Werk

Titel: Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. II.

Autor: Ackermann, Wilhelm

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0057|log14

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

ACKERMANN, W.
Math. Zeitschr. Bd. 57, S. 155—166 (1953)

Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. II.

Von
WILHELM ACKERMANN.

In einer vorhergehenden Arbeit mit dem gleichen Haupttitel[1]) habe ich ein Axiomensystem für eine typenfreie Logik aufgestellt und den zugehörigen Widerspruchsfreiheitsbeweis gegeben. In dem vorliegenden zweiten Teil sollen die ersten Ableitungen aus dem Axiomensystem erfolgen, die die Gewinnung der Mathematik betreffen. Dabei wird hier noch nicht das genannte Axiomensystem voll verwendet, sondern nur ein Teilsystem, das von der Implikation keinen Gebrauch macht. Auf die frühere Arbeit wird in einigen Punkten, z.B. was den Beweis der Widerspruchsfreiheit anbetrifft, verwiesen; im allgemeinen ist ihre Kenntnis nicht wesentlich.

§ 1. Ein vereinfachtes Axiomensystem.

Das im ersten Teil aufgestellte Axiomensystem, das wir mit $\sum$ bezeichnen wollen, enthält die Aussageverknüpfungen &, ∨, —, →. Für die Ableitung eines wesentlichen Teiles der Mathematik ist nun ein Ausschnitt aus dem System ausreichend, der die Verknüpfung → nicht enthält. Da die Axiome in § 2 von Teil I aber sämtlich unter Verwendung von → formuliert sind, ist es am einfachsten, wenn wir uns zur Beschreibung dieses Ausschnitts der zweiten, in § 3 von Teil I angegebenen Form des Axiomensystems bedienen. Ein vereinfachtes System entsteht daraus, indem wir die Ableitungsschemata und die Grundformeln, die → enthalten, fortlassen. Die Widerspruchsfreiheit ist also auch jetzt gewährleistet. Damit ist das System schon beschrieben; wir wollen die Grundformeln und Schemata unten zusammenstellen. Die Begriffe „Formel" und „Term" sind die gleichen wie früher; nur werden die Formeln und Terme, die → enthalten, fortgelassen.

I. Grundformeln.

Als Grundformeln haben wir zunächst solche der Form $\varphi\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ und $\overline{\varphi\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n}$, wobei die $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ keine freie Variable enthalten. Hierbei ist φ ein n-stelliges spezielles Prädikatzeichen. Es gehört dazu eine effektive Einteilung aller n-tupel $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ von konstanten Termen in eine von zwei Klassen, wobei aber die Terme, die sich nur durch die Benennung der gebundenen Variablen unterscheiden, immer gleich behandelt werden müssen. $\varphi\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n$ ist Grundformel, falls $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ zur ersten Klasse gehört, sonst ist $\overline{\varphi\, \mathfrak{a}_1 \ldots \mathfrak{a}_n}$ Grundformel.

[1]) ACKERMANN, W.: Widerspruchsfreier Aufbau einer typenfreien Logik. (Erweitertes System.) Math. Z. **55**, 364—384 (1952).

II. Ableitungsregeln.

$$A_{I}.\ \frac{\Psi}{\Psi, \mathfrak{A}} \qquad A_{II}.\ \frac{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}}{\Psi, \mathfrak{A}} \qquad A_{III}.\ \frac{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \Theta}{\Psi, \mathfrak{B}, \mathfrak{A}, \Theta}$$

$$B_{I}.\ \frac{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}}{\Psi, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}} \qquad B_{II}.\ \frac{\Psi, \mathfrak{A} \quad \Psi, \mathfrak{B}}{\Psi, \mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}} \qquad B_{III}.\ \frac{\Psi, \mathfrak{A}}{\Psi, \overline{\overline{\mathfrak{A}}}}$$

$$B_{IV}.\ \frac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}}, \overline{\mathfrak{B}}}{\Psi, \overline{\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}} \qquad B_{V}.\ \frac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}} \quad \Psi, \overline{\mathfrak{B}}}{\Psi, \overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}} \qquad B_{VI}.\ \frac{\Psi, \mathfrak{A}(\mathfrak{a})}{\Psi, (Ex)\,\mathfrak{A}(x)}$$

$$B_{VII}.\ \frac{\Psi, \mathfrak{A}(a)}{\Psi, (x)\,\mathfrak{A}(x)} \qquad B_{VIII}.\ \frac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}(a)}}{\Psi, \overline{(Ex)\,\mathfrak{A}(x)}} \qquad B_{IX}.\ \frac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{a})}}{\Psi, \overline{(x)\,\mathfrak{A}(x)}}$$

$$B_{X}.\ \frac{\Psi, \mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}{\Psi, \{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)} \qquad B_{XI}.\ \frac{\Psi, \overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}}{\Psi, \overline{\{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}}$$

$$B_{XII}.\ \frac{\Psi, \mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}}{\Psi, \mathfrak{A}, \mathfrak{B}} \qquad B_{XIII}.\ \frac{\Psi, \mathfrak{A} \quad \Psi, \overline{\mathfrak{A}}}{\Psi}$$

Mit jedem Schema kann auch eine Umbenennung der gebundenen Variablen verbunden werden. Für die nähere Erläuterung der Schemata vgl. § 3 von Teil I. Die Anzahl der Schemata kann auch vermindert werden, indem man in bekannter Weise „und" durch „oder" und „(x)" durch „(Ex)" definiert oder umgekehrt.

III. Weitere Grundformeln.

Weitere Grundformeln erhalten wir in der folgenden Weise: Es sei $\mathfrak{A}(a)$ eine Formel, die die freie Variable a enthält. Für jeden konstanten Term $\mathfrak{a}$ lasse sich eine Herleitung für $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ aus den Grundformeln I mit Hilfe der obigen Schemata effektiv angeben. Dann dürfen wir $\mathfrak{A}(a)$ als weitere Grundformel hinzufügen, wobei wir statt der Variablen a ebensogut eine andere freie Variable nehmen können. Weiter dürfen wir auch Grundformeln $\mathfrak{A}(a)$ hinzufügen, falls bei der Ableitung von $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ auch Grundformeln der ebengenannten Art benutzt wurden, usw.

In dieser allgemeinen Weise ist aber die Bildung der Grundformeln III nur dann gestattet, falls die Schemata B_X und B_{XI} nicht zur Ableitung der Formeln $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ benutzt werden. Ist das der Fall, so muß die Bildung der Grundformeln III eine gewisse Einschränkung erfahren. Wir müssen dann wie in Teil I erläutert wurde, den Begriff des Rangs einer Formel verwenden. Grundformeln I haben den Rang 1. Bei den Ableitungsschemata ist, abgesehen von B_X und B_{XI}, der Rang einer Formel der Konklusion so wie der Rang der ihr entsprechenden Formel in der Prämisse, bzw. gleich dem größten Rang, der unter den ihr entsprechenden Formeln in den Prämissen vorkommt. Für B_X und B_{XI} gilt die gleiche Regel für Formeln der Reihe Ψ, während beim Übergang von $\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ zu $\{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ oder von $\overline{\mathfrak{A}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}$ zu $\overline{\{\hat{x}_1 \ldots \hat{x}_n\, \mathfrak{A}(x_1, \ldots, x_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)}$ der Rang sich um eins erhöht. Die nach obiger Art gewonnenen Grundformeln III sind nun als solche nur dann zulässig, wenn der Rang sämtlicher Formeln $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ bei den

zugehörigen Herleitungen eine bestimmte Rangzahl nicht übersteigt. Die größte Rangzahl von $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$, die bei einer Herleitung für $\mathfrak{A}(\mathfrak{a})$ vorkommt, heißt dann der Rang der betreffenden Grundformel III.

Wir wollen dieses einfache Axiomensystem mit Δ bezeichnen. Handelt es sich nur darum, einen Widerspruchsfreiheitsbeweis für Δ zu geben, so kann der in Teil I gegebene Widerspruchsfreiheitsbeweis natürlich wesentlich vereinfacht werden, da dann einfach alle Überlegungen, die Implikationsformeln betreffen — und das macht den Hauptumfang des Beweises aus — weggelassen werden können.

Das System Δ erlaubt kein volles Operieren mit den Formeln nach den Regeln des Prädikatenkalküls, da der Satz vom ausgeschlossenen Dritten nicht in voller Allgemeinheit vorhanden ist. Es hat aber die folgende Eigenschaft: Für die Theorie irgendeines Wissensgebietes seien uns die mit den Mitteln des engeren Prädikatenkalküls ausdrückbaren spezifischen Axiome gegeben. Diese Axiome seien sämtlich von der ersten Stufe, sollen also keine Prädikatvariable enthalten. In diesen Axiomen kommen verschiedene individuelle Grundprädikate (ein- oder mehrstellige) vor. Wir behaupten dann, alle Sätze der Theorie, die wir mit Hilfe des engeren Prädikatenkalküls aus den Axiomen ableiten können (es stehen nur Sätze in Frage, die ebenfalls nur die individuellen Grundprädikate, aber keine variablen Prädikate enthalten), können auch in unserem System Δ abgeleitet werden, falls wir zu den spezifischen Axiomen der Theorie noch weitere Axiome hinzufügen, die die Gültigkeit des Satzes vom ausgeschlossenen Dritten für jedes Grundprädikat ausdrücken, also Axiome der Form $\varphi\, a \vee \overline{\varphi\, a}$, $\psi\, a\, b \vee \overline{\psi\, a\, b}$, usw.

Es genügt zu zeigen, daß für alle Formeln $\mathfrak{A}$ ohne Prädikatvariable sich $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ beweisen läßt. Denn dann haben wir in unserem System, so weit die Formeln ohne freie Prädikatvariable in Frage kommen, die Möglichkeit, jeden Schluß der Prädikatenlogik auszuführen[2]). $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ läßt sich aber für die obigen Formeln durch Induktion nach dem Formelaufbau beweisen. Man erhält nämlich aus $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ nach B_{XII}, A_{III}, B_{III} und B_I $\overline{\mathfrak{A}} \vee \overline{\overline{\mathfrak{A}}}$. Aus $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B} \vee \overline{\mathfrak{B}}$ erhält man ferner nach B_{XII} $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, nach A_I und A_{III} $\mathfrak{A}$, $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{A}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$, nach B_{IV} und A_{III} $\overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$, $\mathfrak{A}$ und $\overline{\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}}$, $\mathfrak{B}$ und nach B_{II}, A_{III}, B_I $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}) \vee \overline{(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})}$. Ähnlich erhält man aus $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ und $\mathfrak{B} \vee \overline{\mathfrak{B}}$ auch $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \vee \overline{(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})}$. Ferner erhalten wir aus $\mathfrak{A}(a) \vee \overline{\mathfrak{A}(a)}$ nach B_{XII} $\mathfrak{A}(a)$, $\overline{\mathfrak{A}(a)}$, nach B_{IX} $\mathfrak{A}(a)$, $\overline{(x)\,\mathfrak{A}(x)}$, nach A_{III} und B_{VII} $\overline{(x)\,\mathfrak{A}(x)}$, $(x)\,\mathfrak{A}(x)$, nach A_{III} und B_I $(x)\,\mathfrak{A}(x) \vee \overline{(x)\,\mathfrak{A}(x)}$. Ebenso erhält man aus $\mathfrak{A}(a)$, $\overline{\mathfrak{A}(a)}$ nach A_{III} und B_{VI} $\overline{\mathfrak{A}(a)}$, $(Ex)\,\mathfrak{A}(x)$, nach A_{III} und B_{VIII} $(Ex)\,\mathfrak{A}(x)$, $\overline{(Ex)\,\mathfrak{A}(x)}$ und nach B_I $(Ex)\,\mathfrak{A}(x) \vee \overline{(Ex)\,\mathfrak{A}(x)}$.

Da der Kalkül Δ zusammen mit dem Satz vom ausgeschlossenen Dritten alle Schlüsse des Prädikatenkalküls enthält, läßt sich auch die Richtigkeit der folgenden Behauptung einsehen: Es sei eine Klasse von Formeln gegeben, so daß für jede Formel der Klasse der Satz vom ausgeschlossenen Dritten in

[2]) Vgl. z.B. SCHÜTTE, K.: Schlußweisenkalküle der Prädikatenlogik. Math. Ann. **122**, 47—65 (1950).

Δ beweisbar ist. Gewisse Formeln dieser Klasse seien Axiome. Alle Formeln der obigen Klasse, die sich aus den genannten Axiomen nach den Regeln der gewöhnlichen Prädikatenlogik ableiten lassen und zwar so, daß der Beweis wieder nur Formeln der Klasse enthält, lassen sich auch im System Δ gewinnen.

Die gleichen Behauptungen, die wir eben für das System Δ formulierten, gelten natürlich auch für unser gesamtes Axiomensystem $\sum$, da die Schemata von Δ zu in $\sum$ beweisbaren Regeln werden, wenn wir bei den Formelreihen die Kommata durch Disjunktionszeichen ersetzen und etwa nach links hin klammern.

§ 2. Ableitung der Zahlentheorie.

Für den Aufbau der Zahlentheorie brauchen wir die folgenden Grundprädikate: $\zeta\, a$ (a ist eine Zahl), $a \underset{\zeta}{=} b$ (a und b sind die gleichen Zahlen), $\alpha\, a\, b\, c$ (c entsteht aus a und b durch Addition), $\mu\, \alpha\, b\, c$ (c entsteht aus a und b durch Multiplikation), ferner einen Term 0, eine Termfunktion, die jedem Term $\mathfrak{a}$ einen anderen $\mathfrak{a}'$ zuordnet. Man kommt mit den folgenden Axiomen aus (vgl. HILBERT-BERNAYS, Grundlagen der Mathematik I, S. 371 und 465):

1. $\zeta\, 0$
2. $\overline{\zeta\, a} \vee \zeta\, a'$
3. $a \underset{\zeta}{=} a$
4. $\overline{a \underset{\zeta}{=} b} \vee \overline{\mathfrak{A}(a)} \vee \mathfrak{A}(b)$
5. $\overline{a' \underset{\zeta}{=} 0}$
6. $\overline{a' \underset{\zeta}{=} b'} \vee a \underset{\zeta}{=} b$
7. $\overline{\alpha\, a\, b\, c} \vee \overline{\alpha\, a\, b\, d} \vee c \underset{\zeta}{=} d$
8. $\alpha\, a\, 0\, a$
9. $\overline{\alpha\, a\, b\, c} \vee \alpha\, a\, b'\, c'$
10. $\overline{\mu\, a\, b\, c} \vee \overline{\mu\, a\, b\, d} \vee c \underset{\zeta}{=} d$
11. $\overline{\zeta\, a} \vee \mu\, a\, 0\, 0$
12. $\overline{\mu\, a\, b\, c} \vee \overline{\alpha\, c\, a\, d} \vee \mu\, a\, b'\, d$
13. $\overline{\mathfrak{A}(0)} \vee (Ex)\,(\mathfrak{A}(x) \,\&\, \zeta\, x \,\&\, \overline{\mathfrak{A}(x')}) \vee \overline{\zeta\, a} \vee \mathfrak{A}(a)$.

Wir müssen also die obigen Grundprädikate so in Δ definieren, daß diese Axiome beweisbar sind. Bei 4. und 13. ist es dabei nicht erforderlich, daß diese Formeln für beliebige $\mathfrak{A}$ beweisbar sind, sondern es genügt, wenn das für die Formeln $\mathfrak{A}$ zutrifft, deren Formelaufbau induktiv gemäß den folgenden Regeln geschieht: a) $\mathfrak{a} \underset{\zeta}{=} \mathfrak{b}, \zeta\, \mathfrak{a}, \mu\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}, \alpha\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}$ sind für beliebige Terme Formeln; b) aus Formeln entstehen wieder Formeln durch die Aussageverknüpfungen und die Quantoren. — Um alle Sätze der Zahlentheorie zu gewinnen, ist es ferner nach den Bemerkungen des vorigen Abschnitts nötig, die Formeln

$$a \underset{\zeta}{=} b \vee \overline{a \underset{\zeta}{=} b}, \quad \zeta\, a \vee \overline{\zeta}\, a, \quad \alpha\, a\, b\, c \vee \overline{\alpha\, a\, b\, c}, \quad \mu\, a\, b\, c \vee \mu\, \overline{a\, b\, c}$$

zu beweisen. Die Definition der Grundprädikate geschieht folgendermaßen: Wir führen zunächst das Zeichen $\equiv$ ein, wie schon in § 2 des ersten Teiles. Die Grundformeln für $\equiv$ spielen hier übrigens keine Rolle. o sei nun eine Abkürzung für den Term $\hat{x}\, x \equiv x$, $\mathfrak{a}'$ eine solche für $\hat{\mathfrak{v}}\,(\mathfrak{a}\ \mathfrak{v})$. Die Terme o, o', o'', ... und die daraus durch Umbenennung der gebundenen Variablen entstehenden Terme sollen Zahlzeichen heißen. (Bemerkung: Es ist hierbei

nicht an eine mengentheoretische Erklärung der Zahlen gedacht. Wir nehmen vielmehr, und das reicht für unsere Zwecke vollkommen aus, als Repräsentanten der Zahlen irgendeine abzählbare Reihe von Symbolen.) Als Mitteilungszeichen für die Zahlzeichen verwenden wir $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$. Die Definition für $\underset{\zeta}{=}$ sieht nun so aus: Für konstante $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ ist $\underset{\zeta}{=}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ Grundformel, falls $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ bis auf eine verschiedene Benennung der gebundenen Variablen formal die gleiche Gestalt haben und beide Zahlzeichen sind, während sonst $\overline{\underset{\zeta}{=}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}}$ Grundformel ist. Statt $\underset{\zeta}{=}\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}$ schreiben wir gewöhnlich $\mathfrak{a}\underset{\zeta}{=}\mathfrak{b}$. ζ, α, μ werden so definiert: Für einen konstanten Term $\mathfrak{a}$ ist $\zeta\,\mathfrak{a}$ Grundformel, falls $\mathfrak{a}$ ein Zahlzeichen ist, sonst ist $\overline{\zeta\,\mathfrak{a}}$ Grundformel. $\alpha\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ ist, $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ als konstante Terme vorausgesetzt, Grundformel, falls $\mathfrak{b}$ ein Zahlzeichen ist und $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{a}$ dadurch entsteht, daß die Striche von $\mathfrak{b}$ an $\mathfrak{a}$ angehängt werden, im übrigen gilt $\overline{\alpha\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}$. $\mu\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ ist Grundformel, falls $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ Zahlzeichen sind und $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b}$ nach den Regeln der gewöhnlichen Arithmetik gilt, falls $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ durch die entsprechenden natürlichen Zahlen ersetzt werden; in allen anderen Fällen gilt $\overline{\mu\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}}$. Die Formeln, die den Satz vom ausgeschlossenen Dritten für die Grundprädikate ausdrücken, lassen sich nun sofort als Grundformeln II gewinnen (vgl. die in Teil I gegebene Ableitung von $a \equiv b \vee \overline{a \equiv b}$). Ferner lassen sich auch die zahlentheoretischen Axiome beweisen. (1) ist Grundformel I. Die Axiome (2) bis (12) sind leicht als Grundformeln II zu gewinnen. [Bei der Ableitung von (4) werden die Schemata B_X und B_{XI} nicht gebraucht.] Die Formeln (13) lassen sich zunächst beweisen, da man ja die Schlüsse des Prädikatenkalküls zur Verfügung hat, falls für a ein bestimmtes Zahlzeichen $\mathfrak{z}$ gesetzt wird. Für andere konstante Terme, die für a eingesetzt werden, sind sie ebenfalls zu beweisen, da dann $\overline{\zeta\,\mathfrak{a}}$ Grundformel ist. Schemata B_X und B_{XI} werden dabei nicht gebraucht. Demnach gewinnt man (13) ebenfalls als Grundformeln II. Damit ist gezeigt, daß das System Δ zur Gewinnung der Zahlentheorie ausreicht.

§ 3. Die verzweigte Prädikatenlogik.

Sind uns in Δ gewisse individuelle Grundprädikte gegeben, für die sich der Satz vom ausgeschlossenen Dritten beweisen läßt, so lassen sich im Bereiche der Formeln, die man mit diesen Grundprädikaten aufbauen kann, alle Schlüsse der Prädikatenlogik ausführen, wie wir es schon in § 1 darlegten. Es gilt aber mehr. Wir zeigen, daß das System Δ uns auch ermöglicht, über dem gegebenen Grundbereich eine verzweigte Prädikatenlogik aufzubauen. — Wir wollen im folgenden eine verzweigte Logik über der Zahlentheorie aufbauen; man erkennt aber an den Ausführungen, daß die spezielle Wahl des Grundbereichs nicht wesentlich ist, sondern daß der Aufbau in der gleichen Weise über jedem anderen Grundbereich geschehen kann.

Wir führen zunächst den folgenden verengten Formelbegriff ein. Formeln sollen nur durch endliche Anwendung der folgenden Regeln erhalten werden: (1) $\mathfrak{a}\underset{\zeta}{=}\mathfrak{b}, \zeta\,\mathfrak{a}, \alpha\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}, \mu\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ sind für beliebige Terme Formeln; (2) aus Formeln

entstehen wieder Formeln durch die Aussageverknüpfungen und die Quantoren. Dabei sind $\underset{\zeta}{=}$, ζ, α, μ in der gleichen Weise definiert wie in § 2. Wir wollen die Formeln dieser Art zum Unterschied von weiter unten definierten *Formeln erster Art* nennen. Für die Formeln erster Art gilt der Satz vom ausgeschlossenen Dritten, wie schon in § 2 gezeigt wurde. Wir bemerken ferner, daß wir für jede Formel von Δ effektiv feststellen können, ob es sich um eine Formel erster Art handelt oder nicht. Als Abkürzung für Formeln erster Art verwenden wir $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ usw. Wir führen nun spezielle Prädikate τ_n^1 ein. $\tau_n^1 \mathfrak{a}$ soll für einen konstanten Term $\mathfrak{a}$ Grundformel sein, wenn $\mathfrak{a}$ die Form $\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}_1(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ hat; sonst soll $\overline{\tau_n^1 \mathfrak{a}}$ gelten. Offenbar läßt sich $\tau_n^1 a \vee \overline{\tau_n^1 a}$ beweisen, da dies eine Grundformel II ist. Ferner lassen sich die Formeln $\overline{\tau_n^1 a} \vee a\, b_1 \ldots b_n \vee \overline{a\, b_1 \ldots b_n}$ beweisen. Diese sind nämlich ebenfalls als Grundformeln II mit Hilfe der Schemata B_X und B_{XI} in der erlaubten Weise zu gewinnen, da für die Formeln erster Art der Satz vom ausgeschlossenen Dritten beweisbar ist.

Wir definieren weiter Formeln *zweiter Art* und wollen wieder die Definition so gestalten, daß für jede Formel effektiv feststellbar ist, ob es sich um eine Formel zweiter Art handelt oder nicht. Zunächst erklären wir einen weiteren Formelbegriff, aus dem sich die Formeln zweiter Art durch eine besondere Eigenschaft herausheben.

(1) $\mathfrak{a} \underset{\zeta}{=} \mathfrak{b}$, $\zeta\, \mathfrak{a}$, $\alpha\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}$, $\mu\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}$, $\{\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}_1(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$, $\tau_m^1 \hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ sind Formeln; die in ihnen etwa vorkommenden freien Variablen heißen Variable der ersten Klasse;

(2) $\tau_n^1 a$, $\tau_n^1 b$, usw. sind Formeln, die in ihnen vorkommenden Variablen sind solche der ersten Klasse;

(3) $a\, \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_n$, $b\, \mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_n$, usw. sind für beliebige Terme $\mathfrak{b}_1, \ldots, \mathfrak{b}_n$ Formeln. Die Variablen a, b, usw. heißen Variable der zweiten Klasse, etwa sonst vorkommende freie Variable solche der ersten Klasse.

(4) Mit $\mathfrak{A}$ ist $\overline{\mathfrak{A}}$ Formel, die Variablen behalten dabei ihren Charakter.

(5) Mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind $\mathfrak{A} \& \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$ Formeln. Freie Variable sind dabei von der ersten Klasse, falls sie in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von der ersten Klasse vorkommen. (In einer Formel fehlende Variable rechnen dabei zur ersten Klasse.) Sonst rechnen die freien Variablen zur zweiten Klasse. Eine Ausnahme bilden die Formeln $\tau_n^1 a \,\&\, \mathfrak{A}(a)$ und $\overline{\tau_n^1 a} \vee \mathfrak{A}(a)$ bezüglich der Variablen a (oder entsprechend für anders benannte Variable). Bei diesen rechnet die Variable a immer zur ersten Klasse.

(6) Ist $\mathfrak{A}(a)$ Formel, so sind $(Ex)\,(\tau_n^1 x \,\&\, \mathfrak{A}(x))$ und $(x)\,(\overline{\tau_n^1 x} \vee \mathfrak{A}(x))$ Formeln. Hier vorkommende freie Variable gehören zur gleichen Klasse wie in $\mathfrak{A}(a)$. (Selbstverständlich müssen alle Formeln so gebildet sein, daß sie überhaupt Formeln des Formalismus Δ darstellen.)

Die Formeln *zweiter Art* werden nun folgendermaßen definiert: Wir schließen zunächst die Formeln aus und verwenden sie auch nicht zum Aufbau anderer

Formeln, in denen eine Variable zweiter Klasse, z.B. a, gleichzeitig in der Form $a\,\mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_m$ und $a\,\mathfrak{c}_1 \dots \mathfrak{c}_n$ $(m \neq n)$, oder auch gleichzeitig in der Form $a\,\mathfrak{b}_1 \dots \mathfrak{b}_m$ und $\tau_n^1 a\,(m \neq n)$ auftritt. Jede in einer Formel vorkommende Variable zweiter Klasse hat danach eindeutig den Charakter eines einstelligen, zweistelligen usw. Prädikates. Unter den übrigbleibenden Formeln sind nun diejenigen zweiter Art, die keine freie Variable der zweiten Klasse enthalten.

Für die Formeln zweiter Art läßt sich der Satz vom ausgeschlossenen Dritten beweisen. Wir beweisen diesen Satz zusammen mit einem anderen, der allgemeiner die Formeln der obigen Definition betrifft, jedoch nur solche, bei denen eine Variable der zweiten Klasse eindeutig den Charakter eines Prädikates mit einer bestimmten Anzahl von Leerstellen hat. Die beiden Sätze heißen:

I. Für eine Formel $\mathfrak{A}$ ohne freie Variable der zweiten Klasse ist $\mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$ beweisbar. II. Für eine Formel $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_k)$ mit den einzigen Variablen zweiter Klasse $a_1, a_2, \dots, a_k$ ist $\overline{\tau_{n_1}^1 a_1} \vee \dots \vee \overline{\tau_{n_k}^1 a_k} \vee \mathfrak{A}(a_1, \dots, a_k) \vee \overline{\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_k)}$ beweisbar, wenn die $a_1, \dots, a_k$ in $\mathfrak{A}(a_1, \dots, a_k)$ als n_1-, $\dots$, n_k-stellige Prädikate auftreten. — Die beiden Sätze werden durch simultane Induktion nach dem Formelaufbau bewiesen. — Für die Formeln (1) und (2) der obigen Definition kommt nur Satz I in Frage, der für diese Fälle schon früher bewiesen war, bzw. sich aus schon bewiesenen Sätzen sofort ergibt. Desgleichen war für die Formeln (3) Satz II schon bewiesen. Bei den Formeln, die nach (4) bis (6) gebildet sind, also die Form $\overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B}$, $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, $(Ex)\,(\tau_n^1 x \,\&\, \mathfrak{A}(x))$, $(x)\,(\overline{\tau_n^1 x} \vee \mathfrak{A}(x))$ haben, gilt, falls Variable zweiter Klasse $a_1, \dots, a_k$ vorkommen, nach Voraussetzung $\overline{\tau_{n_1}^1 a_1} \vee \dots \vee \overline{\tau_{n_k}^1 a_k} \vee \mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{A}}$, bzw. außerdem $\overline{\tau_{n_1}^1 a_1} \vee \dots \vee \overline{\tau_{n_k}^1 a_k} \vee \mathfrak{B} \vee \overline{\mathfrak{B}}$, bzw. $\overline{\tau_{n_1}^1 a_1} \vee \dots \vee \overline{\tau_{n_k}^1 a_k} \vee \overline{\tau_m^1 b} \vee \mathfrak{A}(b) \vee \overline{\mathfrak{A}(b)}$, woraus sich leicht mit Hilfe der Regeln von Δ der Satz II für die neuen Formeln ergibt. Beim Falle (6) ist dabei zu benutzen, daß $\tau_m^1 b \vee \overline{\tau_m^1 b}$ beweisbar ist. Handelt es sich um Formeln ohne freie Variable der zweiten Klasse, so beweist sich Satz I entsprechend. Bei den nach (5) gebildeten Formeln der Form $\tau_n^1 a \,\&\, \mathfrak{A}(a)$ und $\overline{\tau_n^1 a} \vee \mathfrak{A}(a)$ und den nach (6) gebildeten Formeln ist dabei wieder $\tau_n^1 a \vee \overline{\tau_n^1 a}$ zu benutzen.

Nachdem wir den Satz vom ausgeschlossenen Dritten für Formeln zweiter Art (im folgenden mit $\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2, \dots$ bezeichnet) bewiesen haben, können wir weiter spezielle Prädikate τ_n^2 einführen. $\tau_n^2 \mathfrak{a}$ ist für konstante $\mathfrak{a}$ Grundformel, wenn $\mathfrak{a}$ die Form $\hat{\mathfrak{v}}_1 \dots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}_2(\mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_n)$ hat. Sonst ist $\overline{\tau_n^2 \mathfrak{a}}$ Grundformel. Es lassen sich dann wieder $\tau_n^2 a \vee \overline{\tau_n^2 a}$ und $\overline{\tau_n^2 a} \vee a\, b_1 \dots b_n \vee \overline{a\, b_1 \dots b_n}$ beweisen. Weiter können wir Formeln dritter Art einführen. Der Formelaufbau ist wie bei den Formeln zweiter Art, nur kommen bei (1) die folgenden Vorschriften hinzu: $\{\hat{\mathfrak{v}}_1 \dots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}_2(\mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_n)\}(\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n)$ und $\tau_n^2 \hat{\mathfrak{v}}_1 \dots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}_2(\mathfrak{v}_1, \dots, \mathfrak{v}_n)$ sind Formeln, in denen nur Variable der ersten Klasse vorkommen. Bei (2) sind noch $\tau_n^2 a$, $\tau_n^2 b, \dots$ Formeln, in denen nur Variable der ersten Klasse vorkommen. (5) und (6) sind entsprechend zu erweitern. Entsprechend gelangen wir zu Formeln höherer Art und zugehörigen Prädikaten τ_n^m.

Wir wollen ferner an einem Beispiel zeigen, daß das Axiom der Extensionalität in der Form, wie es in der verzweigten Logik auftritt, beweisbar ist. Wir bezeichnen zur Abkürzung den Ausdruck $(x)(\overline{a\,x} \vee b\,x \,\&\, a\,x \vee \overline{b\,x})$ mit $a \sim b$ und wollen die folgende Formel beweisen:

$$\overline{\tau_1^1 a} \vee \overline{\tau_1^1 b} \vee \overline{a \sim b} \vee \overline{\tau_2^1 c} \vee \overline{c\,a} \vee c\,b.$$

Wir können diese Formel als Grundformel II gewinnen, wenn wir sie für den Fall beweisen, daß für a, b, c konstante Terme $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ eingesetzt werden. Bei den $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ können wir uns auf solche Terme beschränken, für die $\tau_1^1\mathfrak{a}$, $\tau_1^1\mathfrak{b}$, $\tau_1^2\mathfrak{c}$ beweisbar sind. Demnach haben wir nur zu zeigen, daß

$$\overline{\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x) \sim \hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x)} \vee \overline{\{\hat{x}\,\mathfrak{C}_2(x)\}\,(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x))} \vee \{\hat{x}\,\mathfrak{C}_2(x)\}\,(\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x))$$

abgeleitet werden kann.

Der Beweis geschieht durch Induktion nach dem Formelaufbau von $\mathfrak{C}_2$. Da durch den Formelaufbau auch Formeln mit freien Variablen der zweiten Klasse entstehen, müssen wir ähnlich wie bei Satz I und II der vorigen Seite den Satz auch auf diese Formeln ausdehnen, die wir zur Abkürzung mit $\mathfrak{C}_2'$ bezeichnen. Wir zeigen also die Beweisbarkeit der Formeln

$$* \; \overline{\tau_{n_1}^1 a_1} \vee \ldots \vee \overline{\tau_{n_k}^1 a_k} \vee \overline{\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x) \sim \hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x)} \vee \overline{\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x))} \vee \mathfrak{C}_2'\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x),$$

wobei $a_1, \ldots, a_n$ die in $\mathfrak{C}_2'$ vorkommenden Variablen der zweiten Klasse sind. Der Fall, daß diese Variablen in $\mathfrak{C}_2'$ und in $*$ die Disjunktionsglieder $\overline{\tau_{n_i}^1 a_i}$ fehlen, soll eingeschlossen sein. $\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x)$ und $\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x)$ sind konstante Terme. Aus $*$ erhält man durch B_X und B_{XI} die obige zu beweisende Formel.

Wir bemerken zunächst, daß $\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x)$ und $\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x)$ keine Zahlzeichen sind, da sie ja eines der Zeichen $\underset{\zeta}{-}$, ζ, α, μ enthalten, die in Zahlzeichen nicht vorkommen. Hat daher $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x))$ und also auch $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x))$ eine der Formen $\zeta\,\mathfrak{d}$, $\mathfrak{d}\,\underset{\zeta}{-}\mathfrak{e}$, $\alpha\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}$, $\mu\,\mathfrak{d}\,\mathfrak{e}\,\mathfrak{f}\,\mathfrak{g}$, so ist $*$ beweisbar, da $\overline{\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x))}$ beweisbar ist. Das gilt auch für den Fall, daß $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x))$ und $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x))$ freie Variable enthalten. Weiter ist leicht einzusehen, daß die Beweisbarkeit der Formeln $*$ beim Aufbau der Formeln mit Hilfe der Zeichen $-$, $\&$, $\vee$, (Ex), (x) erhalten bleibt. Demnach gilt also $*$ zunächst allgemein, falls $\mathfrak{C}_2'$ eine Formel erster Art ist, daher auch infolge B_X und B_{XI}, falls $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x))$ und $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x))$ die Form $\{\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n\,\mathfrak{A}_1(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)\}(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n)$ haben. Da $\tau_n^1\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n\,\mathfrak{A}_1(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$, bzw. $\tau_m^1\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n\,\mathfrak{A}_1(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ $(m \neq n)$ beweisbar ist, gilt die Behauptung für alle Formeln, die die in der Regel (1) beim Aufbau der Formeln zweiter Art genannte Gestalt haben. Weiter gilt sie für die Formeln der Gestalt (2), da entweder $\tau_n^1(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1'(x))$ und $\tau_n^1(\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x))$ oder $\overline{\tau_n^1\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x)}$ und $\overline{\tau_n^1\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x)}$ beide beweisbar sind, je nachdem $n = 1$ oder $n \neq 1$. Hat $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x))$ die in (3) angegebene Gestalt, also die Form $a\,\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_m$ und $\mathfrak{C}_2'(\hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x))$ die entsprechende Gestalt $a\,\mathfrak{b}_1' \ldots \mathfrak{b}_m'$, so ist $\overline{\tau_n^1 a} \vee \overline{\hat{x}\,\mathfrak{A}_1(x) \sim \hat{x}\,\mathfrak{B}_1(x)} \vee a\,\mathfrak{b}_1 \ldots \mathfrak{b}_m \vee a\,\mathfrak{b}_1' \ldots \mathfrak{b}_m'$ als Grundformel II beweisbar. Denn die Formel braucht nur bewiesen zu werden,

falls für a ein Term $\hat{\mathfrak{v}}_1 \ldots \hat{\mathfrak{v}}_n \mathfrak{A}(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ eingesetzt wird. $\mathfrak{C}_2'$ hat dann aber eine schon vorher behandelte Gestalt. Ferner ist bei den Regeln (4) bis (6) leicht einzusehen und teilweise schon gezeigt, daß sie wieder zu Formeln $\mathfrak{C}_2'$ führen, für die die Behauptung stimmt.

Wir haben nun alle Mittel an der Hand, um eine verzweigte Prädikatenlogik aufzubauen. Diese, die an und für sich eine mehrsortige Theorie ist, kann im gewöhnlichen Prädikatenkalkül durch sortenbeschränkte Formeln wiedergegeben werden, und zwar kann jeder Beweis der verzweigten Logik so wiedergegeben werden, daß er nur sortenbeschränkte Formeln benutzt[3]). Nun haben wir in den τ_n^m gerade die nötigen Sortenprädikate zur Verfügung. Ein Beweis für eine Formel n. Art kann so geführt werden, daß er nur Formeln n. Art benutzt. Da aber für Formeln n. Art der Satz vom ausgeschlossenen Dritten gilt, ist unser System Δ imstande, alle Schlußweisen der verzweigten Logik wiederzugeben. Die spezifischen Axiome der mehrsortigen Theorie, als welche Extensionalitätsaxiom und Komprehensionsaxiom zu rechnen wären, sind beweisbar. Die wiedergegebene verzweigte Logik ist eine solche, die nur den Begriff der Ordnung, aber nicht den der Stufe kennt.

§4. Einführung der rationalen und der reellen Zahlen.

Wir wollen die rationalen Zahlen nicht mit Hilfe irgendwelcher zahlentheoretischen Relationen einführen, sondern durch ein direktes Repräsentantensystem. Wir gehen dabei ähnlich vor wie bei der Einführung der natürlichen (bzw. nichtnegativen) ganzen Zahlen. Hier repräsentierten $\hat{x}(x = x)$, $\hat{y}(\{\hat{x}(x = x)\}(y))$, usw. diese Zahlen, wobei die Benennung der gebundenen Variablen gleichgültig war. Ebenso hätten wir auch irgendeine andere abzählbare Reihe von konstanten Termen zur Repräsentation wählen können. In gleicher Weise können wir die rationalen Zahlen durch irgendeine Termreihe repräsentieren, bei der jeder Term eine eineindeutige Beziehung zu einem geordneten Paar von gewöhnlichen Zahlen hat. Wir gehen demnach folgendermaßen vor: $\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots$ mögen wieder irgendwelche nichtnegative ganze Zahlen, d.h. genauer die Terme, die diese Zahlen bei uns repräsentieren, bedeuten. Wir führen nun ein spezielles Prädikat ϱ („ist eine rationale Zahl") ein. Für einen konstanten Term $\mathfrak{a}$ ist $\varrho\,\mathfrak{a}$ Grundformel, wenn $\mathfrak{a}$ die Gestalt $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{z}_1 \,\&\, \mathfrak{v} = \mathfrak{z}_2)$, aber $\mathfrak{z}_2$ nicht die Form $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{v})$ hat, oder wenn $\mathfrak{a}$ die Gestalt $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{z}_1 \vee \mathfrak{v} = \mathfrak{z}_2)$ hat, aber weder $\mathfrak{z}_1$ noch $\mathfrak{z}_2$ die Form $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{v})$ haben; für andere konstante Terme ist $\overline{\varrho\,\mathfrak{a}}$ Grundformel. Für die Terme $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{z}_1 \,\&\, \mathfrak{v} = \mathfrak{z}_2)$ bzw. $\hat{\mathfrak{v}}(\mathfrak{v} = \mathfrak{z}_1 \vee \mathfrak{v} = \mathfrak{z}_2)$ gebrauchen wir im folgenden, so weit sie die Eigenschaft ϱ haben, die Abkürzungen $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$ bzw. $\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$. Mit 0_ϱ bezeichnen wir den Term $\mathfrak{p}(0, 0')$, mit 1_ϱ den Term $\mathfrak{p}(0', 0')$. Weitere spezielle Prädikate, die wir

[3]) Vgl. hierüber und über die äquivalente Wiedergabe von mehrsortigen Theorien durch sortenbeschränkte Formeln in der üblichen Prädikatenlogik A. Schmidt, Die Zulässigkeit der Behandlung mehrsortiger Theorien mittels der üblichen einsortigen Prädikatenlogik [Math. Ann. **123**, 187—200 (1951)]. — Die dort verlangte Bedingung, daß zu jeder Sorte ein passendes Individuum existiert, ist hier erfüllt.

einführen, sind $\mathfrak{a} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a} \underset{\varrho}{<} \mathfrak{b}$, $\alpha_\varrho\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}$, $\mu_\varrho\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}$. Bei diesen Prädikaten sind für konstante Terme die folgenden Formeln Grundformeln:

(1) $$\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) \underset{\varrho}{=} \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4) \quad \text{und} \quad \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) \underset{\varrho}{=} \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4)$$

falls $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_4 = \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_3$. Das letzte ist hier so zu verstehen, daß die Beziehung im Sinne der gewöhnlichen Arithmetik richtig ist, falls $\mathfrak{z}_1, \ldots, \mathfrak{z}_4$ durch die Zahlen, die sie repräsentieren, ersetzt werden. Entsprechend sind die Angaben bei den folgenden Grundformeln zu verstehen.

(2) $\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) \underset{\varrho}{<} \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2)$; $\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) \underset{\varrho}{<} \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4)$, falls $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_4 < \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_3$.

$\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2) \underset{\varrho}{<} \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4)$, falls $\mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_3 < \mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_4$.

(3) $\alpha_\varrho(\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$ und $\alpha_\varrho(\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$

falls $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_4 \cdot \mathfrak{z}_6 + \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_3 \cdot \mathfrak{z}_6 = \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_4 \cdot \mathfrak{z}_5$; $\alpha_\varrho(\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$

und $\alpha_\varrho(\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$, falls $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_4 \cdot \mathfrak{z}_6 = \mathfrak{z}_2\, \mathfrak{z}_3\, \mathfrak{z}_6 + \mathfrak{z}_2\, \mathfrak{z}_4\, \mathfrak{z}_5$.

$\alpha_\varrho(\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$ und $\alpha_\varrho(\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$,

falls $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_4 \cdot \mathfrak{z}_6 + \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_4 \cdot \mathfrak{z}_5 = \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_3 \cdot \mathfrak{z}_6$.

(4) $\mu_\varrho(\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$ und $\mu_\varrho(\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$

und $\mu_\varrho(\mathfrak{p}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$ und $\mu_\varrho(\mathfrak{n}(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2), \mathfrak{p}(\mathfrak{z}_3, \mathfrak{z}_4), \mathfrak{n}(\mathfrak{z}_5, \mathfrak{z}_6))$,

falls $\mathfrak{z}_1 \cdot \mathfrak{z}_3 \cdot \mathfrak{z}_6 = \mathfrak{z}_2 \cdot \mathfrak{z}_4 \cdot \mathfrak{z}_5$.

In allen anderen Fällen sind für konstante $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ $\overline{\mathfrak{a} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{b}}$, $\overline{\mathfrak{a} \underset{\varrho}{<} \mathfrak{b}}$, $\overline{\alpha_\varrho\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}}$, $\overline{\mu_\varrho\, \mathfrak{a}\, \mathfrak{b}\, \mathfrak{c}}$ Grundformeln. Es lassen sich dann leicht die Formeln $a \underset{\varrho}{=} b \vee \overline{a \underset{\varrho}{=} b}$, $a \underset{\varrho}{<} b \vee \overline{a \underset{\varrho}{<} b}$, $\alpha_\varrho\, a\, b\, c \vee \overline{\alpha_\varrho\, a\, b\, c}$, $\mu_\varrho\, a\, b\, c \vee \overline{\mu_\varrho\, a\, b\, c}$ als Grundformeln II gewinnen, in der gleichen Weise auch alle Axiome für die Theorie der rationalen Zahlen, z. B. die Sätze über die Kommutativität, Assoziativität von Multiplikation und Addition, die über die Transitivität von $\underset{\varrho}{=}$ und $\underset{\varrho}{<}$ usw. Wir brauchen das nicht im einzelnen auszuführen. Die betreffenden Formeln sind für konstante Terme, die für die Variablen eingesetzt werden, unmittelbar aus den Grundformeln für $\underset{\varrho}{=}$, $\underset{\varrho}{<}$, α_ϱ, μ_ϱ zu beweisen, so daß sich die Formeln mit Variablen als Grundformeln II gewinnen lassen, in der gleichen Weise, wie wir schon die zahlentheoretischen Axiome erhielten.

Es darf uns hierbei nicht stutzig machen, daß z. B. die beiden Brüche $\mathfrak{z}_1/\mathfrak{z}_2$ und $\mathfrak{z}_2/\mathfrak{z}_1$ durch die beiden Terme $\hat{x}(x \equiv \mathfrak{z}_1 \,\&\, x \equiv \mathfrak{z}_2)$ und $\hat{x}(x \equiv \mathfrak{z}_2 \,\&\, x \equiv \mathfrak{z}_1)$ wiedergegeben werden, die doch inhaltlich die gleiche Bedeutung haben. Die beiden Terme treten bei unserem Aufbau der Rationalzahlen als zwei verschiedene Zeichengruppen und als sonst nichts auf. Für die beiden Terme läßt sich die Verschiedenheit im Sinne von $\equiv$, wie im Sinne von $\underset{\varrho}{=}$ beweisen. Unser System ist also nicht extensional. Unsere Einführung der Rational-

zahlen, ebenso wie der natürlichen Zahlen, hat metamathematischen Charakter. Allerdings ist die benötigte Metalogik in dem Formalismus selbst enthalten.

Über dem Grundbereich der Rationalzahlen läßt sich nun eine verzweigte Prädikatenlogik aufbauen. Wir brauchen diese hier nicht im einzelnen zu entwickeln. Sie wird genau so aufgebaut wie die verzweigte Logik über der Zahlentheorie, die wir in § 3 beschrieben. An die Stelle der Grundprädikate $\mathfrak{a} \underset{\zeta}{=} \mathfrak{b}$, $\zeta\,\mathfrak{a}$, $\alpha\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, $\mu\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$ in § 3 treten hier die Grundprädikate $\mathfrak{a} \underset{\varrho}{=} \mathfrak{b}$, $\varrho\,\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a} \underset{\varrho}{<} \mathfrak{b}$, $\alpha_\varrho\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$, $\mu_\varrho\,\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}$. Die Prädikate τ_n^m haben jetzt natürlich eine andere Bedeutung und müßten, wenn sie mit den früheren τ_n^m zugleich aufträten, durch einen anderen Buchstaben als τ bezeichnet werden.

Für die Definition der *reellen Zahlen* ist vom logischen Standpunkt aus die Schnittdefinition die geeignetste. Im Sinne der verzweigten Analysis gibt es nur reelle Zahlen verschiedener Ordnungen. Bezeichnen wir zur Abkürzung mit $\mathfrak{A}(z)$ die Formel $(Ex)\,(\varrho\,x \,\&\, z\,x) \,\&\, (Ex)\,(\varrho\,x \,\&\, \overline{z\,x})$, mit $\mathfrak{B}(z)$ die Formel $(x)\,\big(\overline{z\,x} \vee (Ey)\,(x \underset{\varrho}{<} y \,\&\, z\,y)\big)$ und mit $\mathfrak{C}(z)$ die Formel $(x)\,\big(\overline{z\,x} \vee (y)\,(\overline{y \underset{\varrho}{<} x} \vee z\,y)\big)$, so würde die Aussage „$z$ ist eine reelle Zahl der n. Ordnung“ durch $\mathfrak{A}(z) \,\&\, \mathfrak{B}(z) \,\&\, \mathfrak{C}(z) \,\&\, \tau_1^n\,z \,\&\, (x)\,(\overline{z\,x} \vee \varrho\,x)$ wiedergegeben werden. Bezeichnen wir diese Formel mit $\mathfrak{R}^n z$, so läßt sich $\mathfrak{R}^n a \vee \overline{\mathfrak{R}^n a}$ beweisen.

Läßt man in $\mathfrak{R}^n a$ das Konjunktionsglied $\tau_1^n a$ fort und setzt dafür $(x)\,(a\,x \vee \overline{a\,x})$, so können wir den veränderten Ausdruck, den wir mit $\mathfrak{R}\,a$ bezeichnen, lesen als: „a ist eine reelle Zahl“. Offenbar läßt sich in Δ, da $\overline{\tau_1^n a} \vee a\,b \vee \overline{a\,b}$ beweisbar ist, auch $\overline{\mathfrak{R}^n a} \vee \mathfrak{R}\,a$ ableiten, d.h. jede reelle Zahl n. Ordnung ist eine reelle Zahl. Die Gleichheit und Größerkleinerbeziehung kann in der üblichen Weise definiert werden, indem wir unter $a \underset{r}{=} b$ und $a \underset{r}{<} b$ Abkürzungen für

$$\mathfrak{R}\,a \,\&\, \mathfrak{R}\,b \,\&\, (x)\,(\overline{a\,x} \vee b\,x \,\&\, a\,x \vee \overline{b\,x})$$

und

$$\mathfrak{R}\,a \,\&\, \mathfrak{R}\,b \,\&\, (Ex)\,(\overline{a\,x} \,\&\, b\,x)$$

verstehen. $\mathfrak{A}\mathfrak{d}\,a\,b\,c$ („die reelle Zahl c entsteht aus a und b durch Addition“) soll eine Abkürzung für

$$\mathfrak{R}\,a \,\&\, \mathfrak{R}\,b \,\&\, \mathfrak{R}\,c \,\&\, (z)\,\big(c\,z \sim (Ex)\,(Ey)\,(a\,x \,\&\, b\,y \,\&\, \alpha_\varrho\,x\,y\,z)\big)$$

bedeuten, wo $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$ für $\overline{\mathfrak{A}} \vee \mathfrak{B} \,\&\, \mathfrak{A} \vee \overline{\mathfrak{B}}$ steht. $\mathfrak{M}\mathfrak{u}\,a\,b\,c$ („die reelle Zahl c entsteht aus a und b durch Multiplikation“) ist eine Abkürzung für

$$(z)\,\big((\overline{c\,z} \sim (a\,0_\varrho \sim b\,0_\varrho) \,\&\, a\,0_\varrho \vee b\,0_\varrho \vee (E\,x)\,(x \underset{\varrho}{<} z \,\&\, \overline{c\,x})\big) \sim$$
$$\sim (Ex)\,(Ey)\,\big((a\,x \sim \overline{a\,0_\varrho}) \,\&\, (b\,y \sim \overline{b\,0_\varrho}) \,\&\, \mu_\varrho\,x\,y\,z)\big)$$

(vgl. die Definition von 0_ϱ zu Eingang dieses Paragraphen). Unsere Überlegungen in § 3, entsprechend übertragen, zeigen nun, daß unser Formalismus zum Aufbau der verzweigten Analysis ausreicht. Der wichtigste Unterschied

gegenüber der gewöhnlichen Analysis liegt darin, daß eine Quantifizierung nur über den Bereich der reellen Zahlen einer bestimmten Ordnung wieder eine reelle Zahl, und zwar eine solche von höherer Ordnung liefert. Zum Beispiel wird eine Menge m von reellen Zahlen n. Ordnung durch einen Term $\mathfrak{m}$ mit den Eigenschaften $\overline{\mathfrak{m}\,a} \vee \mathfrak{R}^n a$ und $\tau_1^{n+1}\,\mathfrak{m}$ wiedergegeben. Die obere Grenze dieser Menge wird durch den Term $\hat{x}(Ey)\,(\tau^n y \,\&\, y\,x \,\&\, \mathfrak{m}\,y)$ dargestellt, der die Eigenschaft $\mathfrak{R}^{n+1}$ hat. Eine Entwicklung der verzweigten Analysis im einzelnen soll hier nicht gegeben werden[4]). Wir konstatieren nur die bemerkenswerte Tatsache, daß das einfache System Δ zum Aufbau der verzweigten Analysis ausreicht.

[4]) Daß man mit Hilfe der verzweigten Analysis einen beträchtlichen Teil der Analysis überhaupt, zum Teil in etwas modifizierter Form erhält, darüber vgl. z.B. P. LORENZEN, Die Widerspruchsfreiheit der klassischen Analysis [Math. Z. **54**, 1—24 (1951)].

Lüdenscheid, Sauerfelderstr. 22.

(Eingegangen am 23. Juni 1952.)