Werk

Titel: Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen. I.

Autor: Schöneborn, Heinz

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0059|log42

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

SCHÖNEBORN, H.
Math. Zeitschr. Bd. 59, S. 455—473 (1954)

Über gewisse Topologien in Abelschen Gruppen. I.

Von
HEINZ SCHÖNEBORN.

Einleitung.

Bei einer beliebigen topologischen Gruppe sind gruppentheoretische und topologische Struktur lediglich verknüpft durch die Forderung der Stetigkeit der Verknüpfungsoperation. Dementsprechend liegt in der allgemeinen Theorie der topologischen Gruppen das Hauptgewicht der Untersuchungen auf rein topologischem Gebiet, während die spezielleren gruppentheoretischen Eigenschaften der betrachteten Gruppen im allgemeinen nur eine beiläufige Rolle spielen und vielfach kaum zum Ausdruck kommen.

Im Gegensatz dazu soll in der vorliegenden Arbeit eine Klasse von topologischen Abelschen Gruppen untersucht werden, deren Topologie nicht, wie im allgemeinen Falle, auf Grund von topologischen Stetigkeits-, Kompaktheits-, Zusammenhangsforderungen u. dgl., sondern ausschließlich aus der gruppentheoretischen Struktur der betrachteten Gruppe heraus, d.h. also mit Hilfe rein gruppentheoretischer Begriffe definiert wird[1]).

Unter den genannten Gesichtspunkten erscheint es zunächst natürlich, die Topologie der betrachteten Gruppe A mit Hilfe eines aus Unter*gruppen* und ihren Nebenscharen bestehenden Umgebungssystems einzuführen. Nr. 1 und 2 der vorliegenden Arbeit bringen einleitend die wichtigsten auf diesen Fall zugeschnittenen Definitionen und einfachsten Tatsachen. Man bemerkt, daß die gruppentheoretische Bedeutung der „Untergruppentopologien" in der Auszeichnung gewisser Untergruppen, nämlich der topologisch abgeschlossenen, als „zulässiger" Untergruppen liegt. In der Gruppentheorie wird gleiches durch Einführung eines Operatorenbereiches erreicht, und der Versuch liegt nahe, beide Möglichkeiten der Auszeichnung zulässiger Untergruppen in Verbindung zu bringen. Dieses Problem wird in Nr. 3 durch Einführung des Begriffes des „natürlichen Operatorenbereiches" in gewissem Umfange gelöst. Es wird gezeigt, daß die Existenz eines natürlichen Operatorenbereiches der Gruppe A im wesentlichen gleichbedeutend ist mit gewissen einfachen Eigenschaften von A (Zyklohomogenität, Torsionstopologie), die bereits einen engen Zusammenhang zwischen gruppentheoretischer und topologischer Struktur zum Ausdruck bringen. Insbesondere ist es jetzt möglich, ganz allgemein den Begriff der primären Gruppe einzuführen (Nr. 4) und einen Zerlegungssatz

[1]) Vgl. insbesondere KRULL, W.: a) Über separable, insbesondere kompakte separable Gruppen. J. f. Math. **184** (1942). b) Bewertungstopologie. Bonn 1952 (als Manuskript verbreitet). Sowie HALL jr., M.: A topology for free groups and related groups. Ann. of Math. (II) **52**, 127—139 (1950), insbesondere Abschn. 3.

zu beweisen, der unter gewissen Voraussetzungen die Beschränkung der weiteren Betrachtungen auf den primären Fall gestattet (Satz 5). Die entscheidende Rolle der zyklischen Gruppen bei der Einführung des natürlichen Operatorenbereiches und den daran anschließenden Betrachtungen legt es nahe, die untersuchten Topologien mit Hilfe der zyklischen Gruppen zu klassifizieren, d.h. zwei Topologien τ_1, τ_2 derselben Gruppe A als äquivalent zu bezeichnen, wenn die durch τ_1, τ_2 induzierten Topologien in allen zyklischen Gruppen aus A identisch sind (Nr. 5).

Ist T eine nach dieser Äquivalenzrelation gebildete Topologienklasse der Gruppe A, so enthält T eine eindeutig bestimmte feinste Topologie, die wir als eine „S-Topologie" von A bezeichnen. Ist A primär, zyklovollständig[2]) und besitzt die S-Topologie, so fallen die Begriffe „gegenüber dem natürlichen Operatorenbereich von A zulässige Untergruppe" und „bezüglich der S-Topologie abgeschlossene Untergruppe" zusammen (Satz 10). Im Anschluß daran werden die gröbsten Topologien von A analysiert und es wird gezeigt, daß die Eigenschaft von A, eine gröbste Topologie zu haben, unter naheliegenden Voraussetzungen gleichwertig ist zur Eigenschaft der linearen Kompaktheit (Satz 13 und 15).

In dem demnächst in dieser Zeitschrift erscheinenden zweiten Teil der Arbeit werden die vorstehend skizzierten Resultate zur Herleitung der Theorie der Charakterengruppen der betrachteten Gruppenklassen benutzt. Zunächst ergibt sich, daß die linear kompakten Gruppen die Charakterengruppen der „im strengen Sinne S-topologischen" Gruppen[3]) sind und umgekehrt und daß für beide Gruppenklassen der Dualitätssatz gilt[4]). Für zyklovollständige primäre Gruppen A zeigen wir darüber hinaus:

I. Für die Gültigkeit des Dualitätssatzes für die Gruppe A ist notwendig, daß für A sowie die Charakterengruppe $C[A]$ von A die folgende Bedingung (K_1) erfüllt ist:

(K_1): Jede in der betrachteten Gruppe abgeschlossene Untergruppe mit kompaktem Erzeugendensystem ist kompakt.

II. Für die Gültigkeit des Dualitätssatzes ist hinreichend, daß A der obigen Bedingung (K_1) und außerdem der folgenden (K_2) genügt:

(K_2): Ist M eine Untermenge von A, $q \in A$ ein Häufungspunkt von M, dann gibt es eine Untermenge $M_1 \subseteq M$, deren (in A) abgeschlossene Hülle $\tilde{M}_1$ kompakt ist mit $q \in \tilde{M}_1$.

---

[2]) Eine topologische Gruppe A heißt „zyklovollständig", wenn die in A abgeschlossene Hülle jeder gewöhnlichen zyklischen Untergruppe von A topologisch vollständig ist.

[3]) Eine S-topologische Gruppe heißt „im strengen Sinne S-topologisch", wenn jede abgeschlossene Untergruppe mit kompaktem Erzeugendensystem Summe endlich vieler primärer Gruppen ist.

[4]) Während der Fertigstellung der vorliegenden Arbeit erhielt ich Einblick in ein derzeit noch unveröffentlichtes Manuskript einer Arbeit von Herrn I. KAPLANSKY, in welcher in anderem Zusammenhang und auf anderem Wege die Gültigkeit des Dualitätssatzes für die primären, linear kompakten Gruppen nachgewiesen wird.

Als einfacher Korollar ergibt sich aus dem vorangehenden noch die Gültigkeit des Dualitätssatzes für jede primäre, vollständige Gruppe, welche dem ersten Abzählbarkeitsaxiom genügt[5]).

1. Wir betrachten additiv geschriebene Abelsche Gruppen mit dem neutralen Element 0, im folgenden kurz als „Gruppen" bezeichnet. Sei $\mathfrak{E}$ ein System von Untergruppen $A_{\alpha'}$ der Gruppe A, welches den folgenden Bedingungen genügt:

a) Der Durchschnitt je endlich vieler Untergruppen aus $\mathfrak{E}$ enthält eine Untergruppe aus $\mathfrak{E}$.

b) Der Durchschnitt aller Untergruppen aus $\mathfrak{E}$ ist die Nullgruppe.

Fassen wir die $A_{\alpha'}$ und ihre Nebenscharen als vollständiges Umgebungssystem eines aus den Elementen von A bestehenden topologischen Raumes auf, so wird A eine topologische Gruppe. Mit Rücksicht darauf, daß das die Topologie von A definierende System von Nullumgebungen aus Untergruppen von A besteht, sprechen wir hier von einer *Untergruppentopologie*. Alle im folgenden betrachteten Gruppen sind solche mit einer Untergruppentopologie. Die zu $\mathfrak{E}$ gehörenden Untergruppen $A_{\alpha'}$ von A bilden offenbar das Erzeugendensystem eines aus allen endlichen Durchschnitten der Untergruppen $A_{\alpha'}$ und ihren Obermengen bestehenden Filters $\mathfrak{S}_0$[6]), des „Nullfilters" von A. Alle Untergruppen von A aus $\mathfrak{S}_0$ sind (mit ihren Nebenscharen) gleichzeitig offen und abgeschlossen. Umgekehrt gehört jede offene Untergruppe von A zu $\mathfrak{S}_0$. — Sind in der abstrakten Gruppe A zwei Untergruppentopologien τ_1 und τ_2 mit den Nullfiltern $\mathfrak{S}_0^{(1)}$ bzw. $\mathfrak{S}_0^{(2)}$ definiert, so ist für die Gleichheit von τ_1 und τ_2 bereits notwendig und hinreichend, daß das System $\mathfrak{S}^{(1)}$ aller *Untergruppen* aus $\mathfrak{S}_0^{(1)}$ gleich dem System $\mathfrak{S}^{(2)}$ aller Untergruppen aus $\mathfrak{S}_0^{(2)}$ ist. Das System $\mathfrak{S}$ aller zum Nullfilter $\mathfrak{S}_0$ von A gehörenden Untergruppen ist eine eindeutig bestimmte Filterbasis von $\mathfrak{S}_0$ und hat als solche die oben für $\mathfrak{E}$ notierten Eigenschaften a) und b). Darüber hinaus enthält $\mathfrak{S}$ mit jeder Untergruppe A_α auch alle Obergruppen von A_α. Wir wollen (in leichter Abänderung der sonst üblichen Bezeichnungsweise) $\mathfrak{S}$ den „charakteristischen *Filter*" von A, die zu $\mathfrak{S}$ gehörenden Untergruppen „charakteristische Untergruppen" von A nennen und allgemein unter einem *Filter* auf A ein System $\mathfrak{U}$ von Nebenscharen von abgeschlossenen Untergruppen von A mit den folgenden Eigenschaften verstehen:

I. Der Durchschnitt je endlich vieler Nebenscharen aus $\mathfrak{U}$ ist eine Nebenschar aus $\mathfrak{U}$.

II. Mit jeder Nebenschar U aus $\mathfrak{U}$ gehören auch alle U enthaltenden abgeschlossenen Nebenscharen zu $\mathfrak{U}$.

Ein Teilsystem $\mathfrak{B}_\mathfrak{U}$ bzw. $\mathfrak{E}_\mathfrak{U}$ von zu $\mathfrak{U}$ gehörenden Nebenscharen heißt eine Basis bzw. ein Erzeugendensystem von $\mathfrak{U}$, wenn $\mathfrak{U}$ aus den zu $\mathfrak{B}_\mathfrak{U}$ bzw.

[5]) Man beachte, daß die von uns betrachteten Gruppen im allgemeinen weder kompakt noch lokalkompakt noch linearkompakt noch diskret zu sein brauchen.

[6]) Wegen der im folgenden auftretenden allgemeinen topologischen Begriffsbildungen — insbesondere den Filterbegriff — vgl. BOURBAKI: Topologie Générale, Kap. I—III. Paris 1951.

$\mathfrak{E}_{\mathfrak{U}}$ gehörenden Nebenscharen durch Hinzunahme aller abgeschlossener Oberscharen bzw. durch Hinzunahme aller endlicher Durchschnitte und aller abgeschlossener Oberscharen derselben entsteht.

Der Filter $\mathfrak{U}$ möge ein CAUCHY-*Filter* heißen, wenn gilt:

III. $\mathfrak{U}$ enthält zu jeder charakteristischen Untergruppe eine Nebenschar.

Der Durchschnitt aller Scharen eines CAUCHY-Filters enthält höchstens ein Element von A. Besitzt jeder CAUCHY-Filter einen nicht leeren Durchschnitt, so ist A *„vollständig"*. Besitzt sogar jeder Filter einen nicht leeren Durchschnitt, so ist A *„linear kompakt"* [7]).

Nach bekannten Sätzen läßt sich die Gruppe A in im wesentlichen eindeutiger Weise in eine vollständige Gruppe $\hat{A}$ einbetten und mit A hat auch $\hat{A}$ eine Untergruppentopologie [8]). Wir bezeichnen $\hat{A}$ als die „vollständige Hülle" von A. Sind A_α die charakteristischen Untergruppen von A, so sind die vollständigen Hüllen $\hat{A}_\alpha$ von A_α genau die charakteristischen Untergruppen von $\hat{A}$ [8]).

Eine vollständige Gruppe A mit einer Untergruppentopologie ist genau dann kompakt [9]), wenn jede charakteristische Untergruppe von endlichem Index in A ist. Sie ist genau dann lokal kompakt, wenn sie eine kompakte charakteristische Untergruppe besitzt. — Abgeschlossene Untergruppen und Restklassengruppen nach solchen von kompakten bzw. linear kompakten Gruppen sind wieder kompakt bzw. linear kompakt. Jede kompakte Gruppe ist linear kompakt, während das Umgekehrte nicht zu gelten braucht.

Sind τ_1, τ_2 zwei Untergruppentopologien auf der Gruppe A, $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ ihre charakteristischen Filter, so heißt τ_1 „gröber" als τ_2, τ_2 „feiner" als τ_1, in Zeichen $\tau_1 \leq \tau_2$, wenn $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2$. Sind die Untergruppentopologien τ_1, τ_2 mit den charakteristischen Filtern $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ nicht vergleichbar vermöge der Relation $\leq$, so gilt jedenfalls für die durch den Vereinigungsfilter $\mathfrak{S}$ [10]) von $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ definierte Topologie τ von A: $\tau_1 \leq \tau$, $\tau_2 \leq \tau$. Die Untergruppentopologien τ der Gruppe A bilden also hinsichtlich der Relation $\leq$ eine „gerichtete Menge", die als eindeutig bestimmtes Maximum die diskrete Topologie besitzt, deren charakteristischer Filter die Nullgruppe enthält. —

Unter einem *„topologischen Homomorphismus"* der Gruppe A auf die Gruppe A' verstehen wir einen stetigen Homomorphismus von A auf A', der offene Mengen in offene Mengen überführt. Die kanonische Abbildung von A auf ihre Restklassengruppe A/B nach einer abgeschlossenen Untergruppe B ist stets ein topologischer Homomorphismus, wenn in A/B die übliche durch die Topologie von A induzierte Topologie zugrunde gelegt wird [11]).

[7]) Vgl. LEFSCHETZ: Algebraic topology, S. 78f. New York 1942.

[8]) BOURBAKI, [6]), Kap. III, § 3, Theorème 2 und Proposition 7.

[9]) Ein topologischer Raum R heißt kompakt, wenn jede offene Überdeckung von R eine endliche Teilüberdeckung enthält — vgl. BOURBAKI [6]) Kap. I, § 10 und HALL [1]) Theorem 3.5.

[10]) Unter dem „Vereinigungsfilter" $\mathfrak{S}$ der Filter $\mathfrak{S}_\alpha$ ist natürlich der von den Mengen aus allen $\mathfrak{S}_\alpha$ zusammen erzeugte Filter zu verstehen.

[11]) Vgl. BOURBAKI [6]) Kap. I, § 9, Nr. 1 und Kap. III, § 2, Nr. 4.

Geht insonderheit nur die Nullgruppe von A in die Nullgruppe der Bildgruppe A' über, so haben wir einen „topologischen Isomorphismus". Die Abbildung ist dann in beiden Richtungen stetig, d.h. homöomorph. Die Eigenschaft der Vollständigkeit ist invariant gegenüber topologischen Isomorphismen[12]), die der Kompaktheit und linearen Kompaktheit bleibt auch bei topologischen Homomorphismen erhalten. —

Unter der „*direkten Summe*" einer Menge von Gruppen $A^{(\alpha)}$ (in Zeichen $\sum \oplus A^{(\alpha)}$) verstehen wir hier die aus allen eindeutigen *endlichen* Summen $\sum a^{(\alpha)}$ $(a^{(\alpha)} \in A^{(\alpha)})$ bestehende Gruppe mit der folgenden Topologie: Ist zu jedem α irgendeine charakteristische Untergruppe $A_\beta^{(\alpha)}$ von $A^{(\alpha)}$ gegeben, so sei $\sum_\alpha \oplus A_\beta^{(\alpha)}$ eine charakteristische Untergruppe von $\sum \oplus A^{(\alpha)}$ [13]). — Im Gegensatz dazu verstehen wir unter der „(*direkten*) TYCHONOFF-*Summe*" der $A^{(\alpha)}$ (in Zeichen $\sum^T \oplus A^{(\alpha)}$) die aus allen *unendlichen* Summen $\sum a^{(\alpha)}$ $(a^{(\alpha)} \in A^{(\alpha)})$ bestehende „Produktgruppe" mit der üblichen Produkttopologie[14]). — Sind B_1 und B_2 abgeschlossene Untergruppen der Gruppe A, so sei $B_1 + B_2$ ihre topologische Vereinigungsgruppe, d.h. die (in A) abgeschlossene Hülle ihrer gewöhnlichen Vereinigungsgruppe. $B_1 + B_2$ heißt wie üblich die *direkte* Summe von B_1 und B_2, wenn $B_1 \cap B_2 = 0$ — in Zeichen $B_1 \oplus B_2$. Ein System von Elementen $a_\alpha \in A$ heißt ein „*topologisches Erzeugendensystem*" von A, wenn A die (in A) abgeschlossene Hülle der gewöhnlichen von den a_α erzeugten Untergruppe von A ist. —

2. Wir notieren noch einige speziell für Gruppen mit einer Untergruppentopologie gültige Sätze:

a) *Eine Untergruppe B der Gruppe A ist genau dann abgeschlossen in A, wenn B als Durchschnitt geeigneter charakteristischer Untergruppen A_{α_B} darstellbar ist.*

Die Abgeschlossenheit von $\bigcap A_{\alpha_B}$ ist klar. Sei umgekehrt B abgeschlossen in A, $b \in \bigcap_\alpha (A_\alpha + B)$. Aus $b \in A_\alpha + B$ folgt $b = a_\alpha + b_\alpha$ $(a_\alpha \in A_\alpha,\ b_\alpha \in B)$, also $b \equiv b_\alpha \pmod{A_\alpha}$. In jeder Umgebung von b liegt also ein $b_\alpha \in B$, d.h. b ist Häufungspunkt von B, also $b \in B$ und $B = \bigcap_\alpha (A_\alpha + B) = \bigcap A_{\alpha_B}$.

Aus a) folgt sofort:

b) *Ist B eine abgeschlossene Untergruppe von A und $\bar{x}$ eine Nebenschar mod B, so ist der Durchschnitt der $\bar{x}$ enthaltenden Nebenscharen der Gruppen $A_\alpha + B$ gleich $\bar{x}$.*

[12]) Man beachte, daß die Vollständigkeitseigenschaft bei nur homöomorphen Abbildungen im allgemeinen nicht erhalten bleibt. Die Invarianz der Vollständigkeit gegenüber topologischen Isomorphismen von Gruppen ist fast trivial.

[13]) Vgl. KAPLAN, S.: Extension of the Pontrjagin Duality. I. Duke Math. J. **15**, 649—658 (1948).

Die hier der direkten Summe $\sum \oplus A^{(\alpha)}$ zugeschriebene Topologie ist identisch mit der in der zitierten Arbeit eingeführten „asterisk-topology", bzw. „rectangular-topology" (beide fallen bei Untergruppentopologien zusammen).

[14]) Im Falle endlich vieler Summanden $A^{(\alpha)}$ sind $\sum \oplus A^{(\alpha)}$ und $\sum^T \oplus A^{(\alpha)}$ offenbar identisch.

c) A genüge der Voraussetzung: Ist $\bar{x}$ eine abgeschlossene Nebenschar in A, so bildet das System aller $\bar{x}$ enthaltenden Nebenscharen der charakteristischen Untergruppen von A ein vollständiges Umgebungssystem von $\bar{x}$. Dann gilt:

Sind B und F abgeschlossene Untergruppen von A, so ist die gewöhnliche Vereinigungsgruppe G von B und F abgeschlossen in A, also gleich $B+F$.

Denn sei $x \notin G$, $\bar{x}$ die Nebenschar von $x \bmod B$. G ist die Vereinigungsmenge genau der B-Nebenscharen, die ein Element von F enthalten und es gilt $\bar{x} \cap G = \emptyset$, $\bar{x} \cap F = \emptyset$. Ist U das Komplement von F in A, so ist U offen, $\bar{x} \subseteq U$, also U eine Umgebung von $\bar{x}$ und nach Voraussetzung gibt es eine charakteristische Gruppe $A_{\sigma_0} + B$, deren $\bar{x}$ enthaltende Nebenschar U_0 in U liegt. Aus $U \cap F = \emptyset$ folgt $U_0 \cap F = \emptyset$. Da auch U_0 aus gewissen B-Nebenscharen besteht, folgt hieraus sogar $U_0 \cap G = \emptyset$. Ist X das Komplement von G in A, so enthält also X mit jedem $x \in X$ eine ganz zu X gehörige Umgebung von x, d.h. X ist offen, also $G = B + F$ abgeschlossen.

Unter den Voraussetzungen von c) *gilt,* wie mühelos zu sehen:

d) *Ist B eine abgeschlossene Untergruppe von A, so führt die kanonische Abbildung von A auf die Restklassengruppe A/B abgeschlossene Untergruppen in abgeschlossene Untergruppen über.*

3. (a) sei die kleinste das Element $a \in A$ enthaltende abgeschlossene Untergruppe von A[15]).

Definition. Ein kommutativer topologischer (Links-) Multiplikatorenring P mit Einselement von A möge als ein *„natürlicher Operatorenbereich"* von A bezeichnet werden, wenn außer den gewöhnlichen Multiplikatoraxiomen[16]) folgende Bedingungen erfüllt sind:

Ist M eine beliebige Untermenge von P, $\widetilde{M \cdot a}$ die (in A) abgeschlossene Hülle von $M \cdot a$, $\widetilde{M}$ die (in P) abgeschlossene Hülle von M, so gelte

I. $P \cdot a = (a)$ für jedes $a \in A$.

II. $\widetilde{M \cdot a} = \widetilde{M} \cdot a$ für jedes $a \in A$ und jede Untermenge $M \subseteq P$.

Aus der Definition des natürlichen Operatorenbereiches folgt sofort:

Besitzt A den natürlichen Operatorenbereich P, so ist jede abgeschlossene Untergruppe B von A bezüglich P zulässig, d.h. $P \cdot B = B$.

Umgekehrt braucht aus der Zulässigkeit einer Untergruppe von A bezüglich P im allgemeinen natürlich nicht ihre Abgeschlossenheit in A zu folgen. Unter P^+ verstehen wir im folgenden stets die Additionsgruppe des Ringes P mit P als Multiplikatorenbereich.

Satz 1. Sei P ein natürlicher Operatorenbereich von A, $a \in A$. Die Menge P_a aller $\varrho \in P$ mit $\varrho \cdot a = 0$ ist ein (in P) abgeschlossenes Ideal und die Ab-

[15]) Wir werden (a) auch als eine „zyklische Hülle" im Gegensatz zu der aus den ganzrationalen Vielfachen $n \times a$ von a bestehenden gewöhnlichen zyklischen Gruppe $\langle a \rangle$ bezeichnen.

[16]) Für jedes $a, b \in A$; $\alpha, \beta \in P$: $\alpha \cdot a \in A$, $(\alpha+\beta) \cdot a = \alpha \cdot a + \beta \cdot a$, $(\alpha \cdot \beta) \cdot a = \alpha \cdot (\beta \cdot a)$, $\alpha \cdot (a+b) = \alpha \cdot a + \alpha \cdot b$, $1 \cdot a = a$ (1 Einselement von P).

bildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ ist ein abgeschlossener topologischer Homomorphismus[17]) von P^+ auf $P \cdot a = (a)$.

Beweis. (1) Die Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ ist stetig. Denn ist $B \subset P \cdot a$ abgeschlossen in $P \cdot a$, M_B das vollständige Urbild von B bezüglich der Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$, so ist $M_B \cdot a \subseteq B$, wegen der Abgeschlossenheit von B aber auch $\widetilde{M}_B \cdot a = \widetilde{M_B \cdot a} \subseteq B$, also $M_B = \widetilde{M}_B$ abgeschlossen in P. (2) Die Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ ist abgeschlossen, denn aus $M = \widetilde{M}$ abgeschlossen in P folgt $M \cdot a = \widetilde{M} \cdot a = \widetilde{M \cdot a}$ abgeschlossen in $P \cdot a$. (3) Die Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ ist also ein stetiger abgeschlossener Homomorphismus von P^+ auf $P \cdot a$ und die aus allen $\varrho \in P$ mit $\varrho \cdot a = 0$ bestehende Urbildmenge P_a der 0 von $P \cdot a$ ist abgeschlossen. P_a ist offenbar ein Ideal in P und $P \cdot a$ gruppentheoretisch isomorph zur Restklassengruppe P^+/P_a^+, wo P^+ bzw. P_a^+ die Additionsgruppen von P bzw. P sind. (4) Der durch die Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ induzierte Isomorphismus von P^+/P_a^+ auf $P \cdot a$ führt abgeschlossene Mengen aus P^+/P_a^+ in abgeschlossene Mengen aus $P \cdot a$ über, denn bei der kanonischen Abbildung von P^+ auf P^+/P_a^+ entsprechen abgeschlossenen Mengen aus P^+/P_a^+ abgeschlossene Urbilder aus P^+ und diesen, wie unter (2) bewiesen, abgeschlossene Bilder in $P \cdot a$. Wegen der Eineindeutigkeit der Abbildung von P^+/P_a^+ auf $P \cdot a$ gehen dann aber auch die Komplemente der abgeschlossenen Mengen, d.h. die offenen Mengen aus P^+/P_a^+ in Komplemente von abgeschlossenen Mengen, also in offene Mengen aus $P \cdot a$ über. Da die kanonische Abbildung von P^+ auf P^+/P_a^+ bekanntlich offene Mengen in offene Mengen überführt, ist auch die Abbildung $\varrho \to \varrho \cdot a$ von P auf $P \cdot a$ offen. Damit ist alles bewiesen.

Das abgeschlossene Ideal $P_a \subseteq P$ mit $P_a \cdot a = 0$ wird wie üblich als *„Ordnungsideal"* von a bezeichnet. Ist P_* der Durchschnitt aller Ordnungsideale der Elemente von A, dann ist auch $P^* = P/P_*$ ein natürlicher Operatorenbereich von A, in welchem der Durchschnitt aller Ordnungsideale das Nullideal ist. Soweit nichts anderes aus dem Zusammenhang hervorgeht, wollen wir im folgenden immer stillschweigend voraussetzen, daß der Durchschnitt aller Ordnungsideale gleich 0 ist.

Definition. Die Gruppe A heißt „zyklohomogen", wenn sie einen natürlichen Operatorenbereich P besitzt mit der Eigenschaft, daß P^+ eine Untergruppentopologie besitzt und P natürlicher Operatorenbereich von P^+ ist.

Besitzt P die obige Eigenschaft, dann muß die in P^+ abgeschlossene Hülle (1) der aus den ganzrationalen Vielfachen $n \times 1$ der $1 \in P$ bestehenden zyklischen Gruppe identisch mit der additiven Gruppe $P \cdot 1 = P^+$ sein und aus der Zyklohomogenität von A (bezüglich P) folgt, daß alle zyklischen Hüllen aus A aus einer einzigen — nämlich P^+ — durch Restklassengruppenbildung abgeleitet werden können — genau so, wie im diskreten Falle alle zyklischen Gruppen aus der Additionsgruppe der ganzrationalen Zahlen entstehen.

[17]) Eine Abbildung heißt „abgeschlossen" bzw. „offen", wenn sie abgeschlossene bzw. offene Mengen in abgeschlossene bzw. offene Mengen transformiert.

Wir notieren einige Eigenschaften von P, die sich aus der Voraussetzung, daß P natürlicher Operatorenbereich von P^+ ist, ergeben:

a) Die aus den ganzrationalen Vielfachen $n \times 1$ von $1 \in P$ bestehende gewöhnliche zyklische Gruppe $\langle 1 \rangle$ liegt dicht in P^+. Dies wurde schon oben bemerkt.

b) Ist P diskret, so isomorph zum Ring der ganzrationalen Zahlen oder zu einem Restklassenring desselben.

Denn nach a) ist $P \cdot 1 = P^+ = \langle 1 \rangle$.

c) Die charakteristischen Untergruppen P_α^+ von P^+ sind Ideale P_α in P.

Denn die P_α^+ sind abgeschlossen in P^+, also zulässig gegenüber P. —

Natürlich bilden die Ideale P_α ein vollständiges System von Nullumgebungen in P.

d) Ist P nicht diskret, so ist jedes $\varrho \in P$ von endlicher Ordnung modulo jedem Umgebungsideal P_α.

Denn $\langle 1 \rangle$ liegt nach a) dicht in P^+ und wenn P und damit P^+ nicht diskret ist, so ist auch $\langle 1 \rangle$ nicht diskret. Die Umgebungsuntergruppen $\langle 1 \rangle_\alpha = \langle 1 \rangle \cap P_\alpha^+$ von $\langle 1 \rangle$ sind daher $\neq (0)$ und 1 ist von endlicher Ordnung mod P_α^+, d.h. von endlicher Ordnung mod P_α. Liegt aber $n \times 1$ in P_α, so wegen c) auch $\varrho(n \times 1) = n \times \varrho$ $(\varrho \in P)$.

e) Ist P nicht diskret und vollständig, so ist P topologisch isomorph zu einem Ring von PRÜFERschen ganzen n-adischen Zahlen[18]) und kann also hiermit identifiziert werden.

Umgekehrt folgt übrigens aus bekannten Eigenschaften der ganz-n-adischen Zahlenringe sofort, daß diese natürliche Operatorenbereiche ihrer Additionsgruppen sind und hieraus folgt: Hat eine Gruppe A einen ganz-n-adischen Zahlenring als natürlichen Operatorenbereich, so ist A zyklohomogen.

Es ist leicht, auf Grund des oben Bemerkten ein Beispiel für eine nichtzyklohomogene Gruppe zu geben:

Sei A_1 die diskrete Additionsgruppe der ganzrationalen Zahlen, A_2 die gleiche Gruppe mit einer nicht diskreten Topologie und $A = A_1 \oplus A_2$ die topologische direkte Summe von A_1 und A_2. — Wäre A zyklohomogen mit dem natürlichen Operatorenbereich P, P_1 bzw. P_2 die Ordnungsideale von A_1 bzw. A_2 in P, so wäre $P^+/P_2^+ = A_2$ nicht diskret, also auch P nicht diskret. Andererseits muß $P^+/P_1^+ = A_1$ eine diskrete unendliche zyklische Gruppe sein, was sofort zu einem Widerspruch gegen d) führt. —

Ist A eine zyklohomogene Gruppe mit dem natürlichen Operatorenbereich P, so ist entweder jede zyklische Untergruppe von A diskret (und

[18]) Der Ring $\mathfrak{R}$ aller ganzen PRÜFERschen n-adischen Zahlen entsteht aus dem Ring $\mathfrak{R}_0$ aller ganz rationalen Zahlen, indem man alle Ideale $\neq (0)$ aus $\mathfrak{R}_0$ als Nullumgebungen wählt und dem erhaltenen topologischen Ring CAUCHY-vervollständigt. Unter einem PRÜFERschen Zahlenring $\mathfrak{R}'$ verstehen wir allgemein stets ein abgeschlossenes Ideal aus $\mathfrak{R}$ mit einem Einselement $1' \in \mathfrak{R}'$ bezüglich $\mathfrak{R}'$. $\mathfrak{R}$ ist direkte TYCHONOFF-Summe $\mathfrak{R} = \sum^T \oplus \mathfrak{R}_p$ aller ganz-p-adischen Zahlenringe $\mathfrak{R}_p$ (p ganzrationale Primzahl). Für jedes abgeschlossene Ideal $\mathfrak{R}' \leqq \mathfrak{R}$ mit $\mathfrak{R}'$-Einselement $1'$ gilt dann entweder $\mathfrak{R}_p \leqq \mathfrak{R}'$ oder $\mathfrak{R}_p \cap \mathfrak{R}' = 0$ und $\mathfrak{R}' = \sum^T \oplus \mathfrak{R}_{p'}$, wo p' alle p mit $\mathfrak{R}_p \leqq \mathfrak{R}'$ durchläuft. Vgl. PRÜFER, H.: Neue Begründung der algebraischen Zahlentheorie. Math. Ann. **94** (1925).

für P kann der Ring der ganzrationalen Zahlen gewählt werden), oder A besitzt die folgende Eigenschaft

(T): *Jede Restklassengruppe A/A_α von A nach einer charakteristischen Untergruppe A_α enthält nur Elemente von endlicher Ordnung, d.h. A/A_α ist eine Torsionsgruppe.* —

In der Tat. Gibt es eine nichtdiskrete zyklische Untergruppe von A so ist auch P sicher nicht diskret und besitzt die Eigenschaft d). Ist nun $a \in A$, A_α eine charakteristische Untergruppe von A, $(a) \cap A_\alpha = (0)$, dann ist $(a) = \langle a \rangle$ diskret und wegen der topologischen Isomorphie von (a) zu einer Restklassengruppe P^+/P_a^+ folgt aus d) die Endlichkeit von (a). Ist aber (a) nicht-diskret, so $(a) \cap A_\alpha \neq (0)$ für alle α und aus der topologischen Isomorphie von (a) und P^+/P_a^+ folgt wieder die Behauptung.

Gruppen mit der Eigenschaft (T) werden wir im folgenden als *„torsionstopologische Gruppen"* bezeichnen.

Wir werden uns im folgenden fast ausschließlich mit Gruppen zu befassen haben, deren zyklische Hüllen (a) $(a \in A)$ vollständig sind (was im besonderen stets der Fall ist, wenn die betrachtete Gruppe selber vollständig ist). Gruppen mit dieser Eigenschaft nennen wir *„zyklovollständig"*.

Ist A eine Gruppe, die eine diskrete zyklische Hülle von unendlicher Ordnung enthält und ist A zyklohomogen, so folgt aus den vorangegangenen Bemerkungen, daß A den Ring der ganzrationalen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich besitzt und zyklovollständig ist. Die zyklovollständigen zyklohomogenen Gruppen ohne diskrete zyklische Hüllen von unendlicher Ordnung werden gekennzeichnet durch

Satz 2. Die Gruppe A sei zyklovollständig. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

I. A besitzt einen ganz-n-adischen Zahlenring als natürlichen Operatorenbereich.

II. A ist zyklohomogen und enthält keine diskrete unendliche zyklische Hülle.

III. A ist torsionstopologisch.

Beweis. Aus I. folgt II., aus II. folgt III. — wie oben gezeigt. Bleibt zu beweisen, daß jede zyklovollständige torsionstopologische Gruppe einen ganz-n-adischen Zahlenring als natürlichen Operatorenbereich besitzt[19]). Sei also $a \in A$, (a) die abgeschlossene, also vollständige Hülle der von den ganzrationalen Vielfachen $n \times a$ gebildeten gewöhnlichen zyklischen Gruppe $\langle a \rangle$. Jedes $a' \in (a)$ ist Limes eines CAUCHY-Filters in (a) und umgekehrt besitzt jeder CAUCHY-Filter in (a) einen Limes. $\mathfrak{S}^{(a)}$ sei der charakteristische Filter von (a). Es genügt, als CAUCHY-Filter in (a) einen aus Nebenscharen nach den $A_\alpha^{(a)} \in \mathfrak{S}^{(a)}$ bestehenden Filter zu nehmen. Sei nun zu jedem α eine Nebenschar $U_\alpha^{(a)}$ von $A_\alpha^{(a)}$ gegeben. Da die ganzrationalen Vielfachen $n \times a$ von a dicht in (a) liegen, gibt es in jedem $U_\alpha^{(a)}$ ganzrationale Vielfache $n_\alpha \times a$ und

[19]) Vgl. hierzu den ganz analogen Beweis bei PIETRKOWSKI, ST.: Theorie der Abelschen Gruppen. Math. Ann. **104** (1931).

die n_α für welche $n_\alpha \times a \in U_\alpha^{(a)}$ ist, bilden in der Additionsgruppe $\mathfrak{R}_0^+$ der ganzrationalen Zahlen eine Restklasse $V_\alpha^{(a)}$ modulo der Ordnung $m_\alpha^{(a)}$ von $a \bmod A_\alpha^{(a)}$. Die $U_\alpha^{(a)}$ bilden dann und nur dann einen Filter, wenn das gleiche für die Restklassen $V_\alpha^{(a)}$ im Bereich der ganzrationalen Zahlen gilt. In diesem Falle definieren die $V_\alpha^{(a)}$ eine ganz-n-adische Zahl ν und wir bezeichnen den Limes des Filters $\{U_\alpha^{(a)}\}$ mit $\nu \cdot a$. Dann gehört zu jeder ganz-n-adischen Zahl ν ein $\nu \cdot a \in (a)$ und jedes Element von (a) läßt sich eindeutig in dieser Form ausdrücken. Man sieht leicht, daß die damit eingeführten n-adischen Operatoren den üblichen Multiplikatoraxiomen genügen und daß (a) topologisch homomorph ist zur Additionsgruppe der ganz-n-adischen Zahlen. A besitzt also den PRÜFERschen Ring $\mathfrak{R}$ der ganz-n-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich.

4. *Definition.* Die Gruppe A heißt „primär" (zur Primzahl p gehörig), wenn für jede abgeschlossene Untergruppe $B \subsetneqq A$ gilt: Ist $a \in A$ ein Element endlicher Ordnung mod B, so ist die Ordnung von a mod B eine Potenz von p.

Jede abgeschlossene Untergruppe einer primären Gruppe A und jede Restklassengruppe nach einer abgeschlossenen Untergruppe von A ist offenbar gleichfalls primär.

Satz 3. A ist dann und nur dann primär (zur Primzahl p gehörig), wenn jedes $a \in A$ modulo jeder charakteristischen Untergruppe A_α, in der es nicht enthalten ist, eine Potenz von p zur Ordnung hat.

Beweis. A sei primär, $a \in A$, A_α eine charakteristische Untergruppe von A und $a \notin A_\alpha$. Wäre a von unendlicher Ordnung mod A_α, so wäre die von a erzeugte gewöhnliche zyklische Gruppe diskret, also abgeschlossen in A und sicher nicht primär — Widerspruch. Mithin ist a von endlicher Ordnung mod A_α und folglich sogar von p-Potenzordnung mod A_α. — Umgekehrt sei jedes $a \in A$ mit $a \notin A_\alpha$ von p-Potenzordnung mod A_α, B eine abgeschlossene Untergruppe von A und a von endlicher Ordnung mod B. Gehen wir in die von a erzeugte gewöhnliche zyklische Gruppe $\langle a \rangle$, so wird die Relativtopologie von $\langle a \rangle$ durch die charakteristischen Gruppen $\langle a \rangle \cap A_\alpha$ definiert, während $\langle a \rangle \cap B$ abgeschlossen in $\langle a \rangle$ und somit Durchschnitt gewisser Gruppen $\langle a \rangle \cap A_\alpha$ ist. Hieraus folgt leicht, daß $\langle a \rangle \cap B$ mit einer der Gruppen $\langle a \rangle \cap A_\alpha$ zusammenfallen muß und a somit von Primzahlpotenzordnung mod B ist.

Satz 4. Eine zyklovollständige Gruppe A ist dann und nur dann primär, wenn sie den Ring der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich besitzt. — Eine zyklovollständige primäre Gruppe ist stets zyklohomogen.

Beweis. A habe den Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich. Sei $a \in A$, A_α eine charakteristische Untergruppe und $a \notin A_\alpha$. (a) ist topologisch homomorphes Bild von $\mathfrak{R}_p^+$ und a ist von p-Potenzordnung mod der charakteristischen Untergruppe $(a) \cap A_\alpha$ von (a) und also von gleicher Ordnung mod A_α. Mithin ist A primär. — Ist umgekehrt A

primär und zyklovollständig, so ist entweder jedes A-Element von endlicher p-Potenzordnung oder es gibt Elemente $a \in A$ von unendlicher Ordnung und für diese ist (a) topologisch isomorph zu $\mathfrak{R}_p^*$, woraus leicht folgt, daß und wie $\mathfrak{R}_p$ als natürlicher Operatorenbereich von A zu definieren ist. — Die Zyklohomogenität von A folgt aus Satz 2.

Wir leiten nun noch kurz ein Resultat über die Zerlegbarkeit einer beliebigen zyklovollständigen torsionstopologischen Gruppe (wegen dieser Voraussetzung vgl. Satz 2) in primäre Gruppen ab. Nach bekannten Sätzen ist der ganz-n-adische Zahlenring $\mathfrak{R}$ in eindeutiger Weise als direkte TYCHONOFF-Summe $\mathfrak{R} = \sum^T \oplus \mathfrak{R}_p$ von ganz-p-adischen Zahlenringen $\mathfrak{R}_p$ darstellbar. Ist also A zyklovollständig und torsionstopologisch, d.h. (Satz 2) besitzt den ganz-n-adischen Zahlenring $\mathfrak{R}$ als natürlichen Operatorenbereich und ist (a) wieder die abgeschlossene Hülle der von $a \in A$ erzeugten zyklischen Gruppe, so ist $(a) = \sum^T \oplus (a_p)$ gleichfalls in eindeutiger Weise als direkte TYCHONOFF-Summe von primären vollständigen zyklischen Hüllen (a_p) darstellbar, wo zu jeder Primzahl p höchstens ein Summand $(a_p) \neq (0)$ gehört. $A^{(p)}$ sei die (abgeschlossene) Vereinigungsgruppe aller zur Primzahl p gehörigen primären vollständigen zyklischen Hüllen von A. Wie leicht zu sehen ist dann $A^{(p)}$ primär und besitzt den Ring der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich. $A^{(p)}$ ist die zu p gehörige „Primärkomponente" von A. Wir zeigen:

Satz 5. *A sei torsionstopologisch und zyklovollständig, $A^{(p)}$ die zur Primzahl p gehörige Primärkomponente von A. A besteht genau aus allen eindeutigen endlichen Summen $\sum_p a_p$ $(a_p \in A^{(p)})$ und denjenigen gleichfalls eindeutigen unendlichen Summen $\sum_p a_p$ $(a_p \in A^{(p)})$, für welche alle a_p in einer kompakten Untergruppe von A liegen.* —

Beweis. Zunächst ist klar, daß A alle endlichen Summen $\sum_p a_p$ enthält. Seien nun abzählbar viele Elemente $a_p \in A^{(p)}$ gegeben, wo die Primzahlen p alle verschieden sind und die in einer kompakten (also sicher vollständigen) Untergruppe $B \subseteq A$ liegen. Wird für B die kleinste alle a_p enthaltende abgeschlossene Untergruppe von A genommen, so besitzt B wegen der Kompaktheit eine charakteristische Basis, die aus einer absteigenden Kette von Untergruppen von endlichem Index in B besteht und es ist B nach bekannten Sätzen eindeutig darstellbar als direkte TYCHONOFF-Summe von primären Gruppen $B^{(p)}: B = \sum_p^T \oplus B^{(p)}$ [20]). Dann muß $a_p \in B^{(p)}$ sein und die Existenz der unendlichen Summe $\sum_p a_p$ folgt aus den Eigenschaften der TYCHONOFF-Summe. — Sei umgekehrt $a \in A$, $a \neq 0$, (a) die abgeschlossene Hülle der von a erzeugten zyklischen Gruppe. Dann ist (a) kompakt und $(a) = \sum_p^T \oplus (a_p)$ wieder direkte TYCHONOFF-Summe der primären (a_p) und $a = \sum_p a_p$. —

[20]) PIETRKOWSKI, ST.: [19]) § 4.

5. Auf ein und derselben abstrakten Gruppe A sind im allgemeinen natürlich verschiedene Topologien möglich.

Definition. Zwei (Untergruppen-)Topologien τ_1 und τ_2 auf A mögen äquivalent heißen, $\tau_1 \sim \tau_2$, wenn für jedes $a \in A$ gilt: Die abgeschlossene Hülle $(a)^{(\tau_1)}$ der von (a) erzeugten zyklischen Gruppe bezüglich der Topologie τ_1 ist (elementweise und topologisch) identisch mit der abgeschlossenen Hülle $(a)^{(\tau_2)}$ bezüglich der Topologie τ_2. —

Es ist klar, daß die Relation $\sim$ eine Äquivalenzrelation für die Menge aller Untergruppentopologien auf A ist und diese in Äquivalenzklassen T — im folgenden kurz als „Topologienklassen" bezeichnet — einteilt. Fast trivial ist

Satz 6. Sind τ_1 und $\tau_2 \sim \tau_1$ zwei äquivalente Topologien auf A und besitzt A bezüglich τ_1 den natürlichen Operatorenbereich P, so ist P (mit derselben Operatormultiplikation!) auch natürlicher Operatorenbereich bezüglich τ_2. — Besitzt A umgekehrt bezüglich der Topologien τ_1 und τ_2 denselben natürlichen Operatorenbereich P (beidemale mit derselben Operatormultiplikation), so ist $\tau_1 \sim \tau_2$. —

Sei nun T eine Topologienklasse der Gruppe A, $\mathfrak{S}^{(\tau)}$ der zur Topologie $\tau \in T$ gehörige charakteristische Filter in A. Dann erzeugt das System aller Untergruppen, die zu (mindestens) einem der $\mathfrak{S}^{(\tau)}$ $(\tau \in T)$ gehören, wieder einen Filter $\mathfrak{S}$ [0] in A, der eine Topologie τ_0 in A definiert. τ_0 ist die (eindeutig bestimmte) feinste Topologie aus T, das „Maximum" der Topologien $\tau \in T$. —

In der Tat. Daß τ_0 die obere Grenze der $\tau \in T$ ist, ist klar und $\tau_0 \in T$ folgt so: Sei $\tau \in T$, $a \in A$, $\langle a \rangle$ die von a erzeugte (gewöhnliche) zyklische Gruppe, $b \in A$ ein Häufungspunkt von $\langle a \rangle$ bei der Topologie τ. Dann liegt in jeder τ-Umgebung von b, d.h. also in jeder b enthaltenden Nebenschar der charakteristischen τ-Untergruppen ein $a' \in \langle a \rangle$ und dies gilt für alle $\tau \in T$. Die Gesamtheit aller dieser Nebenscharen für alle $\tau \in T$ bildet aber gerade ein vollständiges τ_0-Umgebungssystem von b [21]) und b ist Häufungspunkt von $\langle a \rangle$ auch bezüglich der Topologie τ_0. Danach ist die abgeschlossene Hülle von $\langle a \rangle$ bezüglich τ_0 identisch mit der abgeschlossenen Hülle bezüglich $\tau \in T$ und es folgt $\tau_0 \in T$. Wir haben also

Satz 7. Ist T eine Topologienklasse von A, so gibt es eine eindeutig bestimmte feinste Topologie τ_0 aus T. —

Wir bezeichnen τ_0 hinfort als die zur Klasse T gehörige „*S-Topologie*".

6. Wir betrachten nunmehr Gruppen A mit einer S-Topologie unter der weiteren Voraussetzung, daß A zyklovollständig und torsionstopologisch ist, d.h. einen ganz-n-adischen Zahlenring als natürlichen Operatorenbereich besitzt. Wir bemerken zunächst:

a) Ist (a) eine zyklische Hülle mit einem PRÜFERschen ganz-n-adischen Zahlenring $\mathfrak{R}$ als natürlichem Operatorenbereich, ist ferner $\alpha \in \mathfrak{R}$, so ist die

[21]) Man beachte, daß die zyklische Hülle (a) von a für alle $\tau \in T$ dieselbe ist und daß in (a) der Durchschnitt je endlich vieler zu verschiedenen $\tau \in T$ gehöriger Umgebungen von b wieder eine τ-Umgebung von b für jedes $\tau \in T$ enthält.

$\mathfrak{R}$-zulässige Untergruppe $[\mathfrak{R} \cdot \alpha] \cdot a$ abgeschlossen in (a). $[\mathfrak{R} \cdot \alpha] \cdot a$ ist genau dann eine charakteristische Untergruppe von (a), wenn α in $\mathfrak{R}$ zu einer endlichen natürlichen Zahl assoziiert ist. Dies folgt leicht aus bekannten Eigenschaften der n-adischen Zahlenringe.

b) Aus a) folgt: Ist B eine $\mathfrak{R}$-zulässige Untergruppe von endlichem Index in (a), so ist B eine charakteristische Untergruppe von (a).

c) Aus b) folgt: Ist A eine Gruppe mit dem n-adischen Zahlenring $\mathfrak{R}$ als natürlichem Operatorenbereich und einer S-Topologie, ist ferner B eine $\mathfrak{R}$-zulässige Untergruppe von A mit der Eigenschaft, daß A/B nur Elemente von endlicher Ordnung enthält, dann ist B eine charakteristische Untergruppe von A. — Denn B würde, wenn sie anderenfalls zum charakteristischen Filter von A hinzugenommen würde, die Topologie der zyklischen Gruppen $(a) \subseteq A$ wegen b) nicht ändern und aus der „Maximaleigenschaft" der S-Topologie folgt, daß B charakteristische Untergruppe von A sein muß. — Da nach Satz 2 auch umgekehrt jede charakteristische Untergruppe von A die Eigenschaft haben muß, daß die nach ihr gebildete Restklassengruppe nur Elemente von endlicher Ordnung enthält, erhalten wir

Satz 8. Hat A eine S-Topologie und einen ganz-n-adischen Zahlenring $\mathfrak{R}$ als natürlichen Operatorenbereich, so besteht der charakteristische Filter von A genau aus allen $\mathfrak{R}$-zulässigen Untergruppen $B \subseteq A$ mit der Eigenschaft, daß A/B nur Elemente von endlicher Ordnung enthält. —

Hinsichtlich der Zerlegbarkeit der S-topologischen Gruppen mit ganz-n-adischem natürlichem Operatorenbereich in Primärkomponenten beweisen wir nun noch das Satz 5 ergänzende Resultat:

Ist A S-topologisch mit dem Ring $\mathfrak{R}$ der ganz-n-adischen Zahlen als natürlichem Operatorenbereich, so ist jede Primärkomponente $A^{(p)}$ von A gleichfalls S-topologisch (und besitzt nach Satz 4 den Ring der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich) [22]).

Wir haben zu zeigen, daß die Relativtopologie der Untergruppen $A^{(p)}$ identisch ist mit der zu dem natürlichen Operatorenbereich $\mathfrak{R}_p$ von $A^{(p)}$ gehörigen S-Topologie. Wäre die Relativtopologie von $A^{(p)}$ nicht dieselbe wie die durch $\mathfrak{R}_p$ bestimmte S-Topologie, so gäbe es eine charakteristische Untergruppe $A_1^{(p)} \subseteq A^{(p)}$ der S-Topologie, welche nicht charakteristische Untergruppe für die Relativtopologie wäre. Verfeinern wir die Topologie von A durch Hinzunahme der (sicher direkten) Summe $A_1^{(p)} \oplus B$, wo B die topologische Vereinigungsgruppe aller $A^{(p')}$ $(p' \neq p)$ ist, zum charakteristischen Filter von A und betrachten wir wieder die zyklische Hülle $(a) = \sum^T \oplus (a^{(p)})$ eines beliebigen $a \in A$, so ist sofort zu sehen, daß die Relativtopologie von (a) durch

[22]) Eine direkte Summe $A = \sum \oplus A^{(\alpha)}$ von S-topologischen Gruppen $A^{(\alpha)}$ ist, wie leicht zu sehen, wieder eine S-topologische Gruppe. Auf der anderen Seite beachte man, daß auch eine TYCHONOFF-Summe von S-topologischen Gruppen wieder S-topologisch sein kann. So ist die S-topologische Gruppe $\mathfrak{R}^+$ der ganzen n-adischen Zahlen direkte TYCHONOFF-Summe der primären Gruppen $\mathfrak{R}_p^+$, wo $\mathfrak{R}_p^+$ die Additionsgruppe der ganzen p-adischen Zahlen ist; eine TYCHONOFF-Summe von unendlich vielen zur gleichen Primzahl gehörigen Gruppen ist hingegen niemals S-topologisch.

die Verfeinerung der Topologie von A nicht verändert wird und da A die S-Topologie besitzt, muß $A_1^{(p)} \oplus B$ charakteristische Untergruppe von A, also $A_1^{(p)}$ charakteristische Untergruppe von $A^{(p)}$ bezüglich der Relativtopologie sein. Hieraus folgt die Behauptung. —

7. Wir wollen nun die zyklovollständigen S-topologischen primären Gruppen genauer untersuchen und setzen also in dieser Nummer voraus, daß A eine Gruppe mit dem Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichem Operatorenbereich und der zugehörigen S-Topologie ist. Soweit nichts anderes aus dem Zusammenhang hervorgeht, sollen unter „Untergruppen" von A stets $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppen verstanden sein. Zunächst gilt:

Satz 9. Jede abgeschlossene Untergruppe $B \subseteqq A$ hat gleichfalls die S-Topologie als Relativtopologie in A.

Beweis. B' sei eine $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppe von B, so daß B/B' nur Elemente von endlicher Ordnung enthält. Zu zeigen ist die Existenz einer charakteristischen Untergruppe A' von A mit $B \cap A' = B'$. Sei nun $C \subseteqq A$ die Menge aller A-Elemente von endlicher Ordnung mod B'. C ist eine $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppe von A. Da die Vereinigungsmenge einer aufsteigenden Kette $\mathfrak{R}_p$-zulässiger Untergruppen wieder eine $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppe ist, gibt es eine größte zulässige Untergruppe $A_0' \subseteqq A$ mit $A_0' \cap C = 0$, erst recht also $A_0' \cap B = A_0' \cap B' = 0$. In wohlbekannter Weise folgt nun aus der Maximaleigenschaft von A_0', daß jedes $a \in A$ von endlicher Ordnung mod $A_0' \oplus C$ und also auch von endlicher Ordnung mod $A' = A_0' \oplus B'$ ist. Nach Satz 8 ist also A' eine charakteristische Untergruppe von A und wegen $B \cap A_0' = 0$ ist $A' \cap B = B'$, also B' eine (bezüglich der Relativtopologie) charakteristische Untergruppe von B. — Daß umgekehrt jede (bezüglich der Relativtopologie) charakteristische Untergruppe B' von B $\mathfrak{R}_p$-zulässig ist und daß jedes Element von B von endlicher Ordnung mod B' sein muß, ist fast trivial. Satz 8 liefert jetzt die Behauptung.

Ist $T(A)$ die (sicher $\mathfrak{R}_p$-zulässige) Torsionsgruppe von A, d.h. die Untergruppe aller Elemente von endlicher Ordnung aus A, so folgt sofort der

Korollar. $T(A)$ ist diskret und also abgeschlossen in A. Denn die S-Topologie der primären Torsionsgruppe $T(A)$ ist nach Satz 8 diskret, da die Nullgruppe charakteristische Untergruppe ist.

Die Bedeutung der primären S-Topologien liegt nun wesentlich in der Gültigkeit von

Satz 10. Besitzt die S-topologische Gruppe A den Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich, so ist eine Untergruppe $B \subseteqq A$ dann und nur dann abgeschlossen in A, wenn sie $\mathfrak{R}_p$-zulässig ist[23]).

Beweis. Ist B abgeschlossen, dann $\mathfrak{R}_p$-zulässig, wie schon oben festgestellt wurde. Sei B $\mathfrak{R}_p$-zulässig. Dann besitzt mit A auch die Restklassen-

[23]) Im nichtprimären Fall gilt der Satz im allgemeinen nicht, wie das Beispiel der Additionsgruppe $\mathfrak{R}^+$ der ganzen n-adischen Zahlen zeigt: Sind die $\mathfrak{R}_p^+$ die primären Komponenten von $\mathfrak{R}^+$, so ist die gewöhnliche Summe $\sum \oplus \mathfrak{R}_p^+$ sicher nicht abgeschlossen in $\mathfrak{R}^+$.

gruppe $\bar{A} = A/B$ den Operatorenbereich $\mathfrak{R}_p$ (im gewöhnlichen Sinne). Mit Hilfe des Wohlordnungssatzes zeigt man leicht, daß es zu jedem $\bar{a} \neq \bar{0}$ aus $\bar{A}$ eine größte $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppe $\bar{A}_\alpha < \bar{A}$ mit $\bar{a} \notin \bar{A}_\alpha$ gibt. In der Restklassengruppe $\bar{A}/\bar{A}_\alpha$ muß dann jede (zulässige) Untergruppe die zu $\bar{a} \in \bar{A}$ gehörige Restklasse $\bar{\bar{a}}$ aus $\bar{A}/\bar{A}_\alpha$ enthalten und hieraus folgt in bekannter Weise, daß alle Elemente von $\bar{A}$ von endlicher Ordnung mod $\bar{A}_\alpha$ sind. Ist A_α das vollständige Urbild von $\bar{A}_\alpha$ in A, so ergibt sich: Zu jedem $a \in A$ mit $a \notin B$ gibt es eine $\mathfrak{R}_p$-zulässige Untergruppe $A_\alpha \subseteqq A$ mit $a \notin A_\alpha$ und so, daß jedes Element von A von endlicher Ordnung mod A_α ist. Aus ersterem folgt, daß der Durchschnitt aller dieser A_α gleich B sein muß und wegen der letzteren Eigenschaft sind die A_α, also auch $B = \bigcap A_\alpha$ abgeschlossen in A w. z. z. w.

Korollar. Ist A eine S-topologische Gruppe mit $\mathfrak{R}_p$ als natürlichem Operatorenbereich, so ist A darstellbar als (topologische) Restklassengruppe einer (gewöhnlichen) direkten Summe $G = \sum \oplus Z_\alpha$ von Gruppen Z_α, die zur Additionsgruppe $\mathfrak{R}_p^+$ topologisch isomorph sind, genommen mit der zum natürlichen Operatorenbereich $\mathfrak{R}_p$ gehörigen S-Topologie, nach einer $\mathfrak{R}_p$-zulässigen (und daher nach Satz 10 abgeschlossenen) Untergruppe $G' \subseteqq G$.

Denn die Darstellung $A = G/G'$ ist, wenn man G, G', A als gewöhnliche Operatorgruppen auffaßt, bekannt. Daß dabei die S-Topologie von A als Restklassengruppentopologie richtig herauskommt, folgt wegen der Abgeschlossenheit von G' sofort aus Satz 8.

8. Sei A wieder eine zyklovollständige torsionstopologische Gruppe. Unter „Untergruppen" sollen in dieser Nummer stets abgeschlossene Untergruppen von A verstanden sein.

Eine Gruppe $E \subseteqq A$ heißt einrangig, wenn für zwei Untergruppen E_1 und E_2 aus E stets entweder $E_1 \subseteqq E_2$ oder $E_2 \subseteqq E_1$ gilt. Eine einrangige Gruppe ist stets primär. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_p^+$ bzw. $\mathfrak{R}_p^+$ wieder die Additionsgruppe der p-adischen bzw. der ganzen-p-adischen Zahlen, so sind genau die Gruppen einrangig, die zu $\mathfrak{R}_p^+$, $\mathfrak{R}_p^+$ oder der Restklassengruppe $\mathfrak{R}_p^+/\mathfrak{R}_p^+$ oder schließlich zu einer gewöhnlichen endlichen zyklischen primären Gruppe isomorph sind[24]). — Eine Gruppe heißt vom Rang $\varkappa$ ($\varkappa$ beliebige Kardinalzahl), wenn sie sich als abgeschlossene Hülle der gewöhnlichen Vereinigungsgruppe von $\varkappa$, aber nicht weniger, einrangigen Gruppen darstellen läßt. — Eine endlichrangige primäre Gruppe ist, wie wohlbekannt, im wesentlichen einfach eine gewöhnliche p-adische Operatorgruppe und ihre (zu $\mathfrak{R}_p$ gehörige) Topologienklasse besteht aus einer einzigen Topologie, die also mit der S-Topologie identisch ist. — Gruppen, die nur Elemente von endlicher (bzw. unendlicher) Ordnung enthalten, bezeichnen wir wie üblich als Torsionsgruppen (bzw. als torsionsfrei). — Eine Untergruppe $B \subseteqq A$ heißt eine „große Untergruppe"[25]), wenn A/B eine endlichrangige Torsionsgruppe ist. Die Vereinigungsgruppe beliebig vieler und der Durchschnitt endlich vieler großer Untergruppen ist eine große

[24]) PRÜFER, H.: Theorie der Abelschen Gruppen. II. Math. Z. **22**, 222—249 (1925).

[25]) Siehe PRÜFER, H.: Theorie der Abelschen Gruppen. I. Math. Z. **20**, 165—187 (1924).

Untergruppe. Ist $B=\bigcap A_\beta$ eine große Untergruppe (A_β Untergruppen), so gibt es bereits endlich viele A_β, deren Durchschnitt gleich B ist. Ist C irgendeine Untergruppe von A, $a\notin C$ ($a\in A$), so gibt es eine große Untergruppe $B<A$ mit $C\leqq B$ und $a\notin B$[26]).

9. Sei nun A eine (nicht notwendig primäre) torsionstopologische Gruppe (s. Satz 2). Wir fragen nach den gröbsten Topologien von A und bemerken zunächst:

Satz 12. Ist τ^* eine (absolut) gröbste Topologie[27]) von A, $\mathfrak{S}^*$ der zugehörige charakteristische Filter, so besteht $\mathfrak{S}^*$ aus großen Untergruppen von A.

Beweis. Sei $a\in A$, A_α eine charakteristische Untergruppe von A mit $a\notin A_\alpha$. Dann gibt es eine große Untergruppe $B_a\geqq A_\alpha$ mit $a\notin B_a$. Wegen $B_a\geqq A_\alpha$ ist B_a eine charakteristische Untergruppe von A. Lassen wir nun a alle Elemente $\neq 0$ von A durchlaufen, so gilt für die zugehörigen B_a: $\bigcap B_a=0$ und die B_a erzeugen offenbar einen aus großen Untergruppen bestehenden Teilfilter von $\mathfrak{S}^*$, der eine gröbere Topologie von A definieren würde, wenn er von $\mathfrak{S}^*$ verschieden wäre.

Definition. Die Topologie τ^* von A heiße eine *„totalgröbste"*, wenn für jede Restklassengruppe $\bar{A}$ von A nach einer abgeschlossenen Untergruppe die durch τ^* in $\bar{A}$ induzierte Topologie $\overline{\tau^*}$ eine (absolut) gröbste Topologie von $\bar{A}$ ist. —

Wie früher bemerkt, sind die abgeschlossenen Untergruppen B von A genau diejenigen, die sich als Durchschnitt von charakteristischen Untergruppen A_α darstellen lassen. Die Gesamtheit der B umfassenden charakteristischen Untergruppen von A bildet einen Teilfilter des charakteristischen Filters $\mathfrak{S}$ von A und man sieht leicht:

Die Topologie τ^* von A mit dem charakteristischen Filter $\mathfrak{S}^*$ ist genau dann eine totalgröbste, wenn verschiedene Teilfilter von $\mathfrak{S}^*$ stets verschiedene Durchschnitte haben.

Denn ist $B=\bigcap A_\alpha$ eine abgeschlossene Untergruppe von A, wo die A_{α_B} alle B umfassenden charakteristischen Untergruppen von A durchlaufen und also einen Filter $\mathfrak{S}_B$ bilden und ist $\bar{A}=A/B$, so besteht der charakteristische Filter $\overline{\mathfrak{S}}_B$ von $\bar{A}$ aus den Bildern $\bar{A}_{\alpha_B}$ der A_{α_B}. Gäbe es einen echten Teilfilter $\overline{\mathfrak{S}}'_B$ von $\overline{\mathfrak{S}}_B$, dessen Durchschnitt $\bar{0}$ ist, der also eine gröbere Topologie von $\bar{A}$ definiert als $\overline{\mathfrak{S}}_B$ und ist $\mathfrak{S}'_B$ der aus den vollständigen Urbildern der Gruppen aus $\overline{\mathfrak{S}}'_B$ bestehende Filter in A, so wäre $\mathfrak{S}'_B<\mathfrak{S}_B$ und hätte den gleichen Durchschnitt B. Entsprechend umgekehrt.

Definition. Die Gruppe A heißt *„totalvollständig"*, wenn jede Restklassengruppe $\bar{A}$ von A nach einer abgeschlossenen Untergruppe hinsichtlich der durch die Topologie von A in $\bar{A}$ induzierten Topologie vollständig ist.

[26]) Siehe PIETRKOWSKI, ST.: [19]), Satz 5.

[27]) Wir unterscheiden „absolut gröbste" Topologie und „gröbste Topologie einer Topologienklasse T". Wie später bemerkt wird, fallen im primären Falle beide Begriffe zusammen.

Die Eigenschaft der Totalvollständigkeit von A ist gleichwertig zu der folgenden:

Ist B irgendeine abgeschlossene Untergruppe von A, $\mathfrak{S}_B$ der Filter aller charakteristischen Untergruppen $A_{\alpha_B} \geqq B$ von A, so besitzt jeder aus Nebenscharen der A_{α_B} bestehende Filter $\mathfrak{U}_B$ einen nicht leeren Durchschnitt.

Denn der Bildfilter $\bar{\mathfrak{S}}_B$ von $\mathfrak{S}_B$ in $\bar{A} = A/B$ ist genau der charakteristische Filter von $\bar{A}$. Ist A totalvollständig, also $\bar{A}$ vollständig, so besitzt jeder aus Restklassen von $\bar{\mathfrak{S}}_B$ bestehende CAUCHY-Filter $\bar{\mathfrak{U}}_B$ in $\bar{A}$ einen nicht leeren Durchschnitt und also auch der vollständige Urbildfilter $\mathfrak{U}_B$ von $\bar{\mathfrak{U}}_B$ in A. Entsprechend umgekehrt. Hieraus folgt *nicht*, daß in einer totalvollständigen Gruppe A jeder aus Nebenscharen der charakteristischen Untergruppen bestehende Filter einen nicht leeren Durchschnitt hat, denn ist z.B. $\mathfrak{S}'$ ein Teilfilter des charakteristischen Filters $\mathfrak{S}$ von A mit dem Durchschnitt (0), so lassen sich die obigen Schlüsse auf einen aus Nebenscharen nach den zu $\mathfrak{S}'$ gehörenden Gruppen bestehenden Filter nicht anwenden. Indessen gilt:

Ist die Topologie der totalvollständigen Gruppe A eine totalgröbste, so besitzt jeder aus Nebenscharen irgendwelcher charakteristischen Untergruppen $A_{\alpha'}$ bestehende Filter $\mathfrak{U}'$ einen nicht leeren Durchschnitt.

Dies folgt unmittelbar daraus, daß die $A_{\alpha'}$ hier den *vollständigen* $B' = \bigcap A_{\alpha'}$ umfassenden Filter bilden.

Schließlich bemerken wir noch:

Ist $\mathfrak{U}$ irgendein aus Mengen U_α bestehender Filter, so sagen wir, *der Filter $\mathfrak{U}'$ entstehe aus $\mathfrak{U}$ durch Verfeinerung*, wenn $\mathfrak{U}'$ erzeugt wird von den Mengen $U_\alpha \in \mathfrak{U}$ und gewissen (nicht leeren und nicht endlichen) Durchschnitten $\bigcap U_{\alpha_\varrho}$ ($U_{\alpha_\varrho} \in \mathfrak{U}$). $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}'$ haben dann ersichtlich den gleichen Durchschnitt. Ist nun ein System von abgeschlossenen Untergruppen B_β der Gruppe A und ein aus Nebenscharen U'_β der B_β bestehender Filter $\mathfrak{U}'$ gegeben, so gibt es einen aus Nebenscharen gewisser charakteristischer Untergruppen A_{α_ϱ} bestehenden Filter $\mathfrak{U}$, so daß $\mathfrak{U}'$ aus $\mathfrak{U}$ durch Verfeinerung hervorgeht. Denn man braucht für $\mathfrak{U}$ nur die Menge aller mindestens ein U'_β umfassenden Nebenscharen der charakteristischen Untergruppen zu wählen.

Satz 13. *A sei eine Gruppe mit der Topologie τ^*: A ist dann und nur dann totalvollständig und die Topologie τ^* eine totalgröbste, wenn A linear kompakt ist.*

Beweis. Das „nur dann" folgt unmittelbar aus den vorangegangenen Bemerkungen. Sei nun A linear kompakt mit der Topologie τ^*, A^*_α eine charakteristische Untergruppe von A. Die Restklassengruppe $\bar{A} = A/A^*_\alpha$ ist dann diskret und linear kompakt. Ist $\bar{a} \in \bar{A}$, so ist die von $\bar{a}$ erzeugte gewöhnliche zyklische Gruppe $\langle \bar{a} \rangle$ abgeschlossen in $\bar{A}$ und also auch linear kompakt. Wäre aber $\langle \bar{a} \rangle$ von unendlicher Ordnung, so hätte sicherlich nicht jeder aus Restklassen nach den Untergruppen von endlichem Index in $\langle \bar{a} \rangle$ bestehende Filter einen nicht leeren Durchschnitt — Widerspruch. Mithin ist $\bar{A}$ eine Torsionsgruppe. Angenommen, $\bar{A}$ wäre von unendlichem Range. Dann gäbe es eine

Untergruppe $\bar{A}_1 \subseteqq \bar{A}$, die direkte Summe von unendlich vielen zyklischen Gruppen $(\bar{a}_\alpha)$ wäre: $\bar{A}_1 = \sum \oplus (\bar{a}_\alpha)$. Jedes Element $\bar{a} \in \bar{A}_1$ ist dann als endliche Summe $\sum n_\alpha \bar{a}_\alpha$ darstellbar, wo die n_α modulo der Ordnung von $\bar{a}_\alpha$ eindeutig bestimmt sind. Für irgendein festes α_0 wähle man $n_{\alpha_0} \not\equiv 0$ (mod der Ordnung von $\bar{a}_{\alpha_0}$) und bilde die Menge U_{α_0} aller Elemente der Form $n_{\alpha_0} \cdot \bar{a}_{\alpha_0} + \sum_{\alpha' \neq \alpha_0} n_{\alpha'} \cdot \bar{a}_{\alpha'}$. U_{α_0} ist eine Restklasse aus $\bar{A}_1$. Bildet man so das System aller U_{α_0}, indem man α_0 alle α durchlaufen läßt, so haben je endlich viele U_{α_0} einen nicht leeren Durchschnitt und die U_{α_0} erzeugen einen Filter $\mathfrak{U}$ in $\bar{A}_1$. Aber kein $\bar{a} = \sum n_\alpha \bar{a}_\alpha \in \bar{A}_1$ (endliche Summe!) kann in allen U_{α_0} liegen und der Durchschnitt von $\mathfrak{U}$ ist leer. $\bar{A}_1$ und damit $\bar{A}$ wäre also nicht linear kompakt — Widerspruch. $\bar{A}$ ist also eine endlichrangige Torsionsgruppe und der charakteristische Filter von A besteht aus großen Untergruppen. — Sei nun $\tau < \tau^*$ eine gröbere Topologie von A als τ^*, $\mathfrak{S}$ bzw. $\mathfrak{S}^*$ die charakteristischen Filter von A bezüglich τ bzw. τ^*, $A_\alpha^* \in \mathfrak{S}^*$. Der charakteristische Filter $\mathfrak{S}_\alpha$ der von τ in A_α^* induzierten Relativtopologie besteht aus den Gruppen $A_\beta \cap A_\alpha^*$ $(A_\beta \in \mathfrak{S})$. Sei $\mathfrak{U}_\alpha$ ein aus Nebenscharen der $A_\beta \cap A_\alpha^*$ bestehender CAUCHY-Filter in A_α^* bezüglich der durch τ induzierten Topologie. Die in $\mathfrak{U}_\alpha$ liegenden Scharen sind aber hinsichtlich der Topologie τ^* abgeschlossen und wegen der linearen Kompaktheit besitzt $\mathfrak{U}_\alpha$ einen nicht leeren Durchschnitt. Daher ist A_α^* auch bezüglich τ abgeschlossen und also Durchschnitt von charakteristischen τ-Untergruppen A_β. Da aber A_α^* eine große Untergruppe ist, ist A_α^* bereits Durchschnitt endlich vieler A_β, d.h. A_α^* ist eine charakteristische τ-Untergruppe. Hieraus folgt $\mathfrak{S}^* \subseteqq \mathfrak{S}$, also $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{S}$, $\tau^* = \tau$ und τ^* ist eine gröbste Topologie. Da mit A auch jede Restklassengruppe linear kompakt ist, ist τ^* sogar eine totalgröbste Topologie. Daß die linear kompakte Gruppe A totalvollständig ist, ist unmittelbar klar. Damit ist alles bewiesen.

10. Wir wenden uns nun wieder den zyklovollständigen primären Gruppen, d.h. also den Gruppen mit dem Ring $\mathfrak{R}_p$ der ganz-p-adischen Zahlen als natürlichen Operatorenbereich zu und bemerken zunächst:

Ist T die durch den natürlichen Operatorenbereich von A festgelegte Topologienklasse, $\tau_1 \in T$, so gehört auch jede gröbere Topologie τ_2 von A zu T. Ist τ^* also eine gröbste Topologie von T, so ist τ^* sogar eine absolut gröbste Topologie.

Ist nämlich $\mathfrak{S}_1$ bzw. $\mathfrak{S}_2$ der charakteristische Filter von A bezüglich der Topologie τ_1 bzw. τ_2, $\tau_1 \in T$ und ist τ_2 gröber als τ_1, also $\mathfrak{S}_2$ ein Teilfilter von $\mathfrak{S}_1$ mit der Eigenschaft, daß der Durchschnitt der zu $\mathfrak{S}_2$ gehörigen Gruppen die Nullgruppe ist, dann induziert τ_2 in jeder abgeschlossenen zyklischen Gruppe (a) die gleiche Topologie wie τ_1, also $\tau_2 \sim \tau_1$ und $\tau_2 \in T$.

Satz 14. *A* habe den ganz-p-adischen Zahlenring $\mathfrak{R}_p$ als natürlichen Operatorenbereich und einen aus großen Untergruppen bestehenden charakteristischen Filter. Dann gibt es eine zu A topologisch isomorphe Untergruppe A' der Gruppe $W = \sum^T \oplus Z_\alpha$, wo die (in geeigneter Anzahl zu wählenden) Gruppen Z_α zur (diskreten) Restklassengruppe $\mathfrak{R}_p^+ / \mathfrak{R}_p^+$ isomorph sind.

Beweis. Sei $Z=\mathfrak{R}_p^+/\mathfrak{R}_p^+$. $\{f_\alpha\}$ sei die Menge aller topologischen (Operator-) Homomorphismen von A in Z. Zu jedem α bilden wir die zu Z isomorphe Gruppe Z_α und daraus die direkte TYCHONOFF-Summe $W=\sum^T\oplus Z_\alpha$. Ordnen wir jedem $a\in A$ das Element $a'=\sum_\alpha f_\alpha(a)\in W$ zu, so ist die erhaltene Abbildung φ zunächst ein gewöhnlicher (Operator-) Homomorphismus von A in W. Denn aus $a_1'=\sum f_\alpha(a_1)=\varphi(a_1)$, $a_2'=\sum f_\alpha(a_2)=\varphi(a_2)$ folgt

$$\varphi(a_1+a_2)=\sum f_\alpha(a_1+a_2)=\sum f_\alpha(a_1)+\sum f_\alpha(a_2)$$
$$=\varphi(a_1)+\varphi(a_2)$$

und entsprechend bei der Operatormultiplikation. — φ ist sogar ein gewöhnlicher Isomorphismus von A auf die Bildgruppe $A'\subseteqq W$. Denn zu jedem f_α gehört als Kern eine charakteristische Untergruppe P_α mit einrangiger Restklassengruppe A/P_α und umgekehrt bestimmt jede derartige charakteristische Untergruppe P_α mindestens einen Homomorphismus von A in Z mit P_α als Kern. Da sich aber offenbar jede charakteristische Untergruppe von A als Durchschnitt von endlich vielen P_α darstellen läßt, folgt $\bigcap P_\alpha=0$. Ist also $\varphi(a)=0$, also $f_\alpha(a)=0$ für jedes α, so folgt $a\in\bigcap P_\alpha=0$ und hieraus die Isomorphie. — φ ist umkehrbar stetig. Denn sei W_α die Menge aller Elemente $\sum_{\beta\neq\alpha} a_\beta$ mit $a_\beta\in Z_\beta$ von W. Die W_α bilden dann ein Erzeugendensystem des charakteristischen Filters von W und die $A'_\alpha=A'\cap W_\alpha$ erzeugen den charakteristischen Filter von $A'\subseteqq W$. Das Urbild von W_α bzw. A'_α in A vermöge φ ist aber dann gerade P_α, also offen in A und umgekehrt sind die Bilder A'_α der P_α offen in A'. Da die P_α bzw. A'_α ein Erzeugendensystem des charakteristischen Filters von A bzw. A' bilden, folgt die Behauptung.

Eine vollständige Gruppe, deren charakteristischer Filter aus großen Untergruppen besteht wollen wir eine „*K-topologische Gruppe*" nennen[28]).

Dann folgt aus Satz 14 und 13:

Satz 15. *A* sei eine primäre Gruppe. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) A ist K-topologisch.

(b) A ist linear kompakt.

(c) A ist totalvollständig und ihre Topologie eine totalgröbste[29]).

Beweis. Aus (a) folgt (b): Da die Eigenschaft der Vollständigkeit bei topologischer Isomorphie erhalten bleibt, ist A auf Grund der Voraussetzung (a) nach Satz 14 einer abgeschlossenen Untergruppe der linear kompakten Gruppe W topologisch isomorph und da auch lineare Kompaktheit gegenüber topologischer Isomorphie invariant ist, folgt (b). (c) folgt aus (b) nach Satz 13 und (a) ist nach Satz 12 eine Folge von (c).

[28]) Die abzählbar-rangigen K-topologischen Gruppen sind identisch mit den von KRULL[1a]) eingehend untersuchten „abgeschlossenen separabeln Gruppen".

[29]) Vgl. KRULL[1a]) Satz 2. Unser Satz 15 beantwortet die dort (Anm. 21) aufgeworfene Frage.

Bonn, Mathematisches Seminar der Universität.

(Eingegangen am 15. August 1953.)