP_j, der 0 umfaßt; d.h. es ist unmöglich, 0 mit ∞ durch eine JORDAN-*Kurve C zu verbinden, ohne π zu treffen.*

Beweis. Sei $\mathfrak{M}=\bigcup_i k_i$ und $w=f(z)$ die normierte konforme Abbildung von $|z|<1$ auf $\mathfrak{G}$. Wir zeichnen $|z|=r<1$. Für $r>r_0$ gehört das Bild C_r von $|z|=r$ völlig zu $\mathfrak{M}$. Andernfalls gäbe es eine Folge von Punkten $p_i\in\mathfrak{G}$

mit $p_i \to R$ und $p_i \notin \mathfrak{M}$; dies geht nicht, da $\mathfrak{M}$ den Rand von $\mathfrak{G}$ ganz überdeckt und $\mathfrak{M}$ offen ist. Eine solche Kurve C_r halten wir fest; sie ist einfach geschlossen, analytisch, und enthält $w=0$ im Innern. Statt der Kreise k_i zeichnen wir nun Kreise k_i' mit Radien 5δ um dieselben Mittelpunkte und bilden $\mathfrak{M}' = \bigcup_i k_i'$. $\mathfrak{M}'$ enthält 0 nicht: Wäre $0 \in k_j'$, d.h. der Abstand des Mittelpunkts von k_j von $w=0$ kleiner als 5δ, so gäbe es einen Randpunkt von $\mathfrak{G}$ mit Abstand $<5\delta+\delta$ von $w=0$; Widerspruch. Also trennt $\mathfrak{M}'$ den Punkt $w=0$ von $w=\infty$: Jede von $w=0$ nach $w=\infty$ laufende JORDAN-Kurve trifft nämlich R und also $\mathfrak{M}'$. Wir bemerken noch: Jede Polygonseite liegt ganz in $\mathfrak{M}'$; denn sie ist höchstens 4δ lang und ist P_i der eine Endpunkt, so enthält k_i' die Seite P_iP_j.

Nun durchlaufen wir C_r in $\mathfrak{M}$ und markieren eine gewisse Kreisfolge. Von k_i komme man längs C_r in den neuen Kreis k_{i+1} (eventuell kommt man in mehrere, man greife dann einen heraus), was die Folge $k_1, k_2, \ldots, k_m, k_1$ ergebe, in der derselbe Kreis auch mehrfach auftreten kann. Da $k_i \cap k_{i+1} \neq 0$ ist, sind P_i und P_{i+1} verbunden, und $P_1, P_2, \ldots, P_m, P_1$ ist ein geschlossener Polygonzug π in $\mathfrak{M}'$. π und C_r sind in $\mathfrak{M}'$ homolog: Eine Strecke P_i, P_{i+1} läßt sich nämlich offenbar stetig auf ein Stück P_i', P_{i+1}' von C_r deformieren, ohne daß man $\mathfrak{M}'$ verläßt. Also umfaßt wie C_r auch π den Punkt $w=0$.

Wir verwenden Hilfssatz 4 beim Beweis des

Hilfssatz 5. *Es sei $\mathfrak{G}$ ein beliebiges, einfach zusammenhängendes Gebiet mit $O \in \mathfrak{G}$, das in $|w|<M$ liege. Die (nicht notwendig beschränkten oder endlichen) Gebiete $\mathfrak{G}_n$ mit $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}$ haben Punkte in $|w| \geqq 2M$. Dann gibt es zu $\varepsilon>0$ ein $n_0 = n_0(\varepsilon)$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem Punkt $Q_n \in \mathfrak{G}_n$ $(n \geqq n_0)$ in $|w| \geqq 2M$ gibt es einen in der ε-Umgebung des Randes R von $\mathfrak{G}$ verlaufenden geradlinigen Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ der Länge $<\varepsilon$, der Q_n von $w=0$ abschneidet.*

Beweis. Wenn $|w|<m$ zu $\mathfrak{G}$ gehört, wählen wir ein positives δ mit $\delta < \min\left(\frac{\varepsilon}{5}, \frac{M}{4}, \frac{m}{8}\right)$ und überdecken den Rand R von $\mathfrak{G}$ durch eine endliche Zahl von Kreisen k_i mit Radien δ und Mittelpunkten auf R. Für ein n_0 liegen nun in jedem Kreis k_i Randpunkte von $\mathfrak{G}_n$ $(n>n_0)$. Andernfalls gäbe es einen k_j derart, daß die Gebiete $\mathfrak{G}_{n_1}, \mathfrak{G}_{n_2}, \ldots, \mathfrak{G}_{n_k}, \ldots$ keine Randpunkte in k_j haben, d.h. der Kern der Teilfolge $\{\mathfrak{G}_{n_k}\}$ enthält entweder keinen Punkt von k_j oder ganz k_j, im Widerspruch zu $\mathfrak{G}_{n_k} \to \mathfrak{G}$. Wir fassen also ein festes $n>n_0$ ins Auge und markieren in jedem k_i einen Randpunkt P_i von $\mathfrak{G}_n$. Punkte P_i, P_j mit Abstand $<4\delta$ verbinden wir geradlinig und greifen dann aus der Menge der gezeichneten Strecken einen (sich eventuell überschlagenden) Polygonzug π heraus, der $w=0$ umfaßt; dies ist nach Hilfssatz 4 möglich.

Da nun $\mathfrak{G}_n$ einen Punkt Q_n $(r_n e^{i\varphi_n})$ in $|w| \geqq 2M$ hat, verbinden wir $w=0$ mit Q_n durch einen Polygonzug $\mathfrak{P}_n$, der völlig in $\mathfrak{G}_n$ liegt. Dieser $\mathfrak{P}_n$ trifft π sicher; andernfalls wäre nämlich $\mathfrak{P}_n$, zusammen mit dem Halbstrahl $\arg w = \varphi_n$ $(|w| \geqq r_n)$, eine Verbindungskurve von $w=0$ nach $w=\infty$, die π nicht trifft, was unmöglich ist.

Wir betrachten nun $\mathfrak{P}_n$ näher. Sei A_1 der erste Schnittpunkt von $\mathfrak{P}_n$ mit π, von $w=0$ aus gesehen. Aus $A_1 \in \mathfrak{P}_n$ folgt $A_1 \in \mathfrak{G}_n$, und man bezeichne mit A_1', A_1'' die beiden ersten Randpunkte von $\mathfrak{G}_n$, die man erhält, wenn man von A_1 auf π nach beiden Seiten fortschreitet; spätestens sind die Endpunkte der Polygonseite, auf der A_1 liegt, Randpunkte von $\mathfrak{G}_n$, da dieselben nach Konstruktion gewisse Punkte P_i, P_j sind. Sei B_1 der letzte Schnittpunkt von $\mathfrak{P}_n$ mit A_1', A_1''. Verläßt $\mathfrak{P}_n$ die Strecke A_1', A_1'' auf derselben Seite, wie $\mathfrak{P}_n$ diese Strecke betreten hat, so ziehen wir eine kleine Strecke parallel A_1', A_1'' derart, daß der durch Zwischenschalten dieser Strecke abgeänderte Polygonzug $\mathfrak{P}_n^{(1)}$ die Strecke A_1', A_1'' nicht mehr trifft. Sei A_2 der erste Schnittpunkt von $\mathfrak{P}_n^{(1)}$ mit π; er existiert, da ja $\mathfrak{P}_n^{(1)}$ ebenso wie $\mathfrak{P}_n$ die Punkte $w=0$ und Q_n verbindet. Liegen die Verhältnisse wie bei A_1, so verfahren wir entsprechend. Kommen nur Fälle dieser Art vor, so haben wir nach endlich vielen Schritten ($\mathfrak{P}_n$ und π haben nur endlich viele Schnittpunkte) $\mathfrak{P}_n$ so abgeändert, daß er überhaupt keine Seite von π schneidet; dies ist unmöglich, wie wir sahen.

Also tritt an einer Stelle eine Strecke R_1, R_2 auf von der Länge $<4\delta$, die einen Querschnitt in $\mathfrak{G}_n$ bildet und die überdies so beschaffen ist, daß das erste Betreten und das letzte Verlassen dieser Strecke durch $\mathfrak{P}_n^{(k)}$ (aus $\mathfrak{P}_n$ entstandener Polygonzug in $\mathfrak{G}_n$, der $w=0$ mit Q_n verbindet) auf verschiedenen Seiten geschieht.

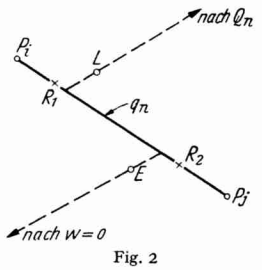

Fig. 2

Insgesamt merken wir an: R_1, R_2 ist ein geradliniger Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ der Länge $<4\delta<\varepsilon$, und da z.B. P_i in der δ-Umgebung eines Randpunkts von $\mathfrak{G}$ liegt, liegt R_1, R_2 in der $(5\delta<\varepsilon)$-Umgebung des Randes R von $\mathfrak{G}$. Außerdem trennt q_n den Punkt Q_n von $w=0$ ab: Offenbar läßt sich nämlich wohl E mit $w=0$ in $\mathfrak{G}_n$ verbinden, ohne daß man q_n trifft, nicht aber L, d.h. L liegt in dem durch q_n erzeugten Abschnitt von $\mathfrak{G}_n$; Q_n kann man aber mit L in $\mathfrak{G}_n$ verbinden ohne q_n zu treffen, also liegt Q_n auch in diesem genannten Abschnitt. Damit ist Hilfssatz 5 bewiesen.

Teil II

Verhalten der Funktionen, die $|z|<1$ auf $\mathfrak{G}_n$ abbilden

Nach unseren Vorbereitungen kommen wir nunmehr zum eigentlichen Thema der Arbeit. Vorgegeben sind in der w-Ebene einfach zusammenhängende und endliche Gebiete $\mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$, die alle $w=0$ enthalten mögen, und die durch die Funktionen $w=f_0(z)$, $w=f_n(z)$ konform und normiert auf $|z|<1$ abgebildet seien; dabei heißt z.B. $f_0(z)$ normiert, wenn $f_0(0)=0$, $f_0'(0)>0$ ist.

Wir stellen die Frage, unter welchen topologischen Bedingungen für die $\mathfrak{G}_n$ die Funktion $f_0(z)$ in $|z|<1$ durch $f_n(z)$ approximiert wird. Approximation

in welchem Sinne? Wann $f_n(z)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $|z|<1$ gleichmäßig gegen $f_0(z)$ strebt, ist durch den in der Einleitung genannten Satz A völlig entschieden. Hier wollen wir dagegen möglichst weitgehende Bedingungen dafür angeben, daß $f_n(z)$ gleichmäßig in $|z|<1$ gegen $f_0(z)$ strebt; wir schreiben absichtlich nicht „$|z|\leq 1$", damit auch solche Abbildungsfunktionen $f_n(z)$ zugelassen sind, die in $|z|\leq 1$ nicht stetig sind.

§4. Ein allgemeiner Konvergenzsatz

Die eben aufgeworfene Frage wird in abschließender Weise erledigt, falls von $f_0(z)$ die Stetigkeit in $|z|\leq 1$ angenommen werden kann. Äquivalent hierzu wäre bekanntlich, daß $\mathfrak{G}_0$ beschränkt ist und nur erreichbare Randpunkte besitzt, wovon die erste Bedingung keine wesentliche Einschränkung bedeutet, während die zweite weiter unten noch untersucht werden wird.

Zur einfachen Formulierung unseres Ergebnisses benützen wir ein Maß für die Glattheit des Randes R_n von $\mathfrak{G}_n$, das von WARSCHAWSKI [36] eingeführt wurde. Für jedes $\delta>0$ betrachten wir sämtliche Querschnitte q in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\lambda_q\leq\delta$, die Abschnitte vom Durchmesser Λ_q erzeugen mögen. Die obere Grenze all dieser Λ_q ist unser Glattheitsmaß; in Formeln

$$\eta_n(\delta)=\left(\overline{\operatorname{fin}}_{\lambda_q\leq\delta}\,\Lambda_q\right)^{(n)}.$$

Zur Erläuterung dieser Funktion $\eta_n(\delta)$ beweisen wir folgenden einfachen

Satz 1. *Ist $\mathfrak{G}_n$ beschränkt, so strebt (bei festem n) genau dann $\eta_n(\delta)\to 0$ $(\delta\to 0)$, wenn $w=f_n(z)$ in $|z|\leq 1$ stetig ist, d.h. wenn $\mathfrak{G}_n$ nur erreichbare Randpunkte besitzt.*

Demnach gilt also für jedes JORDAN-Gebiet die Aussage $\eta_n(\delta)\to 0$ $(\delta\to 0)$, ebenso wie z.B. für einen längs eines Radius aufgeschlitzten Kreis.

Beweis. Ist zunächst $f_n(z)$ nicht stetig in $|z|\leq 1$, dann gibt es $z_k'\to z_0$, $z_k''\to z_0$ $(k=1,2,\ldots;\ |z_0|=1)$ so, daß $f_n(z_k')\to w_1$ und $f_n(z_k'')\to w_2$ strebt für $k\to\infty$ $(w_1\neq w_2)$. Nach Hilfssatz 1 können wir um z_0 einen Bogen $k(\varrho)$ des Kreises $|z-z_0|=\varrho$ schlagen, dessen Bild $\gamma(\varrho)$ einen beliebig kleinen Durchmesser hat, falls das r in $r<\varrho<\sqrt{r}$ hinreichend klein ist, und wegen $\eta_n(\delta)\to 0$ $(\delta\to 0)$ ist auch der durch $\gamma(\varrho)$ erzeugte Abschnitt von beliebig kleinem Durchmesser bei genügend kleinem r. In diesem Abschnitt müssen aber wegen $z_k'\to z_0$, $z_k''\to z_0$ die Punkte $f_n(z_k')$ und $f_n(z_k'')$ liegen $(k>k_0)$, so daß $w_1\neq w_2$ nicht möglich ist.

Sei nun umgekehrt $f_n(z)$ stetig in $|z|\leq 1$, und es existiere eine Folge von Punktepaaren w_k', w_k'' aus $\mathfrak{G}_n$ mit $|w_k'-w_k''|\geq\alpha>0$, die durch Querschnitte q_k in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\delta_k\to 0$ von $w=0$ abgeschnitten seien. Die Anwendung von Hilfssatz 2 ergibt sofort, daß die Urbilder q_k' von q_k in der z-Ebene Durchmesser $\delta_k'\to 0$ aufweisen. Die Punkte $z_k'=f_n^{-1}(w_k')$ und $z_k''=f_n^{-1}(w_k'')$ liegen aber in dem zu q_k' gehörigen Abschnitt drin, so daß wegen der Stetigkeit von $f_n(z)$ in $|z|\leq 1$ sicher $f_n(z_k')-f_n(z_k'')\to 0$ streben müßte $(k\to\infty)$, im Widerspruch zur Annahme.

Wir kommen nun zu unserem angekündigten

Satz 2 *(Allgemeiner Konvergenzsatz). Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete* $\mathfrak{G}_0$ *und* $\mathfrak{G}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ *der w-Ebene mit* $O \in \mathfrak{G}_0$, $O \in \mathfrak{G}_n$ *seien vermöge* $w=f_0(z)$, $w=f_n(z)$ *konform und normiert auf* $|z|<1$ *abgebildet;* $\mathfrak{G}_0$ *sei beschränkt und besitze nur erreichbare Randpunkte.*

Dann sind die Bedingungen

$$\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0 \qquad (n \to \infty), \tag{4.1}$$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, \eta_n(\delta) = \bar{\eta}(\delta) \to 0 \qquad (\delta \to 0) \tag{4.2}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge $\{f_n(z)\}$ *gleichmäßig in* $|z|<1$ *gegen* $f_0(z)$ *strebt*[5]).

Vorbemerkungen. a) Die Bedingung (4.2) läßt sich umschreiben auf

$$\lim_{n\to\infty,\ \delta\to 0} \eta_n(\delta) = 0; \tag{4.2'}$$

man hat dabei lediglich zu beachten, daß $\eta_n(\delta)$ bei festem n eine mit δ monoton fallende Funktion ist.

b) Anschaulich besagt somit (4.2) folgendes: Es ist unmöglich, daß für beliebig kleine δ und beliebig große n δ-Abschnitte von $\mathfrak{G}_n$ auftreten, deren Durchmesser $\geqq \alpha > 0$ bleibt.

c) Unser Satz 2 verbessert ein Resultat von Warschawski ([*36*], S. 347 und Fußnote) einerseits dadurch, daß bei uns hinreichende und notwendige Bedingungen angegeben werden, und andererseits kann auf die dortigen Forderungen $D_i(R_n, R_0) \to 0$ $(n \to \infty)$ („innere Distanz") und $A_n \leqq A$ ($A_n =$ Fläche von $\mathfrak{G}_n$) verzichtet werden. Man beachte, daß bei Warschawski wegen $\eta_0(\delta) \to 0$ $(\delta \to 0)$ auch nur solche $\mathfrak{G}_0$ mit lauter erreichbaren Randpunkten betrachtet werden (Satz 1).

Dem Beweis von Satz 2 schicken wir einen Hilfssatz voraus.

Hilfssatz 6. *Gelten für die Gebiete* $\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_n$ *von Satz 2 die Bedingungen* (4.1) *und* (4.2), *so gibt es keinen Häufungspunkt* P_0 *von Punkten* $P_n \in \mathfrak{G}_n$, *der außerhalb* $\overline{\mathfrak{G}}_0$ *liegt*[6]).

Beweis. (i) Liegt $\mathfrak{G}_0$ völlig in $|w| \leqq M$, so zeigen wir zunächst, daß $\mathfrak{G}_n$ schließlich (d.h. für $n > n_0$) in $|w| \leqq 2M$ gelegen ist. Andernfalls könnte man für beliebig hohe Indizes n Punkte $Q_n \in \mathfrak{G}_n$ in $|w| > 2M$ finden, die vermöge Hilfssatz 5 durch Querschnitte q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\varepsilon_n \to 0$ von

[5]) An dieser Stelle wollen wir auf einen wichtigen Zusammenhang zwischen unserer Bedingung (4.2') für eine Folge von Jordan-Gebieten und der Unbewalltheit des Randes R eines festen Jordan-Gebiets $\mathfrak{G}$ an einer Stelle $w_0 \in R$ ([*35*] und [*27*]) hinweisen. Unterwirft man nämlich ein $\mathfrak{G}$, das der letzteren Forderung genügt, einer Folge von einfachen linearen Transformationen, die w_0 festhalten und $\mathfrak{G}_n$ als Bild von $\mathfrak{G}$ erzeugen mögen, so zeigt sich, daß diese Gebiete $\mathfrak{G}_n$ gerade die Bedingungen (4.1) und (4.2') erfüllen. Dadurch ist vermöge der Theorie der variablen Gebiete die Möglichkeit gegeben, das Verhalten einer festen Abbildungsfunktion durch Betrachtung einer Funktionenfolge zu untersuchen. Vgl. auch die Einleitung zu [*33*] und die dort zitierte Literatur.

[6]) Die Umkehrung ist offensichtlich falsch (Fig. 12).

$w=0$ abgeschnitten würden, und zwar verlaufen diese q_n in der ε_n-Umgebung des Randes von $\mathfrak{G}_0$, also sicher in $|w| \leqq M+\varepsilon_n$, so daß die Abschnitte einen Durchmesser $> M-\varepsilon_n$ haben müssen. Die Bedingung (4.2') und damit (4.2) kann daher nicht erfüllt sein.

(ii) Sei nun P_0 ein Häufungspunkt von Punkten $P_n \in \mathfrak{G}_n$, der außerhalb $\overline{\mathfrak{G}}_0$ liegt. Durch eine lineare Abbildung $w'=l(w)$ werfen wir unter Festhaltung von $w=0$ den P_0 nach $w'=\infty$, wobei $\mathfrak{G}_0$ in ein beschränktes (in $|w'| \leqq M'$ gelegenes) Gebiet $\mathfrak{G}_0'$ übergeht, und entsprechend $\mathfrak{G}_n$ in $\mathfrak{G}_n'$. Die Voraussetzung (4.1) besagt nunmehr $\mathfrak{G}_n' \to \mathfrak{G}_0'$. Nach Annahme gibt es Punkte $P_n' \in \mathfrak{G}_n'$ mit $P_n' \to \infty$, die wieder nach Hilfssatz 5 durch Querschnitte q_n' in $\mathfrak{G}_n'$ vom Durchmesser $\varepsilon_n' \to 0$ von $w=0$ abgetrennt werden können, und zwar verlaufen die q_n' in $|w'| \leqq M'+\varepsilon_n'$. In der w-Ebene bedeutet dies: Es gibt Querschnitte q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\varepsilon_n \to 0$, die in $|w-P_0| \geqq a > 0$ verlaufen, und die Punkte P_n von $w=0$ abtrennen, die in beliebiger Nähe von P_0 liegen. Dies ist im Widerspruch zur Voraussetzung (4.2).

Beweis von Satz 2. (i) Die Voraussetzungen (4.1) und (4.2) seien erfüllt, weshalb die $\mathfrak{G}_n$ schließlich gleichmäßig beschränkt sind (Hilfssatz 6); ihr Flächeninhalt sei $\leqq A$ $(n > n_0)$. Wir nehmen an, es existiere eine Folge n_k mit

$$|f_{n_k}(z_{n_k}) - f_0(z_{n_k})| \geqq \alpha > 0 \qquad (0 < \alpha < 1),$$

wobei wegen Satz A im Falle $z_{n_k} \to z_0$ sicher $|z_0| = 1$ ist. Nun wählen wir $\delta > 0$ so, daß $\eta_n(\delta) < \frac{\alpha}{2}$ ist für $n > \bar{n}$, und bestimmen danach ein r derart, daß

$$(\alpha) \quad \left(\frac{2\pi A}{\log 1/r}\right)^{\frac{1}{2}} < \delta \qquad \text{und} \qquad (\beta) \quad |f_0(z_1) - f_0(z_2)| < \frac{\alpha}{6}$$

ist ($|z_{1,2} - z_0| < r$, $|z_{1,2}| < 1$); für (β) verwenden wir die Stetigkeit von $f_0(z)$ in $|z| \leqq 1$. Für unser r zeichnen wir unser $k(r)$ ein und wählen ein festes z^* im entsprechenden Abschnitt. Für dieses z^* merken wir an

$$|f_{n_k}(z^*) - f_0(z^*)| < \frac{\alpha}{3}$$

für genügend großen Index n_k.

Nun betrachten wir solche z_{n_k} unserer Folge, die in $|z-z_0| < r$ liegen. Für sie gilt einerseits

$$\begin{aligned} |f_{n_k}(z_{n_k}) - f_{n_k}(z^*)| &= |f_{n_k}(z_{n_k}) - f_0(z_{n_k}) + f_0(z_{n_k}) - f_0(z^*) + f_0(z^*) - f_{n_k}(z^*)| \\ &\geqq \alpha - \frac{\alpha}{6} - \frac{\alpha}{3} = \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Andererseits gibt es (Hilfssatz 1) ein $\varrho = \varrho_{n_k}$ mit $r < \varrho < \sqrt{r}$ so, daß das Bild von $k(\varrho_{n_k})$ ein Querschnitt in $\mathfrak{G}_{n_k}$ vom Durchmesser $< \left(\frac{2\pi A_{n_k}}{\log 1/r}\right)^{\frac{1}{2}} < \delta$ ist. Der zugehörige Abschnitt von $\mathfrak{G}_{n_k}$ enthält $f_{n_k}(z_{n_k})$ und $f_{n_k}(z^*)$, hat also sicher einen Durchmesser $\geqq \frac{\alpha}{2}$, d.h. es wäre $\eta_{n_k}(\delta) \geqq \alpha/2$ für beliebig große n_k, im Widerspruch zur Annahme (4.2).

(ii) Gilt $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z|<1$), so ist zunächst (4.1) erfüllt (Satz A). Gäbe es Folgen $\delta_k \to 0$ und $n_k \to \infty$ ($k \to \infty$) mit $\eta_{n_k}(\delta_k) > \alpha > 0$, so wählen wir erstens $\varepsilon > 0$ so, daß $|f_0(z_1) - f_0(z_2)| < \frac{\alpha}{2}$ wird für $|z_1 - z_2| < \varepsilon$, $|z_{1,2}| < 1$, und zweitens einen Index $\bar{n}$ und eine Zahl $\varkappa > 0$ so, daß $|f_n(z) - f_0(z)| < \frac{\alpha}{4}$ ($|z|<1$) ist ($n > \bar{n}$) und derart, daß jeder Querschnitt in $\mathfrak{G}_n$ ($n > \bar{n}$) vom Durchmesser $< \varkappa$ ein Urbild in der z-Ebene vom Durchmesser $< \varepsilon$ hat (Hilfssatz 2; man beachte, daß wegen der schon erwiesenen Gültigkeit von (4.1) das D in Hilfssatz 2 oberhalb einer festen positiven Konstanten liegt). In dem zu obigem δ_k gehörigen Abschnitt von $\mathfrak{G}_{n_k}$ mögen die Punkte w_k', w_k'' liegen ($|w_k' - w_k''| \geqq \alpha > 0$), und für deren Urbilder z_k', z_k'' gilt nun, sobald $\delta_k < \varkappa$ und $n_k > \bar{n}$ ist,

$$|f_{n_k}(z_k') - f_{n_k}(z_k'')| = |f_{n_k}(z_k') - f_0(z_k') + f_0(z_k') - f_0(z_k'') + f_0(z_k'') - f_{n_k}(z_k'')|$$
$$< \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} = \alpha,$$

entgegen der Annahme $|w_k' - w_k''| \geqq \alpha$. Damit ist Satz 2 bewiesen.

§5. Eine andere Form des Konvergenzsatzes

Ein Blick auf (4.1) und (4.2), sowie auf den Beweis von Satz 2 zeigt, daß unsere Bedingungen, unter denen $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z|<1$, $n \to \infty$) gilt, zerlegt sind in eine erste [nämlich (4.1)], die $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leqq r < 1$, $n \to \infty$) garantiert, und eine zweite [nämlich (4.2)], die das „Anhängen" von $f_n(z)$ für die übrigen Werte von z gestattet. Wir wollen in diesem Paragraphen die beiden Bedingungen zu einer einzigen kombinieren, die verlangt, daß *der in einem gewissen Sinne genommene Abstand der Ränder R_n von $\mathfrak{G}_n$ vom Rand R_0 von $\mathfrak{G}_0$ mit $n \to \infty$ gegen Null strebt.* Praktisch wird diese Bedingung weniger handlich sein als (4.1) und (4.2), jedoch lassen sich daran anschließend Überlegungen anstellen für den seither ausgeschlossenen Fall, daß $\mathfrak{G}_0$ nicht erreichbare Randpunkte besitzt.

a) Eine Metrik für Primenden. Das Gebiet $\mathfrak{G}$ sei beschränkt und einfach zusammenhängend und enthalte $w = 0$. Wir betrachten zwei Primenden $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von $\mathfrak{G}$. Dann gibt es Querschnitte q in $\mathfrak{G}$, die gleichzeitig $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von $w = 0$ trennen; ihr Durchmesser sei λ_q. Als Entfernung der beiden Primenden bezeichnen wir nun die Zahl

$$D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) = \underset{q}{\operatorname{fin}}\, \lambda_q.$$

Insbesondere liegt $\mathfrak{P}_2$ in der ε-Umgebung von $\mathfrak{P}_1$, wenn es einen ε-Querschnitt in $\mathfrak{G}$ gibt, der $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ von $w = 0$ trennt.

Durch die Entfernungsfunktion D ist eine *Metrik im Raume der Primenden von* $\mathfrak{G}$ erklärt. Von den drei Bedingungen

(i) $D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) \geqq 0$ und $= 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{P}_1 = \mathfrak{P}_2$,

(ii) $D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) = D(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_1)$,

(iii) $D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_3) \leqq D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) + D(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3)$,

sind nämlich die beiden ersten offenbar erfüllt. Um (iii) zu prüfen, zeichnen wir Querschnitte q_1 und q_2 in $\mathfrak{G}$ vom Durchmesser $< D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) + \varepsilon$ bzw. $< D(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3) + \varepsilon$, die $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ bzw. $\mathfrak{P}_2$, $\mathfrak{P}_3$ von $w = 0$ trennen; die entsprechenden Abschnitte seien g_1, g_2. Ist $g_1 \subset g_2$ oder $g_2 \subset g_1$, so trennt q_2 bzw. q_1 die Primenden $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_3$ von $w = 0$ ab und (iii) ist erfüllt. Andernfalls schneiden sich die Ränder von g_1 und g_2, da ja wegen $\mathfrak{P}_2 \in \bar{g}_1$, $\mathfrak{P}_2 \in \bar{g}_2$ sicher $g_1 \cap g_2 \neq 0$ ist. Das bedeutet, daß sich q_1, q_2 schneiden, und also trennt eine geeignete Zusammensetzung q von zwei Stücken von q_1 und q_2 die Primenden $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_3$ von $w = 0$ ab; q hat aber einen Durchmesser $< D(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2) + D(\mathfrak{P}_2, \mathfrak{P}_3) + 2\varepsilon$.

Ist $\mathfrak{G}$ ein JORDAN-Gebiet, so stimmt die durch die obige Metrik definierte Topologie überein mit der gewöhnlichen Topologie, in welcher der Abstand zweier Randpunkte w_1, w_2 von $\mathfrak{G}$ erklärt ist durch $|w_1 - w_2|$ [7]). Ist nämlich $w = f(z)$ die in $|z| \leq 1$ stetige und umkehrbar eindeutige Abbildungsfunktion von $|z| \leq 1$ auf $\bar{\mathfrak{G}}$, so folgt aus $|w_1 - w_2| < \varepsilon$ sofort $|z_1 - z_2| < \varepsilon'(\varepsilon)$, also nach dem WOLFFschen Hilfssatz 1 $D(w_1, w_2) < \varepsilon''(\varepsilon)$, mit $\varepsilon''(\varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$; analog ist der Schluß von $D(w_1, w_2) \to 0$ auf $|w_1 - w_2| \to 0$.

Auf ähnliche Weise zeigt man: Für ein einfach zusammenhängendes und beschränktes Gebiet $\mathfrak{G}$ mit $O \in \mathfrak{G}$ ist die durch die konforme Abbildung gelieferte, sog. „natürliche" Zuordnung der Primenden von $\mathfrak{G}$ auf $|z| = 1$ umkehrbar eindeutig und stetig, d.h. topologisch, im Sinne der oben eingeführten Topologie [8]). Wir fügen noch hinzu, daß jede topologische Abbildung φ von $|z| = 1$ auf die Primenden von $\mathfrak{G}$ dadurch entsteht, daß man zuerst $|z| = 1$ einer topologischen Abbildung in sich unterwirft und dann die natürliche Abbildung N anwendet; denn es ist $\varphi = N(N^{-1}\varphi)$, wobei $N^{-1}\varphi$ den $|z| = 1$ topologisch auf sich selbst abbildet.

b) FRÉCHET-Entfernung zwischen R_n und R_0. Die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ mit $O \in \mathfrak{G}_n$ und Rändern R_n seien einfach zusammenhängend und beschränkt; ferner wollen wir von $\mathfrak{G}_0$ zunächst wieder annehmen, es besitze nur erreichbare Randpunkte. Durch $\varphi_0(t)$ sei eine topologische Abbildung der Kreislinie $|t| = 1$ auf R_0 gegeben (z.B. die „natürliche" Zuordnung); sie ist beliebig, wird aber im weiteren Verlauf festgehalten. Dagegen sei mit $\varphi_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine beliebige, variable, topologische Abbildung von $|t| = 1$ auf R_n bezeichnet, wobei die in **a)** eingeführte Topologie für die Primenden von $\mathfrak{G}_n$ benützt werde.

Für irgend solche Darstellungen φ_n von R_n definieren wir als Entfernung entsprechender Elemente $\varphi_0(t)$ (punktförmig wegen Erreichbarkeit aller Randpunkte von $\mathfrak{G}_0$) und $\varphi_n(t)$ die Zahl

$$d\left(\varphi_0(t), \varphi_n(t)\right) = \max_{w \in \varphi_n(t)} |w - \varphi_0(t)|, \tag{5.1}$$

und als von φ_n noch abhängige Entfernung zwischen R_n und R_0

$$d_n(\varphi_n) = \max_{|t|=1} d\left(\varphi_0(t), \varphi_n(t)\right). \tag{5.2}$$

[7]) Zwei in derselben Menge $\mathfrak{M}$ erklärte Topologien heißen übereinstimmend oder auch gleichwertig, wenn es für jeden Punkt $P \in \mathfrak{M}$ zu jeder Umgebung $U^{(1)}$ von P im Sinne der ersten Topologie eine Umgebung $U^{(2)}$ von P im Sinne der zweiten Topologie gibt derart, daß $U^{(2)} \subset U^{(1)}$ ist, und umgekehrt.

[8]) Vgl. dazu auch CARATHÉODORY [6], S. 351, Fußnote *).

Daß hierin (5.1) für jedes feste n und festes t existiert, ist klar, da ja jedes Primende von $\mathfrak{G}_n$ eine abgeschlossene Punktmenge ist. Bezüglich der Existenz von $d_n(\varphi_n)$ zeigen wir zunächst:

Hilfssatz 7. *Die Funktion* $\psi(t) = d\left(\varphi_0(t), \varphi_n(t)\right)$ *ist für jedes feste* $n = 1, 2, \ldots$ *eine auf* $|t| = 1$ *nach oben halbstetige Funktion*[9]; *es ist sogar* $\psi(t_0) = \overline{\lim_{t \to t_0}} \psi(t)$ *für alle* t_0 *auf* $|t| = 1$.

Beweis. (i) Für eine beliebige Folge $t_m \to t_0$ wählen wir $w_m \in \varphi_n(t_m)$ so, daß $|w_m - \varphi_0(t_m)| = d\left(\varphi_0(t_m), \varphi_n(t_m)\right)$. Ferner sei $w'_m \in \mathfrak{G}_n$ so nahe an w_m gewählt, daß sowohl $w_m - w'_m \to 0$ als auch bei der konformen Abbildung durch f_n^{-1} sicher $z_m - z'_m \to 0$ strebt $(m \to \infty, |z_m| = 1, |z'_m| < 1)$. Mit $\varphi_n(t_m) \to \varphi_n(t_0)$ im Sinne unserer Topologie strebt auch $z_m \to f_n^{-1}\varphi_n(t_0)$ und $z'_m \to f_n^{-1}\varphi_n(t_0)$, weshalb $f_n(z'_m)$ alle Häufungspunkte auf $\varphi_n(t_0)$ hat. Also ist, weil ja auch $\varphi_0(t_m) \to \varphi_0(t_0)$,

$$\psi(t_0) = d\left(\varphi_0(t_0), \varphi_n(t_0)\right) \geqq \overline{\lim_m} \left|\varphi_0(t_0) - f_n(z'_m)\right|$$

$$= \overline{\lim_m} \left|\varphi_0(t_0) - w_m\right| = \overline{\lim_m} \left|\varphi_0(t_m) - w_m\right|,$$

also gilt $\overline{\lim_m} \psi(t_m) \leqq \psi(t_0)$.

(ii) Sei $w_0 \in \varphi_n(t_0)$ so, daß $|w_0 - \varphi_0(t_0)| = d\left(\varphi_0(t_0), \varphi_n(t_0)\right)$. Da das Primende $\varphi_n(t_0)$ auch als Durchschnitt von abgeschlossenen Abschnitten definiert werden kann, deren zugehörige Querschnitte Durchmesser aufweisen die gegen Null streben, stellt man leicht fest, daß w_0 auch Häufungspunkt von Punkten $w_m \in \varphi_n(t_m)$ ist für eine gewisse Folge $t_m \to t_0$ mit $t_m \neq t_0$. Daher ist

$$\psi(t_0) = d\left(\varphi_0(t_0), \varphi_n(t_0)\right) = |w_0 - \varphi_0(t_0)| = \lim_m |w_m - \varphi_0(t_0)|$$

$$\leqq \overline{\lim_m} d\left(\varphi_0(t_0), \varphi_n(t_m)\right) = \overline{\lim_m} d\left(\varphi_0(t_m), \varphi_n(t_m)\right),$$

also gilt $\overline{\lim_m} \psi(t_m) \geqq \psi(t_0)$.

Da hiernach sicher $\psi(t_0) \geqq \overline{\lim_{t \to t_0}} \psi(t)$ ist, liegt für $\psi(t)$ Halbstetigkeit nach oben vor, was wiederum zur Folge hat, daß die Funktion $\psi(t)$ auf $|t| = 1$ ihr Maximum annimmt ([8], S. 115).

Also existiert $d_n(\varphi_n)$ für alle zugelassenen Darstellungen φ_n von R_n, und wir definieren nun als FRÉCHET-*Entfernung der Ränder* R_n, R_0 die Zahl

$$d_n \equiv d_n(R_n, R_0) = \underline{\operatorname{fin}}_{\varphi_n} d_n(\varphi_n), \tag{5.3}$$

wobei φ_n alle zugelassenen Darstellungen von R_n durchläuft. Unser Begriff erweitert damit den Begriff der FRÉCHET-Entfernung zwischen zwei JORDAN-Kurven ([15]), der schon früher in diesem Zusammenhang Verwendung gefunden hat (vgl. § 7).

[9] Das heißt es ist $\psi(t_0) \geqq \overline{\lim_{t \to t_0}} \psi(t)$; vgl. z.B. [8], S. 111. Daß $\psi(t)$ im allgemeinen keine stetige Funktion ist, sieht man an einfachen Beispielen.

c) Andere Form des Konvergenzsatzes. Unter Benutzung des in **b)** eingeführten Begriffs der FRÉCHET-Entfernung d_n zwischen R_n und R_0 können wir nun Satz 2 eine andere Form geben.

Satz 3. *Die einfach zusammenhängenden und beschränkten*[10]) *Gebiete* $\mathfrak{G}_n (n = 0, 1, \ldots)$ *(Ränder* R_n*) der w-Ebene mit* $O \in \mathfrak{G}_n$ *seien vermöge* $w = f_n(z)$ *konform und normiert auf* $|z| < 1$ *abgebildet;* $\mathfrak{G}_0$ *besitze nur erreichbare Randpunkte.*

Dann ist die Bedingung

$$d_n \equiv d_n(R_n, R_0) \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{5.4}$$

notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge $\{f_n(z)\}$ *gleichmäßig in* $|z| < 1$ *gegen* $f_0(z)$ *strebt.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß (5.4) die Bedingungen (4.1) und (4.2) nach sich zieht. Zu diesem Zweck betrachten wir für jedes $n = 1, 2, \ldots$ eine topologische Darstellung φ_n von R_n, für die $d_n(\varphi_n) < d_n + \varepsilon_n$, also $d_n(\varphi_n) \to 0$ $(n \to \infty)$ strebt.

(i) Die Bedingung (4.1) ist erfüllt. Sei $\{P_n\}$ irgendeine Folge von Punkten $P_n \in R_n$, d. h. $P_n \in \varphi_n(t_n)$, und z. B. $t_n \to t_0$ $(n \to \infty)$. Aus der Erklärung von $d_n(\varphi_n)$ und $d_n(\varphi_n) \to 0$ folgt sofort, daß $|P_n - \varphi_0(t_n)| \to 0$, also $|P_n - \varphi_0(t_0)| \to 0$ strebt für $n \to \infty$. Alle Häufungspunkte der Folge $\{P_n\}$ liegen somit auf dem Rand von $\mathfrak{G}_0$. Andererseits ist auch jeder Punkt von R_0 Häufungspunkt von Punkten $P_n \in R_n$, d. h. es gilt gewiß (4.1).

(ii) Die Bedingung (4.2) ist erfüllt. Andernfalls könnte man eine Teilfolge der n finden (weiter mit n bezeichnet) und Primenden $\mathfrak{P}_n^{(1)}$, $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ von $\mathfrak{G}_n$ mit $D(\mathfrak{P}_n^{(1)}, \mathfrak{P}_n^{(2)}) \to 0$ $(n \to \infty)$, auf denen aber andererseits Punkte $P_n^{(1)}$, $P_n^{(2)}$ liegen mit $|P_n^{(1)} - P_n^{(2)}| \geqq \alpha > 0$. Deren Parameterwerte in der Darstellung für R_n durch unser gewähltes $\varphi_n(t)$ seien $t_n^{(1)}$, $t_n^{(2)}$.

Fall 1. $t_n^{(1)} - t_n^{(2)} \to 0$. Dann ist $\varphi_0(t_n^{(1)}) - \varphi_0(t_n^{(2)}) \to 0$ und also

$$\begin{aligned} d\left(\varphi_0(t_n^{(1)}), \varphi_n(t_n^{(1)})\right) + d\left(\varphi_0(t_n^{(2)}), \varphi_n(t_n^{(2)})\right) &\geqq |[\varphi_0(t_n^{(1)}) - \varphi_0(t_n^{(2)})] - [P_n^{(1)} - P_n^{(2)}]| \\ &= |P_n^{(1)} - P_n^{(2)}| + o(1) \geqq \frac{\alpha}{2} > 0 \qquad (n > \bar{n}); \end{aligned}$$

dies ist im Widerspruch zur Annahme $d_n(\varphi_n) \to 0$ $(n \to \infty)$.

Fall 2. $t_n^{(1)} - t_n^{(2)} \geqq \beta > 0$ für eine gewisse Teilfolge, die wir wiederum mit n bezeichnen. Dann haben die Endpunkte $P_n^{(3)}$, $P_n^{(4)}$ der Querschnitte q_n, die die Primenden $\mathfrak{P}_n^{(1)}$, $\mathfrak{P}_n^{(2)}$ abschneiden, Parameterwerte $t_n^{(3)}$, $t_n^{(4)}$, für die erst recht $|t_n^{(3)} - t_n^{(4)}| \geqq \beta > 0$ gilt. Obige Abschätzung gibt daher wieder für unsere gewählten φ_n

$$\begin{aligned} &d\left(\varphi_0(t_n^{(3)}), \varphi_n(t_n^{(3)})\right) + d\left(\varphi_0(t_n^{(4)}), \varphi_n(t_n^{(4)})\right) \\ \geqq &|[\varphi_0(t_n^{(3)}) - \varphi_0(t_n^{(4)})] - [P_n^{(3)} - P_n^{(4)}]| \geqq |\varphi_0(t_n^{(3)}) - \varphi_0(t_n^{(4)})| + o(1), \end{aligned}$$

[10]) Die Beschränktheit der $\mathfrak{G}_n$ ist keine einschneidende Voraussetzung, da sie im Falle $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| < 1,\ n \to \infty)$ ja ohnehin erfüllt sein muß, sofern $\mathfrak{G}_0$ beschränkt ist.

was nicht gegen Null streben kann für $n \to \infty$, da ja $t_n^{(3)} - t_n^{(4)} \not\to 0$. Auch im Fall 2 erhalten wir also einen Widerspruch zur Annahme $d_n(\varphi_n) \to 0$; also gilt (4.2).

Umgekehrt implizieren (4.1) und (4.2) zusammen die Gültigkeit von (5.4). Liegt nämlich für die Darstellung von R_0 die natürliche Abbildung N_0 von $|t| = 1$ zugrunde, so wähle man $\varphi_n(t)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ ebenfalls als natürliche Abbildung von $|t| = 1$ auf R_n, und man hat infolge $|f_n(z) - f_0(z)| \leq \varepsilon_n$ $(|z| < 1)$ auch sofort $d_n(\varphi_n) \leq \varepsilon_n$, also erst recht $d_n \equiv d_n(R_n, R_0) \to 0$ $(n \to \infty)$. Wenn aber von einer beliebigen topologischen Darstellung $\psi(t)$ von R_0 ausgegangen war, $\psi = N_0(N_0^{-1}\psi)$, so wähle man einfach für die Darstellung von R_n die Abbildung $\varphi_n = N_n(N_0^{-1}\psi)$, und genau so wie oben sieht man ein, daß auch in diesem Falle $d_n(\varphi_n) \to 0$ strebt für $n \to \infty$.

§6. Untersuchungen für den Fall, daß $\mathfrak{G}_0$ nicht erreichbare Randpunkte besitzt

Wir wollen nun einige Überlegungen anstellen, deren Ziel es ist, auch in dem seither ausgeschlossenen Fall der Existenz nicht erreichbarer Randpunkte von $\mathfrak{G}_0$ gewisse Aussagen zu machen; zu abschließenden Ergebnissen werden wir allerdings hier nicht gelangen.

Man wird zunächst versuchen, auch in diesem allgemeineren Falle eine FRÉCHET-Entfernung $d_n(R_n, R_0)$ zu erklären, wozu man lediglich (5.1) abändern wird zu

$$d(\varphi_0(t), \varphi_n(t)) = \max_{w_1 \in \varphi_0(t);\, w_2 \in \varphi_n(t)} |w_1 - w_2|; \tag{5.1'}$$

$d_n(\varphi_n)$ und $d_n(R_n, R_0)$ können wie oben erklärt werden. Indessen kann beim Vorliegen nicht punktförmiger Primenden von $\mathfrak{G}_0$ der Ausdruck (5.1') und daher $d_n(R_n, R_0)$ nie beliebig klein werden, obwohl $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| < 1, n \to \infty)$ wohl möglich ist.

Auch dann, wenn (5.1) nicht durch (5.1'), sondern durch

$$d(\varphi_0(t), \varphi_n(t)) = \min_{w_1 \in \varphi_0(t);\, w_2 \in \varphi_n(t)} |w_1 - w_2| \tag{5.1''}$$

ersetzt wird [also durch den Abstand der Punktmengen $\varphi_0(t)$, $\varphi_n(t)$], ergibt sich keine zweckmäßige FRÉCHET-Distanz. Diese kann nämlich, sogar für ein JORDAN-Gebiet $\mathfrak{G}_0$, gegen Null streben, ohne $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ zu implizieren. Ein Beispiel dafür kann man mit Hilfe einer Konstruktion von CARATHÉODORY ([6], S. 366) herleiten.

Drittens stellen wir fest:

Satz 4. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3 ist* (5.4) *äquivalent zur folgenden Bedingung:*

(6.1) *Es gibt topologische Abbildungen $\varphi_n(t)$ von $|t| = 1$ auf R_n derart, daß für jedes t_0 die Menge $\varphi_0(t_0)$ identisch ist mit der Menge aller Häufungspunkte von Folgen $\{\varphi_n(t_n)\}$, wo $\{t_n\}$ alle möglichen gegen t_0 konvergenten Folgen durchläuft.*

Beweis. Der erste Teil des Beweises [aus (5.4) folgt (6.1)] folgt aus Satz 3(i). Ist umgekehrt (6.1) erfüllt für eine gewisse Folge von Abbildungen $\varphi_n(t)$, so nehme man dieselben zur Bildung von (5.1) und (5.2). Es ist $d_n(R_n, R_0) \leqq d_n(\varphi_n)$, und wäre $d_n(R_n, R_0) \to 0$ falsch, so könnte man also Parameterwerte t_n finden $(t_n \to t_0)$, für die $d(\varphi_0(t_n), \varphi_n(t_n)) \geqq \alpha > 0$, also $|\varphi_0(t_n) - P_n| \geqq \alpha > 0$ wäre für eine Teilfolge der n. Also würde auch $|\varphi_0(t_0) - P_n| \geqq \frac{\alpha}{2} > 0$ bestehen, im Gegensatz zur Annahme (6.1).

Wir sehen nun aber, daß die Bedingung (6.1) ohne weiteres auf den Fall ausgedehnt werden kann, daß $\mathfrak{G}_0$ auch nicht erreichbare Randpunkte besitzt; das bedeutet lediglich, daß $\varphi_0(t_0)$ nicht mehr wie oben aus einem Punkte zu bestehen braucht. Es entsteht also die Frage, ob (6.1) für das Bestehen von $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| < 1, n \to \infty)$ für allgemeines $\mathfrak{G}_0$ notwendig und hinreichend ist.

Satz 5. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3, aber für allgemeines* $\mathfrak{G}_0$, *ist* (6.1) *notwendig, aber nicht hinreichend für das Bestehen von* $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| < 1, n \to \infty)$.

Beweis. (i) Die Bedingung (6.1) ist notwendig. Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit (s. oben) annehmen, $\varphi_0(t)$ sei die natürliche Darstellung von R_0, und wir wählen dann $\varphi_n(t)$ ebenso als die natürliche Darstellung von R_n.

a) Ist $t_n \to t_0$, $P_n \in \varphi_n(t_n)$, so gibt es wegen $f_n(z) - f_0(z) \Rightarrow 0$ $(|z| < 1, n \to \infty)$ einen Punkt $Q_n \in \varphi_0(t_n)$ mit $|Q_n - P_n| \to 0$. Die Folge $\{Q_n\}$ hat aber bloß Häufungspunkte auf $\varphi_0(t_0)$, also gilt dies auch für $\{P_n\}$.

b) Ist Q_0 ein beliebiger Punkt auf $\varphi_0(t_0)$, so gibt es eine Folge $t_n \to t_0$ und Punkte $Q_n \in \varphi_0(t_n)$ mit $Q_n \to Q_0$. Wieder infolge $f_n(z) - f_0(z) \Rightarrow 0$ finden wir Punkte $P_n \in \varphi_n(t_n)$ mit $|P_n - Q_n| \to 0$, also ist Q_0 tatsächlich Häufungspunkt von Punkten auf $\varphi_n(t_n)$.

(ii) Um zu zeigen, daß (6.1) nicht hinreicht, um $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| < 1, n \to \infty)$ zu garantieren, betrachten wir das folgende Beispiel.

Wir definieren $\mathfrak{G}_n$ durch die konforme Abbildung von $|z| < 1$ vermöge

$$f_n(z) = f_0(e^{i\varepsilon_n} z)\, e^{-i\varepsilon_n} \qquad (\varepsilon_n \to 0,\ n \to \infty); \tag{6.2}$$

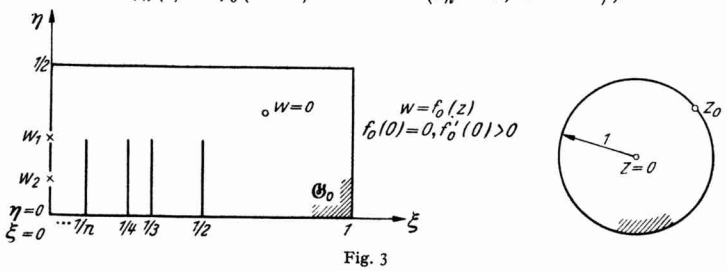

Fig. 3

das bedeutet, daß $\mathfrak{G}_n$ durch Rotation um $w = 0$ um den Winkel ε_n aus $\mathfrak{G}_0$ hervorgeht, weshalb (6.1) sicher erfüllt ist (man nehme die natürlichen Abbildungen φ_n). Die Funktionen $f_n(z)$ sind weiter normiert: $f_n(0) = 0$, $f_n'(0) > 0$; all dies gilt unabhängig von der Wahl der ε_n.

Andererseits ist nun aber für eine gewisse Wahl der ε_n die Relation $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| < 1,\ n \to \infty)$ nicht erfüllt. Um dies einzusehen, fixieren wir w_1 und w_2 auf dem nicht punktförmigen Primende $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{G}_0$, das $z_0 = e^{i\vartheta_0}$ entspreche; w_1 sei der erreichbare Randpunkt von $\mathfrak{P}$, w_2 ein nicht erreichbarer Randpunkt von $\mathfrak{P}$. Es gibt Punkte $\zeta_n = r_n e^{i\vartheta_n}$ mit $r_n \nearrow 1$, $\vartheta_n \to \vartheta_0$, $f_0(\zeta_n) \to w_2$, und wir setzen in (6.2) jetzt $\varepsilon_n = \vartheta_n - \vartheta_0$. Für $z_n = r_n e^{i\vartheta_0}$ hat man dann einerseits

$$f_n(z_n) = f_0(e^{i\vartheta_n - i\vartheta_0} \cdot r_n e^{i\vartheta_0})\, e^{-i(\vartheta_n - \vartheta_0)} = f_0(e^{i\vartheta_n} \cdot r_n)\, e^{-i(\vartheta_n - \vartheta_0)} \to w_2,$$

andererseits aber

$$f_0(z_n) = f_0(r_n e^{i\vartheta_0}) \to w_1,$$

also sicher nicht

$$f_n(z) - f_0(z) \Rightarrow 0 \quad (|z| < 1,\ n \to \infty).$$

§7. Der Sonderfall der JORDAN-Gebiete

In diesem Paragraphen wollen wir annehmen, daß sämtliche Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ JORDAN-Gebiete mit $O \in \mathfrak{G}_n$ sind; sie seien von den JORDAN-Kurven C_n berandet, und $w = f_n(z)$ seien die konformen und normierten Abbildungen von $|z| \leqq 1$ auf $\overline{\mathfrak{G}}_n$. Wir beabsichtigen, diesen Sonderfall mit Hilfe unseres Satzes 2 noch etwas genauer zu untersuchen.

Zunächst führen wir die diesbezüglichen bekannten Ergebnisse an[11]), damit der Zusammenhang mit unseren Resultaten deutlich wird.

Satz C (COURANT). *Notwendig und hinreichend dafür, daß* $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| \leqq 1, n \to \infty)$ *gilt, sind die folgenden Bedingungen:*

(i) *Jeder Häufungspunkt einer beliebigen Punktfolge* $\{P_n\}$ *mit* $P_n \in C_n$ *liegt auf* C_0.

(ii) *Zu jedem* $\varepsilon > 0$ *gibt es ein* $\bar{n}(\varepsilon)$ *und ein* $\delta(\varepsilon)$ *mit* $\delta(\varepsilon) \to 0$ $(\varepsilon \to 0)$ *derart, daß es für jeden Punkt* $P_0 \in C_0$ *und beliebige Punkte* $P_1 \in \mathfrak{G}_n$, $P_2 \in \mathfrak{G}_n$ $(n > \bar{n})$ *aus der* ε*-Umgebung von* P_0 *einen Streckenzug* l_n *in* $\mathfrak{G}_n$ *gibt, der* P_1 *mit* P_2 *verbindet und einen Durchmesser* $< \delta(\varepsilon)$ *hat*[12]).

Ist für die Folge $\{C_n\}$ bloß (i) erfüllt, so spricht COURANT von *„gewöhnlicher Konvergenz* $C_n \to C_0$“; sind dagegen (i) und (ii) beide erfüllt, so wird von *„glatter Konvergenz* $C_n \to C_0$“ gesprochen ([*11*], S. 69).

Satz D (RADÓ). *Notwendig und hinreichend dafür, daß* $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| \leqq 1, n \to \infty)$ *gilt, ist die Bedingung* $d_n \to 0$, *wenn* d_n *die* FRÉCHET*-Entfernung der* JORDAN*-Kurven* C_n, C_0 [*im Sinne unserer Definition* (5.3)] *bezeichnet.*

Weiterhin wird unser Sonderfall noch im Rahmen eines schon in § 4 zitierten allgemeinen Satzes bei WARSCHAWSKI [*36*] besprochen. Wenn wir nun im folgenden eine weitere Bedingung hinzufügen, unter der $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$

[11]) Vgl. dazu COURANT [*10*], S. 106—109 und [*11*], sowie RADÓ [*28*], S. 182. Die Äquivalenz der Bedingungen von COURANT und RADÓ wurde von MARKOUCHEVITCH [*24*], S. 874 nachgewiesen.

[12]) Dieser Satz wird in der Literatur verschiedentlich ungenau zitiert; vgl. GATTEGNO-OSTROWSKI [*17*], S. 28—29 und Enzyklopädie [*22*], S. 375, Fußnote 636.

($|z| \leqq 1$, $n \to \infty$) gilt, so deshalb, weil wir darin die Bedingungen von COURANT und RADÓ trennen in eine erste, die $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leqq r < 1$, $n \to \infty$) garantiert, und eine zweite, die das „Anhängen" von $f_n(z)$ für die übrigen Werte von z gestattet; die zweite Bedingung drückt eine gewisse Glattheit der Ränder R_n aus und ist völlig unabhängig von der Beziehung von $\mathfrak{G}_n$ zu $\mathfrak{G}_0$.

Um diese zweite Bedingung übersichtlich darstellen zu können, führen wir folgendes Maß $\varkappa_n(\delta)$ für die Glattheit der JORDAN-Kurve C_n ein. Wir betrachten irgend zwei Punkte $P_1 \in C_n$, $P_2 \in C_n$, deren Abstand $\leqq \delta$ ist, und die C_n in die Teile $C_n^{(1)}$, $C_n^{(2)}$ mit Durchmessern $\Lambda_n^{(1)}$, $\Lambda_n^{(2)}$ zerlegen. Sodann setzen wir $\Lambda = \min(\Lambda_n^{(1)}, \Lambda_n^{(2)})$ und

$$\varkappa_n(\delta) = \max_{\substack{P_1 \in C_n;\ P_2 \in C_n \\ |P_1 - P_2| \leqq \delta}} \Lambda. \tag{7.1}$$

Satz 6 (JORDAN-*Gebiete*). *Notwendig und hinreichend dafür, daß* $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leqq 1$, $n \to \infty$) *gilt, sind die Bedingungen*

$$\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0 \quad (n \to \infty), \tag{7.2}$$

$$\lim_{n \to \infty,\ \delta \to 0} \varkappa_n(\delta) = 0. \tag{7.3}$$

Vorbemerkung. Die Bedingung (7.3) ist nicht etwa lediglich eine andere Form von (4.2) oder (4.2'). Denn einmal macht, im Gegensatz zu (4.2'), unsere jetzige Bedingung (7.3) keinen Gebrauch von der Tatsache, daß C_n ein Gebiet berandet, und zum andern folgt aus $\eta_n(\delta) \to 0$ ($n \to \infty$, $\delta \to 0$) nicht immer $\varkappa_n(\delta) \to 0$ ($n \to \infty$, $\delta \to 0$), wie aus beigezeichnetem Beispiel ersichtlich ist.

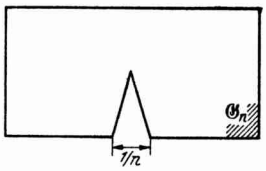

Fig. 4

Beweis von Satz 6. (i) Aus (7.3) folgt (4.2'), d.h. $\eta_n(\delta) \to 0$ ($n \to \infty$, $\delta \to 0$). Andernfalls gäbe es für eine Teilfolge der n Querschnitte q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\delta_n \to 0$, die Abschnitte vom Durchmesser $\geqq \alpha > 0$ erzeugen[13]). Nimmt man die Endpunkte von q_n als Punkte P_1, P_2 bei der Bildung von (7.1), so sieht man, daß sowohl $\Lambda_n^{(1)}$ als auch $\Lambda_n^{(2)}$ einen Durchmesser $\geqq \alpha$ aufweisen, d.h. (7.3) wäre falsch. Also sind die Voraussetzungen von Satz 2 erfüllt, was $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leqq 1$, $n \to \infty$) zur Folge hat.

(ii) Ist umgekehrt $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ ($|z| \leqq 1$, $n \to \infty$), so ist (7.2) eine Folge von Satz A, und (7.3) bleibt zu bestätigen.

Zu beliebigen Zahlen $\alpha > 0$, $\beta > 0$ führen wir dazu die Funktionen $\sigma(\alpha)$, $\tau(\beta)$ ein: Ist $|w' - w''| < \alpha$ ($w', w'' \in C_0$), so sei $|f_0^{-1}(w') - f_0^{-1}(w'')| < \sigma(\alpha)$, und ist $|z' - z''| < \beta$ ($|z'| = |z''| = 1$), so sei $|f_0(z') - f_0(z'')| < \tau(\beta)$. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von $f_0(z)$ auf $|z| = 1$ und von $f_0^{-1}(w)$ auf C_0 ist $\sigma(\alpha) \to 0$ ($\alpha \to 0$) und $\tau(\beta) \to 0$ ($\beta \to 0$).

[13]) Die Zahl α kann kleiner als der Radius eines Kreises angenommen werden, der allen $\mathfrak{G}_n$ angehört; einen solchen Kreis gibt es wegen (7.2).

Nun wählen wir zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein δ_0 und $\bar{n}$ derart, daß gilt:

a) Es ist $\delta_0 < \varepsilon$ und $\tau(\sigma(3\delta)) < \frac{\varepsilon}{3}$ für $\delta \leq \delta_0$;

b) Es ist $|f_n(z) - f_0(z)| < \frac{\delta_0}{3}$ für $n > \bar{n}$ und $|z| \leq 1$.

Sind dann $f_n(z_1)$ und $f_n(z_2)$ irgend zwei Punkte auf C_n vom Abstand $\leq \delta_0$, so gilt

$$|f_0(z_1) - f_0(z_2)| \leq |f_0(z_1) - f_n(z_1)| + |f_n(z_1) - f_n(z_2)| + |f_n(z_2) - f_0(z_2)|$$
$$\leq \frac{\delta_0}{3} + \delta_0 + \frac{\delta_0}{3} < 3\delta_0,$$

also $|z_1 - z_2| < \sigma(3\delta_0)$. Für einen beliebigen Punkt z des (kleineren) Bogens (z_1, z_2) hat man somit

$$|f_n(z) - f_n(z_1)| \leq |f_n(z) - f_0(z)| + |f_0(z) - f_0(z_1)| + |f_0(z_1) - f_n(z_1)|$$
$$< \frac{\delta_0}{3} + \tau(\sigma(3\delta_0)) + \frac{\delta_0}{3} < \varepsilon,$$

d.h. der Durchmesser des Bildes des (kleineren) Bogens (z_1, z_2) ist höchstens ε; also ist (7.3) erfüllt.

Durch Einschalten einer Zwischenabbildung gewinnt man leicht folgenden Zusatz zu Satz 6.

Zusatz. Die in Satz 6 betrachteten JORDAN-Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ seien vermöge $w = f_n(z)$ konform und normiert auf ein beliebiges, endliches, einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathfrak{G}_z$ der z-Ebene abgebildet, das den Punkt $z = 0$ enthalte. Dann sind die Bedingungen (7.2) und (7.3) notwendig und hinreichend für die Gültigkeit von $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(z \in \mathfrak{G}_z,\ n \to \infty)$.

§8. Lokale Abänderung von $\mathfrak{G}_0$

In den §§ 4—6 haben wir gesehen, daß für den Fall der Existenz nicht erreichbarer Randpunkte von $\mathfrak{G}_0$ die in dieser Arbeit behandelten Probleme noch weitgehend offen sind. Wir wollen jetzt einen Sonderfall behandeln, bei dem zwar $\mathfrak{G}_0$ nicht erreichbare Randpunkte besitzen darf; jedoch sollen die $\mathfrak{G}_n$ in spezieller Weise aus $\mathfrak{G}_0$ hervorgehen, indem ein „glatter" Teil des Randes von $\mathfrak{G}_0$ abgeändert wird. Diese Sachlage kann z.B. bei Anwendungen in der Theorie der Approximation im Komplexen auftreten. Allerdings wird es uns wieder nicht möglich sein, $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(n \to \infty)$ im ganzen Einheitskreis zu erschließen (was durch ein Gegenbeispiel belegt wird), sondern nur in einem gewissen, an $|z| = 1$ heranreichenden Teil von $|z| \leq 1$.

a) Ein Glattheitsmaß für JORDAN-Bögen. In Analogie zu dem Glattheitsmaß $\varkappa(\delta)$ einer geschlossenen JORDAN-Kurve verwenden wir im folgenden ein Glattheitsmaß $\lambda(\delta)$ eines offenen JORDAN-Bogens γ. Sind $P_1 \in \gamma$, $P_2 \in \gamma$ zwei Punkte vom Abstand $\leq \delta$, die auf γ einen Teilbogen vom Durchmesser Λ begrenzen, so setzen wir

$$\lambda(\delta) = \max_{\substack{P_1 \in \gamma,\ P_2 \in \gamma \\ |P_1 - P_2| \leq \delta}} \Lambda. \tag{8.1}$$

Über das Verhalten des Glattheitsmaßes λ bei einer konformen Abbildung gibt der folgende Hilfssatz Auskunft.

Hilfssatz 8. *In einem abgeschlossenen Teilbereich B_z eines Gebietes $\mathfrak{G}_z$ sei eine Folge $\{\gamma_n\}$ von* JORDAN-*Bögen gegeben. $\mathfrak{G}_z$ werde durch $\bar{z}=\varphi(z)$, $z=\psi(\bar{z})$ umkehrbar eindeutig und konform auf $\mathfrak{G}_{\bar{z}}$ abgebildet, wobei $\{\gamma_n\}$ in $\{\bar{\gamma}_n\}$ übergehe.*

Dann sind die Aussagen $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}} \lambda_n(\delta)=0$ *und* $\lim\limits_{\substack{n\to\infty\\ \delta\to 0}} \bar{\lambda}_n(\delta)=0$ *äquivalent*[14]).

Beweis. Wir können annehmen, $\varphi(z)$ sei in $\overline{\mathfrak{G}}_z$ regulär und schlicht. Sei $0<c\leqq|\varphi'(z)|\leqq C<\infty$ $(z\in\mathfrak{G}_z)$ und $\Delta=\operatorname{dist}(B_z, \text{Rand von } \mathfrak{G}_z)$. Sodann betrachten wir nach Vorgabe eines positiven $\varepsilon<\Delta C$ alle $\bar{\delta}$ und n, für die

$$\bar{\delta}<c\cdot\Delta \quad \text{und} \quad \lambda_n\left(\frac{\bar{\delta}}{c}\right)<\frac{\varepsilon}{C}$$

ist, d.h. alle $\bar{\delta}<\bar{\delta}_0(\varepsilon)$, $n>\bar{n}(\varepsilon)$.

Sind nun $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ beliebige Punkte $\in B_{\bar{z}}=\varphi(B_z)$ vom Abstand $<\bar{\delta}$, so liegt ihre Verbindungsgerade ganz in $\mathfrak{G}_{\bar{z}}$. Denn wäre $\bar{\zeta}$ ein Randpunkt von $\mathfrak{G}_{\bar{z}}$, der auf der Verbindungsgeraden $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ dem Punkt $\bar{z}_1$ am nächsten liegt, so hätten wir für den Abstand der Urbilder in der z-Ebene

$$|z_1-\zeta|=\left|\int_{\bar{z}_1}^{\bar{\zeta}}\psi'(\bar{z})\,d\bar{z}\right|\leqq c^{-1}|\bar{\zeta}-\bar{z}_1|<c^{-1}\cdot c\Delta=\Delta,$$

im Widerspruch zur Definition von Δ.

Liegen nun unsere Punkte $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ vom Abstand $\leqq\bar{\delta}$ auf $\bar{\gamma}_n$, so haben wir für die Urbilder in der z-Ebene

$$|z_1-z_2|=\left|\int_{\bar{z}_1}^{\bar{z}_2}\psi'(\bar{z})\,d\bar{z}\right|\leqq c^{-1}\cdot|\bar{z}_1-\bar{z}_2|\leqq c^{-1}\bar{\delta},$$

also wird durch z_1, z_2 ein Stück vom Durchmesser $<\frac{\varepsilon}{C}$ von γ_n abgetrennt. Da $\frac{\varepsilon}{C}<\Delta$ ist, kann man um z_1 einen Kreis schlagen, der ganz in $\mathfrak{G}_z$ liegt und das abgetrennte Stück von γ_n enthält. Für einen Punkt $\bar{z}$ auf $\bar{\gamma}_n$ haben wir deshalb

$$|\bar{z}_1-\bar{z}|=\left|\int_{z_1}^{z}\varphi'(z)\,dz\right|\leqq C\cdot|z-z_1|<C\cdot\frac{\varepsilon}{C}=\varepsilon,$$

also ist der Durchmesser des durch $\bar{z}_1, \bar{z}_2$ begrenzten Stücks von $\bar{\gamma}_n$ sicher $<2\varepsilon$. Somit gilt $\bar{\lambda}_n(\bar{\delta})<2\varepsilon$ für alle betrachteten $n, \bar{\delta}$.

Der zweite Teil der Aussage von Hilfssatz 8 folgt durch Betrachtung der konformen Abbildung $z=\psi(\bar{z})$ auf ähnliche Weise.

b) Ein Konvergenzsatz.

Satz 7. *Voraussetzung für die $\mathfrak{G}_n$ $(n=0,1,\ldots)$. $\mathfrak{G}_0$ sei ein beliebiges, einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet der w-Ebene, $O\in\mathfrak{G}_0$, dessen Rand R_0 zum Teil aus dem offenen* JORDAN-*Bogen γ_0 mit den Endpunkten P_1, P_2 bestehe. Es gebe zwei* JORDAN-*Gebiete $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2$ folgender Art:*

[14]) $\bar{\lambda}_n$ bezeichnet die zu $\bar{\gamma}_n$ gehörige Größe (8.1).

α) γ_0 *ist ein Querschnitt in* $\mathfrak{g}_2$,

β) $\bar{\mathfrak{g}}_2$ *enthält außer* γ_0 *keine Randpunkte von* $\mathfrak{G}_0$,

γ) $\bar{\mathfrak{g}}_1 \in \mathfrak{g}_2$, $O \notin \bar{\mathfrak{g}}_2$,

δ) *ein Teilbogen* γ_0^* *von* γ_0 *mit Endpunkten* Q_1, Q_2 *ist ein Querschnitt in* $\mathfrak{g}_1$, *und es ist* $(\gamma_0 - \gamma_0^*) \cap \mathfrak{g}_1 = 0$.

Auf γ_0^* *seien Punkte* S_n, T_n *gegeben und durch einen* JORDAN-*Bogen* γ_n *in* $\mathfrak{g}_1$ *verbunden, der* γ_0^* *höchstens in Punkten des Bogens* S_n, T_n *treffe.* $\mathfrak{G}_n$ *sei durch* γ_n *und* $R_0 - (S_n, T_n)$ *berandet.*

Voraussetzung für B_z. *Dies sei ein abgeschlossener Teilbereich von* $|z| \leqq 1$ *mit der Eigenschaft, daß jedem auf* $|z| = 1$ *gelegenen Randpunkt von* B_z *bei der (konformen und normierten) Abbildung* $w = f_0(z)$ *von* $|z| < 1$ *auf* $\mathfrak{G}_0$ *ein erreichbarer Randpunkt von* $\mathfrak{G}_0$ *entspreche*[15]).

Aussage. Wird $\mathfrak{G}_n$ *durch* $w = f_n(z)$ *konform und normiert auf* $|z| < 1$ *abgebildet, so gilt genau dann für jeden Bereich* B_z *der angegebenen Art* $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(z \in B_z,\ n \to \infty)$, *wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:*

$$\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0 \quad (n \to \infty), \tag{8.2}$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta\to 0}} \lambda_n(\delta) = 0 \quad \textit{für die} \text{ JORDAN-}\textit{Bögen } \gamma_n. \tag{8.3}$$

Beweis. (i) Die Bedingungen (8.2) und (8.3) seien erfüllt. Wir zeigen dann sogar: Aus $z_n \to z_0$ $(|z_0| \leqq 1)$ folgt stets $f_n(z_n) \to f_0(z_0)$ $(n \to \infty)$, sofern $f_0(z)$ an der Stelle z_0 stetig ist[16]).

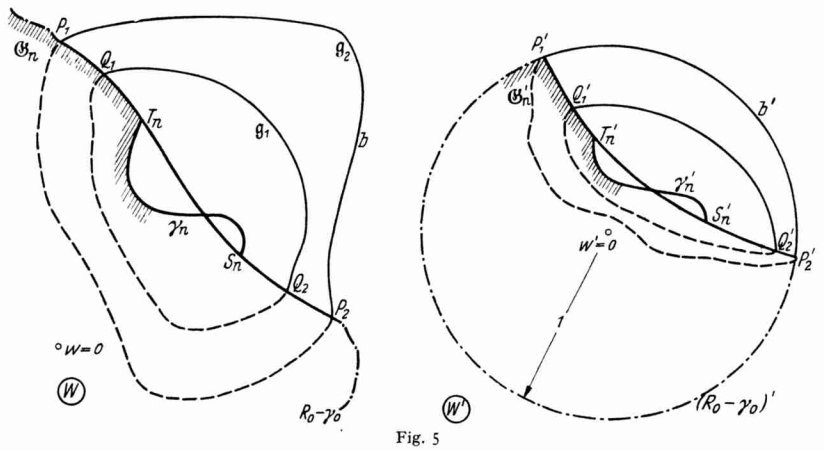

Fig. 5

Wir bilden das von $R_0 - \gamma_0$ und dem JORDAN-Bogen b berandete Gebiet (vgl. Fig. 5) vermöge $w' = \varphi(w)$, $w = \psi(w')$ konform und normiert auf $|w'| < 1$

[15]) B_z kann also insbesondere ein Teilbereich von $|z| \leqq 1$ sein, der als einzige Punkte auf $|z| = 1$ die Punkte $f_0^{-1}(\gamma_0^*)$ besitzt.

[16]) Diese Aussage ist weitergehend als $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(z \in B_z,\ n \to \infty)$; denn ist letztere Behauptung falsch, so gibt es $\{z_n\}$ mit $z_n \to z_0$ $(|z_0| = 1)$ so, daß $f_n(z_n) - f_0(z_n) \not\to 0$, d.h. $f_n(z_n) - f_0(z_0) \not\to 0$ strebt $(n \to \infty)$.

ab. Die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ gehen dabei in die JORDAN-Gebiete $\mathfrak{G}_n'$, die JORDAN-Bögen γ_n in γ_n' über. (8.2) und (8.3) bedeuten in der w'-Ebene

$$\mathfrak{G}_n' \to \mathfrak{G}_0' \quad (n \to \infty), \tag{8.2'}$$

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ \delta\to 0}} \lambda_n'(\delta) = 0 \quad \text{für die JORDAN-Bögen } \gamma_n' \tag{8.3'}$$

(Hilfssatz 8). Da aber der Rest des Randes von $\mathfrak{G}_n'$ (also $R_n' - \gamma_n'$) fest bleibt, so sind damit offenbar die Voraussetzungen von Satz 6 erfüllt ($\mathfrak{G}_0'$ ist ein JORDAN-Gebiet!), und wir haben somit für die Zwischenabbildungen $w' = g_n(z)$ von $|z| < 1$ auf $\mathfrak{G}_n'$ $(n = 0, 1, \ldots)$

$$g_n(z) \Rightarrow g_0(z) \qquad (|z| \leqq 1,\ n \to \infty). \tag{8.4}$$

Unsere Abbildungsfunktionen $f_n(z)$ hängen aber mit ψ und g_n durch

$$f_n(z) = \psi\left(g_n(z)\right) \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

zusammen, und $\psi(w')$ ist unter anderem für alle die Werte von w' in $|w'| \leqq 1$ stetig, die erreichbaren Randpunkten von $\mathfrak{G}_0$ entsprechen. Aus $z_n \to z_0$ folgt also einmal $g_n(z_n) \to g_0(z_0)$, und ferner $\psi\left(g_n(z_n)\right) \to \psi\left(g_0(z_0)\right)$, d.h. $f_n(z_n) \to f_0(z_0)$ $(n \to \infty)$, und dies war zu zeigen.

(ii) Gilt $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(z \in B_z,\ n \to \infty)$ speziell für einen Bereich B_z von der in der Fußnote [15]) genannten Art, so gilt auch $\varphi\left(f_n(z)\right) \Rightarrow \varphi\left(f_0(z)\right)$, d.h. $g_n(z) \Rightarrow g_0(z)$ $(z \in B_z,\ n \to \infty)$. Dies impliziert (Zusatz zu Satz 6) $\lambda_n'(\delta) \to 0$ $(n \to \infty,\ \delta \to 0)$ für die JORDAN-Bögen γ_n', also auch $\lambda_n(\delta) \to 0$ $(n \to \infty,\ \delta \to 0)$ (Hilfssatz 8). Daß $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ notwendig ist, folgt wieder aus Satz A.

c) Ein Gegenbeispiel. Schon in § 6 hatten wir an einem einfachen Beispiel gesehen, daß $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$, zusammen mit einer Bedingung für die Glattheit der Ränder von $\mathfrak{G}_n$, im allgemeinen nicht hinreicht zur Aussage $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| < 1,\ n \to \infty)$. Sogar bei unserer jetzigen speziellen Bildung der $\mathfrak{G}_n$ ist dies der Fall, wie wir jetzt zeigen wollen.

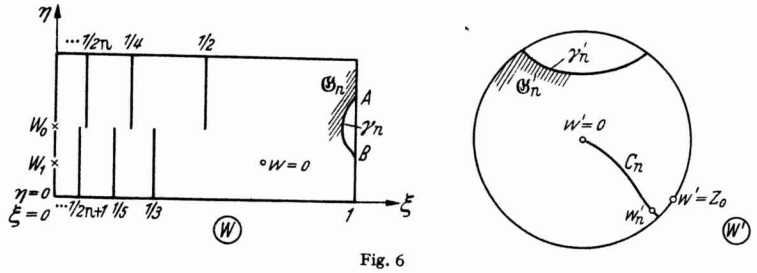

Fig. 6

Die $\mathfrak{G}_n$ gehen aus $\mathfrak{G}_0$ in der skizzierten Weise hervor; die Bögen γ_n seien vorläufig beliebig, sollen aber jedenfalls glatt [im Sinne von (8.3)] gegen die Strecke A, B konvergieren. Schaltet man wieder wie in **b)** eine Zwischenabbildung $w' = \varphi(w)$, $w = \psi(w')$ (konform und normiert) ein, die $\mathfrak{G}_0$ auf $|w'| < 1$ abbildet, so wird

$$f_n(z) = \psi\left(g_n(z)\right) \quad (n = 0, 1, \ldots) \quad \text{mit} \quad g_n(z) \Rightarrow g_0(z) = z \quad (|z| \leqq 1,\ n \to \infty).$$

Wir markieren uns $f_0^{-1}(w_0)=z_0$ und zeichnen den Radius C ein, der von $z=0$ nach $z=z_0$ führt; sein Bild bei der Abbildung $w'=g_n(z)$ sei C_n, ein von $w'=0$ nach $w'=g_n(z_0)$ führender JORDAN-Bogen. Lassen wir nun die γ_n kontinuierlich und glatt gegen A, B rücken, so rückt C_n kontinuierlich und gleichmäßig gegen C (Radius von $w'=0$ nach $w'=z_0$), und wir können daher für gewisse Bögen γ_n $(n=1, 2, \ldots)$ Punkte $w_n'\in C_n$ finden, für die $f_0(w_n')\to w_1$ strebt $(n\to\infty,\ w_1\neq w_0)$. Diese γ_n denken wir uns gewählt, und $g_n(z)$, $f_n(z)$ $(n=1, 2, \ldots)$ liegen nun fest. Schließlich setzen wir noch $z_n=g_n^{-1}(w_n')$.

Dann gilt einerseits

$$f_n(z_n)=\psi(w_n')=f_0(w_n')\to w_1 \quad (n\to\infty),$$

andererseits aber

$$f_0(z_n)=\psi(z_n)\to w_0 \quad (n\to\infty),$$

da ja z_n auf C, also radial gegen z_0 strebt. Also ist $f_n(z)-f_0(z)\Rightarrow 0$ $(|z|<1,\ n\to\infty)$ sicher falsch.

§9. Benützung anderer Normen

Unsere seitherigen topologischen Bedingungen für die $\mathfrak{G}_n$ waren stets auf die Aussage $f_n(z)\Rightarrow f_0(z)$ $(|z|<1,\ n\to\infty)$ zugeschnitten, d.h. auf die Approximation von $f_0(z)$ durch $f_n(z)$ bei Zugrundelegung der Norm

$$\overline{\operatorname{fin}}_{|z|<1}|f_n(z)-f_0(z)|.$$

In diesem letzten Paragraphen des zweiten Teils fragen wir uns, unter welchen Annahmen über $\mathfrak{G}_n$ geschlossen werden kann auf die Approximation von $f_0(z)$ durch $f_n(z)$ bei Benützung der Normen

$$L_n(r,p)=\int_{|z|=r}|f_n(z)-f_0(z)|^p\,|dz| \quad \text{bzw.} \quad F_n(r,p)=\iint_{|z|\leq r}|f_n(z)-f_0(z)|^p\,dx\,dy;$$

dabei seien r und p jeweils festgehaltene Zahlen mit $0<r\leq 1$ und $p>0$[17]).

a) Durch Flächenintegrale erklärte Normen. Messen wir den Grad der Approximation durch $F_n(r,p)$, so wird die Aussage besonders einfach.

Satz 8. *Die einfach zusammenhängenden und gleichmäßig beschränkten Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n=0, 1, \ldots)$ der w-Ebene mit $O\in\mathfrak{G}_n$ seien vermöge $w=f_n(z)$ konform und normiert auf $|z|<1$ abgebildet. Dann ist $\mathfrak{G}_n\to\mathfrak{G}_0$ $(n\to\infty)$ notwendig und hinreichend dafür, daß $F_n(r,p)\to 0$ strebt $(n\to\infty;\ r, p$ fest$)$.*

Beweis. (i) Sei $F_n(r,p)\to 0$ $(n\to\infty)$, also sicher

$$\iint_{|z|\leq r'}|f_n(z)-f_0(z)|^p\,dx\,dy\to 0 \quad (n\to\infty)$$

für ein positives $r'<1$. Mittels eines Satzes von WALSH ([*32*], S. 96) folgt daraus $f_n(z)\Rightarrow f_0(z)$ $(|z|\leq r''<r',\ n\to\infty)$, also nach VITALI $f_n(z)\Rightarrow f_0(z)$ $(n\to\infty)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $|z|<1$, so daß nach Satz A sicher $\mathfrak{G}_n\to\mathfrak{G}_0$ strebt $(n\to\infty)$.

[17]) Bedingungen, die $f_n(z)\Rightarrow f_0(z)$ $(|z|<1,\ n\to\infty)$ zur Folge haben, werden wir hierbei nicht mehr erwähnen.

(ii) Es sei nun $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$. Ist $r<1$, so kommt $F_n(r, p) \to 0$ $(n \to \infty)$ direkt aus $f_n(z) \Rightarrow f_0(z)$ $(|z| \leqq r,\ n \to \infty)$. Ist $r=1$, so zerlegen wir $F_n(1, p)$ in $\iint\limits_{|z| \leqq r}$ und $\iint\limits_{r \leqq |z| \leqq 1}$, wovonder zweite Teil

$$\leqq (2A)^p \cdot \pi(1-r^2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist für $r > r_0$ (es wurde $|f_n| \leqq A$ in $|z|<1$ angenommen). Bei festem $r > r_0$ ist der erste Teil ebenfalls $< \frac{\varepsilon}{2}$ für $n > n_0$, also $F_n(1, p) < \varepsilon$ $(n > n_0)$.

b) Durch Linienintegrale erklärte Normen. Schwieriger liegen die Dinge bei Zugrundelegung der Norm $L_n(r, p)$. Den Fall, daß $r<1$ ist, behandelt man wie oben: $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ *ist* [*bei den gleichen Gebieten* $\mathfrak{G}_n$ $(n=0, 1, \ldots)$] *notwendig und hinreichend für* $L_n(r, p) \to 0$ $(n \to \infty)$[18]).

Zur Erledigung des Falls $r=1$ stellen wir zunächst fest, daß $L_n(r, p)$ $(0<r<1)$ bei festem n und p eine mit r stetig und monoton wachsende Funktion ist ([*42*], S. 160), weshalb $L_n(1, p) = \lim\limits_{r \to 1-} L_n(r, p) \leqq \infty$ gesetzt werden kann.

Für $L_n(1, p) \to 0$ $(n \to \infty)$ ist sicherlich $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ notwendig (bei den Gebieten des Satzes 8), da ja dann auch $L_n(r, p) \to 0$ strebt für jedes feste $r<1$. Ob $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ im allgemeinen Fall für $L_n(1, p) \to 0$ $(n \to \infty)$ auch hinreicht, ist nicht bekannt. Jedoch wird in der Literatur ([*38*], S. 184) folgender Satz ohne Beweis angegeben.

Satz E (POLANSKY). *Gilt für die in Satz 8 genannten Gebiete* $\mathfrak{G}_n$ $(n=0, 1, \ldots)$ *der w-Ebene die Bedingung* $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$, *so folgt daraus* $L_n(1, p) \to 0$ $(n \to \infty)$ *für* $p=1$ *und also für* $0<p \leqq 1$[19]).

Für Werte von p in $0<p \leqq 2$ beweisen wir

Satz 9. *Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete* $\mathfrak{G}_n$ $(n=0, 1, \ldots)$ *der w-Ebene mit* $O \in \mathfrak{G}_n$ *und mit den Flächeninhalten* $A_n < \infty$ *seien vermöge* $w=f_n(z)$ *konform und normiert auf* $|z|<1$ *abgebildet.*

Dann sind die Bedingungen $A_n \to A_0$ *und* $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ *hinreichend für* $L_n(1, p) \to 0$ $(n \to \infty)$ *für* $p=2$ *und also für* $0<p \leqq 2$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß unter den angegebenen Voraussetzungen stets

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ r \to 1}} \iint\limits_{r \leqq |z| \leqq 1} |f_n'(z)|^2 \, dx\, dy = 0 \tag{9.1}$$

ist. Dazu setzen wir

$$A_n(r) = \iint\limits_{|z| \leqq r} |f_n'(z)|^2 \, dx\, dy$$

und wählen zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $r_0 < 1$ so, daß $A_0 - A_0(r_0) < \varepsilon$ ist. Nun halten wir r_0 fest und haben einmal $|A_n - A_0| < \varepsilon$ $(n > n_1)$, und ferner

$$|A_n(r_0) - A_0(r_0)| < \varepsilon \qquad (n \geqq n_2 \geqq n_1);$$

[18]) Statt Lemma II in [*32*], S. 96 nehme man das Lemma S. 101.

[19]) Man stellt nämlich leicht fest, daß die bei POLANSKY auftretende Bedingung $D_i(B_n, B_0) \to 0$ („innere Distanz") gleichwertig ist mit $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$.

letzteres ist eine Folge von $|f_n'(z)|^2 \Rightarrow |f_0'(z)|^2$ ($|z| \leqq r_0$, $n \to \infty$). All dies zusammen ergibt

$$A_n - A_n(r_0) = \iint\limits_{r_0 \leqq |z| \leqq 1} |f_n'(z)|^2 \, dx\, dy \leqq |A_n - A_0| + |A_0 - A_0(r_0)| + |A_0(r_0) - A_n(r_0)| < 3\varepsilon \quad (n \geqq n_2),$$

womit (9.1) bewiesen ist.

Auf Grund von (9.1) und $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ gibt es nun zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ Zahlen r_0 ($\frac{1}{2} \leqq r_0 < 1$) und n_0 derart, daß erstens

$$\iint\limits_{r_0 \leqq |z| \leqq 1} |f_0'(z)|^2 \, dx\, dy < \varepsilon$$

ist und weiter

$$\iint\limits_{r_0 \leqq |z| \leqq 1} |f_n'(z)|^2 \, dx\, dy < \varepsilon \quad \text{und} \quad |f_n'(z) - f_0'(z)| \leqq \varepsilon \qquad (|z| \leqq r_0)$$

gilt für $n > n_0$. Dann gilt unter Verwendung der SCHWARZschen und MINKOWSKIschen Ungleichungen für $r \geqq r_0$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^{2\pi} |f_n(r e^{i\varphi}) - f_0(r e^{i\varphi})|^2 \, d\varphi \\
&= \int\limits_0^{2\pi} \left| \int\limits_0^r [f_n'(t e^{i\varphi}) - f_0'(t e^{i\varphi})] \, dt \right|^2 d\varphi \leqq \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_0^r |f_n' - f_0'| \, dt \right]^2 d\varphi \\
&\leqq \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^r |f_n' - f_0'|^2 \, dt \, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_0^{r_0} |f_n' - f_0'|^2 \, dt\, d\varphi + \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_0}^r |f_n' - f_0'|^2 \, dt\, d\varphi \\
&\leqq 2\pi\varepsilon^2 + \left[\left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_0}^r |f_n'|^2 \, dt \, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_0}^r |f_0'|^2 \, dt\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\
&< 2\pi\varepsilon^2 + \left[\left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_0}^r |f_n'|^2 \cdot \frac{t}{r_0} \, dt\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{r_0}^r |f_0'|^2 \cdot \frac{t}{r_0} \, dt\, d\varphi \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \\
&< 2\pi\varepsilon^2 + \frac{1}{r_0} \left[\left(\iint\limits_{r_0 \leqq |z| \leqq 1} |f_n'(z)|^2 \, dx\, dy \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\iint\limits_{r_0 \leqq |z| \leqq 1} |f_0'(z)|^2 \, dx\, dy \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \leqq 2\pi\varepsilon^2 + 8\varepsilon.
\end{aligned}$$

Daraus folgt aber $L_n(1, p) \to 0$ ($n \to \infty$) für $p = 2$ und daher auch, vermöge der HÖLDERschen Ungleichung, für $0 < p < 2$.

Schließlich beweisen wir für beliebige positive Werte von p den

Satz 10. *Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete $\mathfrak{G}_n$ ($n = 0, 1, \ldots$) der w-Ebene mit $O \in \mathfrak{G}_n$ seien vermöge $w = f_n(z)$ konform und normiert auf $|z| < 1$ abgebildet. Der Rand R_0 von $\mathfrak{G}_0$ sei eine geschlossene analytische* JORDAN*-Kurve C und jede Folge $\{P_n\}$ von Punkten $P_n \in R_n$ habe ihre Häufungspunkte auf C* [20]*. Dann gilt $L_n(1, p) \to 0$ ($n \to \infty$) für jedes feste $p > 0$.*

Beweis. Dieser Satz stammt für den Fall C: $|w| = 1$ von WARSCHAWSKI ([37], S. 563)[21], und wir werden den Satz 10 durch Reduktion auf diesen

[20]) Diese Bedingung ist (Hilfssatz 6) eine Folge von $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$, $\eta_n(\delta) \to 0$ ($n \to \infty$, $\delta \to 0$), in welchem Falle die Aussage $L_n(1, p) \to 0$ ($n \to \infty$) trivial ist (Satz 2). Jedoch impliziert umgekehrt die Bedingung von Satz 10 nicht immer $\eta_n(\delta) \to 0$ ($n \to \infty$, $\delta \to 0$).

[21]) Dort werden sogar numerische Abschätzungen für $L_n(1, p)$ angegeben.

Fall beweisen. Die Funktion $f_0(z)$ ist für ein $\delta>0$ in $|z|\leq 1+\delta$ regulär und schlicht; es sei etwa $|f_0'(z)|\leq M$ $(|z|\leq 1+\delta)$. Auf Grund unserer Annahmen über R_n können wir ferner sagen, daß R_n ganz in dem Bild von $1-\varepsilon_n\leq|z|\leq 1+\varepsilon_n$ durch $w=f_0(z)$ drin liegt, wobei $\varepsilon_n\to 0$ strebt für $n\to\infty$. Wir betrachten Werte von n, für die bereits $\varepsilon_n<\delta$ ist, für die also insbesondere $f_0^{-1}(w)$ $(w\in\mathfrak{G}_n)$ erklärt ist. Dann ist

$$\int_0^{2\pi}|f_n(re^{i\varphi})-f_0(re^{i\varphi})|^p\,d\varphi=\int_0^{2\pi}|f_0[f_0^{-1}f_n(re^{i\varphi})]-f_0(re^{i\varphi})|^p\,d\varphi,$$

wobei

$$|f_0[f_0^{-1}f_n(re^{i\varphi})]-f_0(re^{i\varphi})|=\left|\int_{re^{i\varphi}}^{f_0^{-1}f_n(re^{i\varphi})}f_0'(\zeta)\,d\zeta\right|\leq M\,|f_0^{-1}f_n(re^{i\varphi})-re^{i\varphi}|$$

ist, insgesamt also

$$\int_0^{2\pi}|f_n(re^{i\varphi})-f_0(re^{i\varphi})|^p\,d\varphi\leq M^p\cdot\int_0^{2\pi}|f_0^{-1}f_n(re^{i\varphi})-re^{i\varphi}|^p\,d\varphi. \tag{9.2}$$

Wie bereits erwähnt, fallen die Ränder der Bildgebiete von $|z|<1$ bei den Abbildungen $f_0^{-1}f_n$ ganz in den Kreisring $1-\varepsilon_n\leq|z|\leq 1+\varepsilon_n$ $(\varepsilon_n\to 0)$, also strebt nach dem genannten Sonderfall von Satz 10 die rechte Seite von (9.2) gegen Null mit $n\to\infty$, gleichmäßig für alle r aus $(0,1)$. Dies beendet den Beweis von Satz 10.

Teil III

Verhalten der Funktionen, die $\mathfrak{G}_n$ auf $|w|<1$ abbilden

Wir kommen nun in Teil III zu dem Problem, das Verhalten der Umkehrfunktionen $w=f_n(z)$ zu untersuchen, die die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ konform und normiert auf $|w|<1$ abbilden. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, tritt dabei die zusätzliche Schwierigkeit auf, daß die $f_n(z)$ im allgemeinen kein gemeinsames Definitionsgebiet besitzen. Für die Frage der Konvergenz der Funktionen $f_n(z)$ gegen $f_0(z)$ ist daher die gleichmäßige Konvergenz ungeeignet; wir werden sie ersetzen durch zwei Arten von stetiger Konvergenz. Erst beim Sonderfall $\mathfrak{G}_0\subset\mathfrak{G}_n$ $(n=1,2,\ldots)$ wollen wir in §§ 13—14 einige Untersuchungen über $f_n(z)\Rightarrow f_0(z)$ $(z\in\mathfrak{G}_0,\ n\to\infty)$ anstellen.

§10. Arten von stetiger Konvergenz

Mit $\mathfrak{G}$ sei ein beliebiges, einfach zusammenhängendes, beschränktes Gebiet der z-Ebene bezeichnet; $f(z)$ sei eine komplexe Funktion, definiert für alle $z\in\overline{\mathfrak{G}}$. CARATHÉODORY ([7], S. 58 und [9], S. 171 ff.) nennt dann eine Folge $\{f_n(z)\}$ beliebiger, für $z\in\mathfrak{G}$ erklärter komplexer Funktionen in $\mathfrak{G}$ *stetig konvergent* gegen $f(z)$, wenn für jede Folge $\{z_n\}$ $(z_n\in\mathfrak{G})$ mit $z_n\to z_0\in\overline{\mathfrak{G}}$ gilt: $f_n(z_n)\to f(z_0)$.

Im folgenden werden wir eine etwas allgemeinere Definition der stetigen Konvergenz benützen, die in einem Sonderfall ($\mathfrak{G}$ = JORDAN-Gebiet) auf

COURANT ([*10*], S. 106) zurückzugehen scheint und die gegenüber der Definition von CARATHÉODORY einerseits Punkte z_n zuläßt, die nicht in $\mathfrak{G}$ liegen, andererseits aber auch nicht von $f_n(z)$ verlangt, in ganz $\mathfrak{G}$ definiert zu sein.

Definition 1 *(Stetige Konvergenz). Eine Folge $\{f_n(z)\}$ beliebiger komplexer Funktionen mit den Definitionsgebieten $\mathfrak{G}_n$ heißt in $\overline{\mathfrak{G}}$ stetig konvergent gegen eine Grenzfunktion $f(z)$, wenn es zu jedem $z_0 \in \overline{\mathfrak{G}}$ Folgen $\{z_n\}$ mit $z_n \in \mathfrak{G}_n$ und $z_n \to z_0$ gibt, und wenn dann stets gilt: $f_n(z_n) \to f(z_0)$.*

Diese Definition weist noch einen wichtigen Nachteil auf. Schon in einfachsten Fällen, wo $\{f_n\} = f, f, f, \ldots$ ist, liegt im allgemeinen keine stetige Konvergenz im Sinn der Definition 1 vor. Man nehme z. B. $f_n(z) = f(z) =$ Abbildungsfunktion von $\mathfrak{G}$ auf $|w| < 1$ und $z_n \to z_0$ abwechselnd auf verschiedenen Seiten des Einschnitts in $|z| < 1$ (Fig. 7). Ersichtlich divergiert $\{f_n(z_n)\}$.

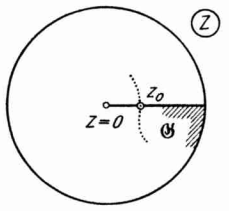

Fig. 7

Diese Möglichkeit schließen wir aus, indem wir nur $z_n \in \mathfrak{G}$ zulassen und verlangen, daß $z_n \to z_0 \in \mathfrak{G}$ oder gegen ein Primende E von $\mathfrak{G}$ strebe. Neben Definition 1 benützen wir also

Definition 2 *(Stetige Konvergenz im weiteren Sinne). Eine Folge $\{f_n(z)\}$ beliebiger komplexer Funktionen mit den Definitionsgebieten $\mathfrak{G}_n$ heißt in $\overline{\mathfrak{G}}$ stetig konvergent im weiteren Sinne gegen eine Grenzfunktion $f(z)$, wenn es zu jedem $z_0 \in \mathfrak{G}$ [bzw. zu jedem Primende E von $\mathfrak{G}$] Folgen $\{z_n\}$ mit $z_n \in \mathfrak{G}_n \cap \mathfrak{G}$ und $z_n \to z_0$ [bzw. $z_n \to E$] gibt, und wenn dann stets gilt: $f_n(z_n) \to f(z_0)$ [bzw. $f_n(z_n) \to f(E)$]*[22].

Es wird dabei also angenommen, daß $f(z)$ für $z \in \overline{\mathfrak{G}}$ erklärt ist und auf jedem Primende E von $\mathfrak{G}$ konstant ist.

Wir bemerken noch, daß in unseren Anwendungen $f(z)$ die Abbildungsfunktion von $\mathfrak{G}$ auf $|w| < 1$ darstellt, so daß also $f(z)$ auf jedem Primende E von $\mathfrak{G}$ konstant ist. In diesem Fall bestätigt man dann unschwer, daß eine in $\overline{\mathfrak{G}}$ stetig gegen $f(z)$ konvergente Funktionenfolge $\{f_n(z)\}$ dort sicher auch im weiteren Sinne stetig gegen $f(z)$ konvergiert.

§11. Ein Satz für stetige Konvergenz

Sind die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$ in der z-Ebene gegeben, so ist nun die Frage, unter welchen topologischen Annahmen über $\mathfrak{G}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ die Abbildungsfunktionen $w = f_n(z)$ von $\mathfrak{G}_n$ auf $|w| < 1$ stetig gegen $w = f_0(z)$ konvergieren im Sinne unserer Definition 1. Es ist dabei keine wesentliche Einschränkung der Allgemeinheit, $\mathfrak{G}_0$ als beschränkt anzunehmen; andernfalls führe man zuerst $\mathfrak{G}_0$ durch eine einfache Abbildung in ein beschränktes Gebiet über.

Als entscheidend erweist sich die folgende

Bedingung (B_1). *Die Punkte $z_n', z_n'' \in \mathfrak{G}_n$ konvergieren gegen den Punkt z_0 des Randes R_0 von $\mathfrak{G}_0$. Dann muß es stets möglich sein, z_n' und z_n'' durch einen Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser ε_n $(\varepsilon_n \to 0)$ vom Punkt $z = 0$ zu trennen.*

[22] Bei WALSH ([*32*], S. 348) wird wieder eine andere Definition von „stetiger Konvergenz" gegeben.

Sodann lautet unser

Satz 11 *(Stetige Konvergenz). Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete* $\mathfrak{G}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *der z-Ebene mit* $O \in \mathfrak{G}_n$ *seien vermöge* $w=f_n(z)$ *konform und normiert auf* $|w|<1$ *abgebildet;* $\mathfrak{G}_0$ *sei beschränkt und besitze nur einfache Primenden.*

Dann ist die Bedingung (B_1) *zusammen mit* $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ *notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge* $\{f_n(z)\}$ *in* $\overline{\mathfrak{G}}_0$ *stetig gegen* $f_0(z)$ *konvergiert.*

Vorbemerkungen. a) Die Forderung an $\mathfrak{G}_0$, nur einfache Primenden zu besitzen, ist natürlich. Sonst kann man ja von $f_0(z)$ gar nicht reden, wenn $z_0 \in R_0$ liegt, und Definition 1 wäre nicht anwendbar. Hervorgehoben sei, daß $\mathfrak{G}_0$ wohl nicht punktförmige Primenden E besitzen kann; für $z_0 \in E$ ist dann $f_0(z_0)=f_0(E)$ zu setzen.

b) Die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ brauchen nicht beschränkt oder gleichmäßig beschränkt zu sein, wenn (B_1) und $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ erfüllt sind, im Gegensatz zu § 4,

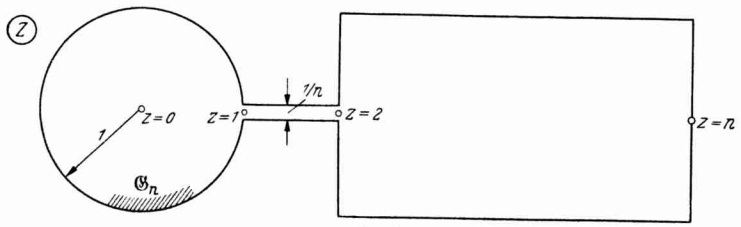

Fig. 8

wo die Bedingungen (4.1) und (4.2) die gleichmäßige Beschränktheit aller $\mathfrak{G}_n$ nach sich zogen. Im beigezeichneten Beispiel ist $\mathfrak{G}_0$ der Kreis $|z|<1$.

c) Man wird sich fragen, ob in Satz 11 die Bedingung (B_1) nicht ersetzt werden kann durch die folgende einfachere: „Die Punkte z_n' konvergieren gegen den Punkt z_0 des Randes R_0 von $\mathfrak{G}_0$. Dann muß es stets möglich sein, z_n' durch einen Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser ε_n $(\varepsilon_n \to 0)$ vom Punkt $z=0$ zu trennen."

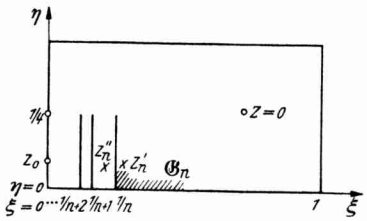

Fig. 9

Dies ist nicht der Fall, wie das Beispiel der Fig. 9 zeigt; $\mathfrak{G}_n$ ist dabei ein mit Einschnitten versehenes Rechteck, $\mathfrak{G}_0$ dieses Rechteck selbst. Hier ist nun die eben genannte einfachere Bedingung erfüllt, wie man sieht. Nicht erfüllt ist jedoch die Bedingung (B_1) von Satz 11 (vgl. z.B. die Punkte z_n', z_n''), und da dieselbe notwendig ist für das Bestehen von Satz 11, sehen wir hiermit, daß (B_1) nicht durch die oben genannte einfachere Bedingung ersetzt werden kann. Entsprechendes gilt für den folgenden Satz 12.

Beweis von Satz 11. A) Die Bedingungen sind notwendig.

(i) $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$. Zunächst ist zu sagen: $\mathfrak{R}(\mathfrak{G}_n) \neq 0$. Sonst gäbe es eine Punktfolge $z_n \to 0$ derart, daß $|f_n(z_n)| \to 1$ strebt für eine Indexfolge $n=n_k$,

wogegen $f_0(0)=0$ ist. Weiter behaupten wir nun: $\{f_n(z)\}$ konvergiert gleichmäßig gegen $f_0(z)$ in jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}_n)$. Denn dies gilt zunächst für eine Nullpunktsumgebung U in $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}_n)$, die zu $\mathfrak{G}_0$ gehört wegen $O\in\mathfrak{G}_0$. Andernfalls gäbe es eine Folge $\{z_n\}$ und einen Punkt z_0 mit $z_0, z_n\in U$, $z_n\to z_0$ so, daß $|f_n(z_n)-f_0(z_0)|\geqq\alpha>0$ ist für beliebig hohe Indizes n, im Widerspruch zur Annahme. Die gleichmäßige Konvergenz von $\{f_n(z)\}$ in jedem abgeschlossenen Teil von $\mathfrak{K}(\mathfrak{G}_n)$ ist nun eine Folge des Satzes von VITALI (es ist ja $|f_n(z)|\leqq 1$ für $z\in\mathfrak{G}_n$), und die Grenzfunktion muß nach WEIERSTRASS mit $f_0(z)$ identisch sein. Nach Satz B ist also $\mathfrak{G}_n\to\mathfrak{G}_0$ $(n\to\infty)$.

(ii) Die Bedingung (B_1) ist erfüllt. Wir nehmen also an, es sei

$$f_n(z_n')\to f_0(z_0)\qquad f_n(z_n'')\to f_0(z_0)\qquad z_n', z_n''\to z_0\in R_0;\ z_n', z_n''\in\mathfrak{G}_n,$$

und wir müssen zeigen, daß z_n', z_n'' durch einen Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $\varepsilon_n\to 0$ vom Punkt $z=0$ zu trennen sind.

Haben die $\mathfrak{G}_n$ Flächen $A_n\leqq A<\infty$, so ist dieser Nachweis einfach. Ist nämlich $\delta_n=\max(|f_n(z_n')-f_0(z_0)|, |f_n(z_n'')-f_0(z_0)|)$, so gibt es nach Hilfssatz 1 einen Radius ϱ_n in $(\delta_n, \sqrt{\delta_n})$ derart, daß das Bild von $k(\varrho_n)$ um den Punkt $f_0(z_0)$ in $\mathfrak{G}_n$ einen Durchmesser hat, der $\leqq\left(\frac{2\pi A}{\log\frac{1}{\delta_n}}\right)^{\frac{1}{2}}=\varepsilon_n$ ist. Nun trennt aber $k(\varrho_n)$ die Punkte $f_n(z_n')$ und $f_n(z_n'')$ von $w=0$, also trennt sein Bild die Punkte z_n' und z_n'' von $z=0$.

Im allgemeinen Fall müssen wir unseren Beweis modifizieren. Wir wählen folgende Größen. $\mathfrak{G}_0$ sei in $|z|<M$ gelegen, $\varepsilon>0$ vorgegeben, und nun $r<1$ so klein gewählt, daß $\left(\frac{8\pi^2M^2}{\log\frac{1}{r}}\right)^{\frac{1}{2}}<\frac{\varepsilon}{4}$ ist. Sodann wählen wir $\delta<\frac{\varepsilon}{4}$ so klein, daß das Bild jedes Querschnitts in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $<\delta$ in der w-Ebene einen Durchmesser $<\frac{r}{3}$ hat, unabhängig von n. Das läßt sich einrichten: Ist nämlich δ genügend klein, so läßt sich der Querschnitt in einen Kreis von beliebig kleinem Radius und Mittelpunkt auf R_n (Rand von $\mathfrak{G}_n$) einschließen; dessen Durchschnitt mit $\mathfrak{G}_n$ hat aber, wie man mit Hilfssatz 2 (ii) sieht, in der w-Ebene ein Bild von beliebig kleinem Durchmesser, also auch die Teilmenge, die von unserem Querschnitt herrührte. Schließlich wählen wir noch n_0 so, daß (α) $|f_n(z_n')-f_0(z_0)|<\frac{r}{2}$ und $|f_n(z_n'')-f_0(z_0)|<\frac{r}{2}$ ist für $n\geqq n_0$, und (β) $n_0\geqq n_0(\delta)$ des Hilfssatzes 5.

Solche unter den $\mathfrak{G}_n$ $(n\geqq n_0)$, die Punkte in $|z|\geqq 2M$ haben, operieren wir wie folgt. $\mathfrak{G}_n$ sei ein solches Gebiet, P_1 ein Punkt in $|z|\geqq 2M$. Nach dem Hilfssatz 5 läßt sich ein geradliniger δ-Querschnitt $q_n^{(1)}$ in $\mathfrak{G}_n$ finden, der in der δ-Umgebung von R_0 verläuft und P_1 von $z=0$ trennt; das $z=0$ enthaltende Teilgebiet von $\mathfrak{G}_n$ sei $\mathfrak{G}_n^{(1)}$. Besitzt $\mathfrak{G}_n^{(1)}$ noch einen Punkt P_2 in $|z|\geqq 2M$, so trenne man ihn durch $q_n^{(2)}$ ab, also durch einen Querschnitt in $\mathfrak{G}_n$, der wieder in der δ-Umgebung des Randes von $\mathfrak{G}_0$ verläuft; das $z=0$ enthaltende Teilgebiet von $\mathfrak{G}_n$ sei $\mathfrak{G}_n^{(2)}$. Und so fort, man erhält eine höchstens

abzählbare Folge von Teilgebieten $\mathfrak{G}_n^{(\nu)}$ von $\mathfrak{G}_n$, die sich auch überschneiden dürfen. Der völlig in $|z| \leq 2M$ gelegene Durchschnitt $\bigcap_\nu \mathfrak{G}_n^{(\nu)}$ werde durch $w = f_n(z)$ auf die Teilmenge $\mathfrak{M}_n$ von $|w| < 1$ abgebildet.

Nun schlagen wir den durch Hilfssatz 3 (ii) für $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_n$ und unser gewähltes r bestimmten Kreis $k(\varrho) = k(\varrho_n)$ um $w = f_0(z_0)$. Da alle unsere Abschnitte nach Konstruktion in $|w| > 1 - \frac{r}{3}$ liegen, hat $k(\varrho)$ mit $\mathfrak{M}_n$ innere Punkte gemeinsam, z.B. den Punkt $w_1 = (1-\varrho) f_0(z_0)$. Laufen wir von w_1 aus nach beiden Seiten, so seien w_2, w_3 die beiden ersten Punkte, die nicht mehr innere Punkte von $\mathfrak{M}_n$ sind, d.h. sie liegen entweder auf $|w| = 1$ oder sind Häufungspunkte von Punkten auf den $f_n(q_n^{(\nu)})$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Im letzteren Fall verbinden wir w_2 (bzw. w_3) mit einem Punkt auf $f_n(q_n^{(\nu)})$ [bzw. $f_n(q_n^{(\mu)})$] durch ein beliebig kurzes Geradenstück, dessen Bild in der z-Ebene ein analytisches Kurvenstück der Länge $< \frac{\varepsilon}{8}$ sein möge, und verfolgen dann $f_n(q_n^{(\nu)})$ und $f_n(q_n^{(\mu)})$ bis auf $|w| = 1$. Der damit konstruierte Kurvenzug $C = C_n$: $\omega_1, w_3, w_1, w_2, \omega_2$ trennt sicher $f_n(z_n')$ und $f_n(z_n'')$ von $w = 0$, da ja z. B. $|f_n(z_n') - f_0(z_0)| < \frac{r}{2}$ ist und die Kurven $f_n(q_n^{(\nu)})$, $f_n(q_n^{(\mu)})$ höchstens einen Durchmesser $\frac{r}{3}$ haben. Also trennt das Bild von C in der z-Ebene die Punkte z_n', z_n'' von $z = 0$; dieses Bild hat aber, wie man mit Hilfssatz 3 (ii) sieht, einen Durchmesser

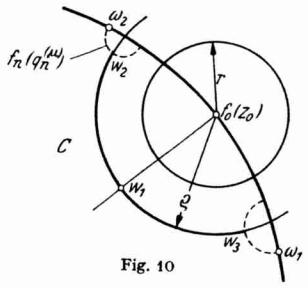

Fig. 10

$$< \delta + \frac{\varepsilon}{8} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \delta < \varepsilon$$

und bildet einen Querschnitt in $\mathfrak{G}_n$, was zu zeigen war. (Wenn $\mathfrak{G}_n$ keine Punkte in $|z| \geq 2M$ hat, braucht es nicht operiert zu werden; $\mathfrak{M}_n$ ist dann einfach $|w| < 1$.)

B) Die Bedingungen sind hinreichend. Mit Rücksicht auf Satz B müssen wir zeigen: Aus $z_n \in \mathfrak{G}_n$ mit $z_n \to z_0 \in R_0$ folgt $f_n(z_n) \to f_0(z_0)$ $(n \to \infty)$. Zunächst bemerken wir:

(11.1) Es gibt eine Folge $z_n' \in \mathfrak{G}_n$ mit $z_n' \to z_0$ so, daß $f_n(z_n') \to f_0(z_0)$.

Zu diesem Zweck wählen wir eine Folge $\{\bar{z}_k\}$ von Punkten aus $\mathfrak{G}_0$ mit $\bar{z}_k \to z_0$; für diese gilt dann (Voraussetzung einfacher Primenden!) $f_0(\bar{z}_k) \to f_0(z_0)$, und es sei $\{\varepsilon_k\}$ eine beliebige Nullfolge. Infolge Satz B gibt es für $k = 1$, d.h. festes $\bar{z}_1$, ε_1 einen Index n_1 derart, daß $f_n(\bar{z}_1)$ erklärt ist und $|f_n(\bar{z}_1) - f_0(\bar{z}_1)| < \varepsilon_1$ für $n \geq n_1$. Aus denselben Gründen gibt es allgemein für den Index k, d.h. festes $\bar{z}_k$, ε_k einen Index $n_k > n_{k-1}$ derart, daß $f_n(\bar{z}_k)$ erklärt ist und $|f_n(\bar{z}_k) - f_0(\bar{z}_k)| < \varepsilon_k$ für $n \geq n_k$. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} z_n' &= 0 \qquad (n < n_1), \\ z_n' &= \bar{z}_1 \qquad (n_1 \leq n < n_2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n' &= \bar{z}_k \qquad (n_k \leq n < n_{k+1}). \end{aligned}$$

Dann haben wir für diese Folge $z_n' \to z_0$ und

$$|f_n(z_n') - f_0(z_0)| \leq |f_n(z_n') - f_0(\overline{z}_k)| + |f_0(\overline{z}_k) - f_0(z_0)| < \varepsilon_k + \varepsilon$$
$$(n_k \leq n < n_{k+1},\ k \geq k_0),$$

also gilt (11.1).

Nun kommen wir wieder auf unsere beliebige Punktfolge $\{z_n\}$ mit $z_n \in \mathfrak{G}_n$ und $z_n \to z_0$ zurück. Nach Voraussetzung (B_1) kann man z_n, z_n' durch einen ε_n-Querschnitt q_n in $\mathfrak{G}_n$ von $z=0$ trennen, und man erkennt sofort mit Hilfssatz 2, daß es ein ϱ_n in $(\varepsilon_n, \sqrt{\varepsilon_n})$ gibt, für das das Bild von $\sum_i k_i(\varrho_n)$ eine Menge von Querschnitten in $|w|<1$ vom Gesamtdurchmesser $< \frac{2\pi}{\left(\log \frac{1}{\varepsilon_n}\right)^{\frac{1}{2}}} = \delta_n$ ist $(\delta_n \to 0)$; insbesondere hat also das Bild von q_n einen Durchmesser $\leq \delta_n$. Nun werden z_n, z_n' durch q_n von $z=0$ getrennt, also $f_n(z_n), f_n(z_n')$ durch das Bild von q_n in der w-Ebene von $w=0$, d.h. $f_n(z_n)$ und $f_n(z_n')$ gehören einer δ_n-Umgebung an. Aus $f_n(z_n') \to f_0(z_0)$ folgt daher $f_n(z_n) \to f_0(z_0)$, und dies war zu zeigen.

Zusätze. Wir wollen noch hervorheben, daß wir zugleich folgenden Satz bewiesen haben, in dem Aussage und Voraussetzung lokal sind.

Zusatz 1. *Für die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ von Satz 11 gelte $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$. Dann konvergiert $\{f_n(z)\}$ an einer Stelle $z_0 \in R_0$ genau dann stetig gegen $f_0(z)$ [d.h. aus $z_n \in \mathfrak{G}_n$ mit $z_n \to z_0$ folgt $f_n(z_n) \to f_0(z_0)$], wenn die Bedingung (B_1) an der Stelle z_0 erfüllt ist.*

Ferner wollen wir noch die Beziehung zu dem folgenden Satz von COURANT ([*10*], S. 108) herstellen.

Zusatz 2 (JORDAN-*Gebiete*). *Die Gebiete $\mathfrak{G}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ von Satz 11 seien* JORDAN-*Gebiete. Dann konvergiert $\{f_n(z)\}$ sicher dann stetig in $\overline{\mathfrak{G}}_0$ gegen $f_0(z)$, wenn die Bedingungen von Satz C (§ 7) erfüllt sind.*

Beweis. Es genügt, anzunehmen, es sei $z_n \in \mathfrak{G}_n$ und $z_n \to z_0 \in R_0$; $\{f_{n_k}(z_{n_k})\}$ konvergiere gegen ein $\overline{w}$ auf $|w|=1$. Nach Satz C gilt daher $f_{n_k}^{-1}(f_{n_k}(z_{n_k})) \to f_0^{-1}(\overline{w})$, also $z_0 = f_0^{-1}(\overline{w})$, d.h. wegen der Einfachheit der Primenden von $\mathfrak{G}_0$ sicher $\overline{w} = f_0(z_0)$, und der Grenzwert der Folge $\{f_{n_k}(z_{n_k})\}$ war also unabhängig von $\{n_k\}$. Dies bedeutet $f_n(z_n) \to \overline{w} = f_0(z_0)$.

Indessen sei darauf hingewiesen, daß entgegen einer Bemerkung von COURANT ([*11*], S. 70) die Bedingung (i) von Satz C nicht notwendig ist für die Gültigkeit von Zusatz 2; man vergleiche dazu das Beispiel der Fig. 8.

§12. Ein Satz für stetige Konvergenz im weiteren Sinne

Nachdem in § 11 die Frage der stetigen Konvergenz erledigt worden ist, behandeln wir nun das analoge Problem, unter welchen Annahmen über die $\mathfrak{G}_n$ stetige Konvergenz der Folge $\{f_n(z)\}$ gegen $f_0(z)$ im weiteren Sinne vorliegt. Von $\mathfrak{G}_0$ können wir dabei wieder Beschränktheit verlangen. Von Wichtigkeit ist im folgenden die

Bedingung (B_2). *Die Punkte* $z_n', z_n'' \in (\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{G}_n)$ *konvergieren gegen das Primende E des Randes* R_0 *von* $\mathfrak{G}_0$. *Dann muß es stets möglich sein,* z_n' *und* z_n'' *durch einen Querschnitt* q_n *in* $\mathfrak{G}_n$ *vom Durchmesser* ε_n $(\varepsilon_n \to 0)$ *vom Punkt* $z = 0$ *zu trennen.*

Unter Benützung dieser Bedingung lautet

Satz 12 *(Stetige Konvergenz im weiteren Sinne). Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete* $\mathfrak{G}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *der z-Ebene mit* $O \in \mathfrak{G}_n$ *seien vermöge* $w = f_n(z)$ *konform und normiert auf* $|w| < 1$ *abgebildet;* $\mathfrak{G}_0$ *sei beschränkt.*

Dann ist die Bedingung (B_2) *zusammen mit* $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ *notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge* $\{f_n(z)\}$ *in* $\overline{\mathfrak{G}}_0$ *stetig im weiteren Sinne gegen* $f_0(z)$ *konvergiert.*

Der Beweis von Satz 12 verläuft völlig parallel zum Beweis von Satz 11 und kann daher übergangen werden.

Bemerkungen. a) Daß Satz 12 weitergehend als Satz 11 sein kann, sieht man am Beispiel der Fig. 4. Die Bedingungen in Satz 12 sind dort erfüllt, jedoch nicht diejenigen in Satz 11. $\mathfrak{G}_0$ ist in diesem Falle ein mit einem Einschnitt versehenes Rechteck.

b) Die Bedingung (B_2) ist keine Folge von $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$, selbst dann nicht, wenn $\mathfrak{G}_n \nearrow \mathfrak{G}_0$; man betrachte dazu Fig. 9.

c) Schließlich gilt noch ein Analogon zu Zusatz 1 von Satz 11.

Zusatz. *Für die Gebiete* $\mathfrak{G}_n$ *von Satz 12 gelte* $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$. *Dann konvergiert* $\{f_n(z)\}$ *am Primende E von* $\mathfrak{G}_0$ *genau dann stetig im weiteren Sinne gegen* $f_0(z)$ [*d.h. aus* $z_n \in (\mathfrak{G}_0 \cap \mathfrak{G}_n)$ *mit* $z_n \to E$ *von* $\mathfrak{G}_0$ *folgt* $f_n(z_n) \to f_0(E)$], *wenn die Bedingung* (B_2) *am Primende E erfüllt ist.*

An der Fig. 9 liest man sofort ab, daß dieser Zusatz anwendbar sein kann, ohne daß Satz 12 selbst anwendbar ist, da die Bedingung (B_2) nicht überall erfüllt ist.

§13. Die Sonderfälle $\mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$

Nach den allgemeinen Sätzen 11 und 12 wollen wir nun die Verhältnisse genauer studieren für den Fall, daß $\mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{G}_0$ oder $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$ ist $(n = 1, 2, \ldots)$.

$\mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{G}_0$. Wir sahen bereits im Anschluß an Satz 12, daß dort selbst in diesem Sonderfall die Bedingung (B_2) nicht weggelassen werden kann; das dort angeführte Beispiel der Fig. 9 zeigt ferner, daß auch in Satz 11 die Bedingung (B_1) nicht aus $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ und $\mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{G}_0$ folgt. $\mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{G}_0$ bedeutet also für Satz 11 und Satz 12 keine Vereinfachung. Zu bemerken wäre höchstens, daß wegen $\mathfrak{G}_n \subset \mathfrak{G}_0$ in der Beurteilung von $f_n(z_n)$ jetzt die z_n alle Punkte aus $\mathfrak{G}_n$ durchlaufen können.

$\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$. Hier bekommen wir jedoch eine beträchtliche Vereinfachung von Satz 12; es zeigt sich nämlich, daß die Bedingung (B_2) überflüssig ist.

Satz 13. *Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete* $\mathfrak{G}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *der z-Ebene mit* $O \in \mathfrak{G}_n$ *seien vermöge* $w = f_n(z)$ *konform und normiert auf* $|w| < 1$ *abgebildet.* $\mathfrak{G}_0$ *sei beschränkt und es gelte* $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Dann ist $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ *notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge* $\{f_n(z)\}$ *in* $\mathfrak{G}_0$ *stetig im weiteren Sinne gegen* $f_0(z)$ *konvergiert.*

Beweis. Wegen Satz B genügt es zu zeigen, daß die Bedingung (B_2) im Falle $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ eine Folge von $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ ist.

Es seien $\{z_n'\}$ und $\{z_n''\}$ zwei Punktfolgen mit $z_n', z_n'' \in \mathfrak{G}_0$ und $z_n', z_n'' \to E$ von $\mathfrak{G}_0$.

Fall A. E trägt einen erreichbaren Randpunkt z_0. Da dieser Hauptpunkt von E ist, gibt es für eine Nullfolge $\{r_k\}$ Querschnitte q_k in $\mathfrak{G}_0$, die auf $|z - z_0| = r_k$ liegen und E definieren. Die Endpunkte von q_k, die also zum Rand von $\mathfrak{G}_0$ gehören, seien mit R_k und Q_k bezeichnet.

Fall A_1. Es gibt beliebig kleine r_k, für die $R_k = Q_k$ ist. Dann besteht E aus dem einzigen Punkt z_0; denn der durch q_k erzeugte Abschnitt g_k von $\mathfrak{G}_0$ liegt völlig in $|z - z_0| < r_k$, also ist $\bigcap_k \bar{g}_k = z_0 = E$. Nun wählen wir $\varepsilon > 0$ und k so, daß $r_k < \varepsilon$ ist, halten aber k jetzt fest. Da q_k zu $\mathfrak{G}_0$ gehört (ohne R_k, Q_k), gehört q_k auch zu $\mathfrak{G}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Der Punkt z_0 ist Randpunkt von $\mathfrak{G}_0$, also gibt es wegen $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ Randpunkte ζ_n von $\mathfrak{G}_n$ mit $\zeta_n \to z_0$, insbesondere gibt es für $n > n_0$ in $|z - z_0| < \frac{r_k}{2}$ Randpunkte von $\mathfrak{G}_n$. $\mathfrak{G}_n$ hat somit für $n > n_0$ in $|z - z_0| < \frac{r_k}{2}$ und in $|z - z_0| > r_k$ Randpunkte, weshalb $R_k = Q_k$ Randpunkte von $\mathfrak{G}_n$ sind $(n > n_0)$; q_k ist demnach für alle diese n ein Querschnitt in $\mathfrak{G}_n$. Schließlich ist $|z_0 - z_n'| < r_k$, $|z_0 - z_n''| < r_k$ für $n > n_1$, so daß sich sagen läßt: Für $n > \bar{n}$ werden die Punkte z_n', z_n'' durch den Querschnitt q_k in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $< 2\varepsilon$ von $z = 0$ getrennt. Das mußte aber gezeigt werden.

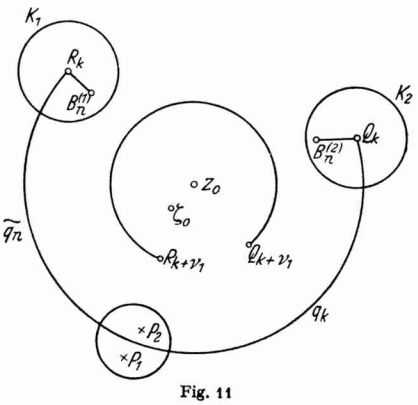

Fig. 11

Fall A_2. Die Punkte R_k, Q_k sind für hinreichend kleine r_k verschieden. Nach Vorgabe von $\varepsilon > 0$ wählen wir wieder ein $r_k < \varepsilon$, halten aber k jetzt fest und zeichnen q_k in $\mathfrak{G}_0$ ein. Dann gibt es ein ν_0 so, daß weder Q_k noch R_k zu $\overline{g_{k+\nu}}$ gehört für $\nu \geqq \nu_0$; $g_{k+\nu}$ ist dabei wie oben der durch $q_{k+\nu}$ erzeugte Abschnitt von $\mathfrak{G}_0$. Wäre nämlich z. B. $R_k \in \overline{g_{k+\nu_i}}$ $(\nu_i \to \infty)$, so wäre $R_k \in \bigcap_{\nu_i} \overline{g_{k+\nu_i}} = E$, d.h. E hätte zwei erreichbare Randpunkte, z_0 und R_k, was nicht sein kann. Wir greifen nun ein beliebiges, weiterhin festgehaltenes $\nu_1 \geqq \nu_0$ heraus, für das also R_k und Q_k nicht zu $\overline{g_{k+\nu_1}}$ gehören; es sei etwa

$$\min\{\operatorname{dist}(R_k, \overline{g_{k+\nu_1}}), \operatorname{dist}(Q_k, \overline{g_{k+\nu_1}})\} = d > 0.$$

Im folgenden brauchen wir noch die beiden Testpunkte P_1, P_2. Sie gehören einer festen, in $\mathfrak{G}_0$ gelegenen Umgebung U eines Punktes auf q_k an und sind so beschaffen, daß P_2 in g_k liegt, während man P_1 durch eine JORDAN-Kurve C_1 in $\mathfrak{G}_0$ mit $z = 0$ verbinden kann, ohne q_k zu treffen; insbesondere ist

$$\min\{\operatorname{dist}(R_k, C_1), \operatorname{dist}(Q_k, C_1)\} = d_1 > 0.$$

Ist ferner ζ_0 irgendein fester Punkt $\in g_{k+\nu_1} \subset g_k$, so läßt er sich mit P_2 in $\mathfrak{G}_0$ durch eine JORDAN-Kurve C_2 verbinden, die q_k nicht trifft; insbesondere ist

$$\min\{\operatorname{dist}(R_k, C_2), \operatorname{dist}(Q_k, C_2)\} = d_2 > 0.$$

Nun schlagen wir um R_k und Q_k Kreise K_1, K_2 mit dem Radius

$$\varrho < \min\left(d, d_1, d_2, \frac{R_k Q_k}{2}, r_k\right),$$

was eine von n unabhängige Zahl ist. In diesen Kreisen, die fremd sind und $\overline{g_{k+\nu_1}}$, C_1 und C_2 nicht schneiden, finden sich Randpunkte $A_n^{(1)}, A_n^{(2)}$ von $\mathfrak{G}_n$ für $n > n_1$, da ja R_k, Q_k Randpunkte von $\mathfrak{G}_0$ sind und $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$. Zieht man die Geraden $R_k A_n^{(1)}$, $Q_k A_n^{(2)}$, so gibt es von R_k bzw. von Q_k aus gesehen erste Randpunkte $B_n^{(1)}, B_n^{(2)}$ von $\mathfrak{G}_n$, wobei eventuell $R_k = B_n^{(1)}$, $Q_k = B_n^{(2)}$.

Wir stellen jetzt fest: (i) Der konstruierte Kurvenzug $B_n^{(1)}, R_k, q_k, Q_k, B_n^{(2)}$ ist ein Querschnitt $\tilde{q}_n$ in $\mathfrak{G}_n$ vom Durchmesser $< 2r_k + 2\varrho < 4r_k < 4\varepsilon$ $(n > n_1)$. Diesem Querschnitt $\tilde{q}_n$ entspreche ein Abschnitt Δ_n von $\mathfrak{G}_n$. (ii) Es ist

$$g_{k+\nu_1} \subset \Delta_n \quad (n > n_1). \tag{13.1}$$

(i) ist klar; man beachte die Konstruktion und $q_k \subset \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$.

(ii) Zunächst gehört unser Punkt ζ_0 zu $g_{k+\nu_1}$ (nach Konstruktion), er gehört aber auch zu Δ_n. Die Punkte $P_1, P_2 \in \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$ liegen nämlich ersichtlich auf verschiedenen Seiten des Querschnitts $\tilde{q}_n$ in $\mathfrak{G}_n$, und da C_1 den Punkt P_1 mit $z = 0$ in $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$ verbindet, ohne q_k und K_1, K_2 zu treffen (also ohne $\tilde{q}_n$ zu treffen), liegt $P_2 \in \Delta_n$ $(n > n_1)$. Nun betrachten wir C_2: Diese JORDAN-Kurve verbindet P_2 mit ζ_0 in $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$, ohne q_k zu treffen, und nach Wahl von n_1 kann C_2 auch die Strecken $R_k B_n^{(1)}$ und $Q_k B_n^{(2)}$ nicht treffen, d.h. C_2 verläuft in $\mathfrak{G}_n$ und trifft $\tilde{q}_n$ nicht, d.h. ζ_0 gehört zu Δ_n.

Ist weiter ζ_1 ein beliebiger Punkt aus $g_{k+\nu_1}$, so verbinden wir ihn mit ζ_0 in $g_{k+\nu_1}$ durch eine JORDAN-Kurve C_3. Läge ζ_1 nicht in Δ_n, so müßte C_3 den Rand von Δ_n schneiden. Dieser Rand besteht aus Teilen $R^{(1)}, R^{(2)}$, wobei $R^{(1)}$ zum Rand von $\mathfrak{G}_n$ gehört, $R^{(2)}$ aber nur innere Punkte von $\mathfrak{G}_n$ enthält, nämlich $R^{(2)} = \tilde{q}_n$. C_3 kann nun sicher nicht $R^{(1)}$ schneiden, da ja $C_3 \subset g_{k+\nu_1} \subset \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$, und ferner kann C_3 nicht den in $K_1 \cup K_2$ gelegenen Teil von $R^{(2)}$ schneiden, da nach Konstruktion $K_1 \cap \overline{g_{k+\nu_1}} = K_2 \cap \overline{g_{k+\nu_1}} = 0$ ist. Also müßte C_3 den Weg q_k schneiden, d.h. es gäbe auf q_k innere Punkte von $g_{k+\nu_1}$; dies ist wegen $g_{k+\nu_1} \subset g_k$ unmöglich.

Also liegt ζ_1 in Δ_n, d.h. es gilt (13.1). Da nun aber z_n', z_n'' gegen E streben, so gilt $z_n', z_n'' \in g_{k+\nu_1}$ $(n > n_2)$ und daher $z_n', z_n'' \in \Delta_n$ $(n > \bar{n})$, d.h.

$$\left\{\begin{array}{l} z_n', z_n'' \text{ werden für } n > \bar{n} \text{ durch den Querschnitt } \tilde{q}_n \text{ in } \mathfrak{G}_n \text{ vom Durch-} \\ \text{messer } < 4\varepsilon \text{ von } z = 0 \text{ getrennt,} \end{array}\right. \tag{13.2}$$

was zu zeigen war.

Fall B. E hat keinen erreichbaren Randpunkt. Wir schlagen um einen Hauptpunkt z_0 von E Querschnitte q_k, die auf $|z-z_0|=r_k$ gelegen sind ($r_k \to 0$), und die E definieren. Dann kann der Fall A_1 nicht eintreten. Denn sonst bestünde E aus dem Punkt z_0, der dann natürlich erreichbar wäre.

Wir gehen daher gemäß Fall A_2 vor, zeichnen q_k, R_k, Q_k. Wieder gibt es ein ν_0 der dort besprochenen Art; andernfalls wäre entweder R_k oder Q_k erreichbarer Randpunkt von E, im Widerspruch zu unserer jetzigen Annahme. Die übrige Konstruktion bleibt unverändert, man erhält also auch im Fall B das Resultat (13.2).

Damit ist gezeigt, daß bei $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ die Bedingung (B_2) eine Folge von $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ ist, und Satz 13 ist bewiesen.

§14. Einige Folgerungen im Fall $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$

I. Aus dem eben bewiesenen Satz 13 läßt sich nachstehendes Ergebnis folgern, das die stetige Konvergenz der Folge $\{f_n(z)\}$ betrifft, wenn hierbei nur Punkte $z_n \in \mathfrak{G}_0$ in Betracht gezogen werden.

Zusatz 1. *Voraussetzung: Wie in Satz 13; $\mathfrak{G}_0$ besitze nur einfache Primenden.*

Behauptung: Aus $z_n \in \mathfrak{G}_0$ und $z_n \to z_0 \in \overline{\mathfrak{G}}_0$ folgt stets $f_n(z_n) \to f_0(z_0)$ genau dann, wenn $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$.

Hierin ist unter $f_0(z_0)$ der Punkt $f_0(E)$ zu verstehen, wenn z_0 einem Primende E von $\mathfrak{G}_0$ angehört. Der Beweis des Zusatzes folgt unmittelbar aus Satz 13, wenn man beachtet, daß $z_n \to z_0 \in$ Rand von $\mathfrak{G}_0$ im Falle einfacher Primenden impliziert: $z_n \to E$ $(n \to \infty)$.

Man wird sich natürlich fragen, ob in Zusatz 1 die Forderung $z_n \in \mathfrak{G}_0$ nicht einfach weggelassen werden kann. Das würde bedeuten, daß in Satz 11 die Bedingung (B_1) überflüssig ist, wenn $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ ist, so wie das ja bei Satz 12 der Fall war. Indessen ist dieser Analogieschluß falsch, denn es gilt

Zusatz 2. *Die Forderung $z_n \in \mathfrak{G}_0$ kann in Zusatz 1 nicht weggelassen werden.*

Dies zeigt das Beispiel der Fig. 12, in dem sogar $\mathfrak{G}_n \searrow \mathfrak{G}_0$; $\mathfrak{G}_0$ ist hier das Kreisgebiet $|z|<1$. Hier ist nämlich für die angedeuteten Punkte z_n', z_n'' die Bedingung (B_1) von Satz 11 nicht erfüllt, weshalb auch dessen Aussage falsch ist.

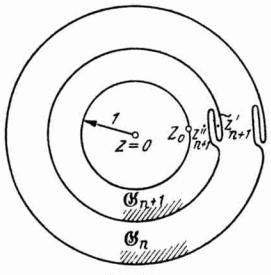

Fig. 12

Die Forderung $\mathfrak{G}_0 < \mathfrak{G}_n$ gab also nur im Falle der stetigen Konvergenz im weiteren Sinne eine Vereinfachung, weil eben dort die Folge $\{f_n(z_n)\}$ nur für Punkte $z_n \in \mathfrak{G}_0$ untersucht wird.

Schließlich folgt aus Satz 13 noch die folgende wichtige *Aussage bezüglich gleichmäßiger Konvergenz* der $f_n(z)$ in $\mathfrak{G}_0$.

Satz 14 *(Gleichmäßige Konvergenz). Die einfach zusammenhängenden und endlichen Gebiete* $\mathfrak{G}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *der z-Ebene mit* $O \in \mathfrak{G}_n$ *seien vermöge* $w=f_n(z)$ *konform und normiert auf* $|w|<1$ *abgebildet.* $\mathfrak{G}_0$ *sei beschränkt und es gelte* $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$.

Dann ist $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ *notwendig und hinreichend dafür, daß die Folge* $\{f_n(z)\}$ *in* $\mathfrak{G}_0$ *gleichmäßig gegen* $f_0(z)$ *konvergiert*[23].

Vorbemerkung. Ein etwas schwächerer Satz stammt von FARRELL ([*12*], S. 573)[24]; dort wurde aber zusätzlich verlangt:

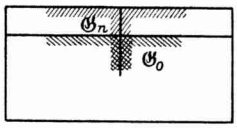

Fig. 13

a) $\mathfrak{G}_0$ habe nur einfache Primenden; der FARRELLsche Satz wäre also im Beispiel der Fig. 13 nicht anwendbar.

b) $\mathfrak{G}_0$ besitzt einen Rand, der auch Rand eines einfach zusammenhängenden unendlichen Gebiets ist; dies wäre ebenfalls bei unserem Beispiel nicht erfüllt.

c) $\mathfrak{G}_n$ sind gleichmäßig beschränkt; diese Voraussetzung war beweistechnisch bedingt, da FARRELL mit älteren LINDELÖFschen Sätzen operierte statt mit dem FERRANDschen Satz, wie das hier geschah.

Beweis von Satz 14. $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ ist notwendig (Satz B). Wenn andererseits $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ erfüllt ist, die Aussage aber falsch wäre, so gäbe es eine Punktfolge $\{z_n\}$ mit $z_n \in \mathfrak{G}_0$ so, daß $|f_n(z_n)-f_0(z_n)| \geqq 2\alpha > 0$ ist. Die z_n streben dabei (wieder wegen Satz B) gegen den Rand von $\mathfrak{G}_0$, und es sei angenommen, daß $\{z_n\}$ gegen das Primende E von $\mathfrak{G}_0$ konvergiere. Dann ist aber $f_0(z_n) \to f_0(E)$, es wäre also $|f_n(z_n)-f_0(E)| \geqq \alpha > 0$, obwohl $z_n \in \mathfrak{G}_0$ und $z_n \to E$ gilt; dies wäre im Widerspruch zu Satz 13.

II. Manchmal ist es zweckmäßig, über das Verhalten der Funktionen $g_n(z)$ Bescheid zu wissen, die $\mathfrak{G}_n$ auf den Kern $\mathfrak{G}_0$ der Folge $\{\mathfrak{G}_n\}$ abbilden. In dieser Richtung wollen wir abschließend noch folgende Verallgemeinerung eines Satzes von WALSH ([*32*], S. 35, Corollary 1) beweisen.

Satz 15 *(Abbildung auf den Kern). Vorgegeben sei eine Folge* $\{\mathfrak{G}_n\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *einfach zusammenhängender und endlicher Gebiete mit* $O \in \mathfrak{G}_n$, *für die* $\mathfrak{G}_n \to \mathfrak{G}_0$ $(n \to \infty)$ und $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ *gelte;* $\mathfrak{G}_0$ *sei beschränkt und besitze nur erreichbare Randpunkte. Die* $\mathfrak{G}_n$ *seien vermöge der Funktionen* $g_n(z)$ *konform und normiert auf* $\mathfrak{G}_0$ *abgebildet.*

Dann konvergiert $\{g_n(z)\}$ *gleichmäßig in* $\mathfrak{G}_0$ *gegen* $g_0(z)=z$.

Beweis. Die Funktionen $w=\varphi_n(z)$ [Umkehrfunktionen $z=\psi_n(w)$] mögen $\mathfrak{G}_n$ konform und normiert auf $|w|<1$ abbilden. Dann ist $g_n(z)=\psi_0(\varphi_n(z))$

[23] Wir behaupten absichtlich nicht die gleichmäßige Konvergenz in $\overline{\mathfrak{G}}_0$, um die Möglichkeit nicht auszuschließen, daß $\mathfrak{G}_0$ mehrfache Primenden besitzt.

[24] Ein noch spezielleres Resultat findet sich bei WALSH ([*32*], S. 32). Dieser Satz ist bekanntlich der Schlüssel zu wichtigen Sätzen aus der Theorie der Approximation im Komplexen.

$(n=1, 2, \ldots)$, worin infolge von Satz 14 $\varphi_n(z) \Rightarrow \varphi_0(z)$ strebt $(n \to \infty, z \in \mathfrak{G}_0)$. Die Abbildung $\psi_0(w)$ ist aber stetig in $|w| \leq 1$, woraus die Behauptung sofort folgt.

Bei WALSH ist neben anderen Voraussetzungen $\mathfrak{G}_0$ ein JORDAN-Gebiet und die $\mathfrak{G}_n$ müssen gleichmäßig beschränkt sein.

Literatur

[1] BIEBERBACH, L.: Über einen Satz des Herrn CARATHÉODORY. Göttinger Nachr. **1913**, 552—560. — [2] BIEBERBACH, L.: Zur Theorie und Praxis der konformen Abbildung. Rend. Circ. Mat. Palermo **38**, 98—112 (1914). — [3] BIEBERBACH, L.: Über die konforme Kreisabbildung nahezu kreisförmiger Bereiche. Sitzgsber. preuß. Akad. Wiss., math.-phys. Kl. **1924**, 181—188. — [4] BIEBERBACH, L.: Lehrbuch der Funktionentheorie, 2. Aufl., Bd. II. Leipzig 1931. — [5] CARATHÉODORY, C.: Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten. Math. Ann. **72**, 107—144 (1912). — [6] CARATHÉODORY, C.: Über die Begrenzung einfach zusammenhängender Gebiete. Math. Ann. **73**, 323—370 (1913). — [7] CARATHÉODORY, C.: Conformal representation. Cambridge 1932. — [8] CARATHÉODORY, C.: Reelle Funktionen, Bd. I. Leipzig u. Berlin 1939. — [9] CARATHÉODORY, C.: Funktionentheorie, Bd. I. Basel 1950. — [10] COURANT, R.: Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung. Göttinger Nachr. **1914**, 101—109. — [11] COURANT, R.: Bemerkung zu meiner Note: „Über eine Eigenschaft der Abbildungsfunktionen bei konformer Abbildung." Göttinger Nachr. **1922**, 69—70. — [12] FARRELL, O. J.: On approximation to a mapping function by polynomials. Amer. J. Math. **54**, 571—578 (1932). — [13] FERRAND, J.: Étude de la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme. Bull. Soc. math. France **70**, 143—174 (1942). — [14] FERRAND, J.: Sur la déformation analytique d'un domaine. C. r. Acad. Sci., Paris **221**, 132—134 (1945). — [15] FRÉCHET, M.: Sur l'écart de deux courbes et sur les courbes limites. Trans. Amer. Math. Soc. **6**, 435—449 (1905). — [16] GARNIER, R.: Sur la variation de la représentation conforme d'un domaine variable. Rend. di Mat. Roma **1954**, 258—267. — [17] GATTEGNO, C., et A. OSTROWSKI: Représentation conforme à la frontière; domaines généraux. Paris 1949. — [18] GATTEGNO, C., et A. OSTROWSKI: Représentation conforme à la frontière; domaines particuliers. Paris 1949. — [19] JULIA, G.: Sur une équation aux dérivées fonctionelles liée à la représentation conforme. Ann. sci. Écol. norm. sup. (3) **39**, 1—28 (1922). — [20] LAVRENTIEFF, M., u. D. KWESSELAWA: Über einen OSTROWSKIschen Satz. Mitt. Georg. Abt. Akad. Wiss. USSR **1**, 171—174 (1940). — [21] LELONG-FERRAND, J.: Sur certaines classes de représentations d'un domaine plan variable. J. Math. pur. appl. (9) **31**, 103—126, 245—252 (1952). — [22] LICHTENSTEIN, L.: Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, Bd. II, 3^1, S. 177—377. 1909—1921. — [23] MARCHENKO, A.: Sur la représentation conforme. Doklady Acad. Sci. USSR **1**, 289—290 (1935). — [24] MARKOUCHEVITCH, A.: Sur la représentation conforme des domaines à frontières variables. Mat. Sbornik (2) **1**, 863—884 (1936). — [25] MÜLLER, M.: Zur konformen Abbildung angenähert kreisförmiger Gebiete. Math. Z. **43**, 628—636 (1938). — [26] OSTROWSKI, A.: Über konforme Abbildungen annähernd kreisförmiger Gebiete. Jber. Dtsch. Math.-Verein. **39**, 78—81 (1930). — [27] OSTROWSKI, A.: Zur Randverzerrung bei konformer Abbildung. Prace mat.-fiz. **44**, 371—471 (1936). — [28] RADÓ, T.: Sur la représentation conforme de domaines variables. Acta Sci. Math. Szeged **1**, 180—186 (1922/23). — [29] SPECHT, E. J.: Estimates on the mapping function and its derivatives in conformal mapping of nearly circular regions. Trans. Amer. Math. Soc. **71**, 183—196 (1951). — [30] TITCHMARSH, E. C.: The theory of functions. Oxford 1950. — [31] TSUJI, M.: On the theorems of CARATHÉODORY and LINDELÖF in the theory of conformal representation. Japanese J. Math. **7**, 91—99 (1930). — [32] WALSH, J. L.: Interpolation and approximation by rational functions in the complex domain. New York 1935. — [33] WALSH, J. L., u. D. GAIER: Zur Methode der variablen

Gebiete bei der Randverzerrung. Arch. der Math. **6**, 77—86 (1955). — [*34*] WARSCHAWSKI, S. E.: Über einige Konvergenzsätze aus der Theorie der konformen Abbildung. Göttinger Nachr. **1930**, 344—369. — [*35*] WARSCHAWSKI, S. E.: Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung. Math. Z. **35**, 321—456 (1932). — [*36*] WARSCHAWSKI, S. E.: On the degree of variation in conformal mapping of variable regions. Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 335—356 (1950). — [*37*] WARSCHAWSKI, S. E.: On conformal mapping of nearly circular regions. Proc. Amer. Math. Soc. **1**, 562—574 (1950). — [*38*] WARSCHAWSKI, S. E.: Construction and applications of conformal maps. Washington 1952. — [*39*] WARSCHAWSKI, S. E.: On mean convergence in conformal mapping. Arch. der Math. **6**, 102—114 (1955). — [*40*] WOLFF, J.: Sur la représentation conforme. Proc. Akad. Amsterdam **33**, 96—97 (1930). — [*41*] WOLFF, J.: Sur la représentation conforme des bandes. Compositio math. **1**, 217—222 (1934). — [*42*] ZYGMUND, A.: Trigonometrical series. Warschau 1935.

Stuttgart, Mathematisches Institut der Technischen Hochschule

(Eingegangen am 2. Juli 1955)