Werk

Titel: Über die schwächste Uniformisierende.

Autor: Graeub, W.

Jahr: 1954

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0060|log10

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

GRAEUB, W.
Math. Zeitschr. Bd. 60, S. 66—78 (1954)

Über die schwächste Uniformisierende.

Von
W. GRAEUB.

Eine RIEMANNsche Fläche kann erklärt werden

1. als topologische Fläche mit konformen Nachbarrelationen[1]),

2. als der Raum der Funktionselemente eines analytischen Gebildes der z-Kugel[2]).

Jede RIEMANNsche Fläche (2) ist eine topologische Fläche mit konformen Nachbarrelationen; die Punkte der Fläche sind die analytischen Elemente und die Umgebung eines Punktes wird von den unmittelbaren Fortsetzungen des entsprechenden Funktionselementes gebildet.

Umgekehrt erhebt sich die Frage, ob man eine gegebene RIEMANNsche Fläche (1) als den Raum der Funktionselemente eines analytischen Gebildes darstellen kann. *In der vorliegenden Arbeit soll gezeigt werden, daß dies stets der Fall ist.* Dabei wird es darauf ankommen, der gegebenen Fläche R ein analytisches Gebilde zuzuordnen, so daß die Fläche R als die „schwächste Uniformisierende" derjenigen mehrdeutigen Relation $z \longleftrightarrow z'$ erscheint, die durch das analytische Gebilde zwischen der z- und der z'-Kugel hergestellt wird.

1. RIEMANNsche Flächen. Im folgenden wird die Definition (1) zugrunde gelegt. Eine RIEMANNsche Fläche R ist zunächst ein HAUSDORFFscher Raum, in dem jeder Punkt P eine *Parameterumgebung* K_P besitzt, d.h. eine Umgebung, die zu einer Kreisscheibe der z-Ebene, dem *Parameterkreis* $K_{P,z}$, homöomorph ist. Die topologische Abbildung ϱ_P: $K_P \to K_{P,z}$ nennen wir die *Parameterabbildung*. Es ist keine Einschränkung, den Parameterkreis als den Einheitskreis $|z| < 1$ anzunehmen. Sind K_P und $K_{P'}$ zwei benachbarte (d.h. nicht punktfremde) Parameterumgebungen zweier Punkte P bzw. P', so entspricht dem Durchschnitt $D = K_P K_{P'}$ im Parameterkreis $|z| < 1$ bzw. $|z'| < 1$ eine offene Menge D_z bzw. $D_{z'}$ und $\varrho_{P'} \varrho_P^{-1}$ ist eine topologische Abbildung von D_z auf $D_{z'}$, die *Nachbarrelation* der Umgebungen K_P und $K_{P'}$.

Unter einer RIEMANN*schen Fläche* versteht man eine topologische Fläche, bei der alle Nachbarrelationen direkt konforme Abbildungen sind. Eine RIEMANNsche Fläche, betrachtet als topologischer Raum, besitzt eine abzählbare Basis, oder, was damit gleichbedeutend ist, sie läßt sich durch *abzählbar viele* Parameterumgebungen überdecken[3]).

2. Überlagerungsflächen. Es seien $\tilde{R}$ und R zwei topologische Flächen und σ sei eine eindeutige und stetige Abbildung von $\tilde{R}$ auf R, so daß jeder

[1]) Vgl. NEVANLINNA, R.: Uniformisierung, Springer 1953, Definition 2.22. Dieses Buch wird im folgenden mit N. zitiert.

[2]) Vgl. WEYL, H.: Die Idee der RIEMANNschen Fläche, Teubner 1923, Kap. I, §§ 6, 7.

[3]) Vgl. N. Kap. IV, § 3.

Punkt $\tilde{P}$ von $\tilde{R}$ eine Umgebung besitzt, welche topologisch abgebildet wird. Dann heißt $\tilde{R}$ eine *unverzweigte Überlagerungsfläche* von R und σ die *Spurabbildung*. Jede Umgebung des Punktes $\tilde{P}$, in der die Abbildung σ topologisch ist, soll eine *ausgezeichnete Umgebung* dieses Punktes genannt werden.

Die Fläche $\tilde{R}$ heißt eine *verzweigte Überlagerungsfläche* von R, wenn die lokale Eineindeutigkeit der Abbildung σ in gewissen, isoliert liegenden, Punkten $\tilde{P}$ von $\tilde{R}$ verletzt und durch die folgende ersetzt ist: Der Punkt $\tilde{P}$ besitzt eine Parameterumgebung $U_{\tilde{P}}$, so daß $\tilde{P}$ als einziger Punkt von $U_{\tilde{P}}$ in den Punkt $P=\sigma\tilde{P}$ übergeführt wird, während sonst je k (k feste Zahl) Punkte von $U_{\tilde{P}}$ in denselben Punkt von R übergehen. Ein solcher Punkt $\tilde{P}$ heißt ein *Verzweigungspunkt* und $k-1$ seine *Ordnung*.

3. Mehrdeutige Beziehung zwischen zwei RIEMANNschen Flächen. Zwischen zwei RIEMANNschen Flächen R und R' sei eine (in beiden Richtungen) mehrdeutige analytische Beziehung gegeben; das soll folgendes bedeuten: Es seien gewisse Punktepaare P, P' ($P \in R$, $P' \in R'$) einander zugeordnet, so daß jeder Punkt von R bzw. R' in mindestens einem Paar auftritt, und diese Zuordnung besitze die Eigenschaften:

A. Ist P, P' ein Paar einander zugeordneter Punkte, so gibt es endlich oder abzählbar viele Paare von Parameterumgebungen U_P, $U_{P'}$ von P bzw. P', so daß die Punkte von U_P und $U_{P'}$ einander zugeordnet sind, und zwar entweder mittels einer eineindeutigen konformen lokalen Abbildung λ_P oder mittels einer verzweigten lokalen Abbildung λ_P, die sich in geeigneten lokalen Parametern z und z' in der Form

$$z = t^m, \quad z' = t^n \qquad (m, n \text{ ganz})$$

schreiben läßt. Dabei seien die Parameterkreise die Einheitskreise $|z|<1$ bzw. $|z'|<1$ und den Punkten P bzw. P' entspreche der Punkt $z=0$ bzw. $z'=0$.

B. Es sei λ_P eine zum Punkte P gehörige lokale Abbildung und Q sei ein Punkt der zugehörigen Parameterumgebung U_P. Dann gibt es unter den zum Punkte Q gehörigen lokalen Abbildungen eine Abbildung λ_Q, so daß $\lambda_Q = \lambda_P$ im Durchschnitt $U_P U_Q$.

C. Zu je zwei unverzweigten Abbildungen λ_A und λ_B gibt es auf R einen von A nach B führenden Weg $P(t)$ $(0 \leq t \leq 1)$ und eine Belegung des Weges mit unverzweigten lokalen Abbildungen λ_t, so daß $\lambda_0 = \lambda_A$ und $\lambda_1 = \lambda_B$. Die Bezeichnung „Belegung" deutet hier an, daß zwei Abbildungen λ_t und $\lambda_{t'}$ unmittelbare Fortsetzungen voneinander sind, falls t' hinreichend nahe an t liegt.

Aus der Bedingung B folgt, daß die Punkte von R, zu denen nur verzweigte Abbildungen gehören, isoliert liegen. Denn ist P ein beliebiger Punkt von R und λ_P eine zugehörige lokale Abbildung, definiert in der Umgebung U_P, so ist diese in jedem von P verschiedenen Punkt von U_P unverzweigt, gleichgültig ob sie in P unverzweigt ist oder nicht. Ist Q ein beliebiger Punkt von U_P, so ist λ_P nach Bedingung B eine der zum Punkte Q gehörigen lokalen

Abbildungen und diese ist in Q unverzweigt. Zu jedem (von P verschiedenen) Punkt der Umgebung U_P gehört also mindestens eine unverzweigte lokale Abbildung.

Ein analytisches Gebilde auf der z-Kugel bestimmt eine mehrdeutige Relation $z \leftrightarrow z'$, welche den drei obigen Bedingungen genügt. Dabei ist R das bei der Fortsetzung überdeckte Gebiet und R' das Bildgebiet.

4. Die Eigenschaft *D*. Wir werden in 10. eine mehrdeutige Relation betrachten, die zusätzlich folgender Bedingung D genügt:

D. Zu je zwei einander zugeordneten Punkten P und P' gibt es Parameterumgebungen V_P und $V_{P'}$, so daß sich je zwei einander zugeordnete Punkte von V_P und $V_{P'}$ mittels einer *zum Punkte P gehörigen* lokalen Abbildung entsprechen.

Diese Bedingung ist bei einem analytischen Gebilde im allgemeinen nicht erfüllt, wie man am Beispiel

$$z' = e^{\frac{1}{1+\sqrt{z}}}$$

für die Punkte $z = 1$ und $z' = e^{\frac{1}{2}}$ sieht.

5. Uniformisierung. Es sei eine mehrdeutige Relation $R \leftrightarrow R'$ mit den Eigenschaften A, B, C gegeben. Eine RIEMANNsche Fläche $\tilde{R}$ *uniformisiert* die Beziehung $R \leftrightarrow R'$, wenn $\tilde{R}$ eine (im allgemeinen verzweigte) Überlagerungsfläche von sowohl R als auch R' ist und die Spurabbildungen $\sigma: \tilde{R} \to R$, $\sigma': \tilde{R} \to R'$ folgendermaßen mit der Relation $R \leftrightarrow R'$ zusammenhängen:

1. Für jeden Punkt $\tilde{P}$ von $\tilde{R}$ sind die Punkte $P = \sigma\tilde{P}$ und $P' = \sigma'\tilde{P}$ einander mittels der Beziehung $R \leftrightarrow R'$ zugeordnet und man erhält auf diese Art alle Paare einander zugeordneter Punkte.

2. Ist $U_{\tilde{P}}$ eine zu $\tilde{P}$ gehörige ausgezeichnete Umgebung (bezüglich beider Spurabbildungen), so ist $\sigma'\sigma^{-1}$ eine zum Spurpunkt P gehörige (eindeutige oder verzweigte) lokale Abbildung λ_P, definiert in der Spurumgebung U_P von $U_{\tilde{P}}$. Umgekehrt erhält man auf diese Art alle zum Punkte P gehörigen lokalen Abbildungen λ_P entsprechend den über P liegenden Punkten.

Aus dieser Definition folgt, daß mit einer uniformisierenden Fläche $\tilde{R}$ auch jede Überlagerung von $\tilde{R}$ eine solche ist.

Zu einer gegebenen mehrdeutigen Relation $R \leftrightarrow R'$ mit den Eigenschaften A, B, C gibt es stets eine uniformisierende Fläche $\tilde{R}_1$[4]). Sie wird als Raum der lokalen Abbildungen konstruiert. Dabei definieren zwei lokale Abbildungen genau dann denselben Punkt von $\tilde{R}_1$, wenn sie zu demselben Punkt P gehören und unmittelbare Fortsetzungen voneinander sind. Die Spurabbildungen σ bzw. σ' sind durch die Zuordnungen $\lambda_P \to P$ bzw. $\lambda_P \to \lambda_P(P)$ gegeben. Die so konstruierte uniformisierende Fläche $\tilde{R}_1$ ist die *schwächste* Uniformisierende der Beziehung $R \leftrightarrow R'$, d. h. jede uniformisierende Fläche ist eine Überlagerung von $\tilde{R}_1$[4]).

[4]) Vgl. N. Kap. VIII, § 4.

6. Relationen mit der Eigenschaft *D*. Erfüllt die mehrdeutige Relation $R \longleftrightarrow R'$ überdies die Bedingung D, so besitzt die schwächste Uniformisierende noch folgende Eigenschaft:

3. Es sei P, P' ein Paar einander zugeordneter Punkte und $\tilde{P}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ seien die gleichzeitig über P und P' liegenden Punkte von $\tilde{R}_1$. Dann gibt es Umgebungen V_P, $V_{P'}$ und $V_{\tilde{P}_\nu}$, so daß alle Punkte von $\tilde{R}_1$, deren Spurpunkte bezüglich σ bzw. σ' in V_P bzw. $V_{P'}$ liegen, der Vereinigungsmenge $\Sigma V_{\tilde{P}_\nu}$ angehören.

7. Teilgebiete der Zahlenkugeln. Wir betrachten fortan den Fall, daß R bzw. R' ein Gebiet auf der x-Kugel bzw. x'-Kugel ist. Wie schon erwähnt, bestimmt jedes analytische Gebilde eine mehrdeutige Relation $x \longleftrightarrow x'$ mit den Eigenschaften A, B, C und definiert damit eine RIEMANNsche Fläche $\tilde{R}_1$ als die schwächste Uniformisierende dieser Beziehung.

Es sei jetzt umgekehrt eine RIEMANNsche Fläche $\tilde{R}$ gegeben. Gesucht ist eine mehrdeutige Beziehung $x \longleftrightarrow x'$ mit den Eigenschaften A, B, C, deren schwächste Uniformisierende zur Fläche $\tilde{R}$ konform äquivalent ist.

8. **Formulierung als Abbildungsaufgabe.** Wir betrachten auf einer gegebenen RIEMANNschen Fläche $\tilde{R}$ zwei nichtkonstante meromorphe Funktionen $f(\tilde{z})$ und $g(\tilde{z})$. Mittels der Funktion f bzw. g wird die Fläche $\tilde{R}$ auf ein Teilgebiet der x- bzw. x'-Kugel abgebildet. Ordnet man für jeden Punkt $\tilde{z}$ die beiden Bildpunkte $x = f(\tilde{z})$ und $x' = g(\tilde{z})$ einander zu, so ist damit eine mehrdeutige Beziehung $x \longleftrightarrow x'$ definiert, welche den Bedingungen A, B, C genügt. Diese Beziehung wird durch die Fläche $\tilde{R}$ uniformisiert. Dabei wird die Fläche $\tilde{R}$ im allgemeinen nicht die *schwächste* Uniformisierende $\tilde{R}_1$ der obigen Beziehung sein, sondern diese überlagern; und zwar wird die Spurabbildung $\tilde{R} \to \tilde{R}_1$ auf folgende Art erklärt: Es sei $\tilde{a}$ ein Punkt der Fläche $\tilde{R}$ und $a = f(\tilde{a})$ bzw. $a' = g(\tilde{a})$ seien seine beiden Bildpunkte auf R bzw. R'. Ist dann $U_{\tilde{a}}$ eine ausgezeichnete Umgebung von $\tilde{a}$, so sind die Spurumgebungen U_a und $U_{a'}$ nach Bedingung 2. von 5. mittels der lokalen Abbildung $\lambda_a = g f^{-1}$ aufeinander bezogen. Die lokale Abbildung λ_a repräsentiert einen Punkt der Fläche $\tilde{R}_1$; dieser sei der Bildpunkt von $\tilde{a}$. Die so erklärte Zuordnung $\tilde{a} \to \lambda_a$ ist dann eine Spurabbildung von $\tilde{R}$ auf $\tilde{R}_1$[4]).

Wir betrachten jetzt andererseits die Abbildung φ der Fläche $\tilde{R}$ in das topologische Produkt der x- und der x'-Kugel, welche durch die Zuordnung $x = f(\tilde{z})$, $x' = g(\tilde{z})$ gegeben ist. Dann besteht folgender Zusammenhang:

Die oben erklärte Spurabbildung $\tilde{a} \to \lambda_a$ ist genau dann eineindeutig, wenn die Abbildung φ bis auf isolierte Punkte eineindeutig ist, d.h., sind $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ zwei verschiedene Punkte von $\tilde{R}$, so daß $\varphi(\tilde{a}_1) = \varphi(\tilde{a}_2)$, so gibt es Umgebungen $U_{\tilde{a}_1}$ und $U_{\tilde{a}_2}$, deren Bilder nur den Punkt $\varphi(\tilde{a}_1) = \varphi(\tilde{a}_2)$ gemeinsam haben.

Zum Beweis setzen wir zunächst voraus, die Abbildung φ sei in diesem Sinn eineindeutig und schließen daraus auf die Eineindeutigkeit der Abbildung $\tilde{a} \to \lambda_a$.

---

[4]) Vgl. N. Kap. VIII, § 4.

Es seien $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ zwei Punkte von $\tilde{R}$. Der Spurpunkt von $\tilde{a}_1$ auf der Fläche $\tilde{R}_1$ ist eine lokale Abbildung λ_{a_1}, welche zum Punkte $a_1 = f(\tilde{a}_1)$ gehört und dadurch charakterisiert ist, daß

$$(1) \qquad \lambda_{a_1} f(\tilde{z}) = g(\tilde{z})$$

in einer Umgebung $U_{\tilde{a}_1}$ von $\tilde{a}_1$. Ebenso ist der Bildpunkt von $\tilde{a}_2$ eine lokale Abbildung λ'_{a_2} zum Punkte $a_2 = f(\tilde{a}_2)$ und es gilt in einer Umgebung $U_{\tilde{a}_2}$ von $\tilde{a}_2$

$$(2) \qquad \lambda'_{a_2} f(\tilde{z}) = g(\tilde{z}).$$

Wir haben zu zeigen, daß aus der Gleichheit $\lambda_{a_1} = \lambda'_{a_2}$ die Gleichheit $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$ folgt. Zunächst besagt die Gleichheit $\lambda_{a_1} = \lambda'_{a_2}$, daß diese beiden Abbildungen zu demselben Punkt von R gehören, also $a_1 = a_2 = a$; es ist also $f(\tilde{a}_1) = f(\tilde{a}_2)$, d.h. die Funktion $f(\tilde{z})$ nimmt in den Punkten $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ denselben Wert an. Es gibt daher zu jedem hinreichend nahe an $\tilde{a}_1$ liegenden Punkt $\tilde{z}_1$ von $U_{\tilde{a}_1}$ einen Punkt $\tilde{z}_2$ in $U_{\tilde{a}_2}$, so daß $f(\tilde{z}_1) = f(\tilde{z}_2)$. Für die Punkte $\tilde{z}_1$ und $\tilde{z}_2$ gilt dann wegen $\lambda_{a_1} = \lambda'_{a_2}$ nach (1) und (2) auch $g(\tilde{z}_1) = g(\tilde{z}_2)$. Es ist also $\varphi(\tilde{z}_1) = \varphi(\tilde{z}_2)$ und dies ist nach unserer Voraussetzung über die Abbildung φ nur so möglich, daß $\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2$. Die Zuordnung $\tilde{R} \to \tilde{R}_1$ ist somit eineindeutig, und der erste Teil des Satzes bewiesen.

Es sei nun zweitens die Zuordnung $\tilde{a} \to \lambda_a$ eineindeutig. Um zu zeigen, daß die Abbildung φ dann bis auf isolierte Punkte eineindeutig ist, seien $\tilde{a}_1$ und $\tilde{a}_2$ $(\tilde{a}_1 \neq \tilde{a}_2)$ zwei Punkte von $\tilde{R}$, so daß $\varphi(\tilde{a}_1) = \varphi(\tilde{a}_2)$. Dem Punkte $\tilde{a}_1$ bzw. $\tilde{a}_2$ entspricht auf der Fläche $\tilde{R}_1$ ein Punkt λ_{a_1} bzw. λ'_{a_2}. Dabei ist wieder $a_j = f(\tilde{a}_j)$ $(j = 1, 2)$ und die Abbildungen λ_{a_1} und λ'_{a_2} sind dadurch charakterisiert, daß in einer Umgebung $U_{\tilde{a}_1}$ von $\tilde{a}_1$ gilt

$$(1) \qquad \lambda_{a_1} f(\tilde{z}) = g(\tilde{z})$$

und in einer Umgebung $U_{\tilde{a}_2}$ von $\tilde{a}_2$

$$(2) \qquad \lambda'_{a_2} f(\tilde{z}) = g(\tilde{z}).$$

Nach Voraussetzung ist $f(\tilde{a}_1) = f(\tilde{a}_2)$, also $a_1 = a_2 = a$, d.h. die lokalen Abbildungen λ_{a_1} und λ'_{a_2} gehören zu *demselben* Punkt a. Andererseits sind dies zwei *verschiedene* zum Punkte a gehörige lokale Abbildungen, denn λ_a bzw. λ'_a ist, als Punkt von $\tilde{R}_1$, Bildpunkt von $\tilde{a}_1$ bzw. $\tilde{a}_2$ und die Zuordnung $\tilde{a} \to \lambda_a$ ist nach Voraussetzung eineindeutig. Es gibt daher eine Umgebung V_a von a, so daß für alle Punkte z von V_a, eventuell abgesehen von $z = a$, gilt $\lambda_a(z) \neq \lambda'_a(z)$. Nun wählen wir zum Punkte $\tilde{a}_j$ $(j = 1, 2)$ eine Umgebung $V_{\tilde{a}_j}$ $(V_{\tilde{a}_j} \subset U_{\tilde{a}_j})$, deren Bild auf a in der Umgebung V_a enthalten ist. Dann haben die φ-Bilder der Umgebungen $V_{\tilde{a}_1}$ und $V_{\tilde{a}_2}$ nur den Punkt a gemeinsam; es seien nämlich $\tilde{z}_1$ bzw. $\tilde{z}_2$ zwei Punkte von $V_{\tilde{a}_1}$ bzw. $V_{\tilde{a}_2}$, so daß $\varphi(\tilde{z}_1) = \varphi(\tilde{z}_2)$, also $f(\tilde{z}_1) = f(\tilde{z}_2) = z$ und $g(\tilde{z}_1) = g(\tilde{z}_2) = z'$. Der Punkt z liegt dann in der Umgebung V_a und die Gln. (1) und (2) besagen, daß $\lambda_a(z) = z'$ und $\lambda'_a(z) = z'$, also $\lambda_a(z) = \lambda'_a(z)$. Dies ist in der Umgebung V_a nur so möglich, daß $z = a$. Daraus folgt weiter $\tilde{z}_1 = \tilde{a}_1$,

denn der Punkt $\tilde{z}_1$ gehört der ausgezeichneten Umgebung $U_{\tilde{a}_1}$ an und liegt über dem Punkte a; ebenso zeigt man, daß $\tilde{z}_2 = \tilde{a}_2$. Aus der Gleichung $\varphi(\tilde{z}_1) = \varphi(\tilde{z}_2)$, wobei $\tilde{z}_1$ in $V_{\tilde{a}_1}$ und $\tilde{z}_2$ in $V_{\tilde{a}_2}$ liegt, folgt somit $\tilde{z}_1 = \tilde{a}_1$ und $\tilde{z}_2 = \tilde{a}_2$, was bedeutet, daß die Abbildung φ bis auf isolierte Punkte eineindeutig ist.

9. Konstruktion der Abbildung φ. Nach diesem Ergebnis kommt es also darauf an, eine gegebene RIEMANNsche Fläche R mittels zweier meromorpher Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ bis auf isolierte Punkte eineindeutig in das Produkt der beiden Zahlenkugeln abzubilden. Denn dann ist die Fläche R nach 8. zur schwächsten Uniformisierenden der Beziehung $x \leftrightarrow x'$ konform äquivalent (mittels der Zuordnung $\tilde{a} \to \lambda_a$). Es sei $f(z)$ eine beliebige nichtkonstante meromorphe Funktion auf der Fläche R. R' sei ein zweites Exemplar der Fläche R und α eine topologische und direkt konforme Abbildung von R auf R'. Der Funktion $f(z)$ entspricht auf der Fläche R' eine Funktion $f'(z')$, definiert durch

$$f'(z') = f(\alpha^{-1} z').$$

Nun erklären wir zwischen den Flächen R und R' eine mehrdeutige Relation $z \leftrightarrow z'$, indem wir zwei Punkte z und z' genau dann einander zuordnen, wenn $f(z) = f'(z')$. Insbesondere ist also z, αz ein Paar zugeordneter Punkte.

Die so erklärte mehrdeutige Beziehung erfüllt die Bedingungen A und B von 3., während C im allgemeinen nicht erfüllt ist. Dies sieht man schon an dem einfachen Beispiel der Funktion $f(z) = z^2$ auf der z-Kugel; hier gehören zu jedem Punkt a die zwei lokalen Abbildungen $\lambda_a(z) = z$ und $\lambda'_a(z) = -z$ und diese sind nicht miteinander verbindbar im Sinne der Bedingung C. Faßt man alle lokalen Abbildungen, die miteinander gemäß C verbindbar sind, in eine Klasse zusammen, so erfüllen die Abbildungen einer solchen Klasse die Bedingungen A, B und C. Zu jeder Klasse gehört somit eine schwächste Uniformisierende $\tilde{R}$ und man erhält also insgesamt ein System von uniformisierenden Flächen $(\tilde{R})$ entsprechend den verschiedenen Klassen.

Von den Klassen miteinander verbindbarer Abbildungen ist eine ausgezeichnet, die von den lokalen Abbildungen $\lambda_a = \alpha$ gebildete. Die zugehörige schwächste Uniformisierende $\tilde{R}_0$ ist zur Fläche R konform äquivalent.

10. Zwei spezielle Eigenschaften der Uniformisierenden $(\tilde{R})$. Aus der Konstruktion der Zuordnung $z \leftrightarrow z'$ folgt, daß es zu jedem Paar z, z' nur endlich viele lokale Abbildungen λ_z gibt, für die $\lambda_z(z) = z'$. Es gibt auf dem Flächensystem $(\tilde{R})$ also nur endlich viele Punkte, die gleichzeitig über z und z' liegen.

Die oben erklärte Zuordnung $z \leftrightarrow z'$ erfüllt ferner die Bedingung D von 4. Jede Komponente $\tilde{R}$ von $(\tilde{R})$ besitzt somit die Eigenschaft 3. von 6: Ist a, a' ein Paar zugeordneter Punkte und sind $\tilde{a}_\varrho$ $(\varrho = 1 \ldots r)$ die Punkte von $(\tilde{R})$, die gleichzeitig über a und a' liegen, so gibt es Umgebungen V_a, $V_{a'}$, $V_{\tilde{a}_\varrho}$, so daß alle Punkte $\tilde{z}$ von $(\tilde{R})$, für die $\sigma\tilde{z}$ in V_a und $\sigma'\tilde{z}$ in $V_{a'}$ liegt, der Vereinigungsmenge $\Sigma V_{\tilde{a}_\varrho}$ angehören.

Aus diesen beiden Eigenschaften der Überlagerungsflächen $(\tilde{R})$ sollen jetzt zwei Folgerungen gezogen werden.

11. Es sei $\tilde{z}_\nu$ eine Punktfolge auf $(\tilde{R})$, so daß die Folgen $z_\nu = \sigma \tilde{z}_\nu$ bzw. $z'_\nu = \sigma' \tilde{z}_\nu$ auf R bzw. R' konvergent sind. Dann besitzt die Folge $\tilde{z}_\nu$ eine konvergente Teilfolge. Zum Beweis sei $z_\nu \to a$ und $z'_\nu \to a'$. Da für alle ν gilt

$$f(z_\nu) = f'(z'_\nu),$$

folgt

$$f(a) = f'(a'),$$

die Punkte a und a' sind also einander zugeordnet. Nach 10. gibt es also endlich viele Punkte $\tilde{a}_\varrho$ $(\varrho = 1 \dots r)$ auf $(\tilde{R})$, die gleichzeitig über a und a' liegen. Ferner gibt es Umgebungen $V_a, V_{a'}, V_{\tilde{a}_\varrho}$, so daß alle Punkte von $(\tilde{R})$, deren Spurpunkte auf R bzw. R' in V_a bzw. $V_{a'}$ liegen, in der Vereinigungsmenge $\Sigma V_{\tilde{a}_\varrho}$ enthalten sind. Dies gilt insbesondere für fast alle Punkte $\tilde{z}_\nu$. Eine der endlich vielen Umgebungen $V_{\tilde{a}_\varrho}$, etwa $V_{\tilde{a}_1}$, muß also eine unendliche Teilfolge von $\tilde{z}_\nu$ enthalten. Diese Teilfolge konvergiert dann gegen $\tilde{a}_1$, da sie in einer ausgezeichneten Umgebung enthalten ist und die Folge der Spurpunkte gegen a konvergiert. Damit ist eine konvergente Teilfolge angegeben.

12. Es sei $\tilde{R}_1$ eine der Flächen $(\tilde{R})$ und R_1 bzw. R'_1 seien ihre Spurflächen auf R bzw. R'. Auf der Fläche R sei eine offene Menge U gegeben. T sei der Durchschnitt UR_1 und T' sein Bild auf R'_1, d.h. das σ'-Bild desjenigen Teiles von $\tilde{R}_1$, dessen σ-Bild in der Menge U enthalten ist. Ist dann T' kompakt bezüglich R', so umfaßt der Durchschnitt T — sofern er nicht leer ist — eine ganze Komponente der Menge U. Zum Beweis zeigen wir, daß die Menge T bezüglich U sowohl offen als auch abgeschlossen ist. Das erste ist wegen der Offenheit von R_1 klar. Um zu zeigen, daß T bezüglich U auch abgeschlossen ist, sei a ein Häufungspunkt von T, der in U liegt. z_ν sei eine Folge von T, so daß $z_\nu \to a$. Zu jedem Punkt z_ν wählen wir auf der Fläche $\tilde{R}_1$ einen Urbildpunkt $\tilde{z}_\nu$. Die Folge $z'_\nu = \sigma' \tilde{z}_\nu$ der Spurpunkte auf R'_1 liegt dann in T' und wegen der Kompaktheit von T' gibt es somit eine (auf R') konvergente Teilfolge. Daher besitzt nach 11. auch die Folge $\tilde{z}_\nu$ eine (auf $\tilde{R}$) konvergente Teilfolge. Ihr Grenzpunkt $\tilde{a}$ liegt, wie alle Punkte der Folge — auf der Komponente $\tilde{R}_1$. Sein Spurpunkt auf R ist $\sigma \tilde{a} = a$, d.h. der Punkt a gehört noch zur Fläche R_1. Andererseits liegt er nach Voraussetzung in U und somit auch im Durchschnitt T. Jeder Häufungspunkt von T bezüglich U gehört also zu T und T ist somit eine abgeschlossene Teilmenge von U.

Fällt die offene Menge U mit der ganzen Fläche R zusammen, so lautet dieses Ergebnis: Ist das Bild R'_1 einer Fläche R_1 kompakt bezüglich R', so umfaßt die Fläche R_1 ganz R.

13. Abzählbarkeit des Systems $(\tilde{R})$. Das System $(\tilde{R})$ besteht aus höchstens abzählbar vielen Komponenten. Es genügt zu zeigen, daß man den Raum $(\tilde{R})$ durch abzählbar viele Parameterumgebungen überdecken kann. Zu diesem Zweck betrachten wir die Abbildung des Raumes $(\tilde{R})$ in das Produkt $R \times R'$, die durch die Zuordnung $z = \sigma \tilde{z}$, $z' = \sigma' \tilde{z}$ bestimmt ist. Der Bildraum A

besteht aus den Paaren z, z' einander zugeordneter Punkte. Jeder Punkt a, a' von A besitzt nach 10. auf dem System $(\widetilde{R})$ endlich viele Urbildpunkte $\tilde{a}_\varrho$. Ferner gibt es nach 10. Umgebungen $V_a, V_{a'}, V_{\tilde{a}_\varrho}$, so daß alle Punkte $\tilde{z}$ von $(\widetilde{R})$, für die $\sigma\tilde{z}$ in V_a und $\sigma'\tilde{z}$ in $V_{a'}$ liegt, der Vereinigungsmenge $\Sigma V_{\tilde{a}_\varrho}$ angehören. Die Paare zugeordneter Punkte z, z', wobei z in V_a und z' in $V_{a'}$ liegt, bilden eine Umgebung $V(a, a')$ des Punktes (a, a') bezüglich A. Zu jedem Punkt (a, a') von A gibt es also eine Umgebung $V(a, a')$, so daß alle Urbildpunkte von $V(a, a')$ der Menge $\Sigma V_{\tilde{a}_\varrho}$ angehören. Das System der Umgebungen $V(a, a')$, wobei (a, a') den ganzen Raum A durchläuft, bildet eine Überdeckung des Raumes A. Nun besitzt das Produkt $R \times R'$ eine abzählbare Basis und damit auch die Teilmenge A. Daher wird der Raum A bereits durch ein abzählbares System von Umgebungen $V_{(a_\nu, a'_\nu)}$ überdeckt. Die zugehörigen Umgebungen $V_{\tilde{a}_{\nu\varrho}}$, wobei $\tilde{a}_{\nu\varrho}$ bei festem ν alle Urbildpunkte von (a_ν, a'_ν) durchläuft, bildet dann eine Überdeckung des Raumes $(\widetilde{R})$. Ist nämlich $\tilde{z}$ ein beliebiger Punkt von $(\widetilde{R})$, so ist sein Bildpunkt (z, z') in einer Umgebung $V(a_\nu, a'_\nu)$ enthalten, etwa in $V(a_1, a'_1)$. Dann muß der Punkt $\tilde{z}$ in der Vereinigungsmenge $\Sigma V_{\tilde{a}_{1\varrho}}$ enthalten sein. Damit ist eine Überdeckung des Raumes $(\widetilde{R})$ durch abzählbar viele Parameterumgebungen hergestellt.

14. Bedingung für die Funktion $g(z)$. Es soll jetzt zur gegebenen Funktion $f(z)$ eine zweite meromorphe Funktion $g(z)$ konstruiert werden, so daß die von den Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ bestimmte Abbildung φ der Fläche R in das Produkt der beiden Zahlenkugeln bis auf isolierte Punkte eineindeutig ist. Sei zunächst $g(z)$ eine beliebige nichtkonstante meromorphe Funktion auf R. Wir nehmen an, daß die Abbildung φ für zwei Punkte a und b $(a \neq b)$ die verlangte Eigenschaft nicht besitzt. Es gebe also zwei Punktfolgen $a_\nu \to a$ und $b_\nu \to b$, so daß $f(a_\nu) = f(b_\nu)$ und $g(a_\nu) = g(b_\nu)$, wobei entweder unendlich viele Punkte a_ν von a verschieden oder unendlich viele Punkte b_ν von b verschieden sind. Wir betrachten neben der Fläche R wieder die Fläche R' und übertragen die Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ mittels der Abbildung α auf die Fläche R'. Dann lauten die beiden obigen Gleichungen, wenn man noch $b'_\nu = \alpha\, b_\nu$ setzt,

$$f(a_\nu) = f'(b'_\nu) \quad \text{und} \quad g(a_\nu) = g'(b'_\nu).$$

Wegen der ersten Gleichung gibt es für jedes ν einen Punkt $\tilde{z}_\nu$ auf $(\widetilde{R})$, der gleichzeitig über a_ν und über b'_ν liegt. Wegen der Konvergenz $a_\nu \to a$ und $b'_\nu \to b'$ $(b' = \alpha\, b)$ besitzt die Folge $\tilde{z}$, nach 11. eine konvergente Teilfolge, die wir wieder mit $\tilde{z}_\nu$ bezeichnen. Es sei $\tilde{a}$ ihr Grenzpunkt und $\widetilde{R}_1$ die Komponente von $(\widetilde{R})$, welche den Punkt $\tilde{a}$ enthält. Die Spurpunkte von $\tilde{a}$ sind $\sigma\tilde{a} = a$ und $\sigma'\tilde{a} = b'$. Die Komponente $\widetilde{R}_1$ ist daher sicher von der Fläche $\widetilde{R}_0$ (vgl. 9. letzter Absatz) verschieden, denn sonst wäre $b' = \alpha\, a$ und damit $b = a$. Wir bemerken noch, daß die Folge $\tilde{z}_\nu$ unendlich viele von ihrem Grenzpunkt verschiedene Punkte besitzt, da mindestens eine der Folgen a_ν und b'_ν diese Eigenschaft hat.

Der Funktion g entspricht auf der Fläche $\widetilde{R}_1$ eine Funktion $\tilde{g}$ gemäß

$$\tilde{g}(\tilde{z}) = g(\sigma\tilde{z});$$

ebenso kann man die Funktion g' von R' nach $\widetilde{R}_1$ übertragen und erhält so eine Funktion

$$\tilde{g}'(\tilde{z}) = g'(\sigma'\tilde{z}).$$

Auf der Folge $\tilde{z}_\nu$ gilt

$$\tilde{g}(\tilde{z}_\nu) = g(a_\nu)$$

und

$$\tilde{g}'(\tilde{z}_\nu) = g'(b'_\nu)$$

und daher, da nach Voraussetzung $g(a_\nu) = g'(b'_\nu)$,

$$\tilde{g}(\tilde{z}_\nu) = \tilde{g}'(\tilde{z}_\nu).$$

Dies ist wegen der Analytizität der Funktionen $\tilde{g}$ und $\tilde{g}'$ für die konvergente Folge $\tilde{z}_\nu$ (die unendlich viele von $\tilde{a}$ verschiedene Punkte enthält) nur so möglich, daß $\tilde{g} = \tilde{g}'$ auf der ganzen Fläche $\widetilde{R}_1$.

Daraus folgt weiter, daß die Funktion g und g' in je zwei einander (mittels der Beziehung $z \longleftrightarrow z'$) zugeordneten Punkten z und z' der Spurflächen R_1 und R'_1 von $\widetilde{R}_1$ denselben Wert haben. Denn die Punkte z bzw. z' sind die Spurpunkte eines Punktes $\tilde{z}$ von $\widetilde{R}_1$, $z = \sigma\tilde{z}$, $z' = \sigma'\tilde{z}$ und damit wird $g(z) = \tilde{g}(\tilde{z})$ und $g'(z') = \tilde{g}'(\tilde{z})$, also $g(z) = g'(z')$.

Gelingt es also, die Funktion $g(z)$ zur gegebenen Funktion $f(z)$ so zu wählen, daß diese Situation auf keiner der Spurflächen R_1 besteht (abgesehen von der Spurfläche $R_0 = \sigma\widetilde{R}_0 = R$), so muß die von den Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ vermittelte Abbildung bis auf isolierte Punkte eineindeutig sein.

15. Konstruktion der Funktion $g(z)$. Der Raum $(\widetilde{R})$ besteht nach 13. aus abzählbar vielen Flächen $\widetilde{R}_\nu$. Es bezeichne R_ν bzw. R'_ν die Spurfläche von $\widetilde{R}_\nu$ auf R bzw. R' $(\nu = 1, 2, \ldots)$. Gesucht ist eine meromorphe Funktion $g(z)$, so daß es für jedes ν ein Punktepaar z_ν, z'_ν $(z_\nu \in R_\nu,\ z'_\nu \in R'_\nu,\ z_\nu \longleftrightarrow z'_\nu,\ z'_\nu \neq \alpha z_\nu)$ gibt, für das $g(z_\nu) \neq g'(z'_\nu)$. Wir zeigen zunächst, daß man zwei derartige Punktfolgen z_ν und z'_ν angeben kann, so daß die Folgen z_ν und z'_ν divergent sind, d.h. keinen Häufungspunkt besitzen[5]).

Wir zeigen zunächst, daß es genügt, die ersten drei Bedingungen zu berücksichtigen. Ist z_ν, z'_ν eine Folge von Punktepaaren, welche diesen Bedingungen genügt, so kann man auch eine Folge angeben, die allen vier Bedingungen genügt. Dazu betrachten wir für ein bestimmtes ν die uniformisierende Fläche $\widetilde{R}_\nu$; $\tilde{z}_\nu$ sei ein Punkt von $\widetilde{R}_\nu$, der gleichzeitig über z_ν und z'_ν liegt, also eine lokale Abbildung λ_{z_ν}, welche den Punkt z_ν in den Punkt z'_ν überführt. Da die Fläche $\widetilde{R}_\nu$ von der Fläche $\widetilde{R}_0$ verschieden ist, ist diese lokale Abbildung von der Abbildung α verschieden und daher kann man, falls zufällig $z'_\nu = \alpha z_\nu$

[5]) Bei der folgenden Konstruktion wird die Fläche R als nichtkompakt vorausgesetzt. Der kompakte Fall wird in 20. betrachtet.

sein sollte, die Punkte z_ν und z'_ν durch zwei andere einander zugeordnete Punkte (die beliebig nahe an z_ν bzw. z'_ν liegen) ersetzen. Dabei bleiben die drei ersten Eigenschaften erhalten.

Um nun eine Folge z_ν, z'_ν zu konstruieren, welche den ersten drei Bedingungen genügt, betrachten wir zunächst die Flächenpaare R_ν, R'_ν mit folgender Eigenschaft:

Ist A_ν bzw. A'_ν ein beliebiger kompakter Teil von R_ν bzw. R'_ν, so gibt es ein Paar zugeordneter Punkte z, z', so daß z im Komplement von A_ν und z' im Komplement von A'_ν liegt. Dann kann man eine Folge einander zugeordneter Punkte z_ν, z'_ν $(z_\nu \in R_\nu,\ z'_\nu \in R'_\nu)$ angeben, so daß die Folgen z_ν und z'_ν beide divergent sind.

Zweitens betrachten wir diejenigen Flächen R_ν, die bezüglich R kompakt sind. Dann umfaßt jede der Bildflächen nach 12. die ganze Fläche R'. Wir wählen dann einen festen Punkt a' auf R'; dieser hat auf jeder Fläche R_ν einen zugeordneten Punkt a_ν. Es ist $f(a_\nu) = f'(a')$ und daher kann die Folge a_ν auf der Fläche R keinen Häufungspunkt besitzen; denn sonst wäre die Funktion $f(z)$ (die in allen Punkten a_ν denselben Wert hat) konstant. Damit ist auch auf diesen Flächen eine Punktfolge mit der verlangten Eigenschaft angegeben und ebenso verfährt man mit denjenigen Flächen R_ν, deren Bildflächen R'_ν in R' kompakt sind. Schließlich sei R_1, R'_1 ein Flächenpaar, das nicht zu den bisher betrachteten Klassen gehört. Dieses ist dann durch folgende Eigenschaft charakterisiert: Es gibt einen kompakten Teil A bzw. A' von R_1 bzw. R'_1, so daß das Bild (mittels der Beziehung $R_1 \longleftrightarrow R'_1$) des Komplementes B von A in A' enthalten ist. Nun sei

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_n \to R$$

eine feste Ausschöpfung der Fläche R durch kompakte Teilflächen, die unabhängig von den Flächen R_ν konstruiert wird. Der nichtkompakte, zu A_μ komplementäre Teil von R sei B_μ, so daß also $R = A_\mu + B_\mu$. Es sei T_μ der Durchschnitt $R_1 B_\mu$ und T'_μ sein Bild auf R'. Da R_1 bezüglich R nicht kompakt ist, ist kein T_μ leer. T'_μ ist dann von einem bestimmten $\mu = \mu_1$ an in dem kompakten Teil A' der Fläche R' enthalten. Daraus folgt nach 12., daß der Durchschnitt T_{μ_1} eine ganze Komponente der Fläche B_{μ_1} umfassen muß, etwa $B_{\mu_1 \lambda_1}$[6]). Die Fläche R_1 muß daher die Komponente $B_{\mu_1 \lambda_1}$ umfassen.

Auf diese Art erhält man zu jedem Flächenpaar R_ν, R'_ν der betrachteten Klasse eine Zahl μ_ν, so daß die Fläche R_ν eine ganze Komponente der Fläche B_{μ_ν} überdeckt. Dabei ist es keine Einschränkung, die Folge μ_ν monoton wachsend anzunehmen.

16. Die Funktion $f(z)$, die bisher beliebig (meromorph) war, soll nun näher festgelegt werden, und zwar mit Hilfe der gegebenen Ausschöpfung A_μ. Wir wählen für jedes μ auf jeder Komponente $B_{\mu\lambda}$ von B_μ einen Punkt $b_{\mu\lambda}$. Diese Punkte kann man so wählen, daß die Menge $b_{\mu\lambda}$ auf der Fläche R divergent

[6]) Die dort betrachtete Punktmenge U ist in diesem Fall B_{μ_1}.

ist. Es gibt dann nach 18. eine meromorphe Funktion $f(z)$, welche in allen Punkten $b_{\mu\lambda}$ denselben Wert, etwa eins, annimmt[7]).

17. Mit Hilfe der Punkte $b_{\mu\lambda}$ konstruieren wir jetzt eine divergente Folge von Punktepaaren z_ν, z'_ν: Die Fläche R_ν umfaßt eine Komponente $B_{\mu_\nu\lambda_\nu}$ von B_{μ_ν} und enthält somit den Punkt $b_{\mu_\nu\lambda_\nu}$; wir setzen $z_\nu = b_{\mu_\nu\lambda_\nu}$. Die Folge z_ν ist dann auf R divergent; aber auch die Folge der zugeordneten Punkte kann auf R' keinen Häufungspunkt besitzen, denn es ist $f'(z'_\nu) = f(z_\nu) = 1$ für alle ν. Damit ist eine Folge z_ν, z'_ν der verlangten Art konstruiert.

Aus den vier Folgen z_ν, z'_ν, die wir entsprechend der obigen Fallunterscheidung erhalten haben, kann man nun eine einzige Folge z_ν, z'_ν ($z_\nu \in R_\nu$, $z'_\nu \in R'_\nu$, $z_\nu \leftrightarrow z'_\nu$) konstruieren, so daß die Folgen z_ν und z'_ν divergent sind. Gesucht ist eine meromorphe Funktion $g(z)$ auf R, so daß $g(z_\nu) \neq g'(z'_\nu)$, oder, wenn man $z'_\nu = \alpha z''_\nu$ setzt, $g(z_\nu) \neq g(z''_\nu)$; da $z'_\nu \neq \alpha z_\nu$, gilt $z''_\nu \neq z_\nu$.

18. Die Konstruktion einer solchen Funktion $g(z)$ gelingt jetzt auf Grund des folgenden Satzes:

Es sei z_ν ($z_\nu \neq z_\mu$ für $\nu \neq \mu$) eine divergente Punktfolge auf einer RIEMANNschen Fläche R und $\varkappa_\nu$ eine beschränkte Folge von komplexen Zahlen. Dann gibt es eine meromorphe Funktion $g(z)$ auf R, so daß $g(z_\nu) = \varkappa_\nu$.

Zum Beweis unterscheiden wir zwei Fälle, je nachdem die Fläche R hyperbolisch oder parabolisch ist. Im ersten Fall bilden wir die Folge $G(z, z_\nu)$ der GREENschen Funktionen. Diese Folge ist für jeden Punkt z, der von den Polen z_ν verschieden ist, beschränkt, denn es ist

$$G(z, z_\nu) = G(z_\nu, z)$$

und die Punkte z_ν liegen, da sie auf R keinen Häufungspunkt besitzen, alle außerhalb einer Umgebung des Punktes z. Ist nun α_ν eine absolut konvergente Reihe komplexer Zahlen, so ist die Summe

$$u(z) = \Sigma \alpha_\nu G(z, z_\nu)$$

in jedem Punkt z ($z \neq z_\nu$) konvergent und stellt somit eine harmonische Funktion dar, die für $z \neq z_\nu$ regulär ist und im Punkte z_ν die Entwicklung

$$u(z) = \alpha_\nu \log \left| \frac{1}{z - z_\nu} \right| + \text{reguläre Funktion}$$

besitzt. Die Kovariante

$$\varphi = u_x - i\, u_y$$

ist daher für $z \neq z_\nu$ ebenfalls regulär und hat für $z = z_\nu$ die Entwicklung

$$\varphi = -\frac{\alpha_\nu}{z - z_\nu} + \text{reguläre Funktion.}$$

Nun bilden wir mit Hilfe der gegebenen Zahlen $\varkappa_\nu$ die Reihe $\beta_\nu = \alpha_\nu \varkappa_\nu$. Diese ist mit der Reihe α_ν ebenfalls absolut konvergent und man kann daher

[7]) Man beachte, daß bei der Konstruktion der Funktion $f(z)$ kein Gebrauch von den Flächen R_ν gemacht wird, welche erst durch die Funktion $f(z)$ bestimmt sind.

wie oben eine Kovariante ψ konstruieren, die für $z = z_\nu$ die Entwicklung

$$\psi = -\frac{\beta_\nu}{z - z_\nu} + \text{reguläre Funktion}$$

hat. Der Quotient

$$g(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$$

ist dann eine meromorphe Funktion auf der Fläche R und es gilt

$$g(z_\nu) = \varkappa_\nu,$$

d.h. die Funktion $g(z)$ nimmt für $z = z_\nu$ den Wert $\varkappa_\nu$ an.

19. Ist die Fläche R parabolisch, so wählen wir zu jedem Punkt z_ν einen benachbarten Punkt z'_ν. Dann kann man zu jedem Punktepaar z_ν, z'_ν ein Normalpotential dritter Gattung konstruieren, d.h. eine Potentialfunktion $u(z; z_\nu, z'_\nu)$, die in einer Parameterumgebung des Punktes z_ν von der Form

$$u(z; z_\nu, z'_\nu) = \log\left|\frac{z - z_\nu}{z - z'_\nu}\right| + \text{reguläre Funktion}$$

ist und außerhalb dieser Umgebung beschränkt bleibt[8]). Dieses Potential ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt. Wir wählen jetzt einen festen Punkt z_0 $(z_0 \neq z_\nu)$ auf R und bilden die Funktionen

$$v(z, z_0; z_\nu, z'_\nu) = u(z; z_\nu, z'_\nu) - u(z_0 \cdot z_\nu, z'_\nu).$$

Da die Fläche R parabolisch und damit nullberandet ist, gilt der Satz über die Vertauschung von Argument und Parameter[9]),

$$v(z, z_0; z_\nu, z'_\nu) = v(z_\nu, z'_\nu; z, z_0).$$

Da die Folge z_ν und damit auch die Folge z'_ν auf R divergent ist, bleibt die Folge $v(z_\nu, z'_\nu; z, z_0)$ für $\nu \to \infty$ beschränkt und dasselbe gilt daher auch für die Funktionen $v(z, z_0; z_\nu, z'_\nu)$. Nun kann man genau wie im hyperbolischen Fall eine meromorphe Funktion $g(z)$ konstruieren, so daß $g(z_\nu) = \varkappa_\nu$.

20. Der Fall einer unbegrenzten Überlagerung. Kann man auf der gegebenen Fläche R eine meromorphe Funktion $f(z)$ so wählen, daß die durch sie bewirkte Spurabbildung die Unbegrenztheitsbedingung erfüllt[10]), so gelingt die Konstruktion einer bis auf isolierte Punkte eineindeutigen Abbildung in das Produkt der beiden Zahlenkugeln wesentlich einfacher. In diesem Fall überdeckt nämlich die Spurfläche R_ν jeder Komponente $\tilde{R}_\nu$ des Systems $(\tilde{R})$ ganz R. Diese Eigenschaft ist mit der folgenden gleichbedeutend:

Ein beliebiges Funktionselement λ_a der Beziehung $z \longleftrightarrow z'$ ist auf der ganzen Fläche R fortsetzbar.

---

[8]) Vgl. N. Kap. VI, § 4.

[9]) Vgl. N. Kap. V, § 3. Der dort gegebene Beweis für kompakte Flächen läßt sich auf nullberandete Flächen übertragen.

[10]) Vgl. N. Kap. II, § 4 (2.45).

Zum Beweis dieser letzten Eigenschaft sei z_t $(0 \leq t \leq 1)$ ein beliebiger von a ausgehender Weg auf R. (τ) sei die Menge der t-Werte, so daß das Element λ_a längs des Teilweges z_t $(0 \leq t \leq \tau)$ fortsetzbar ist. Diese ist jedenfalls offen und wir können daher annehmen, daß sie das halboffene Intervall $0 \leq t < 1$ enthält. Es ist zu zeigen, daß dann auch der Punkt z_1 zur Menge (τ) gehört. Es sei x_t das Bild des Weges z_t $(0 \leq t \leq 1)$ auf der x-Kugel. Wegen der Unbegrenztheit der von der Funktion $f(z)$ bestimmten Überlagerung läßt sich dieser Weg vom Punkte $a' = \lambda_a(a)$ aus in die Fläche R' durchdrücken und man erhält so einen Weg z'_t $(0 \leq t \leq 1)$. Bezeichnet andererseits λ_t die durch das Anfangselement λ_a bestimmte Belegung des Weges z_t $(0 \leq t < 1)$, so ist $\lambda_t(z_t)$ ein Weg auf R', der ebenfalls vom Punkte a' ausgeht und über dem Weg x_t liegt. Daher gilt

$$\lambda_t(z_t) = z'_t \qquad (0 \leq t < 1).$$

Ferner gibt es, da die Zuordnung $z \longleftrightarrow z'$ die Eigenschaft D von 4. besitzt, eine wohlbestimmte lokale Abbildung λ_1 zum Punkte z_1, so daß die Punkte z_t und z'_t einander mittels der Abbildung λ_1 zugeordnet sind, falls t hinreichend nahe an 1 liegt, etwa für $t > 1 - \delta$. Dann bilden die Elemente λ_t $(0 \leq t \leq 1)$ eine Belegung des ganzen Weges z_t $(0 \leq t \leq 1)$; ist nämlich t_1 ein fester t-Wert, so daß $t_1 > 1 - \delta$, so gilt für alle hinreichend nahe an t_1 liegenden t-Werte

$$\lambda_t(z_t) = \lambda_{t_1}(z_t)$$

und wenn außerdem noch $t > 1 - \delta$,

$$\lambda_t(z_t) = \lambda_1(z_t).$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt

$$\lambda_{t_1}(z_t) = \lambda_1(z_t)$$

für alle hinreichend nahe an t_1 liegenden t. Dies ist nur so möglich, daß die Abbildung λ_{t_1} eine unmittelbare Fortsetzung von λ_1 ist.

Nachdem man festgestellt hat, daß die Spurflächen R_ν alle ganz R überdecken, kann man die Funktion $g(z)$ folgendermaßen konstruieren: Man wähle auf R zwei Punkte a und b, so daß $f(a) = f(b)$ und eine meromorphe Funktion $g(z)$, so daß $g(a) \neq g(b)$. Dann ist die von den Funktionen $f(z)$ und $g(z)$ bestimmte Abbildung der Fläche R bis auf isolierte Punkte eineindeutig. Denn sonst gäbe es nach 14. eine Spurfläche R_1, auf der die Gleichheit $f(z_1) = f(z_2)$ für zwei Punkte z_1 und z_2 stets die Gleichheit $g(z_1) = g(z_2)$ zur Folge hat. Die Spurfläche R_1 umfaßt aber jetzt ganz R und enthält somit die Punkte a und b, womit ein Widerspruch zur Konstruktion der Funktion $g(z)$ hergestellt ist.

Ist die RIEMANNsche Fläche R kompakt, so kann man die Funktion $f(z)$ immer so wählen, daß die durch sie bestimmte Überlagerung unbegrenzt ist. Man braucht für $f(z)$ nur eine rationale Funktion zu nehmen.

Zürich (Schweiz), Mathematisches Institut der Universität.

(Eingegangen am 16. November 1953.)