

Werk

Titel: Zur Homotopie von Abbildungen eines Polyeders.

Autor: Puppe, Dieter

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0061 | log25

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Zur Homotopie von Abbildungen eines Polyeders.

Von

DIETER PUPPE.

Einleitung.

Das Homotopieproblem für die Abbildungen eines Polyeders K in einen topologischen Raum Y (der ohne wesentliche Einschränkung als bogenweise zusammenhängend angenommen werden kann) ist nur unter sehr speziellen Voraussetzungen über die Dimension von K und die Homotopiegruppen von Y vollständig gelöst. Insbesondere ist fast nichts über die Abbildungen von K in die m -Sphäre S^m bekannt, wenn die Dimension n von K erheblich größer als m ist¹⁾. Einen Beitrag zur Behandlung dieses Problems zu liefern, ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Dabei leitet uns vor allem folgende Frage:

K sei eine n -dimensionale geschlossene orientierbare Pseudomannigfaltigkeit, σ_0 ein n -Simplex einer Zerlegung von K und $f_\alpha: K \rightarrow S^m$ eine Abbildung, so daß $f_\alpha|_{K-\sigma_0}$ konstant ist und $\alpha \in \pi_n(S^m)$ durch $f_\alpha|_{\sigma_0}$ repräsentiert wird; in welchen Fällen ist f_α wesentlich? Aus $\alpha = 0$ folgt die Nullhomotopie von f_α . Wegen $\pi_n(S^m) = 0$ für $n < m$ kann man sich also auf $n \geq m$ beschränken. Klar ist ferner der Fall $n = m$; dann ist f_α für $\alpha \neq 0$ immer wesentlich, denn der Grad von f_α verschwindet nicht. Falls m gerade, $n = 2m - 1$ und K eine Mannigfaltigkeit ist, so ist f_α wesentlich, wenn die Hopfsche Invariante von α $\gamma(\alpha) \neq 0$ ist, denn dann ist auch die Hopfsche Invariante der Abbildung $f_\alpha: K \rightarrow S^m$ von 0 verschieden. Wir werden zeigen, daß diese Behauptung richtig bleibt, wenn man die Voraussetzung, daß K eine Mannigfaltigkeit ist, fallen läßt, und ferner, daß damit alle Fälle erschöpft sind, in denen man allgemein auf die Wesentlichkeit von f_α schließen kann; d.h. ist weder $n = m$ noch m gerade und $n = 2m - 1$, so gibt es eine n -dimensionale orientierbare Pseudomannigfaltigkeit K , für die f_α immer nullhomotop ist, und wenn $n = 2m - 1$ und m gerade ist, dann gibt es ein K , so daß f_α für alle α mit $\gamma(\alpha) = 0$ nullhomotop ist (vgl. Satz 7, wo auch nichtorientierbare Pseudomannigfaltigkeiten berücksichtigt sind).

Dieses Ergebnis stützt sich auf vorhergehende allgemeinere Betrachtungen. In den §§ 1—3 wird die Theorie der „gerüstweisen Fortsetzung“ von Deformationen (begründet von EILENBERG [3], in sehr allgemeiner Form behandelt von OLUM [9]) unter dem besonderen Gesichtspunkt dargestellt, daß eine Deformation $K \times I \rightarrow Y$ als Abbildung von K in den Raum der Wege von Y gedeutet werden kann (Satz 1 und 2). Wir gelangen dabei in einer bestimmten Richtung über die bekannten Tatsachen hinaus und erhalten eine notwendige Bedingung für die Nullhomotopie einer Abbildung, die mit dem

¹⁾ Genauer: wenn $n > m + 2$ ist; für $n \leq m + 2$ vgl. [1].

Hurewiczschen Homomorphismus $h: \pi_{n-1}(\Omega) \rightarrow H_{n-1}(\Omega)$ für den Raum Ω der geschlossenen Wege in Y mit festem Anfangspunkt zusammenhängt (vgl. Satz 3 und die anschließende Bemerkung 1). In § 4 wird der Fall betrachtet, daß K eine Pseudomannigfaltigkeit ist. Hier zeigt sich eine gewisse Umkehrbarkeit von Satz 3 (vgl. Satz 4), und Satz 5 gibt auf unsere Ausgangsfrage eine allgemeine Antwort (statt S^m kann ein beliebiger bogenweise zusammenhängender Raum Y stehen), in der wieder der Homomorphismus $h: \pi_{n-1}(\Omega) \rightarrow H_{n-1}(\Omega)$ eine Rolle spielt. Die Untersuchungen von SERRE in [11], [12] über die Homotopie- und Homologiegruppen der Wegeräume von Sphären (vgl. Satz 6) gestatten es, in § 5 hieraus die bereits oben genannten Ergebnisse für $Y = S^m$ zu folgern (Satz 7).

In [5], [6] hat HOPF bewiesen, daß für gerades m jede $(2m-1)$ -dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit wesentlich auf die m -Sphäre S^m abgebildet werden kann. Er hat die Frage gestellt, ob das auch für allgemeinere Polyeder an Stelle der Mannigfaltigkeiten gilt. Wir können diese Frage bejahen (Satz 8), und zwar unter anderem für alle $(2m-1)$ -dimensionalen Polyeder mit nicht verschwindender Bettischer Zahl der Dimension $2m-1$. Dagegen gibt es für jedes n mit $m < n < 2m-1$ oder $n = 2m-1$ und $m =$ ungerade eine n -dimensionale orientierbare Pseudomannigfaltigkeit, die sich in keiner Weise wesentlich auf S^m abbilden läßt (Satz 9).

§ 1. Charakterisierung von Abbildungen durch Koketten.

Wir betrachten einen zusammenhängenden simplizialen Komplex K — er darf unendlich sein und unendliche Dimension haben — sowie einen beliebigen bogenweise zusammenhängenden Raum Y , in dem wir einen Punkt y_0 auszeichnen. Unter der konstanten Abbildung eines Raumes in Y verstehen wir immer die Abbildung, die alles in y_0 überführt. K^r sei das r -dimensionale Gerüst von K . Eine Abbildung von K oder eines Teilraumes, die auf K^r konstant ist, heiße r -konstant. I sei das Einheitsintervall der reellen Zahlen.

Eine Deformation relativ K^0 der konstanten Abbildung $K \rightarrow y_0$ in sich ist eine Abbildung $F: K \times I \rightarrow Y$ mit $F(K \times \partial I \cup K^0 \times I) = y_0$ ²⁾. Ist für ein gewisses $n > 1$ eine solche Homotopie auf K^{n-1} gegeben, F also auf $K \times \partial I \cup K^{n-1} \times I$ definiert, so ist sie im allgemeinen nicht auf K^n fortsetzbar; sondern notwendig und hinreichend dafür ist das Verschwinden der n -dimensionalen Kokette $c(F)$ von K , die man erhält, indem jedem orientierten n -Simplex σ von K das durch $F|_{\partial(\sigma \times I)}$ ²⁾ repräsentierte Element von $\pi_n(Y, y_0)$ zugeordnet wird. Dabei sei als Grundpunkt auf der Urbildsphäre $\partial(\sigma \times I)$ irgendeine Ecke $(e, 0)$ von $\sigma \times 0$ gewählt und die Orientierung so, daß die kanonische Abbildung $\sigma \rightarrow \sigma \times 0$ orientierungserhaltend ist. Für n -einfaches Y ordnet sich diese Definition dem von EILENBERG [3] eingeführten Begriff des Hinderniskozykels unter. Wir bezeichnen die Menge aller Koketten von K mit Koeffizienten aus

²⁾ Üblicherweise ist ∂ der Randoperator in einer Kettengruppe. In dieser Arbeit soll jedoch auch der Rand einer (abgeschlossenen) Zelle z , aufgefaßt als Teilraum von z , mit ∂z bezeichnet werden. Ferner werden wir häufig für ein Simplex als topologischen Raum einerseits und als Kette andererseits dasselbe Zeichen verwenden.

$\pi_n(Y)$, die man in dieser Weise als Hindernisse für Deformationen erhält, mit $C_*^n(K, \pi_n(Y))$. Diese Menge wird in § 2 näher untersucht werden. Sie spielt für das Homotopieproblem eine entscheidende Rolle.

Einer $(n-1)$ -konstanten Abbildung $f: K^n \rightarrow Y$ ordnen wir die n -dimensionale Kokette $d(f)$ von K mit Koeffizienten aus $\pi_n(Y, y_0)$ zu, deren Wert auf σ durch $f|_{\sigma}: (\sigma, \partial\sigma) \rightarrow (Y, y_0)$ gegeben ist. Man kann so jede Kokette erhalten, und die Homotopieklasse von f relativ K^{n-1} ist durch $d(f)$ charakterisiert. $d(f)$ ist genau dann ein Kozykel, wenn f auf K^{n+1} fortsetzbar ist; denn für ein $(n+1)$ -Simplex σ' wird $\delta d(f)(\sigma') = d(f)(\partial\sigma')$ durch $f|_{\partial\sigma'}$ repräsentiert³⁾, und die Nullhomotopie dieser Abbildung für jedes σ' ist gleichbedeutend mit der Fortsetzbarkeit von f auf K^{n+1} .

Seien f und g zwei $(n-1)$ -konstante Abbildungen $K^n \rightarrow Y$. Nehmen wir an, daß die Homotopie $f \sim g$ rel. K^0 gilt und durch die Deformation $F: K^n \times I \rightarrow Y$ bewirkt wird. Dann ist insbesondere $F|_{\partial(\sigma \times I)}$ für jedes n -Simplex σ auf ganz $\sigma \times I$ fortsetzbar, also nullhomotop. Andererseits repräsentiert $F|_{\partial(\sigma \times I)}$ die Summe dreier Elemente von $\pi_n(Y, y_0)$, die durch folgende Abbildungen von $\partial(\sigma \times I)$ in Y gegeben sind (Grundpunkt und Orientierung wie oben):

1. $(x, t) \rightarrow \begin{cases} f(x) & \text{für } t = 0 \\ y_0 & \text{sonst} \end{cases}$
 2. $(x, t) \rightarrow \begin{cases} g(x) & \text{für } t = 1 \\ y_0 & \text{sonst} \end{cases}$
 3. $F'|_{\partial(\sigma \times I)}$, wobei $F': K \times \partial I \cup K^{n-1} \times I \rightarrow Y$ durch
- $$F'(x, t) = \begin{cases} F(x, t) & \text{für } x \in K^{n-1} \\ y_0 & \text{für } t = 0 \text{ oder } 1 \end{cases}$$

definiert ist.

Die erste Abbildung repräsentiert dasselbe Element von $\pi_n(Y, y_0)$ wie $f|_{\sigma}$, die zweite bis auf Vorzeichenumkehr (denn die kanonische Abbildung $\sigma \rightarrow \sigma \times 1 \subset \partial(\sigma \times I)$ kehrt die Orientierung um) dasselbe wie $g|_{\sigma}$. Also folgt

$$d(f) - d(g) + c(F') = 0$$

d. h.

$$d(g) - d(f) \in C_*^n(K, \pi_n(Y)).$$

Setzen wir umgekehrt von f und g nur die letzte Beziehung voraus — die Deformation der konstanten Abbildung auf K^{n-1} , die das entsprechende Element von C_*^n liefert, möge wieder F' heißen —, so definieren wir F auf $K^{n-1} \times I \cup K^n \times \partial I$ durch

$$F(x, t) = \begin{cases} F'(x, t) & \text{für } x \in K^{n-1} \\ f(x) & \text{für } t = 0 \\ g(x) & \text{für } t = 1. \end{cases}$$

³⁾ Das ist ein spezieller Fall des „Homotopieadditionssatzes“ und folgt (ebenso wie der allgemeine Satz selbst) unmittelbar aus der Lefschetzschen Definition der Addition in $\pi_n(Y, y_0)$ (vgl. [8], S. 170 ff.).

$F|_{\partial(\sigma \times I)}$ repräsentiert dann wieder die Summe der Klassen der obigen Abbildungen 1. bis 3., d.h. den Wert von $d(f) - d(g) + c(F')$ an der Stelle σ . Da dieser Wert nach Voraussetzung verschwindet, ist $F|_{\partial(\sigma \times I)}$ nullhomotop, F läßt sich also auf ganz $K^n \times I$ erweitern und liefert $f \sim g$ rel. K^0 . Damit ist gezeigt:

Hilfssatz 1. *Zwei Abbildungen $f, g: K^n \rightarrow Y$ mit $f(K^{n-1}) = g(K^{n-1}) = y_0$ ($n > 1$) sind genau dann homotop relativ K^0 , wenn $d(g) - d(f) \in C_*^n(K, \pi_n(Y))$ ist.*

In bekannter Weise definiert man Operationen der Elemente von $\pi_1(Y, y_0)$ auf $\pi_n(Y, y_0)$. Etwas Analoges soll hier für die Menge der Homotopieklassen relativ K^{n-1} von $(n-1)$ -konstanten Abbildungen $f: K^n \rightarrow Y$ an Stelle von $\pi_n(Y, y_0)$ durchgeführt werden, um auf diesem Wege die freien Deformationen solcher Abbildungen zu untersuchen. Ist w ein in y_0 beginnender und endender Weg in Y , so erklären wir eine neue Abbildung $w \cdot f: K^n \rightarrow Y$ folgendermaßen:

Für jedes n -Simplex σ von K und jedes $t \in I$, sei σ_t das in σ konzentrisch und ähnlich gelegene Simplex, dessen Linearausdehnungen sich von denen von σ um den Faktor $1 - \frac{t}{2}$ unterscheiden. m_σ sei der gemeinsame Mittelpunkt, und die Hilfsabbildungen $\lambda_t: \sigma_t \rightarrow \sigma$ und $\chi_t: (\sigma - \sigma_t) \rightarrow I$ seien so erklärt:

1. λ_t ist die affine Streckung von σ_t auf σ .
2. χ_t bildet den in $\sigma - \sigma_t$ liegenden Teil jedes von m_σ ausgehenden Strahls linear auf das Teilintervall $[1-t, 1]$ von I ab, und zwar so, daß $\partial\sigma$ in $1-t$ und $\partial\sigma_t$ in 1 übergeht.

Dann wird definiert

$$f_t(x) = \begin{cases} f \lambda_t(x) & \text{für } x \in \sigma_t \\ w \chi_t(x) & \text{für } x \in \sigma - \sigma_t \end{cases}$$

und

$$f_1 = w \cdot f.$$

Daraus folgt unmittelbar, daß f und $w \cdot f$ frei homotop sind, nämlich vermöge f_t . Offenbar ist $w \cdot f \sim w' \cdot f'$ rel. K^{n-1} , wenn $w \simeq w'$ und $f \simeq f'$ rel. K^{n-1} gilt, also wird tatsächlich eine Operation von $\pi_1(Y, y_0)$ auf die Abbildungsklassen induziert. Nach der Definition der Operation von $\pi_1(Y, y_0)$ auf $\pi_n(Y, y_0)$ (LEFSCHETZ [8] S. 173 f.) ist ferner klar, daß

$$d(w \cdot f) = w \cdot d(f) \quad ^4$$

gilt.

Wir wenden uns nun dem Problem der freien Homotopie von zwei $(n-1)$ -konstanten Abbildungen $f, g: K^n \rightarrow Y$ zu: Sei $f \simeq g$ und $F: K^n \times I \rightarrow Y$ die Deformation. Für einen festen Punkt $x_0 \in K^0$ definiert die Abbildung $t \rightarrow F(x_0, t)$ einen gewissen Weg w in Y . Deformieren wir g weiter in $w \cdot g$ (wie oben angegeben), so beschreibt x_0 bei der ganzen Deformation von f in $w \cdot g$ den aus w und dem Inversen von w zusammengesetzten Weg, also einen nullhomotopen. Bezeichnen wir mit $G: K^n \times I \rightarrow Y$ die eben genannte Homo-

⁴) Die Kokette $w \cdot d(f)$ ist definiert durch: $(w \cdot d(f))(\sigma) = \text{Bildelement von } d(f)(\sigma) \in \pi_n(Y, y_0) \text{ bei der Anwendung von } w.$

topie von f in $w \cdot g$, so kann man G auf $K^0 \times I \cup K^n \times \partial I$ so deformieren, daß es über $K^n \times \partial I$ unverändert bleibt und die Endabbildung auf $K^0 \times I$ konstant ist. Diese Deformation läßt sich auf ganz $K^n \times I$ fortsetzen; denn $(K^0 \times I \cup K^n \times \partial I) \times I \cup K^n \times I \times 0$ ist Retrakt von $K^n \times I \times I$. Die Endabbildung ist eine Homotopie von f in $w \cdot g$ relativ K^0 ⁵⁾, nach Hilfssatz 1 gilt also $d(w \cdot g) - d(f) \in C_*^n$.

Ist umgekehrt diese Relation für f und g und einen geeigneten Weg w vorausgesetzt, so folgt nach Hilfssatz 1 $w \cdot g \sim f$ rel. K^0 , und wegen $w \cdot g \sim g$ ist $g \sim f$. Wir haben also:

Hilfssatz 2. *Zwei Abbildungen $f, g: K^n \rightarrow Y$ mit $f(K^{n-1}) = g(K^{n-1}) = y_0$ ($n > 1$) sind genau dann frei homotop, wenn es einen Weg w gibt, so daß $w \cdot d(g) - d(f) \in C_*^n(K, \pi_n(Y))$ ist.*

Ist Y n -einfach im Sinne von EILENBERG, so wirken die Wege in $\pi_n(Y, y_0)$ als Identität; dann fällt der Begriff der Homotopie relativ K^0 mit dem der freien Homotopie zusammen.

Interessiert man sich nur für die Nullhomotopie einer Abbildung f , so ist der Unterschied zwischen freien Deformationen und solchen relativ K^0 ebenfalls unwesentlich. Setzt man nämlich $g = y_0$ konstant, so ist $w \cdot d(g) = 0$ für jedes w , und es folgt:

Hilfssatz 3. *$f: K^n \rightarrow Y$ mit $f(K^{n-1}) = y_0$ ($n > 1$) ist genau dann nullhomotop, wenn $d(f) \in C_*^n(K, \pi_n(Y))$ ist.*

§ 2. Untersuchung von C_*^n .

Die Hilfssätze 1 bis 3 des vorigen Paragraphen gewinnen dann Bedeutung, wenn man die Teilmengen $C_*^n(K, \pi_n(Y))$ der entsprechenden Kokettengruppe kennt. Um uns diesem Ziel zu nähern, gehen wir zu einer anderen Deutung von C_*^n über. Zunächst einige Vorbereitungen:

Sei Ω der Raum der in y_0 beginnenden und endenden nullhomotopen Wege von Y , d.h. die Menge der relativ ∂I nullhomotopen Abbildungen $w: I \rightarrow Y$ mit $w(\partial I) = y_0$, versehen mit der „kompakt-offenen“ Topologie; das ist die grösste Topologie, in der die Menge $\{w | w(C) \subset O\}$ für jedes kompakte $C \subset I$ und jedes offene $O \subset Y$ offen ist. Bei dieser Topologie ist eine Abbildung $\varphi: X \rightarrow \Omega$ genau dann stetig, wenn es die durch $F(x, t) = \varphi(x)(t)$ definierte Abbildung $F: X \times I \rightarrow Y$ ist. In Ω ist in natürlicher Weise eine „Multiplikation“ $u \vee v$ mit

$$(u \vee v)(t) = \begin{cases} u(2t), & \text{für } t \leq \frac{1}{2} \\ v(2t - 1), & \text{für } t \geq \frac{1}{2}, \end{cases}$$

ein zu einem gegebenen Element u „inverses“ u^- mit

$$u^-(t) = u(1 - t)$$

⁵⁾ Dieser Schluß zeigt allgemein: Für 1-konstante Abbildungen eines zusammenhängenden Komplexes K ist Homotopie relativ K^0 mit der Existenz einer Deformation gleichbedeutend, bei der mindestens eine (und infolgedessen jede) Ecke von K einen nullhomotopen Weg beschreibt.

und ein „neutrales Element“ w_0 mit

$$w_0(t) = y_0 \quad \text{für alle } t$$

definiert. Entsprechend setzen wir für zwei Abbildungen $\varphi, \psi: X \rightarrow \Omega$

$$(\varphi \vee \psi)(x) = \varphi(x) \vee \psi(x)$$

$$\varphi^-(x) = (\varphi(x))^-$$

und bezeichnen eine Abbildung, die alles in w_0 überführt, ebenfalls mit w_0 .

Wie SERRE in [11] S. 477 ff. zeigt, ist Ω in allen Dimensionen einfach, d.h. eine Abbildung einer r -Sphäre in Ω bestimmt eindeutig ein Element von $\pi_r(\Omega)$, ohne daß auf einen festen Grundpunkt Bezug genommen werden muß. Ferner gilt:

Hilfssatz 4. Sind φ und ψ Repräsentanten von α bzw. $\beta \in \pi_r(\Omega)$, so wird $\alpha + \beta$ durch $\varphi \vee \psi$ und $(-\alpha)$ durch φ^- repräsentiert.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß φ und ψ Abbildungen von I^r in Ω sind, die ∂I^r in w_0 überführen. Die Addition in $\pi_r(\Omega)$ wird dann induziert durch folgende „Addition“ der Abbildungen:

$$(\varphi + \psi)(x_1, x_2, \dots, x_r) = \begin{cases} \varphi(2x_1, x_2, \dots, x_r) & \text{für } x_1 \leq \frac{1}{2} \\ \psi(2x_1 - 1, x_2, \dots, x_r) & \text{für } x_1 \geq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Man bestätigt die folgenden Homotopien relativ ∂I^r :

$$\varphi \vee \psi \sim (\varphi + w_0) \vee (w_0 + \psi) = (\varphi \vee w_0) + (w_0 \vee \psi) \sim \varphi + \psi,$$

d.h. $\varphi \vee \psi$ repräsentiert tatsächlich $\alpha + \beta$. Insbesondere gilt $\varphi + \varphi^- \sim \varphi \vee \varphi^-$, und aus der Bedeutung von $\varphi \vee \varphi^-$ ergibt sich $\varphi \vee \varphi^- \sim w_0$, d.h. φ^- repräsentiert $(-\alpha)$.

Hilfssatz 5. Für $r \geq 1$ ist $\pi_r(\Omega) \cong \pi_{r+1}(Y, y_0)$, und zwar kann ein Isomorphismus dadurch hergestellt werden, daß für ein $(r+1)$ -Simplex σ , in dem eine Ecke e ausgezeichnet sei, jeder Abbildung $\gamma: \partial\sigma \rightarrow \Omega$ mit $\gamma(e) = w_0$ die Abbildung $G: \partial(\sigma \times I) \rightarrow Y$ zugeordnet wird, die durch

$$G(x, t) = \begin{cases} \gamma(x)(t) & \text{für } x \in \partial\sigma \\ y_0 & \text{für } t = 0 \text{ oder } 1 \end{cases}$$

definiert ist. Grundpunkt auf $\partial(\sigma \times I)$ ist dabei $(e, 0)$ ⁶⁾.

Beweis. Es ist klar, daß man auf diese Weise jedenfalls eine eindeutige Abbildung der Homotopieklassen erhält. Daß sie auch linear ist, folgt sehr einfach unter Benutzung der LEFSCHETZschen Definition der Addition (vgl. [8] S. 170 ff.). Sind nämlich zwei Abbildungen $\gamma, \gamma': \partial\sigma \rightarrow \Omega$ auf disjunkte „Inseln“ (r -dimensionale Teilvollkugeln von $\partial\sigma$) konzentriert, so sind es auch die zu-

⁶⁾ Man kann unter Verwendung von Würfeln als Urbilder einen Isomorphismus auf einfachere Weise konstruieren. Wir werden im folgenden aber gerade die angegebene Definition benutzen müssen.

gehörigen Abbildungen $G, G': \partial(\sigma \times I) \rightarrow Y$ [auf $(r+1)$ -dimensionale Teilvollkugeln von $\partial(\sigma \times I)$], und es ist offenbar gleichgültig, in welcher Reihenfolge man die Zusammensetzung einerseits und den Übergang von γ zu G andererseits vornimmt. Um die eindeutige Umkehrbarkeit zu zeigen, wählen wir eine Deformation Δ_t von $\partial(\sigma \times I)$ in sich, die den Teilraum $\sigma \times \partial I \cup e \times I$ in sich auf den Punkt $(e, 0)$ zusammenzieht. Aus $G \sim 0$ rel. $(e, 0)$ folgt dann $G\Delta_1 \sim 0$ rel. $\sigma \times \partial I \cup e \times I$ und vermöge $G\Delta_t$ schließlich $G \sim 0$ rel. $\sigma \times \partial I \cup e \times I$, was mit $\gamma \sim 0$ rel. e gleichbedeutend ist.

Wir kommen nun zur Umdeutung von $C_*^n(K, \pi_n(Y))$. Eine Deformation der konstanten Abbildung von K in Y relativ K^0 kann als Abbildung von K in Ω aufgefaßt werden. Das Problem der Fortsetzung einer solchen Deformation entspricht völlig dem der Fortsetzung der zugehörigen Abbildung in Ω . Ist eine Deformation F auf K^{n-1} gegeben, so gehört zu ihr die durch $\varphi(x)(t) = F(x, t)$ definierte Abbildung $\varphi: K^{n-1} \rightarrow \Omega$. Der Fortsetzung von φ stellt sich der Hinderniskozykel $c(\varphi) \in C^n(K, \pi_{n-1}(\Omega))$ (= Kozykelgruppe von K mit $\pi_{n-1}(\Omega)$ als Koeffizientenbereich) entgegen, dessen Wert auf σ durch $\varphi|_{\partial\sigma}$ repräsentiert wird. Als Grundpunkt auf $\partial\sigma$ kann dieselbe Ecke e von σ wie oben (§ 1) genommen werden, was wegen der Einfachheit von Ω jedoch unwesentlich ist. Daß $c(\varphi)$ tatsächlich ein Kozykel ist, kann man in diesem Falle aus [3] (10.1) entnehmen. Wird $\pi_n(Y, y_0)$ vermöge des in Hilfssatz 5 genannten Isomorphismus mit $\pi_{n-1}(\Omega)$ identifiziert, so ist klar, daß $c(\varphi) = c(F)$ gilt. Ist umgekehrt $\varphi: K^{n-1} \rightarrow \Omega$ gegeben, so ist ihm eine Deformation F der konstanten Abbildung auf K^{n-1} durch $F(x, t) = \varphi(x)(t)$ für $x \in K^{n-1}$ [und $F(x, 0) = F(x, 1) = y_0$ für alle x] zugeordnet. Im allgemeinen wird zwar F auf K^0 nicht konstant sein, aber zu jedem φ gibt es ein homotopes φ' mit $\varphi'(K^0) = w_0$, das zugehörige F' ist eine Deformation relativ K^0 , und es gilt $c(F') = c(\varphi') = c(\varphi)$. Wir fassen dies zusammen:

Hilfssatz 6. *Wird $\pi_n(Y, y_0)$ mit $\pi_{n-1}(\Omega)$ vermöge Hilfssatz 5 identifiziert, so besteht C_*^n aus allen Elementen der Kozykelgruppe $C^n(K, \pi_{n-1}(\Omega))$, die als Hindernisse von Abbildungen $\varphi: K^{n-1} \rightarrow \Omega$ auftreten.*

Die hier genannte Identifikation von $\pi_n(Y, y_0)$ mit $\pi_{n-1}(\Omega)$ soll für alles Weitere festgehalten werden. Es läßt sich folgern:

Hilfssatz 7. *C_*^n ist Untergruppe der Kozykelgruppe $C^n(K, \pi_n(Y)) = C^n(K, \pi_{n-1}(\Omega))$ und enthält alle Koränder.*

Beweis. Der erste Teil der Behauptung ergibt sich aus Hilfssatz 6 und der Beziehung $c(\varphi \vee \psi^-) = c(\varphi) - c(\psi)$, die ihrerseits eine unmittelbare Folge von Hilfssatz 4 ist. Zum Beweise des zweiten Teils nehmen wir an, $c = \delta c'$ sei irgendein Korand in $C^n(K, \pi_{n-1}(\Omega))$. Offenbar kann man eine Abbildung $\varphi: K^{n-1} \rightarrow \Omega$ mit folgenden Eigenschaften finden:

1. $\varphi(K^{n-2}) = w_0$.
2. $\varphi|_{\sigma'}$ repräsentiert für jedes $(n-1)$ -Simplex σ' das Element $c'(\sigma') \in \pi_{n-1}(\Omega)$.

Dann ist $c(\varphi)(\sigma) = c'(\partial\sigma)$ und weiter $c'(\partial\sigma) = (\delta c')(\sigma) = c(\sigma)$ für jedes σ , folglich $c = c(\varphi) \in C_*^n$ nach Hilfssatz 6, und das war zu zeigen.

§ 3. Allgemeine Ergebnisse.

Hilfssatz 7 erlaubt es, von C_*^n zum kanonischen Bild H_*^n in der Kohomologiegruppe $H^n = H^n(K, \pi_n(Y)) = H^n(K, \pi_{n-1}(\Omega))$ überzugehen. In § 1 wurde für eine $(n-1)$ -konstante Abbildung $f: K^n \rightarrow Y$ die Kokette $d(f)$ definiert; ihre Kohomologieklassse sei $\bar{d}(f)$ ⁷⁾. Zwei Abbildungen $K \rightarrow Y$ heißen n -homotop, wenn ihre Einschränkungen auf K^n homotop sind. Insbesondere heißt $f: K \rightarrow Y$ n -nullhomotop, wenn $f|K^n$ nullhomotop ist; das ist gleichbedeutend mit der Existenz einer n -konstanten zu f homotopen Abbildung $f': K \rightarrow Y$. Mit diesen Bezeichnungen geben wir den Ergebnissen von § 1 die Form, in der wir sie im folgenden benutzen werden ⁸⁾:

Satz 1. Für $n > 1$ ist eine $(n-1)$ -konstante Abbildung $f: K \rightarrow Y$ genau dann n -nullhomotop, wenn $\bar{d}(f|K^n) \in H_*^n$ ist.

Satz 2. Ist Y n -einfach ($n > 1$), so induziert die Zuordnung $f \rightarrow \bar{d}(f|K^n)$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung der n -Homotopieklassen von $(n-1)$ -konstanten Abbildungen $f: K \rightarrow Y$ in die Faktorgruppe H^n/H_*^n . Wenn K höchstens $(n+1)$ -dimensional ist, handelt es sich um eine Abbildung auf ganz H^n/H_*^n .

Beweis. Satz 1 ist eine Umformulierung von Hilfssatz 3. Der erste Teil von Satz 2 folgt aus Hilfssatz 2; für den zweiten Teil genügt es, daß jeder n -Kozykel von K in der Form $d(f|K^n)$ mit $f: K^{n+1} \rightarrow Y$, $f(K^{n-1}) = y_0$ darstellbar ist, und das wurde bereits bei der Definition von d (§ 1) gezeigt.

Für H_*^n gilt nun:

Satz 3. H_*^n liegt im Kern der durch den Hurewiczschen Homomorphismus $h: \pi_{n-1}(\Omega) \rightarrow H_{n-1}(\Omega)$ ⁹⁾ induzierten Abbildung

$$\tilde{h}: H^n(K, \pi_{n-1}(\Omega)) \rightarrow H^n(K, H_{n-1}(\Omega)).$$

Beweis. Jedes Element aus H_*^n besitzt als Repräsentanten den Hinderniskozykel $c(\varphi)$ einer geeigneten Abbildung $\varphi: K^{n-1} \rightarrow \Omega$. Wir müssen zeigen: Der Kozykel, der einem n -Simplex σ den Wert $h(c(\varphi)(\sigma))$ zuordnet, ist ein Korand. Sei $S_{n-1}(\Omega)$ die Gruppe der $(n-1)$ -dimensionalen singulären Ketten von Ω und $C_{n-1}(\Omega)$ die Untergruppe der Zyklen. $S_{n-1}(\Omega)/C_{n-1}(\Omega)$ ist isomorph mit $\partial S_{n-1}(\Omega)$, und diese Gruppe ist als Untergruppe einer freien Gruppe selbst frei. Daraus folgt, $C_{n-1}(\Omega)$ besitzt in $S_{n-1}(\Omega)$ ein Komplement, und es gibt eine Projektion $\omega: S_{n-1}(\Omega) \rightarrow C_{n-1}(\Omega)$. Jedem $(n-1)$ -Simplex σ' von K können wir nun die Homologieklassse $\omega(\varphi|\sigma')$ zuordnen, von der man einen Repräsentanten dadurch erhält, daß ω auf das singuläre Simplex $\varphi|\sigma'$ angewandt wird. Diese Zuordnung definiert eine $(n-1)$ -dimensionale Kokette

⁷⁾ Man beachte, daß $\bar{d}(f)$ nicht aus Kozykeln zu bestehen braucht; das ist jedoch der Fall, wenn f auf K^{n+1} fortsetzbar ist, und dann erhalten wir eine Kohomologieklassse im üblichen Sinn.

⁸⁾ Der Inhalt der Sätze 1 und 2 ist für sich betrachtet nicht neu (vgl. z.B. OLUM [9]). Der entscheidende Fortschritt liegt in der Heranziehung des Wegeraums Ω . Dadurch erhält man genauere Aussagen über H_*^n (vgl. Satz 3 und 4) und damit Anwendungen der allgemeinen Theorie (vgl. § 5).

⁹⁾ $H_{n-1}(\Omega)$ bezeichnet die singuläre Homologiegruppe von Ω .

c' von K . Für sie gilt

$$(\delta c')(\sigma) = c'(\partial\sigma) = \sum_i \overline{\omega(\varphi|\sigma_i)} = \overline{\omega(\varphi|\partial\sigma)} = \overline{(\varphi|\partial\sigma)} = h(c(\varphi)(\sigma)),$$

und das beweist die Behauptung.

Die Sätze 1 bis 3 bilden die Grundlage für die §§ 4 und 5. Die folgenden Bemerkungen dienen zur Erläuterung dieser Sätze und ihres Zusammenhangs mit bekannten Tatsachen:

1. Um festzustellen, ob eine gegebene Abbildung $f: K \rightarrow Y$ nullhomotop ist, kann man versuchen, sie gerüstweise in die konstante Abbildung $K \rightarrow y_0$ zu deformieren. Angenommen, man findet (für ein $n > 1$) eine zu f homotope $(n-1)$ -konstante Abbildung $f': K \rightarrow Y$, d. h. f ist $(n-1)$ -nullhomotop. Es ist nicht ohne Weiteres zu entscheiden, ob f dann auch n -nullhomotop ist. Die obigen Sätze liefern eine notwendige Bedingung dafür, nämlich $\bar{d}(f'|K^n) \in H_*^n$ nach Satz 1 und folglich $\tilde{h}(\bar{d}(f'|K^n)) = 0$ nach Satz 3. Ist also $\tilde{h}(\bar{d}(f'|K^n)) \neq 0$, so ist f sicher nicht nullhomotop. Anwendungen dieses Kriteriums enthält § 5.

2. Sei $K = K^n$ ein n -dimensionales Polyeder und $\pi_i(Y) = \pi_{i-1}(\Omega) = 0$ für alle $i < n$ ($n > 1$). Dann ist $h: \pi_{n-1}(\Omega) \rightarrow H_{n-1}(\Omega)$ und folglich auch $\tilde{h}$ in Satz 3 ein Isomorphismus auf, H_*^n verschwindet also. Ferner ist jede Abbildung $K^{n-1} \rightarrow Y$ nullhomotop, und daher besitzt jede Homotopieklasse von Abbildungen $K \rightarrow Y$ einen $(n-1)$ -konstanten Repräsentanten. Satz 2 liefert nun die HOPF-WHITNEYSche Klassifikation der Abbildungen von K in Y (vgl. [17]):

Die Homotopieklassen der Abbildungen eines n -dimensionalen Polyeders K in einen bogenweise zusammenhängenden Raum Y , dessen Homotopiegruppen von der ersten bis zur $(n-1)$ -ten einschließlich verschwinden, stehen in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den Elementen von $H^n(K, \pi_n(Y))$.

Ist Y die 2-Sphäre S^2 , so ist auch $h: \pi_2(\Omega) \rightarrow H_2(\Omega)$, wie sich in § 5 herausstellen wird (Satz 6), ein Isomorphismus auf, folglich verschwindet H_*^3 , und aus Satz 2 folgt:

Die Homotopieklassen der Abbildungen eines dreidimensionalen Polyeders $K = K^3$ in S^2 , die 2-konstante Repräsentanten besitzen, stehen in umkehrbar eindeutiger Beziehung zu den Elementen von $H^3(K, \pi_3(S^2)) \cong H^3(K)$.

Das ist ein Teil des Ergebnisses von PONTRJAGIN [10].

3. Ist Y 1-einfach, d. h. $\pi_1(Y)$ abelsch, so können wir auch für $n = 1$ einer $(n-1)$ -konstanten Abbildung $f: K \rightarrow Y$ in analoger Weise, wie es oben für größere n geschah, einen Kozykel $d(f|K^n)$ zuordnen; es ist wieder $d(f|K^n)(\sigma)$ dasjenige Element von $\pi_n(Y, y_0)$, das durch $f|_\sigma$ repräsentiert wird. Bekanntlich (vgl. z. B. [3] S. 240 Homotopy Theorem I) verschwindet die Kohomologiekategorie $\bar{d}(f|K^1)$ genau dann, wenn $f|_{K^1}$ nullhomotop ist. Definieren wir $H_*^1 = 0$, so gilt also Satz 2 auch für den zunächst ausgeschlossenen Fall $n = 1$.

4. Sei $\mathfrak{D}$ die Menge aller Homotopieklassen von Abbildungen $K \rightarrow Y$ und $\mathfrak{D}_r$ die Teilmenge bestehend aus den Homotopieklassen mit r -konstanten Repräsentanten. Von Y setzen wir Einfachheit in allen Dimensionen voraus.

Wegen des bogenweisen Zusammenhangs von Y ist $\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}$. Für alle $r > 0$ liefert Satz 2 zusammen mit der obigen Bemerkung 3. eine Abbildung

$$\bar{d}_r: \mathfrak{D}_{r-1} \rightarrow H^r/H_*^r,$$

bei der alle Elemente von $\mathfrak{D}_r$ und nur diese in 0 übergehen. Folglich gilt:

Läßt sich $\mathfrak{D}$ so mit einer Gruppenstruktur versehen, daß alle $\mathfrak{D}_r$ Untergruppen und die Abbildungen $\bar{d}_r$ Homomorphismen sind, so ist in der Reihe

$$\cdots < \mathfrak{D}_r < \mathfrak{D}_{r-1} < \cdots < \mathfrak{D}_1 < \mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}$$

$\mathfrak{D}_{r-1}/\mathfrak{D}_r$ mit dem Bild bei $\bar{d}_r$, also mit einer gewissen Untergruppe von H^r/H_^r isomorph.*

Die Voraussetzung dieses Klassifikationssatzes ist offenbar erfüllt, wenn Y eine topologische Gruppe ist; ferner, wenn Y eine m -Sphäre und K höchstens $(2m-2)$ -dimensional ist, was man mit Hilfe der BORSUK-SPANIERSCHEN Kohomotopiegruppen (vgl. [13]) zeigen kann. Diese beiden Fälle behandelte HU [7], ergänzt von CHEN [2]. Es sei hier noch bemerkt, daß die Voraussetzung auch erfüllt ist, wenn Y der Raum der geschlossenen nullhomotopen Wege mit festem Anfangspunkt in irgendeinem topologischen Raum ist. Als Gruppenoperation in $\mathfrak{D}$ nehme man die durch $(\varphi, \psi) \rightarrow \varphi \vee \psi$ induzierte.

§ 4. Pseudomannigfaltigkeit als Urbildraum.

In diesem Paragraphen nehmen wir an, daß K eine n -dimensionale geschlossene Pseudomannigfaltigkeit ist. Soll der Orientierbarkeitscharakter festgelegt sein, so schreiben wir K_+ oder K_- , je nachdem ob die Pseudomannigfaltigkeit orientierbar ist oder nicht. Für eine beliebige abelsche Gruppe G ist $H^n(K_+, G)$ mit G und $H^n(K_-, G)$ mit $G/2 \cdot G$ in natürlicher Weise isomorph — man ordne einem Element $g \in G$ denjenigen Kozykel zu, der auf einem festen Simplex σ_0 den Wert g hat und sonst verschwindet —, und der Isomorphismus ist eindeutig bestimmt, wenn man K_+ und damit $\sigma_0 < K_+$ als in bestimmtem Sinn orientiert voraussetzt. Wir identifizieren auf diese Weise $H^n(K_+, G)$ mit G und $H^n(K_-, G)$ mit $G/2 \cdot G$. $h: \pi_{n-1}(\Omega) \rightarrow H_{n-1}(\Omega)$ sei wieder der Hurewiczsche Homomorphismus und h_2 der induzierte Homomorphismus der mod 2 reduzierten Gruppen; dann gilt $\tilde{h} = h$ für orientierbares, $\tilde{h} = h_2$ für nichtorientierbares K , und Satz 3 besagt: Jedes Element $\alpha \in H_*^n(K_+, \pi_{n-1}(\Omega)) < \pi_{n-1}(\Omega)$ liegt im Kern N von h , jedes $\bar{\alpha} \in H_*^n(K_-, \pi_{n-1}(\Omega)) < \pi_{n-1}(\Omega)/2 \cdot \pi_{n-1}(\Omega)$ im Kern N_2 von h_2 . Es erhebt sich die Frage, inwieweit diese Aussagen umkehrbar sind. Dazu beweisen wir folgendes Ergebnis, das nachher noch eine Verschärfung erfahren wird:

Satz 4. a) Für jedes K_+ liegt $H_*^n(K_+, \pi_{n-1}(\Omega))$ im Kern N von h , und für jedes $\alpha \in N$ gibt es eine orientierbare n -dimensionale Pseudomannigfaltigkeit K_+ mit $\alpha \in H_*^n(K_+, \pi_{n-1}(\Omega))$, d. h. es ist

$$\bigcup_{K_+} H_*^n(K_+, \pi_{n-1}(\Omega)) = N.$$

b) Das Analoge gilt für die nichtorientierbaren Pseudomannigfaltigkeiten K_- in bezug auf den Kern N_2 von h_2 , d. h.

$$\bigcup_{K_-} H_*^n(K_-, \pi_{n-1}(\Omega)) = N_2.$$

Beweis. Jeweils der erste Teil der beiden Behauptungen a) und b) ist schon vorher als richtig nachgewiesen worden. Für die zweiten Teile wird ein Hilfssatz benötigt:

Hilfssatz 8. *Entsteht $\bar{X}$ dadurch aus dem endlichen Polyeder X mit der simplizialen Zerlegung L , daß gewisse Paare von Simplexen aus L durch nichtausgeartete affine Abbildungen identifiziert werden, dann geht die dritte Normalunterteilung L_3 von L bei der kanonischen Projektion $\pi: X \rightarrow \bar{X}$ in eine simpliziale Zerlegung $\bar{L}_3$ von $\bar{X}$ über.*

Beweis. Wir stellen zunächst fest: Ist x mittlerer Punkt eines Simplexes σ_1 aus der ersten Normalunterteilung L_1 von L , so gibt es keinen zweiten Punkt $x' \in \sigma_1$ mit $\pi(x) = \pi(x')$. Bedeutet nämlich σ das Simplex niedrigster Dimension aus L mit $\sigma_1 \subset \sigma$, so würde aus $\pi(x) = \pi(x')$ folgen: Es gibt eine nichtausgeartete affine Abbildung l von σ mit $x' = l(x)$. Eine solche Abbildung ist aber auf σ_1 entweder die Identität, oder sie ist keine Selbstabbildung, d. h. $l(x) = x$ oder $l(x) \notin \sigma_1$.

Daraus ergibt sich, daß π auf jedem Simplex σ_2 der zweiten Normalunterteilung L_2 topologisch ist, und zwar wie folgt: Sind x, x' zwei beliebige Punkte von σ_2 und sind σ_1, σ'_1 die Simplexe kleinster Dimension aus L_1 mit $x \in \sigma_1, x' \in \sigma'_1$, so ist σ_1 mit σ'_1 inzident; denn σ_2 enthält nur mittlere Punkte von den Simplexen aus L_1 , deren Mittelpunkte die Ecken von σ_2 bilden, und diese sind alle paarweise inzident. Sei etwa σ'_1 Seite von σ_1 ; dann ist $x, x' \in \sigma_1$ und x sogar mittlerer Punkt, folglich $\pi(x) \neq \pi(x')$. L_2 geht also bei π in eine Zerlegung von $\bar{X}$ in topologische Simplexe über. Für die dritte Normalunterteilung L_3 von L gilt darüber hinaus, daß der Durchschnitt zweier topologischer Simplexe $\pi(\sigma_3), \pi(\sigma'_3)$ entweder leer ist oder genau aus einer gemeinsamen Seite besteht. L_3 definiert demnach eine simpliziale Zerlegung $\bar{L}_3$ von $\bar{X}$.

Nachdem so der Hilfssatz bestätigt ist, wenden wir uns wieder dem Beweis von Satz 4 zu. Wird α durch $\psi_0: \partial\sigma_0 \rightarrow \Omega$ repräsentiert, so bedeutet $\alpha \in N$, daß der singuläre Zykel $(\psi_0, \partial\sigma_0)$ in Ω nullhomolog ist; und daß die Klasse mod 2 $\bar{\alpha} \in N_2$ ist, besagt: $(\psi_0, \partial\sigma_0)$ ist nullhomolog mod 2. Es gibt also eine singuläre n -Kette, die wir in der Form $-\sum_{i=1}^r (\psi_i, \sigma_i)$ mit $\psi_i: \sigma_i \rightarrow \Omega$ annehmen, so daß ihr Rand gleich $(\psi_0, \partial\sigma_0)$ bzw. kongruent $(\psi_0, \partial\sigma_0)$ mod 2 ist. Wir benutzen dabei geordnete singuläre Simplexe (vgl. [4]), d. h. die Ecken der euklidischen Urbilder sind geordnet und zwei singuläre Simplexe (χ, σ) und (χ', σ') sind genau dann gleich, wenn die ordnungserhaltende Affinität von σ auf σ' χ in χ' transformiert. Die σ_i (einschließlich σ_0) können als disjunkte euklidische Simplexe vorausgesetzt werden. Sei X der aus ihnen durch Vereinigung entstehende Raum und L seine natürliche simpliziale Zerlegung. $\psi: (X - \hat{\sigma}_0) \rightarrow \Omega$ ($\hat{\sigma}_0$ bezeichnet das Innere von σ_0) wird definiert durch $\psi|_{\sigma_i} = \psi_i, \psi|_{\partial\sigma_0} = \psi_0$.

Ferner wählen wir ein n -Simplex σ'_0 der dritten Normalunterteilung von σ_0 und setzen ψ noch auf $X - \overset{\circ}{\sigma}'_0$ fort. Dann ist auch $\psi|_{\partial\sigma'_0}$ ein Repräsentant von α . Die singuläre Kette $\sum_{i=0}^r (\psi|\partial\sigma_i)$ ist gleich 0 bzw. kongruent 0 mod 2.

In beiden Fällen läßt sich die Menge aller $(n-1)$ -Simplexe von L so in disjunkte Paare (τ, τ') einteilen, daß $\psi|\tau$ und $\psi|\tau'$ als singuläre Simplexe gleich sind; d. h. die ordnungserhaltende affine Abbildung $l: \tau \rightarrow \tau'$ läßt ψ invariant: $\psi l = \psi$ auf τ . Im ersten Fall ($\alpha \in N$) kann man darüber hinaus erreichen, daß die Inzidenzzahlen von τ und τ' mit den zugehörigen n -Simplexen entgegengesetzt gleich sind. Wird für jedes Paar (τ, τ') τ mit τ' durch l identifiziert, so entsteht aus L nach Hilfssatz 8 ein rein n -dimensionaler simplizialer Komplex $\bar{L}_3$, in dem jedes $(n-1)$ -Simplex mit genau zwei n -Simplexen inzident ist. Im Fall $\alpha \in N$ sind die n -Simplexe außerdem kohärent orientierbar.

Nach Konstruktion induziert ψ eine eindeutige Abbildung $\bar{\psi}: (\bar{L}_3 - \overset{\circ}{\sigma}'_0) \rightarrow \Omega$. Die mit $\overset{\circ}{\sigma}'_0$ verbindbaren n -Simplexe von $\bar{L}_3$ (zusammen mit ihren Seiten) bilden einen Teilkomplex K , der eine Pseudomannigfaltigkeit ist. Für $\varphi = \bar{\psi}|_{K^{n-1}}$ gilt

$$c(\varphi)(\sigma) = \begin{cases} \alpha & \text{für } \sigma = \overset{\circ}{\sigma}'_0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im ersten Fall ($\alpha \in N$) ist $K = K_+$ orientierbar, folglich $\alpha \in H_*^n(K_+, \pi_{n-1}(\Omega))$. Im zweiten Fall ($\bar{\alpha} \in N_2$) kann K orientierbar sein oder nicht. Ist es nicht-orientierbar: $K = K_-$, so gilt $\bar{\alpha} \in H_*^n(K_-, \pi_{n-1}(\Omega))$; anderenfalls gelangen wir durch eine geringe Abänderung von K und φ zum Ziel: Wir wählen zwei von $\overset{\circ}{\sigma}'_0$ verschiedene n -Simplexe σ, σ' von K mit der Eigenschaft, daß kein Simplex von K zugleich mit σ und mit σ' Punkte gemeinsam hat — nötigenfalls wird vorher eine Unterteilung der simplizialen Zerlegung von K vorgenommen — und deformieren $\bar{\psi}$ in $\bar{\psi}'$ so, daß $\bar{\psi}'(\sigma) = \bar{\psi}'(\sigma') = w_0$ ist. Entfernt man nun $\overset{\circ}{\sigma}$ und $\overset{\circ}{\sigma}'$ aus K und identifiziert $\partial\sigma$ mit $\partial\sigma'$ vermöge einer topologischen und simplizialen Abbildung $\partial\sigma \rightarrow \partial\sigma'$, die die durch $K - (\overset{\circ}{\sigma} \cup \overset{\circ}{\sigma}')$ induzierte Orientierung erhält, so entsteht eine nichtorientierbare Pseudomannigfaltigkeit K'_- . $\bar{\psi}'$ induziert eine Abbildung von $K'_- - \overset{\circ}{\sigma}'_0$ in Ω , und wenn φ' die Einschränkung auf K'^{n-1} bezeichnet, so gilt für $c(\varphi')$ Entsprechendes wie oben für $c(\varphi)$, also $\bar{\alpha} \in H_*^n(K'_-, \pi_{n-1}(\Omega))$. Damit ist der Beweis vollständig.

Um Satz 4 noch zu verschärfen, definieren wir eine „Addition“ von Pseudomannigfaltigkeiten: Sind zwei n -dimensionale Pseudomannigfaltigkeiten K_1, K_2 gegeben, die, falls sie orientierbar sind, eine bestimmte Orientierung tragen, so entfernen wir aus K_i ($i=1, 2$) das Innere $\overset{\circ}{\sigma}_i$ eines n -Simplexes und identifizieren $\partial\sigma_1$ topologisch, simplizial und für orientiertes K_1 und K_2 unter Umkehrung der induzierten Orientierung mit $\partial\sigma_2$. Es entsteht eine Pseudomannigfaltigkeit, die mit $K_1 + K_2$ bezeichnet wird. Setzt man voraus, daß σ_i in K_i eine Vollkugelumgebung besitzt, so ist $K_1 + K_2$ bis auf Homöomorphie durch K_1 und K_2 eindeutig bestimmt. Für unsere Zwecke kommt es jedoch

darauf nicht an; es genügt, wenn wir unter $K_1 + K_2$ irgendeine der Pseudomannigfaltigkeiten verstehen, die man in der beschriebenen Weise erhalten kann. Ist K_1 und K_2 orientierbar und folglich nach unserer Vereinbarung orientiert, so wird $K_1 + K_2$ orientiert, indem man die Orientierung der einzelnen n -Simplexe beibehält; anderenfalls ist $K_1 + K_2$ nichtorientierbar.

Hilfssatz 9. *Sind die n -dimensionalen Pseudomannigfaltigkeiten K_1 und K_2 entweder beide orientiert oder beide nichtorientierbar, so ist*

$$H_*^n(K_1 + K_2, \pi_{n-1}(\Omega)) > H_*^n(K_1, \pi_{n-1}(\Omega)) + H_*^n(K_2, \pi_{n-1}(\Omega)).$$

[Man beachte $H^n(K_+, G) = G$ und $H^n(K_-, G) = G/2 \cdot G$.]

Beweis. Sei $\bar{c}_i$ ein beliebiges Element von $H_*^n(K_i, \pi_{n-1}(\Omega))$, c_i ein Kozykel, der $\bar{c}_i$ repräsentiert, mit $c_i(\sigma_i) = 0$, wobei σ_i das bei der Konstruktion von $K_1 + K_2$ aus K_i entfernte Simplex ist. Es ist $c_i \in C_*^n(K_i, \pi_{n-1}(\Omega))$, und nach Hilfssatz 6 gibt es eine Abbildung $\varphi_i: K_i^{n-1} \rightarrow \Omega$ mit $c(\varphi_i) = c_i$. $\varphi_i|_{\partial\sigma_i}$ ist nullhomotop, man kann also annehmen, daß $\varphi_i(\partial\sigma_i) = w_0$ ist, denn erfüllt φ_i diese Bedingung zunächst nicht, so kann man durch Deformation eine Abbildung der gewünschten Art erhalten. Wird $\psi: (K_1 + K_2)^{n-1} \rightarrow \Omega$ durch $\psi|_{K_i^{n-1}} = \varphi_i$ definiert, so repräsentiert $c(\psi)$ das Element $\bar{c}_1 + \bar{c}_2$ von $H_*^n(K_1 + K_2, \pi_{n-1}(\Omega)) = \pi_{n-1}(\Omega)$, folglich ist $\bar{c}_1 + \bar{c}_2 \in H_*^n(K_1 + K_2, \pi_{n-1}(\Omega))$.

Sei E eine endlich erzeugte Untergruppe des Kerns N von $h: \pi_{n-1}(\Omega) \rightarrow H_{n-1}(\Omega)$, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ein Erzeugendensystem von E . Nach Satz 4 gibt es zu jedem α_j eine orientierbare Pseudomannigfaltigkeit K_j mit $\alpha_j \in H_*^n(K_j, \pi_{n-1}(\Omega))$. Setzt man $K = K_1 + K_2 + \dots + K_k$, so enthält $H_*^n(K, \pi_{n-1}(\Omega))$ nach Hilfssatz 9 die von $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ erzeugte Gruppe, also E . Analog schließt man für die nichtorientierbaren Pseudomannigfaltigkeiten, und es ergibt sich:

Ergänzung zu Satz 4. *Zu jeder endlich erzeugten Untergruppe E von N [bzw. E_2 von N_2] gibt es eine n -dimensionale orientierbare [nichtorientierbare] Pseudomannigfaltigkeit K_+ [bzw. K_-], so daß $E \subset H_*^n(K_+, \pi_{n-1}(\Omega))$ [$E_2 \subset H_*^n(K_-, \pi_{n-1}(\Omega))$] ist. Wenn insbesondere $\pi_{n-1}(\Omega)$ endlich erzeugt ist, so gibt es ein K_+ und ein K_- mit $N = H_*^n(K_+, \pi_{n-1}(\Omega))$ und $N_2 = H_*^n(K_-, \pi_{n-1}(\Omega))$.*

Satz 4 und die vorstehende Ergänzung gehen mittels Satz 1 in Aussagen über die Nullhomotopie von Abbildungen $f: K \rightarrow Y$ mit $f(K^{n-1}) = y_0$ über. Darunter fallen insbesondere die Abbildungen f_α , für die $f_\alpha(K - \sigma_0) = y_0$ ¹⁰⁾ ist (σ_0 ist ein n -Simplex einer Zerlegung von K) und $f_\alpha|_{\sigma_0}$ das Element $\alpha \in \pi_n(Y)$ repräsentiert. Da für orientierbares K $\bar{d}(f_\alpha) = \alpha$ und für nichtorientierbares $\bar{d}(f_\alpha) = \bar{\alpha} \in \pi_n(Y)/2 \cdot \pi_n(Y)$ ist, gilt:

Satz 5. a) *Für jedes orientierbare $K = K_+$ ist f_α höchstens dann nullhomotop, wenn $h(\alpha) = 0$ ist. Zu jeder endlich erzeugten Untergruppe $E \subset \pi_n(Y)$ mit $h(E) = 0$ gibt es ein K_+ , so daß f_α für jedes $\alpha \in E$ nullhomotop ist.*

¹⁰⁾ Die Forderungen $f(K^{n-1}) = y_0$ und $f(K - \sigma_0) = y_0$ sind übrigens im wesentlichen äquivalent, denn jede $(n-1)$ -konstante Abbildung ist einer Abbildung, die höchstens auf σ_0 nicht konstant ist, homotop. Die zweite Forderung hat den Vorteil der größeren Anschaulichkeit.

b) Für jedes nichtorientierbare $K = K_-$ ist f_α höchstens dann nullhomotop, wenn $h(\alpha)$ in $H_{n-1}(\Omega)$ durch 2 teilbar ist. Ist α in $\pi_n(Y)$ durch 2 teilbar, so ist $f_\alpha \simeq 0$. Zu jeder endlich erzeugten Untergruppe $E \subset \pi_n(Y)$ mit $h(E) \subset 2 \cdot H_{n-1}(\Omega)$ gibt es ein K_- , so daß f_α für jedes $\alpha \in E$ nullhomotop ist.

Ist insbesondere $\pi_n(Y)$ endlich erzeugt, so gibt es ein festes (nur von Y und n abhängendes) K_+ mit $f_\alpha \sim 0$ für alle α mit verschwindendem $h(\alpha)$ und ein K_- mit $f_\alpha \sim 0$ für alle α mit durch 2 teilbarem $h(\alpha)$.

§ 5. Die Sphäre als Bildraum.

Wir nehmen jetzt $Y = S^m$ an ($m \geq 2$). In diesem Fall ist der Hurewiczsche Homomorphismus $h: \pi_{n-1}(\Omega) \rightarrow H_{n-1}(\Omega)$ unter Benutzung der Ergebnisse von SERRE [11], [12] leicht zu bestimmen:

Nach [11] S. 487 hat der Wegeraum Ω von S^m die singulären Homologiegruppen

$$H_i(\Omega) \cong \begin{cases} Z & \text{für } i \equiv 0 \pmod{m-1} \\ 0 & \text{für } i \not\equiv 0 \pmod{m-1}, \end{cases}$$

wobei Z die Gruppe der ganzen Zahlen bedeutet. Andererseits ist in derselben Arbeit [11] S. 498 Prop. 5 gezeigt: Für $n > m$ ist $\pi_n(S^m)$ endlich, außer wenn m gerade und $n = 2m - 1$ ist; in diesem Fall ist $\pi_n(S^m)$ direkte Summe von Z und einer endlichen Gruppe E_m . Bereits daraus folgt $h = 0$ außer für $n = m$ oder $m = \text{gerade}$, $n = 2m - 1$. Für $n = m$ ist h bekanntlich ein Isomorphismus auf (Isomorphiesatz von HUREWICZ). Einem Element $\alpha \in \pi_{2m-1}(S^m)$ ist nach [5], [6] die Hopfsche Invariante $\gamma(\alpha) \in Z$ zugeordnet. Die Abbildung $\gamma: \pi_{2m-1}(S^m) \rightarrow Z$ ist linear. Identifiziert man $\pi_{2m-1}(S^m)$ nach Hilfssatz 5 mit $\pi_{2m-2}(\Omega)$ und $H_{2m-2}(\Omega)$ mit Z , so sind h und γ Homomorphismen zwischen denselben Gruppen.

Hilfssatz 10. Bei geeigneter Identifikation von $H_{2m-2}(\Omega)$ mit Z ($m = \text{gerade}$) stimmen die beiden Homomorphismen

$$h, \gamma: \pi_{2m-1}(S^m) = \pi_{2m-2}(\Omega) \rightarrow H_{2m-2}(\Omega) = Z$$

überein.

Dieser Hilfssatz wird von SERRE in [12] Chap. IV als Lemme 2 (S. 280 und 286f.) bewiesen. Wir geben im Anhang einen anderen Beweis. Zusammenfassend stellen wir fest:

Satz 6. Der Hurewiczsche Homomorphismus für den Wegeraum der m -Sphäre $h: \pi_n(S^m) = \pi_{n-1}(\Omega) \rightarrow H_{n-1}(\Omega)$ ist für $n = m$ ein Isomorphismus auf, für $m = \text{gerade}$ und $n = 2m - 1$ stimmt er bei geeigneter Identifikation $H_{2m-2}(\Omega) = Z$ mit der Hopfschen Abbildung $\gamma: \pi_{2m-1}(S^m) \rightarrow Z$ überein, und in allen anderen Fällen ist er die Nullabbildung.

Dieses Ergebnis erlaubt es, aus den allgemeinen Sätzen der früheren Paragraphen explizite Resultate für den Fall $Y = S^m$ herzuleiten. Zum Beispiel besagt Satz 5:

Satz 7. Sei K eine n -dimensionale geschlossene Pseudomannigfaltigkeit, σ_0 ein n -Simplex einer Zerlegung von K und $f_\alpha: K \rightarrow S^m$ die bis auf Homotopie

bestimmte Abbildung, die auf $K - \sigma_0$ konstant ist und deren Einschränkung auf σ_0 das Element $\alpha \in \pi_n(S^m)$ repräsentiert. Dann gilt:

a) Ist $n = m$ und $\alpha \neq 0$ oder $n = 2m - 1$, m gerade und $\gamma(\alpha) \neq 0$, so ist f_α für alle orientierbaren K wesentlich. Für jedes Paar (n, m) mit $n \neq m$ gibt es ein orientierbares K , so daß $f_\alpha \sim 0$ ist für jedes $\alpha \in \pi_n(S^m)$ mit $\gamma(\alpha) = 0$, falls $n = 2m - 1$ und m gerade ist, und anderenfalls für alle α .

b) Ist $n = m$ und α nicht durch 2 teilbar oder $n = 2m - 1$, m gerade und $\gamma(\alpha)$ ungerade, so ist f_α für alle nichtorientierbaren K wesentlich. Ist α durch 2 teilbar, so ist f_α immer unwesentlich. Für jedes Paar (n, m) mit $n \neq m$ gibt es ein nichtorientierbares K , so daß $f_\alpha \sim 0$ ist für jedes α mit geradem $\gamma(\alpha)$, falls $n = 2m - 1$ und m gerade ist, und anderenfalls für alle α .

HOPF hat in [6] gezeigt, daß es für jedes gerade m ein Element $\alpha \in \pi_{2m-1}(S^m)$ mit $\gamma(\alpha) = 2$ gibt. Wegen $\pi_{2m-1}(S^m) \cong \mathbb{Z} + E_m$ folgt daraus, daß $\gamma(\alpha)$ für jedes α mit unendlicher Ordnung (und offenbar nur für diese) von 0 verschieden ist. In Satz 7a) ist demnach enthalten: f_α ist genau dann für jedes orientierbare K wesentlich, wenn α in $\pi_n(S^m)$ unendliche Ordnung besitzt. Bemerkenswert ist, daß wir damit unabhängig von der algebraischen Struktur eine topologische Charakterisierung der Elemente unendlicher Ordnung von $\pi_n(S^m)$ gewonnen haben.

Für den Teil b) von Satz 7 wäre es interessant zu wissen, für welche m ungerade Hopfsche Invarianten vorkommen. Das ist der Fall für $m = 2, 4, 8$, wie schon HOPF in [6] zeigte. G. W. WHITEHEAD [15] bewies, daß es nicht richtig ist für $m \equiv 2 \pmod{4}$ und $m \neq 2$, und nach einem Ergebnis von ADEM [1] ist sogar $m = 2^k$ für die Existenz von ungeraden Hopfschen Invarianten notwendig.

Bereits aus Satz 7a) und der nachfolgenden Bemerkung kann man entnehmen, daß für gerades m nicht nur jede $(2m - 1)$ -dimensionale orientierbare Mannigfaltigkeit (HOPF [5], [6]) sondern auch jede orientierbare Pseudomannigfaltigkeit dieser Dimension wesentliche Abbildungen auf die m -Sphäre gestattet. Wir wollen nun die Voraussetzungen noch weiter abschwächen und zeigen:

Satz 8. Ist m gerade, $n = 2m - 1$ und enthält die ganzzahlige Kohomologiegruppe $H^n(K)$ des höchstens $(n + 1)$ -dimensionalen Polyeders K Elemente größerer Ordnung als 2, so gibt es wesentliche Abbildungen $f: K \rightarrow S^m$. Für diejenigen Dimensionen m , in denen ungerade Hopfsche Invarianten vorkommen (z. B. 2, 4, 8) genügt es sogar, daß $H^n(K) \neq 0$ ist¹¹⁾. Ist die Bettische Zahl der Dimension n von K von 0 verschieden, so gibt es unendlich viele Homotopieklassen von Abbildungen $K \rightarrow S^m$.

¹¹⁾ Mir ist nicht bekannt, ob die Behauptung allgemein richtig bleibt, wenn man nur $H^n(K) \neq 0$ voraussetzt. Jedenfalls braucht es dann aber keine $(n - 1)$ -konstanten wesentlichen Abbildungen zu geben, um die es sich bei unserem Beweis von Satz 8 immer handelt. Für diejenigen Dimensionen m , in denen keine ungeraden Hopfschen Invarianten vorkommen (z. B. $m = 6$ nach [15]), gibt es nämlich $(2m - 1)$ -dimensionale nichtorientierbare Pseudomannigfaltigkeiten, die keine $(2m - 2)$ -konstanten wesentlichen Abbildungen auf S^m gestatten [s. Satz 7b) und Fußnote ¹⁰⁾].

Beweis. Wir gehen aus von $\pi_n(S^m) = Z + E_m$ und zerlegen $H^n(K, \pi_n(S^m))$ entsprechend in $H^n(K) + H^n(K, E_m)$. Nach Satz 6 und dem, was wir über die Hopfsche Invariante wissen, bildet h die Untergruppe $Z \subset \pi_n(S^m)$ isomorph ab, und zwar auf $H_{n-1}(\Omega)$, wenn es Elemente mit ungerader Hopfscher Invariante gibt, d. h. wenn $\gamma(1) = \pm 1$ ist, und andernfalls auf die Untergruppe vom Index 2. Folglich ist $\tilde{h}|H^n(K)$ (zur Definition vgl. Satz 3) im ersten Fall ein Isomorphismus und im zweiten bildet es genau die Elemente der Ordnung 2 in 0 ab. Nach Satz 3 enthält also $H_*^n(K, \pi_n(S^m)) \cap H^n(K)$ höchstens Elemente der Ordnung 2 und im Falle $\gamma(1) = \pm 1$ sogar nur die 0. Aus Satz 2 folgt nun die Behauptung.

Wir zeigen zum Schluß, daß die Voraussetzung: m gerade und $n = 2m - 1$, in Satz 8 tatsächlich in der Natur der Sache liegt, indem wir folgendes beweisen:

Satz 9. *Ist die Freudenthalsche Einhängung eine Abbildung von $\pi_{n-1}(S^{m-1})$ auf $\pi_n(S^m)$ und ist $n > m$, so gibt es eine n -dimensionale orientierbare Pseudomannigfaltigkeit, die sich in keiner Weise wesentlich auf die m -Sphäre abbilden läßt.*

Da nach den bekannten Freudenthalschen Sätzen (vgl. z. B. [16]) die Voraussetzung dieses Satzes für $n < 2m - 1$ und bei ungeradem m auch für $n = 2m - 1$ erfüllt ist, ergibt sich, daß in allen diesen Dimensionen ein Analogon zu Satz 8 nicht richtig sein kann.

Beweis von Satz 9. In den betrachteten Fällen hat $\pi_n(S^m)$ endliche Ordnung, etwa die Ordnung s . Wir entfernen aus einer n -Sphäre s disjunkte n -dimensionale Vollkugeln V_i^n , so daß ein Raum X mit s $(n-1)$ -Sphären $S_1^{n-1}, \dots, S_s^{n-1}$ als Rändern entsteht. Ferner betrachten wir zu jedem Element von $\pi_n(S^m)$ ein Urbild bei der Einhängung $\alpha_i \in \pi_{n-1}(S_i^{m-1})$, dazu eine repräsentierende Abbildung f_i von S_i^{n-1} auf S_i^{m-1} und identifizieren in S_i^{n-1} alle Punkte, die bei f_i denselben Bildpunkt haben. Man bestätigt leicht, daß der entstehende Raum P ein Polyeder ist, wenn man die Vollkugeln V_i^n in geeigneter Weise als Teilkomplexe einer simplizialen Zerlegung der ursprünglichen n -Sphäre und die Abbildungen f_i simplizial wählt. Da die $(n-1)$ -dimensionalen Ränder von X in $(m-1)$ -Sphären $S_1^{m-1}, \dots, S_s^{m-1}$, also in Polyeder niedrigerer Dimension übergehen, ist P eine orientierbare Pseudomannigfaltigkeit. X_i entstehe aus X und P_i aus P dadurch, daß alle Punkte von $S_j^{n-1} \subset X$ bzw. $S_j^{m-1} \subset P$ für jedes $j \neq i$ miteinander identifiziert werden. X_i ist eine n -dimensionale Vollkugel mit dem Rand S_i^{n-1} , und die durch f_i gegebene Identifikation $S_i^{n-1} \rightarrow S_i^{m-1}$ läßt X_i in P_i übergehen. Nimmt man diese Identifikation nicht nur auf dem Rand S_i^{n-1} vor, sondern setzt man sie „radialweise“ ins Innere von X_i fort, so erhält man eine m -dimensionale Vollkugel $\bar{X}_i$. Wird in P jedes S_j^{n-1} zu einem Punkt identifiziert, so entsteht wieder eine n -Sphäre S^n . Insgesamt ergibt sich folgendes Diagramm von kanonischen Projektionen

$$\begin{array}{ccccc} & & P & \searrow & S^n \\ X & \swarrow & & \nearrow & \\ & X_i & \nearrow & P_i & \searrow \\ & & & & \bar{X}_i \end{array}$$

Da jede Abbildung $S_i^{m-1} \rightarrow S^m$ nullhomotop ist, läßt sich jede Abbildung $f: P \rightarrow S^m$ so deformieren, daß das Ergebnis der Deformation in der Form $\tilde{f}\pi$ darstellbar ist, wobei π die Projektion $P \rightarrow S^n$ und $\tilde{f}$ eine Abbildung von S^n in S^m ist. Es ist also nur noch zu zeigen: Für ein vollständiges Repräsentantensystem $\tilde{f}_i: S^n \rightarrow S^m$ der Elemente von $\pi_n(S^m)$ ist $\tilde{f}_i\pi$ nullhomotop. Hat $g_i: \bar{X}_i \rightarrow S^m$ mit $g_i(S_i^{m-1}) = y_0 \in S^m$ den Grad 1, und ist $\pi_i: P \rightarrow \bar{X}_i$ die kanonische Projektion, so ist $g_i\pi_i = \tilde{f}_i\pi$ mit einer Abbildung $\tilde{f}_i: S^n \rightarrow S^m$, die die Freudenthalsche Einhängung von α_i repräsentiert. Da g_i trivialerweise nullhomotop ist, folgt $\tilde{f}_i\pi \sim 0$, und nach Wahl der α_i erschöpfen die Klassen der $\tilde{f}_i$ ganz $\pi_n(S^m)$. Damit ist Satz 9 bewiesen.

Die in diesem Beweis durchgeführten Konstruktionen sind auch im Zusammenhang mit Satz 7 von Interesse. Während dort nur die Existenz von Pseudomannigfaltigkeiten mit $f_\alpha \sim 0$ (unter den dort genannten Bedingungen) gezeigt wurde, sind hier für gewisse Dimensionen Pseudomannigfaltigkeiten P direkt angegeben, für die jede Abbildung $f: P \rightarrow S^m$, also auch f_α nullhomotop ist.

Anhang.

Beweis von Hilfssatz 10¹²⁾. Die Bestimmung von $h: \pi_{2m-2}(\Omega) \rightarrow H_{2m-2}(\Omega)$ und seines Zusammenhangs mit $\gamma: \pi_{2m-1}(S^m) \rightarrow Z$ geschieht dadurch, daß wir h durch übersehbare Zwischenglieder mit dem entsprechenden Homomorphismus für einen einfacheren Raum, als es Ω ist, in Beziehung bringen. Wir führen dazu den Raum V der tangentialen Vektoren an S^m ein. V hat eine natürliche Faserraumstruktur über S^m ; die Projektion heiße p , und die Faser über $y_0 \in S^m$ sei F . v_0 sei ein fester Punkt aus F , W der Raum aller in v_0 beginnenden Wege von V , $q: W \rightarrow V$ die Abbildung, die jedem Weg seinem Endpunkt zuordnet und $\bar{Q}$ der Teilraum $q^{-1}(F)$ von W . p induziert eine Abbildung $p: \bar{Q} \rightarrow \Omega$. Wir betrachten das kommutative Diagramm:

$$(1) \quad \begin{cases} \pi_{2m-2}(\Omega) \xleftarrow{p_*} \pi_{2m-2}(\bar{Q}) \xleftarrow{\partial_*} \pi_{2m-1}(W, \bar{Q}) \xrightarrow{q_*} \pi_{2m-1}(V, F) \\ \downarrow h \qquad \qquad \qquad \downarrow h' \\ H_{2m-2}(\Omega) \xleftarrow{p_*} H_{2m-2}(\bar{Q}) \xleftarrow{\partial_*} H_{2m-1}(W, \bar{Q}) \xrightarrow{q_*} H_{2m-1}(V, F). \end{cases}$$

Da W auf einen Punkt, nämlich den konstanten Weg v_0 , zusammenziehbar ist, sind ∂_* und ∂^* wegen der Exaktheit der relativen Homotopie- und Homologiefolge Isomorphismen auf. Auch q_* ist ein Isomorphismus auf, denn wie SERRE ([11] S. 479 Prop. 4) zeigt, gilt für $q: W \rightarrow V$ ebenso wie für eine Faserraumprojektion der „zweite Homotopiesatz“ (STEENROD [14] S. 54), und nur der wird gebraucht, um das entsprechende Ergebnis bei Faserräumen zu beweisen (vgl. [14] S. 90). Schließlich sind auch p_* und p^* Isomorphismen auf, was man z.B. folgendermaßen einsehen kann.

¹²⁾ Dieser ursprüngliche Beweis des Verfassers ist länger, beruht aber auf elementarerem Hilfsmitteln als der in § 5 zitierte von SERRE [12], der mir erst nachträglich bekannt wurde.

Seien $C \subset \Omega$ und $\bar{C} \subset \bar{\Omega}$ irgend zwei kompakte Teilräume mit $p(\bar{C}) \subset C$. Der Injektion $i: C \rightarrow \Omega$ entspricht die durch $(w, t) \rightarrow w(t)$ definierte Abbildung $C \times I \rightarrow S^m$. Sie kann als eine Deformation der konstanten Abbildung $C \rightarrow y_0$ aufgefaßt werden. Nach dem „zweiten Homotopiesatz“ für Faserräume ([14] S. 54) gibt es eine „darüberliegende“ Deformation der Abbildung $C \rightarrow y_0$, d. h. eine Abbildung $r: C \rightarrow \bar{\Omega}$ mit $p \circ r = i$. Außerdem ist $r \circ (p|_{\bar{C}})$ der Injektion $\bar{i}: \bar{C} \rightarrow \bar{\Omega}$ homotop. Ist nämlich $T: \bar{C} \times I^2 \rightarrow S^m$ durch $T(\bar{w}, t, t') = (p \bar{w})(t)$ definiert, so gibt es ein $\bar{T}: \bar{C} \times I^2 \rightarrow V$ mit

$$\begin{aligned}\bar{T}(\bar{w}, 0, t') &= y_0 \\ \bar{T}(\bar{w}, t, 0) &= (r \circ p(\bar{w}))(t) \\ \bar{T}(\bar{w}, t, 1) &= \bar{w}(t) \\ p \circ \bar{T} &= T,\end{aligned}$$

denn das Paar $(\bar{C} \times I^2, \bar{C} \times (I \times \partial I \cup 0 \times I))$ ist mit $(\bar{C} \times I^2, \bar{C} \times 0 \times I)$ topologisch äquivalent und der „zweite Homotopiesatz“ wieder anwendbar. Das Diagramm der Homologiegruppen

$$\begin{cases} H_n(\bar{C}) \xrightarrow{\bar{i}^*} H_n(\bar{\Omega}) \\ (p|_{\bar{C}})^* \downarrow \quad \nearrow r^* \quad \downarrow p^* \\ H_n(C) \xrightarrow{i^*} H_n(\Omega) \end{cases}$$

ist infolgedessen kommutativ. p^* ist eine Abbildung auf, denn zu jedem $a \in H_n(\Omega)$ gibt es ein $C \subset \Omega$ und ein $a' \in H_n(C)$ mit $i^*(a') = a$, woraus $a = p^* r^*(a')$ folgt. Ferner ist p^* ein Isomorphismus, denn wäre $\bar{a} \neq 0$ und $p^*(\bar{a}) = 0$, so gäbe es ein $\bar{C} \subset \bar{\Omega}$ und ein $\bar{a}' \in H_n(\bar{C})$ mit $\bar{i}^*(\bar{a}') = \bar{a}$, sowie ein $C \subset \Omega$ mit $p(\bar{C}) \subset C$ und $(p|_{\bar{C}})^*(\bar{a}') = 0$, woraus sich der Widerspruch $r^*(p|_{\bar{C}})^*(\bar{a}') = \bar{a} = 0$ ergäbe. Der gleiche Schluß gilt für die Homotopiegruppen.

Um q^* in (1) zu untersuchen, wählen wir eine Folge von niederdimensionalen „Großsphären“ in S^m :

$$y_0 \in S^0 \subset S^1 \subset \dots \subset S^{m-1} \subset S^m.$$

U^r und O^r seien die beiden abgeschlossenen Halbsphären, in die S^r durch S^{r-1} zerlegt wird. Ist M irgendeine Teilmenge von S^m , so schreiben wir für $p^{-1}(M)$ auch V_M und für $q^{-1}p^{-1}(M)$ auch W_M ; z. B. ist $F = V_{y_0}$, $\bar{\Omega} = W_{y_0}$. Das Diagramm

$$(3) \begin{cases} H_{m+r-1}(W_{S^r}, W_{y_0}) \xrightarrow{i^*} H_{m+r-1}(W_{S^r}, W_{O^r}) \xleftarrow{j^*} H_{m+r-1}(W_{U^r}, W_{S^{r-1}}) \xrightarrow{\partial^*} H_{m+r-2}(W_{S^{r-1}}, W_{y_0}) \\ \downarrow q^* \quad \quad \downarrow q^* \quad \quad \downarrow q^* \quad \quad \downarrow q^* \\ H_{m+r-1}(V_{S^r}, V_{y_0}) \xrightarrow{i^*} H_{m+r-1}(V_{S^r}, V_{O^r}) \xleftarrow{j^*} H_{m+r-1}(V_{U^r}, V_{S^{r-1}}) \xrightarrow{\partial^*} H_{m+r-2}(V_{S^{r-1}}, V_{y_0}), \end{cases}$$

in dem i^*, j^* durch die Injektionen und ∂^* durch den Randoperator induziert sind, ist bekanntlich kommutativ.

Ist $y_0 \in N \subset M \subset S^m$ und gibt es eine Deformation der Identität von S^m , die y_0 festläßt und zum Schluß M in N abbildet, so gibt es nach dem „ersten Homotopiesatz“ für Faserräume (vgl. [14] S. 50) eine Deformation f_t von V mit $f_t(v_0) = v_0$ für alle t und $f_1(V_M) \subset V_N$. Die durch $\varphi_t(w)(t') = f_t(w(t'))$, $w \in W$, $t' \in I$ definierte Deformation φ_t von W zieht dann W_M in W_N zusammen. Wird irgendein Teilraum $L \subset S^m$ bei der Ausgangsdeformation immer in sich abgebildet, so gilt auch $f_t(V_L) \subset V_L$ und $\varphi_t(W_L) \subset W_L$ für alle t . Mit Hilfe dieser Bemerkung können wir zeigen, daß die Abbildungen i^* , j^* , ∂^* in (3) in beiden Zeilen Isomorphismen auf sind. Wir beschränken uns auf die obere Zeile; für die untere schließt man analog:

1. Da es eine Deformation von S^m gibt, die O^r in sich unter Festhaltung von y_0 auf y_0 zusammenzieht, ist auch W_{O^r} in sich auf W_{y_0} zusammenziehbar, folglich $H_n(W_{O^r}, W_{y_0}) = 0$ für alle n , und wegen der Exaktheit der Homologiefolge von $(W_{S^r}, W_{O^r}, W_{y_0})$ ist i^* ein Isomorphismus auf.

2. Ist U^{rr} eine Umgebung von U^r in S^r , so ist $W_{U^{rr}}$ Umgebung von W_{U^r} in W_{S^r} , und wegen einer bekannten Eigenschaft der Homologiegruppen („excision property“) induziert die Injektion $(W_{U^{rr}}, W_{U^{rr} \cap O^r}) \rightarrow (W_{S^r}, W_{O^r})$ einen Isomorphismus auf. U^{rr} kann man so wählen, daß es eine Deformation von S^m gibt, die y_0 festläßt, U^{rr} auf U^r zusammenzieht und U^r sowie $U^{rr} \cap O^r$ als Ganzes invariant läßt. Eine „darüberliegende“ Deformation der oben angegebenen Art zeigt: Die Injektion $(W_{U^r}, W_{S^{r-1}}) \rightarrow (W_{U^{rr}}, W_{U^{rr} \cap O^r})$ induziert einen Isomorphismus auf. Folglich ist auch die zusammengesetzte Abbildung j^* ein Isomorphismus auf.

3. Wie unter 1. zeigt man $H_n(W_{U^r}, W_{y_0}) = 0$ und folgert aus der exakten Homologiefolge von $(W_{U^r}, W_{S^{r-1}}, W_{y_0})$, daß ∂^* ein Isomorphismus auf ist.

Wendet man das Diagramm (3) der Reihe nach für $r = m, m-1, \dots, 1$ an, so ergibt sich

$$(4) \quad \begin{cases} H_{2m-1}(W, \bar{Q}) \cong H_{m-1}(W_{S^0}, W_{y_0}) \cong H_{m-1}(W_{y_1}) \\ \downarrow q^* \qquad \qquad \downarrow q^* \qquad \qquad \downarrow q^* \\ H_{2m-1}(V, F) \cong H_{m-1}(V_{S^0}, V_{y_0}) \cong H_{m-1}(V_{y_1}), \end{cases}$$

wobei y_1 den zweiten Punkt (neben y_0) von S^0 bezeichnet. Der letzte dieser Homomorphismen q^* ist nun leicht zu übersehen. Aus der Bedeutung von W_{y_1} und q entnimmt man: Jeder sphärische Zykel in V_{y_1} , der in V nullhomotop ist, repräsentiert ein Bildelement bei der Abbildung q^* ; und jedes Bild bei q^* ist in V nullhomolog. Da V_{y_1} als Faser von V eine $(m-1)$ -Sphäre ist und auch für V alle Homotopiegruppen $\pi_i(V)$ mit $i < m-1$ verschwinden, ist in der Dimension $m-1$ jede Homologieklassse von V_{y_1} sphärisch, und Nullhomotopie und Nullhomologie in V ist gleichbedeutend. Folglich stimmt $q^*(H_{m-1}(W_{y_1}))$ mit dem Kern von $H_{m-1}(V_{y_1}) \rightarrow H_{m-1}(V)$ überein, und dieser ist bekanntlich $2 \cdot H_{m-1}(V_{y_1})$. Indem wir die vorgenommenen isomorphen Abbildungen zurückverfolgen, erhalten wir:

$$q^*: H_{2m-1}(W, \bar{Q}) \rightarrow H_{2m-1}(V, F)$$

hat die Untergruppe vom Index 2 als Bild. (Beide Gruppen sind mit Z isomorph.)

Damit ist in Diagramm (1) h auf h' zurückgeführt, denn alle „horizontalen“ Homomorphismen sind nun bekannt. h' läßt sich leicht mit der Hopfschen Invariante in Beziehung setzen:

Wir wählen eine Abbildung $f_0: S^{2m-1} \rightarrow V$, so daß $p \circ f_0$ die Hopfsche Invariante $\gamma_0 \neq 0$ besitzt. Das ist möglich, denn in der exakten Homotopiefolge von V

$$\cdots \rightarrow \pi_{2m-1}(V) \rightarrow \pi_{2m-1}(S^m) \rightarrow \pi_{2m-2}(S^{m-1}) \rightarrow \cdots$$

ist $\pi_{2m-2}(S^{m-1})$ endlich, daher treten in $\pi_{2m-1}(S^m)$ gewisse Elemente mit beliebig hoher Hopfscher Invariante — es gibt solche nach [6] — als Bilder von Elementen aus $\pi_{2m-1}(V)$ auf. Man kann V und S^m so simplizial zerlegen, daß p simplizial wird, und indem man notfalls f_0 homotop abändert, voraussetzen, daß auch f_0 simplizial ist. Sei y_0 mittlerer Punkt eines m -Simplexes von S^m . Dann bestehen $p^{-1}(y_0)$ und $f_0^{-1}p^{-1}(y_0)$ aus affinen $(m-1)$ -Simplexen, die in gewissen $(2m-1)$ -Simplexen von V bzw. S^{2m-1} liegen, und lassen sich bei geeigneter Festsetzung der Orientierung als (singuläre) $(m-1)$ -Zykel auffassen (vgl. [5], [6]). Wird in $f_0^{-1}p^{-1}(y_0)$ eine m -Kette c^m von S^{2m-1} eingespannt, so ist $p f_0(c^m)$ ein Zykel in S^m , und seine Homologiekategorie ist nach Definition von γ das γ_0 -fache eines erzeugenden Elements von $H_m(S^m)$. Ist a der Grad von f_0 , so ist $f_0(f_0^{-1}p^{-1}(y_0)) = a \cdot p^{-1}(y_0)$. Bekanntlich läßt sich in $2 \cdot p^{-1}(y_0)$ eine m -Kette v^m von V einspannen, so daß $p(v^m)$ $H_m(S^m)$ erzeugt. $f_0(2c^m) - a \cdot v^m$ ist dann ein m -Zykel in V ; wegen $H_m(V) = 0$ ist er und sein Bild bei p nullhomolog. Folglich gilt $p f_0(2c^m) \sim a \cdot p(v^m)$ und nach der genannten Definition der Hopfschen Invariante $a = \pm 2\gamma_0$.

Sei nun α'_0 das Element, das durch f_0 in $\pi_{2m-1}(V, F)$ bestimmt wird. Wie wir eben sahen, ist dann $h'(\alpha'_0)$ das $2\gamma_0$ -fache eines erzeugenden Elements von $H_{2m-1}(V, F) \cong H_{2m-1}(V)$; also ist im Diagramm (1) $p_* \partial_* q_*^{-1} h'(\alpha'_0)$ das γ_0 -fache einer Erzeugenden von $H_{2m-2}(\Omega)$. Da die Abbildungen $p_* \circ \partial_* \circ q_*^{-1}$ und $p_*: \pi_{2m-1}(V, F) \rightarrow \pi_{2m-1}(S^m) = \pi_{2m-2}(\Omega)$ beide Isomorphismen auf sind, unterscheidet sich die Hopfsche Invariante von $\alpha_0 = p_* \partial_* q_*^{-1}(\alpha'_0)$ von der von $p \circ f_0$ höchstens durch das Vorzeichen. Folglich gilt für dieses spezielle α_0 die Behauptung des Hilfssatzes: $h(\alpha_0) = \gamma_0 = \gamma(\alpha_0)$ bei geeigneter Identifikation von $H_{2m-2}(\Omega)$ mit Z . Da die Abbildungen h und γ linear sind, $\pi_{2m-2}(\Omega) \cong Z + E_m$ und $\gamma(\alpha_0) \neq 0$ ist, folgt das gleiche für alle Elemente von $\pi_{2m-2}(\Omega)$.

Literatur.

- [1] ADEM, J.: The iteration of the Steenrod squares in algebraic topology. Proc. Nat. Acad. Sci. **38**, 720 (1952). — [2] CHEN, C.: A note on the classification of mappings of a $(2n-2)$ -dimensional complex into an n -sphere. Ann. of Math. (2) **51**, 238 (1950). — [3] EILENBERG, S.: Cohomology and continuous mappings. Ann. of Math. (2) **41**, 231 (1940). — [4] EILENBERG, S.: Singular homology theory. Ann. of Math. (2) **45**, 407 (1944). — [5] HOPF, H.: Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche. Math. Ann. **104**, 637 (1931). — [6] HOPF, H.: Über die Abbildungen von

Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension. *Fund. Math.* **25**, 427 (1935). — [7] HU, S. T.: Extension and classification of the mappings of a finite complex into a topological group or on n -sphere. *Ann. of Math. (2)* **50**, 158 (1949). — [8] LEFSCHETZ, S.: Introduction to topology. Princeton Univ. Press 1949. — [9] OLUM, P.: Obstructions to extensions and homotopies. *Ann. of Math. (2)* **52**, 1 (1950). — [10] PONTRJAGIN, L.: A classification of mappings of the three-dimensional complex into the two-dimensional sphere. *Rec. Math. (Mat. Sbornik) N. S.* **9** (51), 331 (1941). — [11] SERRE, J. P.: Homologie singulière des espaces fibrés. *Ann. of Math.* **54**, 425 (1951). — [12] SERRE, J. P.: Groupes d'homotopie et classes de groupes abéliens. *Ann. of Math. (2)* **58**, 258 (1953). — [13] SPANIER, E.: Borsuk's cohomotopy groups. *Ann. of Math. (2)* **50**, 203 (1949). — [14] STEENROD, N. E.: The topology of fibre bundles. Princeton Univ. Press 1951. — [15] WHITEHEAD, G. W.: A generalization of the Hopf invariant. *Ann. of Math. (2)* **51**, 192 (1950). — [16] WHITEHEAD, G. W.: On the Freudenthal theorems. *Ann. of Math. (2)* **57**, 209 (1953). — [17] WHITNEY, H.: The maps of an n -complex into an n -sphere. *Duke Math. J.* **3**, 51 (1937).

Heidelberg, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 3. August 1954.)