Werk

Titel: Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. III.

Autor: Neumer, Walter

Jahr: 1954

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0060|log5

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

NEUMER, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 1—16 (1954)

Zur Konstruktion von Ordnungszahlen. III.

Von
WALTER NEUMER.

Vorbemerkung.

Die beiden ersten Abschnitte dieser Arbeit (zitiert als **I** und **II**) erschienen in dieser Z. **58**, 391—413 (1953) und **59**, 434—454 (1954); sie enthalten die §§ 1—6. Der vorliegende dritte Abschnitt umfaßt die §§ 7 und 8 und bringt zunächst einige Rechenregeln für den freien Algorithmus (§ 7). Sodann werden zwei konstruktive Algorithmen mit dem Grundoperator U ($\alpha U = \alpha + 1$) bzw. W ($\alpha W = \alpha \cdot 2$) skizziert und es wird gezeigt, daß man mit jedem dieser Algorithmen denselben Abschnitt der zweiten Zahlenklasse erfaßt wie mit dem in **I** entwickelten Algorithmus (§ 7). In § 8 werden einige Möglichkeiten für die Einführung neuer Operatoren dargestellt und das Beispiel der Operatoren $\overline{V}$ und I_0 ($\alpha \overline{V} = \alpha V^{\alpha} = \alpha V I_0$) wird genauer durchgerechnet.

Die Paragraphen werden durchgehend, die Sätze, Formeln und Fußnoten in jedem Abschnitt für sich numeriert.

3. Abschnitt.

Beispiele für das Rechnen im freien Algorithmus.

§ 7. Einige Rechenregeln. Anwendungen.

1. Unter dem freien Algorithmus wollen wir von jetzt ab ganz allgemein das Rechnen mit beliebigen Operatoren aller Stufen gemäß den Regeln (1) und (2_i) ($i = 1, 2, \ldots$) von **II**, § 4, **1** verstehen. Wenn wir speziell vom freien Algorithmus der Symbole $V, J, J_1, J_2, \ldots$ (als Einzelzeichen für Operatoren 1., 2., 3., ... Stufe) sprechen, so meinen wir, daß außer diesen Symbolen keine ursprünglichen Einzelzeichen mehr für Operatoren verwendet werden sollen, sondern höchstens noch Einzelzeichen als Abkürzungen für Operatoren, die aus Zahlenfiguren $\tilde{\mathfrak{F}}$ entnommen sind; unter einem $\tilde{\mathfrak{F}}$ verstehen wir dabei eine Figur, die aus einem $\mathfrak{F}$ (s. **II**, § 4, **2**) entsteht, wenn $J, J_1, J_2, \ldots$ an die Stelle von $I, I', I'', \ldots$ gesetzt werden.

Es erscheint zunächst nötig, die in **II**, § 6, **1** für Operatoren erster Stufe definierte Monotonie auch für Operatoren höherer Stufen zu erklären. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Am nächsten liegt folgende Definition („Operatormonotonie"). Ein *Operator zweiter Stufe* J heiße *monoton*, wenn gilt:

$\alpha W J \leq \beta \overline{W} J$ für $\alpha \leq \beta$, $W \leq \overline{W}$, W und $\overline{W}$ monotone Operatoren erster Stufe.

Ein *Operator dritter Stufe* J_1 heiße *monoton*, wenn gilt:

$\alpha W J J_1 \leq \beta \overline{W} \bar{J} \bar{J}_1$ für $\alpha \leq \beta$, $W \leq \overline{W}$, $J \leq \bar{J}$, W und $\overline{W}$ bzw. J und $\bar{J}$ monotone Operatoren erster bzw. zweiter Stufe.

(Bezüglich der Relationen $W \leqq \overline{W}$, $J \leqq \bar{J}$ s. II, § 6, 1). — Sind W, J, J_1 monotone Operatoren 1., 2., 3. Stufe, so sind WJ, J^ν, JJ_1, J_1^ν monotone Operatoren 1., 2., 2., 3. Stufe. — Entsprechende Definitionen und Bemerkungen gelten für die Operatoren vierter und höherer Stufe. — I, I', I'' sind monotone Operatoren in diesem Sinn, überhaupt alle Operatoren zweiter und höherer Stufe, die in einer Figur $\mathfrak{F}$ vorkommen.

Für unsere Zwecke wichtiger ist eine andere Art von Monotonie, die speziell für Iteratoren (s. II, § 4, 2) erklärt wird („Iteratormonotonie"). Zur Vorbereitung geben wir folgende Definitionen. — Sind V und W Operatoren erster Stufe und gilt dabei $\alpha W \in \{\alpha V^\nu\}_{1 \leqq \nu < P}$ für $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$, so nennen wir W eine *V-Potenz*. — V ist eine V-Potenz. Mit W ist W^ν eine V-Potenz, allgemein WJ, wenn J ein Iterator erster Stufe ist. — Eine V-Potenz W heiße *V-monoton*, wenn $\alpha W \leqq \beta W$ gilt für $\beta \in \{\alpha V^\nu\}_{\nu < P}$. — Mit W ist W^ν eine V-monotone V-Potenz.

Nun definieren wir: Ein *Iterator J von erster Stufe* heiße *monoton*, wenn stets $\alpha W J \leqq \beta \overline{W} J$ gilt, sobald $\beta \in \{\alpha V^\nu\}_{\nu < P}$ ist und $W \leqq \overline{W}$ zwei V-monotone V-Potenzen sind, unter V einen beliebigen Operator erster Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$ verstanden ($\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$).

Ist W eine V-monotone V-Potenz, J ein monotoner Iterator erster Stufe, so ist auch WJ eine V-monotone V-Potenz. — Mit J ist jede Potenz J^ν monoton.

Ist J ein monotoner Iterator erster Stufe, $\bar{J}$ ein Operator zweiter Stufe, so daß $J \leqq \bar{J}$, ist ferner $\beta \in \{\alpha V^\nu\}_{\nu < P}$ und sind $W \leqq \overline{W}$ zwei V-monotone V-Potenzen, so gilt

$$\alpha W J \leqq \beta \overline{W} \bar{J}.$$

Denn $\alpha W J \leqq \beta \overline{W} J \leqq \beta \overline{W} \bar{J}$. Daraus schließt man induktiv, wenn auch noch $\bar{J}$ ein monotoner Iterator ist:

$$\alpha W J^\nu \leqq \beta \overline{W} \bar{J}^\nu \quad \text{für} \quad \nu < P.$$

Einen *monotonen Iterator zweiter Stufe* J_1 erklären wir durch die Forderung $\alpha W J J_1 \leqq \beta \overline{W} \bar{J} J_1$, wenn $\beta \in \{\alpha V^\nu\}_{\nu < P}$, $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$, V ein beliebiger Operator erster Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$, $W \leqq \overline{W}$ zwei V-monotone V-Potenzen und $J \leqq \bar{J}$ zwei monotone Iteratoren erster Stufe sind. Entsprechend sind monotone Iteratoren 3., 4., ... Stufe zu definieren. — JJ_1 ist wieder monoton, ebenso J_1^ν usw. — $I, I', I'', \ldots$ sind monotone Iteratoren, überhaupt alle Operatoren zweiter und höherer Stufe in einer Figur $\mathfrak{F}$ des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$.

2. Ähnlich wie Hilfssatz 2 in II beweisen wir nun den

Satz 1. *Für beliebiges $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ und beliebige Operatoren V und J erster und zweiter Stufe dieses Bereichs ist $\alpha V J I'$ eine Zahl der Form $\omega^\nu \geqq \omega$.*

Zunächst wird nämlich [vgl. II, (19)]

(1) (a) $\alpha V J^\xi \geqq \alpha V + \xi$ (b) $\alpha V J I' \geqq (\alpha V) \cdot \omega$.

Denn $\alpha V J \geqq \alpha V + 1$, $\alpha V J^2 \geqq \alpha V J + 1 \geqq \alpha V + 2$ usw. Also wird $\alpha V J^{\alpha V J} \geqq \alpha V + \alpha V J \geqq \alpha V + \alpha V + 1$ usw., woraus die Relation (1b) folgt, die ihrerseits liefert:

$$\alpha V + \alpha V J I' = \alpha V J I'. \tag{2}$$

Sodann zeigen wir:

$$\alpha (V J^{\nu}) J I' = \alpha V J I' \quad \text{für} \quad \nu + \alpha V J I' = \alpha V J I'. \tag{3}$$

Zur Bestätigung setzen wir $\beta = \alpha V J I' = \lim\limits_{n} \beta_n$, $\beta_1 = \alpha V J$, $\beta_{n+1} = \alpha V J^{\beta_n}$; $\gamma = \alpha (V J^{\nu}) J I' = \lim\limits_{n} \gamma_n$, $\gamma_1 = \alpha (V J^{\nu}) J = \alpha V J^{\nu+1}$, $\gamma_{n+1} = \alpha V J^{\nu+\gamma_n}$. Dann gilt $\beta_n < \gamma_n$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Denn $\beta_1 < \gamma_1$ (wir denken $\nu > 0$, sonst ist nichts zu beweisen), und aus $\beta_n < \gamma_n$ folgt $\beta_{n+1} < \gamma_{n+1}$. Somit ist $\beta = \lim\limits_{n} \beta_n \leqq \lim\limits_{n} \gamma_n = \gamma$.— Andererseits wird nach der Voraussetzung über ν in (3): $\alpha (V J^{\nu}) J^{\beta} = \alpha V J^{\nu+\beta} = \alpha V J^{\beta} = \beta$, so daß nach dem Prinzip der kritischen Zahlen (**II**, § 6, **2**) $\beta \geqq \gamma$ wird. — Daher ist $\beta = \gamma$.

Aus (2), auf $V J^{\nu}$ statt V angewandt, und (3) folgt

$$\alpha V J^{\nu} + \alpha V J I' = \alpha V J I' \quad \text{für} \quad \nu + \alpha V J I' = \alpha V J I'. \tag{3a}$$

Für $\nu = 1$ schließt man durch Iteration von (3a), daß $\beta_n + \alpha V J I' = \alpha V J I'$ ist für $n = 1, 2, \ldots$, was $\nu + \alpha V J I' = \alpha V J I'$ für $\nu < \alpha V J I'$ impliziert. — Damit ist Satz 1 bewiesen. Zugleich haben wir gefunden:

$$\begin{cases} \alpha (V J^{\nu}) J I' = \alpha V^{\nu} J I' \quad \text{für} \quad \nu < \alpha V J I', \ \alpha \in [\alpha^{(0)}, P), \\ V \text{ und } J \text{ beliebige Operatoren erster und zweiter Stufe in } [\alpha^{(0)}, P). \end{cases} \tag{4}$$

Ist J ein Iterator erster Stufe, so gilt

$$\alpha (V J)^{\nu} \geqq \alpha V^{2\nu} \qquad (0 \leqq \nu < P, \ J \text{ Iterator erster Stufe}). \tag{5}$$

Denn $\alpha (V J)^0 = \alpha V^0 = \alpha$, $\alpha V J \geqq \alpha V^2$; ist (5) richtig für $\nu < \xi$, so ergibt sich ohne weiteres die Richtigkeit für $\nu = \xi$, wenn ξ Limeszahl. Ist $\xi = \eta + 1$, so wird $\alpha (V J)^{\eta+1} = (\alpha (V J)^{\eta}) V J \geqq (\alpha (V J)^{\eta}) V^2 \geqq \alpha V^{2\eta+2} = \alpha V^{2\xi}$.

Des weiteren bestehen die Relationen

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha V J^{n+1} \geqq \alpha (V J)^{2^n} & \text{für} \quad n < \omega \\ \alpha V J^{\nu} \geqq \alpha (V J)^{2^{\nu}} & \text{für} \quad \omega \leqq \nu < P \end{array}\right\} J \text{ Iterator erster Stufe.} \tag{6}$$

Beweis. Es ist $\alpha V J^2 = \alpha V J^{1+1} = \alpha (V J) J \geqq \alpha (V J)^2 = \alpha (V J)^{2^1}$. Sei (6) richtig für $n \leqq m$. Dann kommt $\alpha V J^{m+1} = \alpha (V J^m) J \geqq \alpha (V J^m)^2 = (\alpha V J^m) V J^m \geqq (\alpha V J^m) (V J)^{2^m - 1} \geqq (\alpha (V J)^{2^m - 1}) (V J)^{2^m - 1} = \alpha (V J)^{2^m}$ [1]). Also kommt $\alpha V J^{\omega} = \lim\limits_{n} \alpha V J^{n+1} \geqq \lim\limits_{n} \alpha (V J)^{2^n} = \alpha (V J)^{2^{\omega}}$. — Sei (6) richtig für $\omega \leqq \nu < \xi$. Wenn ξ Limeszahl, so folgt sofort die Richtigkeit für $\nu = \xi$. Ist $\xi = \eta + 1$, so wird

$$\begin{aligned} \alpha V J^{\eta+1} &= \alpha (V J^{\eta}) J \geqq \alpha (V J^{\eta})^2 \\ &= (\alpha V J^{\eta}) V J^{\eta} \geqq (\alpha V J^{\eta}) (V J)^{2^{\eta}} \geqq (\alpha (V J)^{2^{\eta}}) (V J)^{2^{\eta}} = \alpha (V J)^{2^{\eta+1}} \text{ [1])}. \end{aligned}$$

[1]) Wir benützen den Umstand, daß, unter J einen Iterator erster Stufe verstanden, $\alpha V J^{\nu}$ für $\nu \geqq 2$ eine Zahl aus $\{\alpha (V J)^{\mu}\}_{2 \leqq \mu < P}$ ist.

(6) liefert in Verbindung mit (5):

$$\alpha VJI' = \alpha VJ^{\alpha VJI'} \geq \alpha (VJ)^{2^{\alpha VJI'}} \geq \alpha V^{2^{\alpha VJI'}} \geq 2^{\alpha VJI'} \geq \alpha VJI',$$

woraus folgt:

(7) $\alpha VJI' = \alpha (VJ)^{\alpha VJI'} = \alpha V^{\alpha VJI'} = 2^{\alpha VJI'}$ (J Iterator erster Stufe),

daher

Satz 2. *Ist J ein Iterator erster Stufe und ist $\alpha VJI' > \omega$, so ist $\alpha VJI'$ eine ε-Zahl.*

Es gilt ferner für beliebige Operatoren J von zweiter Stufe:

(8) $\alpha V(J^n)I' = \alpha VJI'$ für $n = 1, 2, \ldots,$ J Operator zweiter Stufe.

Zum Beweis setzen wir wieder $\alpha VJI' = \beta = \lim_n \beta_n$, $\beta_1 = \alpha VJ$ usw., $\alpha V(J^n)I' = \gamma = \lim_n \gamma_n$, $\gamma_1 = \alpha VJ^n$, $\gamma_2 = \alpha V(J^n)^{\gamma_1}$ usw. Dann wird $\gamma_1 \geq \beta_1$, $\gamma_2 = \alpha VJ^{n\gamma_1} \geq \alpha VJ^{\beta_1} = \beta_2$ usw., also $\gamma \geq \beta$. Andererseits ist $\alpha V(J^n)^\beta = \alpha VJ^\beta = \beta$ und somit nach dem Prinzip der kritischen Zahlen $\beta \geq \gamma$.

Wir bringen jetzt zwei Relationen bezüglich monotoner Iteratoren erster Stufe.

(9) $(\alpha V)VJI' = \alpha VJI'$, wenn J ein monotoner Iterator erster Stufe.

Beweis. Da auch JI' monoton, ist $\alpha VJI' \leq (\alpha V)VJI'$. — Sei wieder $\alpha VJI' = \beta = \lim_n \beta_n$, $\beta_1 = \alpha VJ$ usw., $(\alpha V)VJI' = \gamma = \lim_n \gamma_n$, $\gamma_1 = (\alpha V)VJ$ usw. Wir wollen zeigen, daß es eine Folge natürlicher Zahlen $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$ gibt mit $\gamma_i < \beta_{n_i}$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Zunächst wird $\gamma_1 \leq (\alpha VJ)VJ = \alpha (VJ)^2 \leq \alpha VJ^2 < \alpha VJ^{\alpha VJ} = \beta_2$ (da $\alpha VJ \geq 3$), also $\gamma_1 < \beta_2$, so daß wir $n_1 = 2$ setzen können. Sei $\gamma_i < \beta_{n_i}$ für $i \leq p$ bewiesen. Dann wird $\gamma_{p+1} = (\alpha V)VJ^{\gamma_p} \leq (\alpha VJ^{\gamma_p})VJ^{\gamma_p} = \alpha (VJ^{\gamma_p})^2 \leq \alpha V(J^{\gamma_p})^2 = \alpha VJ^{\gamma_p + \gamma_p}$. Wegen $\gamma_p < \beta_{n_p} < \alpha VJI'$ und Satz 1 ist aber $\gamma_p + \gamma_p < \alpha VJI'$, so daß es ein kleinstes $m \geq n_p$ gibt mit $\gamma_p + \gamma_p < \beta_m$. Also wird $\gamma_{p+1} < \alpha VJ^{\beta_m} = \beta_{m+1}$. Setzen wir $n_{p+1} = m + 1$, so kommt $\gamma_{p+1} < \beta_{n_{p+1}}$. — Somit ist $\beta \geq \gamma$.

Ersetzen wir in (9) V durch VJ, so folgt vermöge (4) für $\nu = 1$:

$$(\alpha VJ)(VJ)JI' = \alpha (VJ)JI' = \alpha VJI';$$

für αVJ statt α und $\nu = 1$ liefert (4):

$$(\alpha VJ)(VJ)JI' = (\alpha VJ)VJI'.$$

Beides zusammen gibt

(10) $\left\{ \begin{array}{l} (\alpha VJ)VJI' = \alpha VJI', \\ \text{wenn } J \text{ ein monotoner Iterator erster Stufe.} \end{array} \right.$

3. Nun sollen einige Sätze folgen über die Invarianz des Zahlenwertes von Figuren $\mathfrak{F}$ (**II**, § 4, **2**) gegenüber gewissen Substitutionen.

Satz 3. *Seien α und β zwei verschiedene Zahlen aus $[\alpha^{(0)}, P)$ und V ein Operator erster Stufe in diesem Bereich; es möge die Gleichung $\alpha V = \beta V$ bestehen. Ist dann $\mathfrak{F}$ eine Zahlenfigur des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$, in welcher α als Kernvariable vorkommt und ersetzt man α an diesen Stellen durch β, wodurch die Figur $\widetilde{\mathfrak{F}}$ entstehe, so gilt $\mathfrak{F} = \widetilde{\mathfrak{F}}$* (im Sinn der Gleichheit des Zahlenwertes).

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus den Regeln (2_i) und (3_i) in **II**, wenn man beachtet, daß $\alpha V^\nu = \beta V^\nu$ wird für alle $\nu \in [1, P)$.

Satz 4. *Seien α und β wieder zwei verschiedene Zahlen aus $[\alpha^{(0)}, P)$ und V ein Operator erster Stufe darin; es werde vorausgesetzt, daß $\alpha V I = \beta V I$ ist. $\mathfrak{F}$ sei eine Zahlenfigur des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$, in welcher α als Kernvariable so auftritt, daß sie eine Kette $\alpha(\ldots(V(\ldots(I$ beginnt, wobei $(\ldots($ eine Kette von linken Klammern bedeutet, die auch fehlen dürfen. Indem man an diesen Stellen α durch β ersetzt, ergebe sich die Figur $\widetilde{\mathfrak{F}}$. Dann gilt $\mathfrak{F} = \widetilde{\mathfrak{F}}$.*

Unter einer *Kette* in einer Figur $\mathfrak{F}$ (allgemein in einer nach den Regeln der Potenzschreibweise gebildeten Figur aus Einzelzeichen; vgl. **II**, § 4, **3**, Schluß) verstehen wir eine Reihe von Einzelzeichen, die in derselben Zeile im Sinn der Links-rechts-Struktur unmittelbar aufeinander folgen. Die Hälften „(" und „)" einer Klammer ( ) gelten dabei als Einzelzeichen.

Zum Beweis des Satzes 4 braucht man nur von der Gleichung $(\alpha V I) V^\nu = (\beta V I) V^\nu$ $(\nu \in [1, P))$ auszugehen und die Regeln (2_i), (3_i) von **II** anzuwenden. Der Satz folgt so für Figuren der genannten Art, die nur in der Grundzeile Zeichen $V, I, I', \ldots$ enthalten; durch Induktion nach der Zeilenanzahl bestätigt man ihn für beliebige $\mathfrak{F}$.

Beispiel: $\left(\alpha\left(V(II')^{\alpha V I^{\alpha V}}\right) I^\alpha\right) V^\beta = \left(\beta\left(V(II')^{\beta V I^{\alpha V}}\right) I^\alpha\right) V^\beta$.

Bemerkung. Man kann Satz 4 nicht aus Satz 3 erhalten, indem man dort V durch VI ersetzt.

Die Voraussetzung $\alpha V I = \beta V I$ des Satzes 4 ist z.B. erfüllt für $\beta = \alpha V$, $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$, denn es gilt sogar $(\alpha V^\nu) V I = \alpha V I$ für $\nu < \alpha V I$ [vgl. **II**, § 6, **2**, (22)].

Satz 5. *Seien α eine Zahl aus $[\alpha^{(0)}, P)$, V und W zwei Operatoren erster Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$ und sei $\alpha V^\nu = \alpha W^\nu$ für $1 \leq \nu < P$. Dann gilt $\mathfrak{F}(\alpha) = \widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha)$, wenn $\widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha)$ aus der Figur $\mathfrak{F}(\alpha)$ des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$ vermöge Ersetzung von V durch W hervorgeht.* ($\mathfrak{F}(\alpha)$ ist in **II**, § 4, **2** erklärt.)

Die Regeln (2_i), (3_i) lassen zunächst erkennen, daß $\mathfrak{F}(\alpha) = \widetilde{\mathfrak{F}}(\alpha) = \alpha V^\xi = \alpha W^\xi$ ist [mit von $\mathfrak{F}(\alpha)$ abhängigem ξ] bei Figuren, welche die Zeichen V bzw. W und $I, I', \ldots$ nur in der Grundzeile aufweisen; Induktion nach der Zeilenanzahl vervollständigt den Beweis.

Mit Rücksicht auf spätere Anwendung bringen wir noch einen Satz von ähnlichem Charakter wie Satz 4:

Satz 6. *Seien V und W zwei Operatoren erster und J ein Operator zweiter Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$ und es bestehe die Relation $\alpha V J = \alpha W J$ bzw. $\alpha V J I' = \alpha W J I'$ für alle $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$. $\widetilde{\mathfrak{F}}$ sei eine Zahlenfigur des freien Algorithmus der Symbole $V, J, I', I'', \ldots$, in welcher V stets eine Kette $V(\ldots(J$ bzw. $V(\ldots(J(\ldots(I'$ beginnt, worin die linken Klammern „(" auch fehlen dürfen, und $\widetilde{\mathfrak{F}}^*$ entstehe aus $\widetilde{\mathfrak{F}}$ durch Substitution von W an Stelle von V. Dann gilt $\widetilde{\mathfrak{F}} = \widetilde{\mathfrak{F}}^*$.*

Der Beweis verläuft analog wie bei Satz 4, wenn man beachtet, daß die in Satz 6 vorausgesetzten Relationen sich auch in der Form $VJ = WJ$ bzw. $VJI' = WJI'$ schreiben lassen.

Die Voraussetzung $\alpha V J I' = \alpha W J I'$ ist z.B. erfüllt für beliebige V und J, wenn $W = VJ$ gesetzt wird, denn es gilt sogar die Relation (4).

Die Sätze und Formeln dieser und der vorangehenden Ziffer lassen sich mannigfach variieren und auch auf Operatoren höherer Stufe übertragen.

4. In **II**, § 4, **3** und § 5, **5** (Schluß) wurden die Sonderfälle erwähnt, wo als Ausgangszahl des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', \ldots$ die Zahl $\vartheta = 1$ genommen und der Grundoperator V durch $\xi V = \xi + 1$ bzw. $\xi V = \xi \cdot 2$ erklärt wird. Für den Augenblick wollen wir mit U, W, V die folgendermaßen definierten Operatoren bezeichnen:

$$\xi U = \xi + 1, \quad \xi W = \xi \cdot 2, \quad \xi V = \xi \cdot \omega \quad (\xi \in [1, P)); \tag{11}$$

dementsprechend reden wir vom U-, W-, V-Algorithmus, indem wir uns die Iteratoren $I, I', I'', \ldots$ hinzugenommen denken.

Wir betrachten zunächst den U-Algorithmus. In **II**, Fußnote [4]) wurde bemerkt, daß $\xi U I = \xi \cdot \omega$, also $UI = V$ ist. Nach Satz 6 und anschließender Bemerkung ist daher $1UI \ldots I^{(n)} = 1VI \ldots I^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, also auch

$$1UII'I'' \cdots = 1VII'I'' \cdots . \tag{12}$$

Offenbar kann man mittels der Zeichen 1, ( ), $U, I, I', I'', \ldots$ auch einen *konstruktiven* U-Algorithmus entwickeln (nach Analogie des konstruktiven V-Algorithmus von **I**). Die „vollregulären" Zahlenfiguren des konstruktiven U-Algorithmus sind nach Ersetzung von U durch V diejenigen vollregulären Zahlenfiguren des konstruktiven V-Algorithmus, welche kein +-Zeichen enthalten (vgl. **II**, § 4, **3**); dasselbe gilt hinsichtlich der „vollständigen Hilfsfiguren" des U-Algorithmus.

Die Folge der natürlichen Zahlen wird im konstruktiven U-Algorithmus dargestellt durch die vollregulären Figuren

$$1,\ 1U,\ 1U^{1U},\ 1U^{1U^{1U}},\ \cdots .$$

Nachträglich kann man wieder die übliche Ziffernschreibweise als Abkürzung einführen und demgemäß zu abgekürzten regulären und abgekürzten Hilfsfiguren übergehen. Wir beschränken uns jedoch bei den folgenden Bemerkungen auf vollständige (d.h. unabgekürzte) Figuren.

Der Zusammenhang einer regulären Zahlenfigur mit ihren Hilfsfiguren ist im U-Algorithmus teilweise anders als im V-Algorithmus. So ist der Nachfolger eines vollregulären α im U-Algorithmus durch αU gegeben und das kann noch eine Hilfsfigur sein. Für $\alpha = 1U^{1U}$ z.B. hat man die Konstruktion $\left(1U^{1U}\right)U = 1U^{(1U)U} = 1U^{1U^{1U}}$, worin die beiden ersten Ausdrücke als Hilfsfiguren zu werten sind. Ist allgemein αU bzw. αU^{β} eine vollreguläre Zahlenfigur des U-Algorithmus, so gilt für ihren Nachfolger die Konstruktion $(\alpha U)U = \alpha U^{1U}$ bzw. $(\alpha U^{\beta})U = \alpha U^{\beta U}$, worin jedesmal die erste Figur als Hilfsfigur zu gelten hat; αU^{1U} ist vollregulär, $\alpha U^{\beta U}$ nur dann, wenn βU es ist (d.h. wenn β nicht die Form γU oder γU^{δ} hat). Im übrigen gelten auch im konstruktiven U-Algorithmus die Schemata $(\mathfrak{D}_n)$, $(\mathfrak{F})$, $(\mathfrak{F}^{(n)})$ $(n = 1, 2, \ldots)$ von I, § 1, **5**, wobei nur $\beta + 1$ durch βU zu ersetzen ist, was allerdings zur Folge haben kann, daß die betreffende Figur nicht mehr regulär bleibt, wenn sie es vorher war [wie in $(\mathfrak{D}_1 a)$]; denn βU ist möglicherweise noch Hilfsfigur. Die Schemata $(\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{B})$ fallen natürlich im U-Algorithmus weg[2]).

Wegen (12) erfaßt der U-Algorithmus konstruktiv denselben Abschnitt der zweiten Zahlenklasse wie der V-Algorithmus. Nach Satz 6 stellt ferner jede vollständige Zahlenfigur des konstruktiven U-Algorithmus, in welcher U stets eine Kette der Form $U(\ldots(I(\ldots(I'$ beginnt, die nämliche Zahl der zweiten Zahlenklasse dar wie die entsprechende Figur des konstruktiven V-Algorithmus. — Transfinit sind nur solche Zahlen des konstruktiven U-Algorithmus, welche wenigstens das Zeichen I enthalten (von den Hilfsfiguren mit „lim" abgesehen).

Beispiel. Die Zahl $\omega^2 2 + \omega 2 + 3$ wird im U-Algorithmus wiedergegeben durch

$$(1(UI)^2)U^{(1(UI)^2)U^{(1UI)U^{1U^{1U}}}}$$

und dieser Ausdruck läßt sich nur geringfügig abkürzen, indem man $1U^{1U}$ durch 3 ersetzt. Im V-Algorithmus lautet dieselbe Zahl: $1V^{1+1}(1+1)+1V(1+1)+1+1+1$, abgekürzt $1V^2 2 + 1V2 + 3$. Der Fortfall des +-Zeichens im U-Algorithmus ist somit keine praktische Vereinfachung.

5. Jetzt wollen wir den W-Algorithmus mit dem Grundoperator $W = \cdot 2$ [vgl. (11)] etwas näher betrachten. Es wird offenbar $\xi W^{\omega} = \xi V$ für $\xi \in [1, P)$, d.h. $W^{\omega} = V$. Für $\xi \geq \omega$ ist nach Hilfssatz 3 in II, § 6, **2** die Zahl ξWI eine ε-Zahl, somit $\xi(W^{\omega})^{\xi WI} = \xi W^{\xi WI} = \xi WI$, also nach dem Prinzip der

[2]) Selbstverständlich bleiben die Konstruktionsprinzipien I und II von I, § 1, **3** in Kraft.

kritischen Zahlen $\xi WI \geqq \xi(W^{\omega})I$; umgekehrt muß natürlich $\xi WI \leqq \xi(W^{\omega})I$ sein. Daher gilt

$$\xi WI = \xi VI \quad \text{für} \quad \xi \geqq \omega. \tag{13}$$

Für eine natürliche Zahl n wird offenbar

$$nWI = nV = \omega. \tag{14}$$

Daher liefert (13): $(nWI)WI = (nV)VI$, also wegen II, § 6, **2**, (22): $n(WI)^2 = nVI$. Indem man diese Schlußweise fortsetzt, gelangt man zu den Relationen

$$n(WI)^{1+\nu} = n(VI)^{\nu} \quad \text{für} \quad n \in [1, \omega), \qquad \nu \in [1, P) \tag{15}$$

$$\xi(WI)^{\nu} = \xi(VI)^{\nu} \quad \text{für} \quad \xi \in [\omega, P), \qquad \nu \in [1, P). \tag{16}$$

Nun kann man für alle $\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)$ und jeden Operator V von erster Stufe in diesem Bereich statt (3_1) in II auch schreiben:

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha VI = \lim \left\{ \alpha V^{\beta},\ \alpha V^{\alpha V^{\beta}},\ \alpha V^{\alpha V^{\alpha V^{\beta}}},\ \ldots \right\} \quad \text{für} \quad \beta \in [1, \alpha VI) \\ \qquad\qquad (\alpha \in [\alpha^{(0)}, P), \quad V \text{ ein Operator erster Stufe in } [\alpha^{(0)}, P)) ; \end{array} \right. \tag{17}$$

denn jedes Glied innerhalb { } in (17) ist einerseits nicht kleiner als das entsprechende Glied innerhalb { } in II, (3_1), andererseits aber $< \alpha VI$. Ersetzt man in (17) α durch ξ, V durch WI und β durch 2, so kommt

$$\xi WI^2 = \xi(WI)I = \lim \left\{ \xi(WI)^2,\ \xi(WI)^{\xi(WI)^2},\ \xi(WI)^{\xi(WI)^{\xi(WI)^2}},\ \ldots \right\};$$

vermöge (15) und (16) ist für $\xi < \omega$ die Folge innerhalb der vorstehenden { } gliedweise gleich der Folge $\xi VI,\ \xi(VI)^{\xi VI},\ \xi(VI)^{\xi(VI)^{\xi VI}}, \ldots$, deren Limes ξVI^2 ist, während für $\xi \geqq \omega$ die Glieder in { } ihren Wert behalten, wenn W durch V ersetzt wird. Also wird immer $\xi WI^2 = \xi VI^2$ für $\xi \in [1, P)$, d.h. $WI^2 = VI^2$. Das aber liefert

$$\xi WI^{\nu} = \xi VI^{\nu} \quad \text{für} \quad \nu \in [2, P), \ \xi \in [1, P). \tag{18}$$

Analog zu (17) hat man nun die Relation

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha VJI' = \lim \left\{ \alpha VJ^{\beta},\ \alpha VJ^{\alpha VJ^{\beta}},\ \ldots \right\} \quad \text{für} \quad \beta \in [1, \alpha VJI'), \\ \alpha \in [\alpha^{(0)}, P), \ V \text{ bzw. } J \text{ ein Operator erster bzw. zweiter Stufe in } [\alpha^{(0)}, P). \end{array} \right. \tag{19}$$

Setzt man in (19) und in der aus ihr durch die Substitution von W an Stelle von V entstehenden Relation $\alpha = \xi$, $J = I$, $\beta = 2$, so kommt vermöge (18):

$$\xi WII' = \xi VII' \quad \text{für} \quad \xi \in [1, P). \tag{20}$$

Somit läßt sich auf die Operatoren V und W der Satz 6 anwenden; insbesondere wird $1WI \ldots I^{(n)} = 1VI \ldots I^{(n)}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ und

$$1WII'I'' \ldots = 1VII'I'' \ldots . \tag{21}$$

Mit den Zeichen 1, ( ), +, $W, I, I', I'', \ldots$ kann man wieder einen *konstruktiven* W-Algorithmus aufbauen, indem man zunächst folgende Schemata benützt:

($\mathfrak{N}$) $\qquad \xi + 1 = \text{Nachfolger von } \xi;$

($\mathfrak{W}$) $\qquad (1)\quad \xi + \xi = \xi W \qquad (2)\quad \eta + \xi + \xi = \eta + \xi W.$

$\xi + 1$ kann für jedes vollreguläre ξ gebildet werden, ist aber eventuell noch Hilfsfigur, nämlich genau dann, wenn $\xi = \eta + 1$ ist. Denn nach ($\mathfrak{N}$) und ($\mathfrak{W}$, 2) wird $\eta + 1 + 1 = \eta + 1W$. Das Schema ($\mathfrak{W}$) wird nur angewendet, wenn die vollreguläre Figur ξ kein +-Zeichen in der Grundzeile enthält. Solche vollregulären Zahlenfiguren des konstruktiven W-Algorithmus nennen wir *W-Potenzen*.

Jede vollreguläre Zahl α hat im konstruktiven W-Algorithmus die Form

(22) $\qquad \alpha = \chi_1 + \cdots + \chi_q + 1, \quad \chi_1 > \cdots > \chi_q,$

worin die χ_i W-Potenzen bedeuten; q kann gleich 1 sein und $+1$ kann fehlen. In ($\mathfrak{W}$ 2) ist $\eta + \xi$ von der Form (22), also $\xi = \chi_q$ oder $\xi = 1$; $\eta + \xi W$ kann noch Hilfsfigur sein, desgleichen ξW selbst.

An die Stelle der Schemata ($\mathfrak{A}$) in I, § 1, **5** tritt dieses:

($\mathfrak{L}$) $\qquad \zeta + \lambda = \lim_n (\zeta + \gamma_n), \qquad \lambda = \lim_n \gamma_n,$

wo λ vollregulär ist. ($\mathfrak{L}$) darf in folgenden Fällen angewandt werden:

1. $\zeta = \chi_1 + \cdots + \chi_q$, $\lambda = \chi_{q+1} + \cdots + \chi_{p+q}$ mit $\chi_q > \chi_{q+1}$; also $\zeta + \lambda = \chi_1 + \cdots + \chi_{q+p}$.

2. ζ wie zuvor, aber mit $q > 1$; $\lambda = \chi_q$; $\zeta + \lambda = \chi_1 + \cdots + \chi_{q-1} + \chi_q W$. 3. $\zeta = \lambda = \chi_1$ $(q = 1)$; $\zeta + \lambda = \chi_1 W$. Im ersten Fall ist $\zeta + \lambda$ vollregulär; im 2. und 3. Fall, wo das Schema ($\mathfrak{W}$) herangezogen wird, ist $\zeta + \lambda$ möglicherweise Hilfsfigur.

Ist in (22) χ_i Limeszahl, so auch $\chi_1, \ldots, \chi_{i-1}$.

Das Schema ($\mathfrak{B}$) (I, § 1, **5**) des konstruktiven V-Algorithmus fällt weg, die Schemata ($\mathfrak{D}_n$), ($\mathfrak{Z}$), ($\mathfrak{Z}^{(n)}$) $(n = 1, 2, \ldots)$ daselbst gelten ungeändert auch im konstruktiven W-Algorithmus[3]).

Die vollregulären Zahlenfiguren des W-Algorithmus sind, nach Ersetzung von W durch V, diejenigen vollregulären Zahlenfiguren des V-Algorithmus von I, welche keine Kombination $1 + 1$ als Teilfigur enthalten (vgl. II, § 5, **5**, Schluß). Ferner werden alle vollständigen Hilfsfiguren des V-Algorithmus, in denen keine Zeichengruppe $1 + 1$ auftritt, nach Substitution von W an Stelle von V zu vollständigen Hilfsfiguren des W-Algorithmus, freilich ohne daß damit der Bereich der letzteren erschöpft würde.

[3]) Die Konstruktionsprinzipien I, II aus I, § 1, 3 bleiben natürlich wieder bestehen.

Die Reihe der natürlichen Zahlen, d.h. der Zahlen $< 1^W I$, wird dargestellt durch

$$1;\ 1+1=\underline{1^W};\ \underline{1^W+1};\ 1^W+1+1=1^W+1^W=(1^W)^W=1^{W^{1+1}}=$$
$$\underline{1^{W^{1^W}}};\ \underline{1^{W^{1^W}}+1};\ 1^{W^{1^W}}+1+1=\underline{1^{W^{1^W}}+1^W};\ \underline{1^{W^{1^W}}+1^W+1};$$
$$1^{W^{1^W}}+1^W+1+1=1^{W^{1^W}}+1^W+1^W=1^{W^{1^W}}+(1^W)^W=1^{W^{1^W}}$$
$$+1^{W^{1+1}}=1^{W^{1^W}}+1^{W^{1^W}}=\left(1^{W^{1^W}}\right)^W=\underline{1^{W^{1^W}+1}};\ldots,$$

wobei die unterstrichenen Ausdrücke vollregulär sind. Man sieht, daß zu den vorhin genannten Hilfsfiguren des W-Algorithmus noch solche hinzukommen, in denen die Kombination $1+1$ genau einmal auftritt. — Ersetzen wir in den obigen unterstrichenen Figuren W durch $\cdot 2$, so erhalten wir nach Weglassung der Faktoren 1 die Darstellung der natürlichen Zahlen als Summen von Zweierpotenzen. Es wäre daher angemessen, die abgekürzten Figuren des konstruktiven W-Algorithmus mittels des dualen Ziffernsystems einzuführen.

Wegen (21) ist der vom konstruktiven W-Algorithmus erfaßte Abschnitt der zweiten Zahlenklasse wieder derselbe wie beim konstruktiven V-Algorithmus. Nach Satz 6 und den Formeln (16) und (18) gibt es eine ganze Kategorie von Zahlenfiguren des konstruktiven W-Algorithmus, welche dieselbe Zahl der zweiten Zahlenklasse repräsentieren wie die entsprechenden Figuren des konstruktiven V-Algorithmus. — Transfinit sind wieder nur diejenigen Zahlen des konstruktiven W-Algorithmus, die wenigstens das Zeichen I enthalten.

§ 8. Definition neuer Operatoren mittels gegebener Operatoren.

1. Man kann den Algorithmus erweitern, indem man im Bereich $[\alpha^{(0)}, P)$ gleichzeitig mehrere Operatoren derselben Stufe zuläßt und damit natürlich auch deren „Produkte". Unter dem *Produkt* $U \times V$ zweier Operatoren U, V von erster Stufe verstehen wir den durch $\alpha U \times V = (\alpha U) V$ erklärten Operator erster Stufe. Es lassen sich auch Produkte von beliebig vielen Operatoren erster Stufe V_ν, $\nu \in [0, \sigma)$, $\sigma < P$, erklären durch die induktive Definition

$$\alpha V_\nu \prod_{\nu<\sigma+1} = \alpha V_\nu \prod_{\nu<\sigma} \times V_\sigma, \quad \alpha V_\nu \prod_{\nu<\lambda} = \lim_{\sigma<\lambda} \alpha V_\nu \prod_{\nu<\sigma} \quad (\lambda \text{ Limeszahl}).$$

Diese Produktbildung ist assoziativ; $V_\nu \prod_{\nu<\sigma}$ ist wieder ein Operator erster Stufe.

Entsprechend definiert man die Produkte von beliebig vielen Operatoren der n-ten Stufe. Sind z.B. $J, \bar{J}$ zwei Operatoren zweiter Stufe in $[\alpha^{(0)}, P)$, so ist der Operator zweiter Stufe $J \times \bar{J}$ zu definieren durch $\alpha V J \times \bar{J} = \alpha (V J) \bar{J}$, unter α eine beliebige Zahl aus $[\alpha^{(0)}, P)$ und unter V einen beliebigen Operator erster Stufe darin verstanden.

2. Mit der vorstehend skizzierten Produktbildung wollen wir uns hier nicht näher beschäftigen, sondern einige Beispiele für eine andersartige Gewinnung

neuer Operatoren betrachten. Die Definitionen (3) in **II**, § 4, **1** legen folgende Erklärungen nahe:

$$(23_1) \qquad \alpha V I = \lim_p \alpha V_p; \quad \alpha V_1 = \alpha V, \ \alpha V_{p+1} = \alpha V^{\alpha V_p}$$

$$(23_2) \qquad \alpha V J I' = \lim_p \alpha V J_{0p}; \quad \alpha V J_{01} = \alpha V J, \ \alpha V J_{0,p+1} = \alpha V J^{\alpha V J_{0p}}$$

$$(23_{n+2}) \qquad \begin{cases} \alpha V J \dots J_n I^{(n+1)} = \lim_p \alpha V J \dots J_{n-1} J_{np}, \\ \alpha V J \dots J_{n-1} J_{n1} = \alpha V J \dots J_{n-1} J_n, \\ \alpha V J \dots J_{n-1} J_{n,p+1} = \alpha V J \dots J_{n-1} J_n^{\alpha V J \dots J_{n-1} J_{np}}. \end{cases}$$

$V_p, J_{0p}, \dots, J_{np}$ sind Operatoren 1., 2., ..., $(n+2)$. Stufe. V_p ist eine V-monotone V-Potenz; die J_{np} $(n = 0, 1, 2, \dots)$ sind monotone Iteratoren $(n+1)$. Stufe, wenn die J_n es sind (vgl. § 7, **1**). — Insbesondere schreiben wir

$$(24) \qquad J_{0p} = I_p \quad \text{für} \quad J = I, \qquad J_{np} = I_p^{(n)} \quad \text{für} \quad J_n = I^{(n)}.$$

Eingehender wollen wir uns nun dem folgendermaßen auf Grund eines Operators erster Stufe V definierten Operator $\overline{V}$ zuwenden:

$$(25) \qquad \alpha \overline{V} = \alpha V^{\alpha} \quad (\alpha \in [\alpha^{(0)}, P)).$$

Wegen $\alpha V^{\alpha} \geq \alpha + \alpha = \alpha 2$ (vgl. **II**, § 6, **2**, (19a)) gilt

$$(26) \qquad \alpha \overline{V} \geq \alpha \cdot 2,$$

d.h. nach Hilfssatz 3 daselbst ist $\alpha \overline{V} I$ eine ε-Zahl für $\alpha \geq \omega$.

Es wird ferner $\alpha \overline{V}^2 = (\alpha \overline{V}) \overline{V} = (\alpha \overline{V}) V^{\alpha \overline{V}} = (\alpha V^{\alpha}) V^{\alpha \overline{V}} = \alpha V^{\alpha + \alpha \overline{V}}$. Nach **II**, § 6, **2**, Hilfssatz 2 ist $\alpha + \alpha \overline{V} < \alpha V I$, also auch $\alpha \overline{V}^2 < \alpha V I$. Ebenso folgt $\alpha \overline{V}^3 = (\alpha \overline{V}^2) V^{\alpha \overline{V}^2} = \alpha V^{\alpha + \alpha \overline{V} + \alpha \overline{V}^2} < \alpha V I$ usw. Andererseits ist $\alpha \overline{V} \geq \alpha V$, $\alpha \overline{V}^2 \geq \alpha V^{\alpha V} = \alpha V_1$, $\alpha \overline{V}^3 \geq \alpha V^{\alpha V_1} = \alpha V_2$ usf. Daraus schließt man:

$$(27) \qquad \alpha \overline{V}^{\omega} = \alpha V I \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

$\overline{V}$ ist offenbar eine V-monotone V-Potenz. Es gilt außerdem:

Hilfssatz 1. *Ist ein Operator erster Stufe $\overline{V}$ eine V-monotone V-Potenz mit der Eigenschaft (27), so ist $\overline{V} I$ eine $V I$-monotone $V I$-Potenz.*

Beweis. Nach **II**, Hilfssatz 2 gilt $\alpha \overline{V} I = \omega \cdot \omega^{\mu}$, $\mu \geq 0$. Also wird $\alpha \overline{V} I = \alpha \overline{V}^{\alpha \overline{V} I} = \alpha \overline{V}^{\omega \cdot \omega^{\mu}} = \alpha (\overline{V}^{\omega})^{\omega^{\mu}} = \alpha (V I)^{\omega^{\mu}}$ (vermöge (27) ist ja $\overline{V}^{\omega} = V I$). $\overline{V} I$ ist somit eine $V I$-Potenz. Da $\overline{V} I$ zugleich eine V-monotone V-Potenz ist, muß $\overline{V} I$ auch $V I$-monoton sein.

Für $\alpha \geq \omega$ wird $\alpha (\overline{V}^{\omega})^{\alpha \overline{V} I} = \alpha \overline{V}^{\alpha \overline{V} I} = \alpha \overline{V} I$, also nach dem Prinzip der kritischen Zahlen $\alpha \overline{V} I \geq \alpha (\overline{V}^{\omega}) I$. Umgekehrt ist natürlich $\alpha (\overline{V}^{\omega}) I \geq \alpha \overline{V} I$.

Somit kommt in Verbindung mit (27):

$$(28) \qquad \alpha(\overline{V}^{\omega})I = \alpha\overline{V}I = \alpha VI^2 \quad \text{für} \quad \alpha \geq \omega, \qquad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

Wir wollen nun zeigen, daß gilt:

$$(29) \qquad \alpha(\overline{V}I)^{\nu} = \alpha(VI^2)^{\nu} \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P), \qquad \nu \in [\omega, P).$$

Für diejenigen α, welche die Gleichung $\alpha\overline{V}I = \alpha VI^2$ erfüllen, gewinnt man (29) induktiv aus (28), sogar für $\nu < \omega$, indem man dort α durch $\alpha(\overline{V}I)^{\nu} = \alpha(VI^2)^{\nu}$ für $\nu = 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots, \sigma, \ldots$ $(\sigma < P)$ ersetzt. Ist aber $\alpha\overline{V}I \neq \alpha VI^2$, so ist $\alpha\overline{V}I < \alpha VI^2 = \alpha(VI)I$ (denn es gilt $\overline{V} < VI$, und beide Operatoren sind V-monotone V-Potenzen, woraus $\alpha\overline{V}I \leqq \alpha VI^2$ folgt). Wegen $\alpha\overline{V}I \geq \omega$ liefert (28): $\alpha(\overline{V}I)^2 = (\alpha\overline{V}I)\overline{V}I = (\alpha\overline{V}I)VI^2 = (\alpha\overline{V}I)(VI)I$. Wegen Hilfssatz 1 und $\alpha\overline{V}I < \alpha(VI)I$ kann man auf den letzten Ausdruck der vorstehenden Kette von Gleichungen die Sätze 7 und 10 aus II, § 6, 4 für $n = 1$ anwenden, indem man α mit ϑ und VI mit dem dortigen V identifiziert sowie $\alpha\overline{V}I$ als Ausgangsvariable ξ ansieht. Dann wird $(\alpha\overline{V}I)(VI)I = \alpha(VI)I$, d.h.

$$(30) \qquad \alpha(\overline{V}I)^2 = \alpha VI^2 \quad \text{für} \quad \alpha\overline{V}I < \alpha VI^2.$$

Aus (30) gewinnt man aber induktiv vermöge (28) (analog wie (29) aus $\alpha\overline{V}I = \alpha VI^2$): $\alpha(\overline{V}I)^{1+\nu} = \alpha(VI^2)^{\nu}$ für $\nu \in [1, P)$, also wiederum (29).

Ersetzt man in (17) β durch ω und V durch $\overline{V}I$ bzw. VI^2, so ergibt sich vermöge (29): $\alpha(\overline{V}I)I = \alpha(VI^2)I$, d.h.

$$(31) \qquad \alpha\overline{V}I^2 = \alpha VI^3 \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

Die Relation (31) kann man übrigens auch mittels des Prinzips der kritischen Zahlen gewinnen. Denn nach (29) wird $\alpha\overline{V}I^2 = \alpha(\overline{V}I)^{\alpha\overline{V}I^2} = \alpha(VI^2)^{\alpha\overline{V}I^2}$, also $\alpha\overline{V}I^2 \geq \alpha VI^3$. Ebenso folgt $\alpha VI^3 \geq \alpha\overline{V}I^2$.

Aus (31), oder, was dasselbe ist, aus $\overline{V}I^2 = VI^3$ erhält man durch Induktion die Relationen

$$(32) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} (1) & \alpha\overline{V}I^n = \alpha VI^{n+1} & (n = 2, 3, \ldots) \\ (2) & \alpha\overline{V}I^{\nu} = \alpha VI^{\nu} & (\nu \geq \omega) \end{array} \right\} \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

Aus (32, 2) erschließt man auf analoge Weise wie (31) aus (29), d.h. vermöge (19) mit $\beta = \omega$ und $J = I$ oder mittels des Prinzips der kritischen Zahlen die Relation

$$(33) \qquad \alpha\overline{V}II' = \alpha VII' \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

3. *Vermöge* (33) *kann man auf V und $\overline{V}$ statt V und W den Satz* 6 *mit $J = I$ anwenden.* — Bei der Herleitung von (33) wurde nur benützt, daß $\overline{V}$ eine V-monotone V-Potenz mit $\overline{V} \geq \cdot 2$ ist, welche die Bedingung (27) erfüllt. Also gilt vorstehende Aussage für alle Operatoren $\overline{V}$ von erster Stufe, welche diese Eigenschaften besitzen. Das trifft unter anderem zu für die in (23_1)

erklärten Operatoren V_p mit $p=2,3,\ldots$. Wegen $V_p > \overline{V} \geqq \cdot 2$ ist sogar $V_p > \cdot 2$. Außerdem gilt $\alpha\overline{V}^{\omega} \leqq \alpha V_p^{\omega}$. Andererseits hat man $\alpha V_p^n < \alpha VI$, wie man folgendermaßen einsieht.

Sei $\beta < \alpha VI$, also $\alpha V^{\beta} < \alpha VI$. Dann wird nach Hilfssatz 2 aus **II** auch $(\alpha V^{\beta})V_1 = \alpha V^{\beta+1} < \alpha VI$, $(\alpha V^{\beta})V_2 = (\alpha V^{\beta})V^{(\alpha V^{\beta})V_1} = \alpha V^{\beta+(\alpha V^{\beta})V_1} < \alpha VI$, $(\alpha V^{\beta})V_3 = \alpha V^{\beta+(\alpha V^{\beta})V_2} < \alpha VI$ usw., allgemein

$$(34) \qquad (\alpha V^{\beta})V_p = \alpha V^{\gamma_p} < \alpha VI \quad \text{für} \quad \beta < \alpha VI, \quad p = 1,2,3,\ldots.$$

Setzt man hierin $\beta = \alpha V_{p-1}$ für $p=2,3,\ldots$, so kommt nach (23_1): $(\alpha V_p)V_p = \alpha V_p^2 = \alpha V^{\gamma_p^{(2)}} < \alpha VI$. Daraus ergibt sich $\alpha V_p^3 = \alpha V^{\gamma_p^{(3)}} < \alpha VI$ usw., d.h. $\alpha V_p^{\omega} \leqq \alpha VI = \alpha\overline{V}^{\omega}$. — Somit wird $\alpha V_p^{\omega} = \alpha\overline{V}^{\omega}$ und daher nach (27)

$$(35) \qquad \alpha V_p^{\omega} = \alpha VI \quad \text{für} \quad p=2,3,\ldots, \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

Demnach ist auch

$$(36) \qquad \alpha V_p II' = \alpha VII' \quad \text{für} \quad p=2,3,\ldots, \quad \alpha \in [\alpha^{(0)}, P).$$

Nach Satz 6 ist somit $\vartheta VI\ldots I^{(n)} = \vartheta V_p I\ldots I^{(n)}$ für $n=1,2,\ldots$ und $\vartheta \in [\alpha^{(0)}, P)$. Nach **II**, Satz 5 und 10 gelangt man daher niemals aus dem Bereich $[1, \vartheta VI\ldots I^{(n)})$ heraus, wenn man Figuren $\mathfrak{F}^{*(n+1)}$ bildet, welche durch die Substitution $V \to V_p$ aus solchen Figuren $\mathfrak{F}^{(n+1)}$ (s. **II**, § 6, **1**) hervorgehen, deren Zahlenvariable Zahlen $< \vartheta VI\ldots I^{(n)}$ bedeuten und deren Kernvariable insbesondere Zahlen aus $\{\vartheta V^{\nu}\}_{\nu < \vartheta VI\ldots I^{(n)}}$ darstellen.

Analoge Ergebnisse lassen sich hinsichtlich der durch (24) erklärten Iteratoren I_p, I_p', I_p'' gewinnen; vgl. § 7, **3**, Schlußbemerkung.

4. Man kann die durch (23) definierten Operatoren V_p, J_{0p}, J_{np} auch mittels gewisser Iteratoren $\bar{I}_p^{(n)}$ $(n=0,1,2,\ldots)$ darstellen:

$$(37) \qquad \left.\begin{array}{l} \alpha V_{p+1} = \alpha V \bar{I}_p (\bar{I}_p^{(0)} = \bar{I}_p); \quad \alpha V J_{0,p+1} = \alpha V J \bar{I}_p; \\ \alpha V J\ldots J_{n-1} J_{n,p+1} = \alpha V J\ldots J_{n-1} J_n \bar{I}_p^{(n+1)} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (n=1,2,\ldots) \end{array}\right\} p=1,2,\ldots.$$

$\bar{I}_p^{(n)}$ ist offenbar ein monotoner Iterator $(n+1)$. Stufe. — Ebenso kann man den durch (25) gegebenen Operator $\overline{V}$ für $\alpha > 1$ mittels eines monotonen Iterators I_0 von erster Stufe repräsentieren in der Form

$$(38) \qquad \alpha\overline{V} = \alpha VI_0 = \alpha V^{\alpha} \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{00}, P), \qquad \alpha^{00} = \max(\alpha^{(0)}, 2).$$

Hinsichtlich I_0 wollen wir einige Formeln herleiten. (27) und (28) schreiben sich jetzt so:

$$(39) \qquad \alpha(VI_0)^{\omega} = \alpha VI \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{00}, P)$$

$$(40) \qquad \alpha(VI_0)I = \alpha VI^2 \quad \text{für} \quad \alpha \in [\alpha^{00}, P), \qquad \alpha \geqq \omega.$$

Zunächst zeigen wir

$$(41)\qquad \left\{\begin{array}{ll}(1)\quad \alpha(VI_0^{\nu})I=\alpha VI^{\nu+1} & (\nu\geq 1)\\ (2)\quad \alpha VI_0^{\lambda}=\alpha VI^{\lambda} & (\lambda \text{ Limeszahl})\end{array}\right\}\ \alpha\geq\omega.$$

Beweis. Angenommen, (41) sei richtig für alle $\nu<\xi$, $\lambda<\xi$ [für $\xi=2$ wegen (40) zutreffend]. Ist ξ eine Limeszahl der Form $\omega^2\sigma=\omega(\omega\,\sigma)$, so kann man eine Fundamentalfolge $\xi_\tau\to\xi$ angeben, die aus lauter Limeszahlen besteht. Folglich ist $\alpha VI_0^{\xi}=\lim\limits_{\tau}\alpha VI_0^{\xi_\tau}=\lim\limits_{\tau}\alpha VI^{\xi_\tau}=\alpha VI^{\xi}$. — Sei nun ξ eine Limeszahl der Form $\sigma+\omega$, $\sigma=0$ oder σ Limeszahl. Es wird nach (39), d.h. wegen $(VI_0)^{\omega}=VI$ in $[\alpha^{00},P)$, für $n\geq 1$: $\alpha VI_0^{\sigma+n+1}=\alpha(VI_0^{\sigma+n})I_0=\alpha(VI_0^{\sigma+n})^{\alpha}\geq\alpha(VI_0^{\sigma+n})^{\omega}=\alpha\big((VI_0^{\sigma+n-1})I_0\big)^{\omega}=\alpha(VI_0^{\sigma+n-1})I=\alpha VI^{\sigma+n}$ (Induktionsvoraussetzung!), mithin $\alpha VI_0^{\sigma+n+1}\geq\alpha VI^{\sigma+n}$, folglich $\alpha VI_0^{\xi}=\alpha VI_0^{\sigma+\omega}\geq\alpha VI^{\xi}$. Andererseits ist $\alpha VI_0^{\xi}\leq\alpha VI^{\xi}$ wegen $I_0<I$ (s. die letzte Relation im vorletzten Absatz von § 7, 1). Also ist wieder $\alpha VI_0^{\xi}=\alpha VI^{\xi}$. — Ist endlich $\xi=\eta+1$, so kommt vermöge (40), angewandt auf VI_0^{η} statt V: $\alpha(VI_0)I=\alpha(VI_0^{\eta+1})I=\alpha\big((VI_0^{\eta})I_0\big)I=\alpha(VI_0^{\eta})I^2=\alpha\big((VI_0^{\eta})I\big)I=\alpha(VI^{\eta+1})I=\alpha VI^{\xi+1}$ (Induktionsvoraussetzung!). — Nebenbei haben wir gefunden:

$$(42)\qquad \alpha(VI_0^{\nu+1})^{\omega}=\alpha VI^{\nu+1}\quad\text{für}\quad\alpha\geq\omega,\ \nu\geq 0.$$

Aus (41, 2) schließt man:

$$(43)\qquad \alpha VI_0I'=\alpha VII'\quad\text{für}\quad\alpha\geq\omega.$$

Da nämlich $\alpha VI_0I'$ eine Limeszahl, so wird $\alpha VI_0I'=\alpha VI_0^{\alpha VI_0I'}=\alpha VI^{\alpha VI_0I'}$, daher $\alpha VI_0I'\geq\alpha VII'$; ebenso folgt $\alpha VII'\geq\alpha VI_0I'$.

Die Relationen (40) bis (43) sind eine Folge von (39) in Verbindung mit $VI_0\geq\cdot\,2$ [man beachte die Herleitung von (28) aus (27)] und dem Umstand, daß I_0 ein monotoner Iterator erster Stufe $<I$ ist; sie gelten also für alle Iteratoren erster Stufe J mit den genannten Eigenschaften von I_0, insbesondere für $J=\bar{I}_p$ ($p=1,2,\ldots$), wie aus $I_0<\bar{I}_p$ und (35), (37) folgt, desgleichen für $J=I_0^{+}$, wenn $\alpha VI_0^{+}=\alpha V^{\alpha+1}=(\alpha VI_0)V$ gesetzt wird (denn $I_0<I_0^{+}\leq\bar{I}_1$).

Für unsere weiteren Schlüsse wollen wir nur (43) zugrunde legen. Wir nehmen daher jetzt an, J sei ein monotoner Iterator erster Stufe $\leq I$ im Bereich $[\alpha^{00},P)$, $\alpha^{00}\geq\alpha^{(0)}$, und V ein beliebiger Operator erster Stufe im selben Bereich (was natürlich für alle V in $[\alpha^{(0)},P)$ zutrifft), und es gelte

$$(44)\qquad \alpha VJI'=\alpha VII'\quad\text{für}\quad\alpha\geq\omega,\quad\alpha\in[\alpha^{00},P),\quad V\text{ in }[\alpha^{00},P).$$

Ein solches J ist nach dem vorstehenden I_0 mit $\alpha^{00}=\max(2,\alpha^{(0)})$, ebenso $\bar{I}_p$ ($p=1,2,\ldots$) und I_0^{+} ($\alpha VI_0^{+}=\alpha V^{\alpha+1}$), beide mit $\alpha^{00}=\alpha^{(0)}$. — Wenn $\alpha^{00}\geq\omega$, so besagt (44), daß $JI'=II'$ ist. Im Fall $\alpha^{00}<\omega$ gilt wegen $J\leq I$ für $\alpha\in[\alpha^{00},\omega)$: $\alpha VJI'\leq\alpha VII'$. Wir haben also nur die Möglichkeiten $\alpha VJI'=\alpha VII'$ und

$\alpha V J I' < \alpha V I I'$, wenn ein Paar α, V in $[\alpha^{00}, P)$ gegeben ist. — Zunächst wird

(45_1) $\alpha(V J I')^\nu = \alpha(V I I')^\nu$ für $\nu \geqq 0$ und $\alpha V J I' = \alpha V I I'$,

(45_2) $\alpha(V J I')^{1+\nu} = \alpha(V I I')^\nu$ für $\nu \geqq 1$ und $\alpha V J I' < \alpha V I I'$, also

(45_3) $\alpha(V J I')^\nu = \alpha(V I I')^\nu$ für $\nu \geqq \omega$, $\alpha \in [\alpha^{00}, P)$.

Beweis. (45_1) folgt induktiv aus (44), indem man dort α durch $\alpha V J I' = \alpha V I I'$, $\alpha(V J I')^2 = \alpha(V I I')^2, \ldots, \alpha(V J I')^\omega = \alpha(V I I')^\omega, \ldots$ ersetzt. — (45_2) folgt so. Die Sätze 7 und 10 in II liefern:

(46) $(\alpha V J I') V I I' = \alpha V I I'$ für $\alpha V J I' < \alpha V I I'$.

Aus (44) entnimmt man bei Ersetzung von α durch $\alpha V J I'$:

(47) $(\alpha V J I') V J I' = (\alpha V J I') V I I'$ für $\alpha \in [\alpha^{00}, P)$.

(46) und (47) zusammen ergeben

(48) $\alpha(V J I')^2 = \alpha V I I'$ für $\alpha V J I' < \alpha V I I'$.

Aus (48) findet man jetzt (45_2) vermöge (44) durch eine analoge Schlußweise, wie sie vorhin angewendet wurde.

Nun zeigen wir, daß

(49) $\alpha V(J I')^2 = \alpha V(I I')^2$ für alle α und V in $[\alpha^{00}, P)$.

Beweis. (44) liefert mit $V J I'$ und $\alpha V J I'$ an Stelle von V und α:

(50) $(\alpha V J I')(V J I') J I' = (\alpha V J I')(V J I') I I'$.

1. Fall: $\alpha V J I' = \alpha V I I'$. Wir ersetzen in (45_1) α durch $\alpha V J I' = \alpha V I I'$ und erhalten vermöge Satz 5:

$$(\alpha V J I')(V J I') I I' = (\alpha V I I')(V I I') I I'.$$

Diese Relation liefert zusammen mit (50):

$$(\alpha V J I')(V J I') J I' = (\alpha V I I')(V I I') I I'.$$

Hieraus erhält man durch geeignete Anwendung von (9): $\alpha(V J I') J I' = \alpha(V I I') I I'$, also (49).

2. Fall: $\alpha V J I' < \alpha V I I'$. Dann gilt (46); wir wenden Satz 3 an, indem wir $\alpha V J I'$ mit β und $V I I'$ mit V identifizieren. Das liefert $(\alpha V J I')(V I I') I I' = \alpha(V I I') I I'$, also

$$(\alpha V J I') V(I I')^2 = \alpha V(I I')^2.$$

Indem wir in (45_1) α durch $\alpha V J I' \geqq \omega$ ersetzen und Satz 5 anwenden, erhalten wir

$$(\alpha V J I')(V J I') I I' = (\alpha V J I')(V I I') I I' = (\alpha V J I') V(I I')^2.$$

Die beiden letzten Relationen liefern zusammen mit (50):

$$(\alpha V J I')(V J I') J I' = \alpha V(I I')^2.$$

Durch geeignete Anwendung von (9) folgt:

$$(\alpha V J I')\,(V J I')\,J I' = \alpha (V J I')\,J I' = \alpha V (J I')^2.$$

Damit ist (49) auch im zweiten Fall bestätigt.

(49) besagt, daß $(J I')^2 = (I I')^2$ ist. Daher hat man

$$\alpha V (J I')^{2\nu} = \alpha V (I I')^{2\nu} \quad \text{für} \quad \nu \geq 1, \ \alpha \text{ und } V \text{ in } [\alpha^{00}, P).$$

Diese Relation drückt die Gleichheit $V(J I')^{2\nu} = V(I I')^{2\nu}$ aus. Daraus findet man durch entsprechende Anwendung von (9) und (44) die Kette von Gleichungen:

$$\begin{aligned}\alpha V (J I')^{2\nu+1} &= \alpha \left(V (J I')^{2\nu}\right) J I' = \alpha \left(V (I I')^{2\nu}\right) J I' = \left(\alpha V (I I')^{2\nu}\right) \left(V (I I')^{2\nu}\right) J I' \\ &= \left(\alpha V (I I')^{2\nu}\right) \left(V (I I')^{2\nu}\right) I I' = \alpha \left(V (I I')^{2\nu}\right) I I' = \alpha V (I I')^{2\nu+1}.\end{aligned}$$

Damit hat sich ergeben:

(51) $\quad \alpha V (J I')^{\nu} = \alpha V (I I')^{\nu}$ für $\nu \geq 2$ und alle α, V in $[\alpha^{00}, P)$.

Von (51) aus erhält man auf ähnliche Weise wie seinerzeit (33) von (32, 2) aus:

(52) $\quad \alpha V J I'^2 = \alpha V I I'^2$ für alle α, V in $[\alpha^{00}, P)$.

Diese Gleichung kann man übrigens auch direkt aus (49) mittels (8) gewinnen. Da nach (52) $J I'^2 = I I'^2$, so findet man induktiv

(53) $\quad \alpha V J I'^{\nu} = \alpha V I I'^{\nu}$ für $\nu \geq 2$ und alle α, V in $[\alpha^{00}, P)$.

Aus (53) endlich erhält man analog wie (52) aus (51):

(54) $\quad \alpha V J I' I'' = \alpha V I I' I''$ für alle α, V in $[\alpha^{00}, P)$.

Auf Grund eines leicht zu beweisenden Analogons zu Satz 6 kann man aus (54) schließen, daß im Bereich $[\alpha^{00}, P)$ eine Zahlenfigur des freien Algorithmus der Symbole $V, I, I', I'', \ldots$, in welcher I vorkommt, und zwar stets als erstes Zeichen einer Kette $I(\ldots(I'(\ldots(I''$, ihren Zahlenwert behält, wenn man in ihr I durch J ersetzt. — Man kommt also mit dem „schwachen" I_0 oder I_0^+ ($\alpha V I_0^+ = \alpha V^{\alpha+1}$) genau so weit wie mit I, und zwar, wie (49) zeigt, schon „am Anfang" des Algorithmus der $I', I'', \ldots$.

Die Betrachtungen dieser Ziffer lassen sich in ähnlicher Weise für solche Operatoren höherer als zweiter Stufe durchführen, die analog wie I_0 erklärt sind.

Mainz, Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 7. Oktober 1953.)