Werk

Titel: Über lokal-nilpotente Gruppen.

Autor: Hirsch, Kurt A.

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0063|log25

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

HIRSCH, K. A.
Math. Zeitschr. Bd. 63, S. 290—294 (1955)

Über lokal-nilpotente Gruppen.

ISSAI SCHUR zum Gedächtnis.

Von
KURT A. HIRSCH.

An anderer Stelle ([*8*], [*9*]) habe ich den folgenden Satz bewiesen:

Satz 1. *Eine Gruppe G mit Maximalbedingung für Untergruppen, in der jede echte Untergruppe von ihrem Normalisator verschieden ist, ist nilpotent*[1]).

Es liegt nahe, zu fragen, ob die Voraussetzung der Maximalbedingung abgeschwächt oder ganz fortgelassen werden kann, wenn die Folgerung entsprechend abgeschwächt wird. In dieser Richtung hat PLOTKIN den folgenden Satz bewiesen ([*11*]; s. auch [*10*], § 62):

Satz 2. *Eine Gruppe G, in der jede echte Untergruppe von ihrem Normalisator verschieden ist, ist lokal-nilpotent*[2]).

Ich will nun hier zeigen, daß eine verschärfte Form der Schlüsse, die ich bei dem Beweis von Satz 1 benutzt habe, ausreicht, um einen einfachen Beweis von Satz 2 zu erbringen. Zu diesem Zweck brauche ich zwei Sätze, die auch an sich Interesse beanspruchen dürfen.

Satz 3. *Jede beliebige Gruppe G besitzt einen eindeutig bestimmten maximalen lokal-nilpotenten Normalteiler, der alle lokal-nilpotenten Normalteiler von G umfaßt.*

Dieser Satz ist eine unmittelbare Folge von

Satz 4. *Das Erzeugnis zweier lokal-nilpotenter Normalteiler A und B einer beliebigen Gruppe G ist selbst lokal-nilpotent.*

Satz 4 und Satz 3 entsprechen den beim Beweis von Satz 1 benutzten Tatsachen, daß das Erzeugnis zweier nilpotenter Normalteiler einer beliebigen Gruppe selbst ein nilpotenter Normalteiler ist, und daß daher jede Gruppe mit Maximalbedingung für Normalteiler einen eindeutigen maximalen nilpotenten Normalteiler besitzt, der alle nilpotenten Normalteiler umfaßt ([*7*], Theorem 3.1; s. auch [*2*], Satz 14).

Schließlich will ich noch auf ein mehrfach zu benutzendes Korollar eines Satzes von BAER hinweisen ([*1*], S. 363; s. auch [*10*], § 63):

Satz 5. *Jede endlich erzeugte nilpotente Gruppe erfüllt die Maximalbedingung für Untergruppen.*

---

[1]) Eine Gruppe heißt nilpotent, wenn sie eine Zentralreihe endlicher Länge besitzt.

[2]) Lokal-nilpotent heißt eine Gruppe, in der jedes endliche System von Elementen eine nilpotente Untergruppe erzeugt.

Beweis von Satz 4. 1. A und B seien zwei lokal-nilpotente Normalteiler einer Gruppe G. Wenn a und b zwei beliebige Elemente von A und B sind, so liegt der Kommutator $a' = [a, b] = b'$ sowohl in A als auch in B. Nun ist die Gruppe $\{b', b\}$ als endlich erzeugte Untergruppe von B nach Voraussetzung nilpotent, so daß wir bei genügender Wiederholung der Kommutatorbildung $[b', b, b, \ldots, b] = 1$ erhalten. Wegen $b' = a'$ besagt dies: Setzen wir $[a, b] = a'$, $[a', b] = a''$ und so weiter, so bricht die Folge $a, a', a'', \ldots$ nach endlich vielen Schritten mit dem Einheitselement ab.

2. Um zu zeigen, daß $\{A, B\}$ lokal-nilpotent ist, nehmen wir in $\{A, B\}$ ein beliebiges endliches System von Elementen, das wir in der Form $a_1 b^{(1)}$, $a_2 b^{(2)}, \ldots, a_n b^{(n)}$ schreiben wollen. Wir werden die Gruppe $\{a_1 b^{(1)}, a_2 b^{(2)}, \ldots, a_n b^{(n)}\}$ dadurch als nilpotent erweisen, daß wir sie in eine nilpotente Untergruppe von $\{A, B\}$ einbetten. Wir setzen $A_0 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ und $B^* = \{b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(n)}\}$. Als endlich erzeugte Untergruppe von B ist B^* nilpotent und erfüllt nach Satz 5 die Maximalbedingung für Untergruppen. Also hat B^* (s. [6], Theorem 2.311) eine „Hauptreihe"

$$\{1\} = B_0 < B_1 < B_2 < \cdots < B_k = B^*, \tag{1}$$

in der die Gruppen B_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ Normalteiler von B^* sind und B_{i+1}/B_i eine zyklische Gruppe (von endlicher oder unendlicher Ordnung) ist. Es sei b_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, ein Vertreter eines erzeugenden Elementes von B_i/B_{i-1} in B^*, so daß insbesondere $\{b_1, b_2, \ldots, b_i\} = B_i$ ist.

3. Wir konstruieren jetzt für jedes i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ eine Gruppe A_i, die den folgenden Bedingungen genügt:

(i) A_i ist eine endlich erzeugte Untergruppe von A, die A_0 umfaßt.

(ii) In der aufsteigenden Folge

$$A_i < \{A_i, B_1\} < \{A_i, B_2\} < \cdots < \{A_i, B_i\} \tag{2}$$

ist jedes Glied Normalteiler des darauffolgenden, und alle Glieder sind nilpotent.

Wir beginnen mit $i = 1$. Wenn wir den unter 1. beschriebenen Prozeß der wiederholten Kommutatorbildung mit b_1 auf alle erzeugenden Elemente von A_0 anwenden, erhalten wir

$$a_1, a_1', a_1'', \ldots; \quad a_2, a_2', a_2'', \ldots; \quad \ldots; \quad a_n, a_n', a_n'', \ldots. \tag{3}$$

A_1 sei die von all diesen endlich vielen Elementen erzeugte Gruppe. Als endlich erzeugte Untergruppe von A ist A_1 nilpotent. Ferner ist A_1 Normalteiler von $\{A_1, B_1\}$, da ja für jedes Element a_m, $m = 1, 2, \ldots, n$

$$b_1^{-1} a_m^{(j)} b_1 = a_m^{(j)} a_m^{(j+1)} \in A_1 \tag{4}$$

ist. Wir zeigen nun, daß $\{A_1, B_1\}$ wiederum nilpotent ist. Als nilpotente Gruppe hat A_1 ein nicht-triviales Zentrum Z. Sei $z \neq 1$ ein beliebiges Element von Z. Wenn nicht schon $[z, b_1] = 1$ ist, so formen wir, wie oben, durch wiederholte Kommutatorbildung $z, z', z'', \ldots$ und kommen nach endlich vielen

Schritten zu einem Zentrumselement von A_1, das auch mit b_1 vertauschbar ist, also zum Zentrum von $\{A_1, B_1\}$ gehört. Wir bilden nun die Faktorgruppe nach diesem Zentrum und sehen durch vollständige Induktion, daß $\{A_1, B_1\}$ nilpotent ist.

4. Im allgemeinen Fall sei die Gruppe A_i folgendermaßen definiert. Wir nehmen die erzeugenden Elemente a_m $(m=1, 2, \ldots, n)$ von A_0 und fügen alle diejenigen Elemente von A hinzu, die durch wiederholte Kommutatorbildung mit b_i entstehen; dann weiter die wiederholten Kommutatoren all dieser Elemente mit b_{i-1}; in dieser Weise fahren wir mit $b_{i-2}, b_{i-3}, \ldots, b_1$ fort. Die erzeugenden Elemente von A_i sind also die a_m $(m=1, \ldots, n)$ und alle Kommutatoren der Form

$$a = [a_m, b_{\alpha_1}, b_{\alpha_2}, \ldots, b_{\alpha_s}] \tag{5}$$

wobei $i \geqq \alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \cdots \geqq \alpha_s \geqq 1$ ist.

Auf Grund der Bemerkung unter 1. gibt es nur endlich viele verschiedene Kommutatoren dieser Form, so daß die Forderung (i) für A_i erfüllt ist.

Daß nun A_i Normalteiler von $\{A_i, B_1\}$ und die letztere Gruppe nilpotent ist, sehen wir genau wie unter 3. Nehmen wir schon als bewiesen an, daß die Forderung (ii) in der Folge (2) bis zu $\{A_i, B_{j-1}\}$ erfüllt ist. Dann haben wir zu zeigen, daß $\{A_i, B_{j-1}\}$ Normalteiler von $\{A_i, B_j\} = \{A_i, B_{j-1}, b_j\}$ ist. Nun ist B_{j-1} Normalteiler von B_j. Es genügt also zu zeigen, daß für jeden Kommutator (5)

$$b_j^{-1} a b_j \in \{A_i, B_{j-1}\} \tag{6}$$

gilt.

Es sei r so bestimmt, daß $\alpha_r \geqq j > \alpha_{r+1}$ ist. Dann setzen wir

$$[a_m, b_{\alpha_1}, b_{\alpha_2}, \ldots, b_{\alpha_r}] = \bar{a},$$

wobei $\bar{a}$ wieder ein erzeugendes Element von A_i ist. Wir haben also

$$b_j^{-1} a b_j = b_j^{-1} [\bar{a}, b_{\alpha_{r+1}}, \ldots, b_{\alpha_s}] b_j = [b_j^{-1} \bar{a} b_j, b_j^{-1} b_{\alpha_{r+1}} b_j, \ldots, b_j^{-1} b_{\alpha_s} b_j]. \tag{7}$$

Hierin ist $b_j^{-1} \bar{a} b_j = \bar{a} [\bar{a}, b_j]$ ein Produkt von zwei Erzeugenden von A_i, und alle übrigen Elemente der Klammer liegen in B_{j-1}, da $\alpha_{r+1} \leqq j-1$ und B_{j-1} Normalteiler von B_j ist. Damit ist (6) bewiesen. Tatsächlich läßt sich aber viel mehr zeigen, nämlich daß A_i Normalteiler in $\{A_i, B_j\}$ ist. Denn wir können mit Hilfe der fundamentalen Kommutator-Identitäten

$$\begin{cases} [a b, c] = b^{-1} [a, c] b [b, c] = [a, c] [a, c] [a, c, b] [b, c] \\ [a, b c] = [a, c] c^{-1} [a, b] c = [a, c] [a, b] [a, b, c] \end{cases} \tag{8}$$

die rechte Seite von (7) sukzessiv so umformen, daß ein Produkt von Elementen der Form (5) entsteht. Hierzu stellen wir für jedes $\alpha \leqq \alpha_{r-1}$ das Element $b_j^{-1} b_\alpha b_j$ in der Form

$$b_j^{-1} b_\alpha b_j = b_\alpha b_\beta b_\gamma \ldots b_\omega \tag{9}$$

dar, mit $\alpha \geqq \beta \geqq \gamma \geqq \cdots \geqq \omega \geqq 1$, was in einer nilpotenten Gruppe stets möglich ist. Die etwas langwierigen Einzelheiten des Beweises brauchen hier nicht durchgeführt zu werden.

Die Nilpotenz von $\{A_i, B_j\}$ ergibt sich aus der von $\{A_j, B_{j-1}\}$ genau wie oben unter 3. Wir sehen sogar, daß das Zentrum von $\{A_i, B_j\}$ Elemente des Zentrums von A_i enthält. Schließlich haben wir in der Gruppe $\{A_k, B_k\} = \{A_k, B^*\}$ die gesuchte nilpotente Gruppe, die $\{A_0, B^*\}$ und daher

$$\{a_1 b^{(1)}, a_2 b^{(2)}, \ldots, a_n b^{(n)}\}$$

als Untergruppe enthält. Damit ist Satz 4 bewiesen.

Bemerkung. Wenn die Vermutung zutrifft, daß das Produkt zweier nilpotenter Gruppen auflösbar ist, dann läßt sich Satz 4 in wenigen Zeilen beweisen. Es gilt nämlich nach GRUENBERG [*3*], daß eine auflösbare, endlich erzeugte Gruppe G nilpotent ist, wenn für je zwei beliebige Elemente x, y von G eine Kommutator-Identität $[x, y, y, \ldots, y] = 1$ besteht.

Beweis von Satz 3. Das Erzeugnis einer beliebigen Menge A_α von lokal-nilpotenten Normalteilern einer Gruppe ist selbst ein lokal-nilpotenter Normalteiler. Denn jedes Element $a \in A$ ist ein endliches Produkt $a_{\alpha_1} a_{\alpha_2} \ldots a_{\alpha_k}$, $a_{a_i} \in A_{a_i}$, also ein Element der Gruppe $\{A_{\alpha_1}, A_{\alpha_2}, \ldots, A_{\alpha_k}\}$, die nach Satz 4 lokal-nilpotent ist. Jedes endliche System $a_1, a_2, \ldots, a_n$ von Elementen von A liegt daher in dem von einer endlichen Menge von A_α's erzeugten Normalteiler; daher ist $\{a_1, \ldots, a_n\}$ nilpotent, was zu beweisen war.

Satz 2 folgt nun in wenigen Schritten, wie beim Beweis von Satz 1.

Beweis von Satz 2. Sei G eine beliebige Gruppe. Jedes Gruppenelement $g \in G$ liegt in einer lokal-nilpotenten, sogar nilpotenten Untergruppe, z.B. der von g erzeugten zyklischen Gruppe. Die Vereinigungsmenge einer beliebigen aufsteigenden Folge von lokal-nilpotenten Untergruppen ist wieder lokal-nilpotent. Daher gibt es nach dem ZORNschen Lemma in jeder beliebigen Gruppe maximale lokal-nilpotente Untergruppen. Sei M eine solche und $N(M)$ ihr Normalisator. Dann ist $N(M)$ sein eigner Normalisator. Denn gäbe es ein Gruppenelement g, das mit $N(M)$ vertauschbar wäre, ohne in $N(M)$ zu liegen, so würde M durch g in eine Gruppe $M' = g^{-1} M g \neq M$ transformiert, die ebenfalls Normalteiler von $N(M)$ und lokal-nilpotent wäre. Dann wäre aber $\{M, M'\}$ nach Satz 4 lokal-nilpotent, im Widerspruch zu der Maximaleigenschaft von M.

Wenn nun G eine Gruppe ist, in der jede echte Untergruppe von ihrem Normalisator verschieden ist, so sehen wir, daß $N(M) = G$, also daß M ein Normalteiler von G ist. Dann umfaßt aber der maximale lokal-nilpotente Normalteiler (Satz 3) alle Elemente von G, d.h., G ist lokal-nilpotent.

Beweis von Satz 5. Sei G eine endlich erzeugte nilpotente Gruppe. Die Kommutator-Faktorgruppe G/G' ist als homomorphes Bild von G ebenfalls endlich erzeugbar. Nach einem Satz von BAER ([*1*], S. 363), den man auch durch Induktion nach der Klasse von G leicht direkt beweisen kann,

sind dann alle Faktorgruppen G^i/G^{i+1} der unteren Zentralreihe von G endlich erzeugbar, und daher erfüllt G die Maximalbedingung für Untergruppen ([*5*], Theorem 1.3)[3]).

Ich möchte zum Schluß die Gelegenheit benutzen, einen Irrtum in [*9*] richtigzustellen, auf den mich G. HIGMAN aufmerksam gemacht hat. Es ist nicht richtig, daß in der von mir dort angegebenen nicht-nilpotenten Gruppe alle maximalen Untergruppen Normalteiler sind. Man kann aber ein Beispiel einer solchen Gruppe herstellen, indem man eine der von HIGMAN und NEUMANN [*4*] konstruierten nicht-nilpotenten Gruppen ohne maximale Untergruppen mit einer zyklischen Gruppe von Primzahlordnung direkt multipliziert.

Literatur.

[*1*] BAER, R.: Representations of Groups as Quotient Groups. II. Trans. Amer. Math. Soc. **58**, 348—389 (1945). — [*2*] FITTING, H.: Beiträge zur Theorie der Gruppen endlicher Ordnung. Jber. dtsch. Math.-Ver. **48**, 77—141 (1938). — [*3*] GRUENBERG, K.W.: Two Theorems on Engel Groups. Proc. Cambr. Phil. Soc. **49**, 377—380 (1953). — [*4*] HIGMAN, G., and B. H. NEUMANN: On two Questions of N. Itô. J. London Math. Soc. **29**, 84—88 (1954). — [*5*] HIRSCH, K. A.: On Infinite Soluble Groups. I. Proc. London Math. Soc. **44**, 53—60 (1938). — [*6*] HIRSCH, K. A.: On Infinite Soluble Groups. II. Proc. London Math. Soc. **44**, 336—344 (1938). — [*7*] HIRSCH, K. A.: On Infinite Soluble Groups. III. Proc. London Math. Soc. **49**, 184—194 (1947). — [*8*] HIRSCH, K. A.: A Characteristic Property of Nilpotent Groups. Proc. Int. Congr. of Math. Cambridge (Mass.) 1950. — [*9*] HIRSCH, K. A.: Eine kennzeichnende Eigenschaft nilpotenter Gruppen. Math. Nachr. **4**, 47—49 (1951). — [*10*] KUROŠ, A. G.: Teoriya Grupp, 2. (russische) Aufl. Moskau 1953. — [*11*] PLOTKIN, B. I.: Zur Theorie der lokal-nilpotenten Gruppen (russisch). Dokl. Akad. Nauk USSR. **76**, 639—641 (1951).

[3]) Andere Beweise von Satz 5 sind kürzlich von P. HALL [Proc. London Math. Soc. (3) **4**, 419—436 (1954)] und von S. A. JENNINGS [Canadian J. of Math. **7**, 169—187 (1955)] veröffentlicht worden [bei der Korrektur hinzugefügt].

Queen Mary College, University of London, London E 1 (England).

(Eingegangen am 4. März 1955.)