Werk

Titel: Der symmetrische Kreisel bei zeitfester Drehkraft.

Autor: Bödewadt, U.T.

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0055|log53

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 310—320 (1952).

Der symmetrische Kreisel bei zeitfester Drehkraft.

Von

U. T. Bödewadt in Brunoy (Frankreich).

Einleitung.

Die einzelnen Gleichungen für den kräftefreien Kreisel lassen sich (z. B.) durch die JACOBIschen elliptischen Funktionen lösen. Das Problem, welches vom mathematischen Standpunkt aus dann am nächsten liegt, sind die EULERschen Gleichungen mit nicht verschwindender konstanter Drehkraft[1]). Diese Aufgabe ist (nach Kenntnis des Verf.) bisher nicht behandelt worden, offenbar weil man ihr keinen physikalischen Sinn zu geben hatte. Denn Unveränderlichkeit der Drehkraft in den EULERschen Gleichungen bedeutet, da diese sich auf das körperfeste System der Hauptträgheitsachsen beziehen, daß diese Drehkraft ihre Richtung ständig entsprechend der Drehbewegung des ganzen Körpers ändert, also mit dem Körper fest verbunden ist. Das mag früher wohl unsinnig erschienen sein. Nachdem aber inzwischen Rückstoßantriebe eine übliche Vorstellung geworden sind und auch ihre Verwendung zur Beeinflussung von Drehbewegungen, etwa für die Steuerung von Raumschiffen, in das Blickfeld der Technik getreten ist, hat das oben genannte Problem durchaus seine Bedeutung. Es soll nachstehend für den (technisch auch vorläufig bedeutsamsten) Fall des symmetrischen Kreisels behandelt werden, da hier eine teilweise Entkopplung der Kreiselgleichungen eintritt, welche die Aufgabe leicht angreifen läßt. Der Fall des unsymmetrischen Kreisels bietet demgegenüber größere Schwierigkeiten.

In Abschnitt 1 wird der Zeitverlauf der Drehgeschwindigkeit ermittelt, in Abschnitt 3 dann das Gesetz der Drehbewegung selbst berechnet, nachdem in Abschnitt 2 Formeln zur Beschreibung beliebiger Drehungen zusammengestellt wurden. Bei der Integration der Bewegungsgleichungen treten die FRESNELschen Integrale auf.

1. Die Drehgeschwindigkeit des Kreisels.

Es seien A die äquatoriale und C die polare Drehmasse eines symmetrischen Kreisels, u, v die Drehgeschwindigkeiten um zwei (zueinander senkrechte) Äquatorachsen und w die Drehgeschwindigkeit

[1]) Es werden die in der letzten Auflage des Buches „Der Kreisel" von R. GRAMMEL gewählten Ausdrücke Drehkraft, Drehmasse usw. benutzt.

um die Polachse (Figurenachse). Wenn um die gewählten Hauptträgheitsachsen nun von der Zeit t_1 an die in Bezug auf das körperfeste System unveränderlichen Drehkräfte P, Q, R wirken, so lauten die EULERschen Gleichungen:

$$\begin{aligned} A\dot{u} - (A-C)\,v\,w &= P, \\ A\dot{v} + (A-C)\,u\,w &= Q, \\ C\dot{w} \qquad\qquad\quad &= R. \end{aligned} \tag{1}$$

Wir benutzen die Bezeichnungen

$$1 - \frac{C}{A} = h; \quad \frac{P}{A} = p, \ \frac{Q}{A} = q, \ \frac{R}{C} = r; \quad \sigma = \operatorname{sgn} h r. \tag{2}$$

Wir setzen zunächst $A \neq C$, also $h \neq 0$ voraus. Im Fall des Kugelkreisels ($h = 0$) sind die Drehungen um die drei Achsen gänzlich entkoppelt; die dazu gehörigen Ergebnisse werden jeweils am Ende der einzelnen Abschnitte aufgeführt. Dann lauten die Gleichungen (1) jetzt

$$\begin{aligned} \dot{u} - h\,v\,w &= p, \\ \dot{v} + h\,u\,w &= q, \\ \dot{w} \qquad\quad &= r. \end{aligned} \tag{3}$$

Die letzte dieser Gleichungen ergibt sofort die Lösung

$$w = w_1 + r(t - t_1). \tag{4}$$

Bei Einführung der komplexen Veränderlichen

$$\omega = u + i\,v; \quad \omega_1 = \omega(t_1) = u_1 + i\,v_1 \tag{5}$$

lassen sich die beiden ersten Gleichungen (3) zusammenfassen:

$$\dot{\omega} + i\,h\,w \cdot \omega = m. \tag{6}$$

Dabei bedeutet

$$m = p + i\,q = (P + i\,Q)/A. \tag{7}$$

Die Gleichung (6) hat nun, wenn wir noch, unter Verwendung der Funktionsbezeichnung

$$\operatorname{cis} x = \exp i\,x = \cos x + i \sin x, \tag{8}$$

zur Abkürzung

$$\xi = \xi(t) = h \int_{t_1}^{t} w(\tau)\, d\tau, \tag{9}$$

$$\Omega = \Omega(t) = \int_{t_1}^{t} \operatorname{cis} \xi(\tau)\, d\tau \tag{10}$$

schreiben, die folgende Lösung:

$$\omega = \operatorname{cis}(-\xi) \cdot (\omega_1 + m\,\Omega). \tag{11}$$

Für die weitere Behandlung sind nun die zwei Fälle $r = 0$ und $r \neq 0$ zu unterscheiden. Jeder dieser beiden Fälle gliedert sich nochmals in zwei Unterfälle. Bei $r = 0$ gibt der Wert von w_1 Anlaß zur Unterscheidung: $w_1 = 0$ oder $w_1 \neq 0$.

Fall 1. $h \neq 0$, $r = 0$, $w_1 = 0$.

Aus (9), (10) folgen in diesem Falle

$$\zeta \equiv 0, \tag{12}$$

$$\Omega = t - t_1, \tag{13}$$

so daß nach (11)

$$\omega = \omega_1 + m(t - t_1) \tag{14}$$

oder aufgespalten

$$\begin{aligned} u &= u_1 + p(t - t_1), \\ v &= v_1 + q(t - t_1). \end{aligned} \tag{15}$$

Fall 2. $h \neq 0$, $r = 0$, $w_1 \neq 0$.

Aus (4), (9), (10), (11) erhält man sofort

$$w \equiv w_1 \neq 0, \tag{16}$$

$$\zeta = h w (t - t_1); \quad \zeta_2 = h w (t_2 - t_1), \tag{17}$$

$$\Omega = \frac{1}{i h w}[\operatorname{cis} h w (t - t_1) - 1]; \quad \Omega_2 = \frac{i}{h w}(1 - \operatorname{cis} \zeta_2), \tag{18}$$

$$\omega = \frac{m}{i h w} + \left(\omega_1 - \frac{m}{i h w}\right) \operatorname{cis}(-\zeta), \tag{19}$$

$$\begin{aligned} u &= u_1 \cos\zeta + v_1 \sin\zeta + (h w)^{-1}[p \sin\zeta + q(1 - \cos\zeta)], \\ v &= v_1 \cos\zeta - u_1 \sin\zeta + (h w)^{-1}[q \sin\zeta - p(1 - \cos\zeta)]. \end{aligned} \tag{20}$$

Fall 3. $h \neq 0$, $r \neq 0$.

Unter Verwendung der Konstanten

$$t_0 = t_1 - \frac{w}{r} \tag{21}$$

geht die Gleichung (4) über in

$$w = r(t - t_0); \quad w_2 = r(t_2 - t_0) = w_1 + r(t_2 - t_1). \tag{22}$$

Aus (9) wird jetzt

$$\zeta(t) = \tfrac{1}{2} h r (t - t_1)(t + t_1 - 2 t_0) = \eta(t) - \eta_1, \tag{23}$$

wenn

$$\eta(t) = \tfrac{1}{2} h r (t - t_0)^2; \quad \eta_1 = \tfrac{1}{2} h r (t_1 - t_0)^2 \tag{24}$$

benutzt werden. Die Bildung von Ω ist darauf mittels der FRESNELschen Integrale möglich, die hier in der Gestalt

$$C(x) = \int_0^x \frac{\cos y}{\sqrt{y}}\, dy; \qquad S(x) = \int_0^x \frac{\sin y}{\sqrt{y}}\, dy \tag{25}$$

angenommen werden. Dazu ist in (10) als Integrationsveränderliche $y = |\eta(\tau)|$ einzuführen, wofür man nach (2) auch $y = \sigma\eta(\tau)$ schreiben kann. Es sind nun drei Fälle zu unterscheiden, da η für $\tau = t_0$ verschwindet:

3 a) $t_0 \leqq t_1 \leqq t$; 3 b) $t_1 \leqq t_0 \leqq t$; 3 c) $t_1 \leqq t \leqq t_0$.

Der Integrand von (10) läßt sich nach (23) als $\operatorname{cis}(-\eta_1)\operatorname{cis}\eta$ darstellen, so daß wir wegen

$$\operatorname{cis}\eta = \cos\eta + i\sin\eta = \cos\sigma\eta + i\sigma\sin\sigma\eta = \cos y + i\sigma\sin y$$

nur noch $\cos y$ und $\sin y$ zu betrachten haben.

Aus

(26) $$y = \sigma\eta(\tau) = \tfrac{1}{2}\sigma h r(\tau - t_0)^2$$

folgt

$$|\tau - t_0| = \frac{2}{\sqrt{2|hr|}}\sqrt{y},$$

wo rechts die positiven Wurzelwerte zu nehmen sind. Es bleibt also, wenn wir

(27) $$(2|hr|)^{-\frac{1}{2}} = k$$

schreiben,

(28) $$\tau = t_0 + \operatorname{sgn}(\tau - t_0)\, 2k\sqrt{y}$$

übrig, woraus folgt

(29) $$d\tau = \operatorname{sgn}(\tau - t_0)\, k\frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Im Fall 3 a) formen wir das Integral folgendermaßen um:

$$\int_{t_1}^{t}\cos y\, d\tau = \left(\int_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t_1}\right)\cos y\, d\tau = k[C(\sigma\eta) - C(\sigma\eta_1)].$$

Im Fall 3 b) bekommen wir:

$$\int_{t_1}^{t}\cos y\, d\tau = \left(\int_{t_0}^{t} + \int_{t_1}^{t_0}\right)\cos y\, d\tau = k[C(\sigma\eta) + C(\sigma\eta_1)].$$

Im Fall 3 c) entsteht:

$$\int_{t_1}^{t}\cos y\, d\tau = \left(\int_{t_1}^{t_0} - \int_{t}^{t_0}\right)\cos y\, d\tau = k[C(\sigma\eta_1) - C(\sigma\eta)].$$

Alle drei Ergebnisse lassen sich, wenn wir jetzt

(30) $$\varepsilon = \operatorname{sgn}(t - t_0);\quad \varepsilon_1 = \operatorname{sgn}(t_1 - t_0)$$

einführen, in der nachstehenden Gleichung (31) zusammenfassen. (Für $\sin y$ ist dieselbe Rechnung gültig.) Wir führen dabei nochmals neue

Abkürzungen ein:

$$\int_{t_1}^{t} \cos y \, d\tau = k[\varepsilon C(\sigma\eta) - \varepsilon_1 C(\sigma\eta_1)] = k\, C(\eta_1, \eta),$$
$$\int_{t_1}^{t} \sin y \, d\tau = k[\varepsilon S(\sigma\eta) - \varepsilon_1 S(\sigma\eta_1)] = k\, S(\eta_1, \eta). \tag{31}$$

Damit erhält man dann

$$\mathfrak{Q} = \operatorname{cis}(-\eta_1)\, k[C(\eta_1, \eta) + i\sigma S(\eta_1, \eta)]. \tag{32}$$

Setzen wir diese Formel in (11) ein, so kommt

$$\omega = \omega_1 \operatorname{cis}(-\xi) + mk \operatorname{cis}(-\eta)[C(\eta_1, \eta) + i\sigma S(\eta_1, \eta)], \tag{33}$$

oder nach den Komponenten u, v aufgelöst[2])

$$\begin{aligned} u &= u_1 \cos\xi + v_1 \sin\xi + pk(C\cos\eta + \sigma S \sin\eta) + qk(C\sin\eta - \sigma S\cos\eta), \\ v &= v_1 \cos\xi - u_1 \sin\xi + qk(C\cos\eta + \sigma S\sin\eta) - pk(C\sin\eta - \sigma S\cos\eta). \end{aligned} \tag{34}$$

Fall 4. $h = 0$.

Beim Kugelkreisel fließen aus (6) sofort an Stelle von (11), wenn noch (4) hinzugenommen wird, die Gleichungen

$$\omega = \omega_1 + m(t - t_1), \tag{35}$$

$$\begin{aligned} u &= u_1 + p(t - t_1), \\ v &= v_1 + q(t - t_1), \\ w &= w_1 + r(t - t_1). \end{aligned} \tag{36}$$

2. Formeln zur Beschreibung von Drehbewegungen.

Bisher war nur der Verlauf der Drehgeschwindigkeiten in Bezug auf das körperfeste Achsensystem untersucht worden. Es ist nunmehr die Veränderung der Stellung des Kreisels gegenüber einem raumfesten Achsensystem zu betrachten. Dazu werde zunächst eine Zusammenstellung der später benötigten Formeln zur kinematischen Beschreibung der Drehbewegung gegeben.

Nehmen wir an, daß die Bezugsachsen für die Komponenten u, v, w in der „Normallage" des Kreisels der Reihe nach mit der x, y, z-Achse eines raumfesten Systems zusammenfallen, und denken wir den Übergang zur jeweiligen tatsächlichen Stellung durch folgende drei Drehungen um die Eulerschen Winkel ersetzt: 1) eine Drehung um die z-Achse um den Winkel λ, wodurch das xyz-Achsenkreuz in die Stellung $x^1y^1z^1$ übergeht; 2) eine Drehung um die y^1-Achse um den Winkel ϑ, wodurch das $x^1y^1z^1$-Achsenkreuz in das System $x^2y^2z^2$ übergeht; und schließlich eine Drehung um die z^2-Achse um den Winkel φ, wodurch aus dem System $x^2y^2z^2$ das System $x^3y^3z^3$ der Hauptträgheitsachsen

[2]) In (34) bedeuten C und S die durch (31) eingeführten Größen.

wird. Nennen wir den Tensor, der das raumfeste Achsensystem (xyz) in das körperfeste $(x^3y^3z^3)$-System überführt, $\mathfrak{A}$, so hat dieser im xyz-System die Orthogonalmatrix (A_{mn}) $(m, n = 1, 2, 3)$ mit

$$
\begin{aligned}
A_{11} &= \cos\varphi\cos\lambda\cos\vartheta - \sin\varphi\sin\lambda\\
A_{12} &= \cos\varphi\sin\lambda\cos\vartheta + \sin\varphi\cos\lambda\\
A_{13} &= -\cos\varphi\sin\vartheta\\
A_{21} &= -\sin\varphi\cos\lambda\cos\vartheta - \cos\varphi\sin\lambda\\
A_{22} &= -\sin\varphi\sin\lambda\cos\vartheta + \cos\varphi\cos\lambda\\
A_{23} &= \sin\varphi\sin\vartheta\\
A_{31} &= \cos\lambda\sin\vartheta\\
A_{32} &= \sin\lambda\sin\vartheta\\
A_{33} &= \cos\vartheta.
\end{aligned}
\tag{37}
$$

Ein Vektor $\mathfrak{x}$ hat dann in Bezug auf das körperfeste System dieselben Komponenten, wie sie der Vektor $\mathfrak{x}' = \mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{x}$ im raumfesten System hat. Konstanz von $\mathfrak{x}'$ bedeutet, daß $\mathfrak{x}$ im körperfesten System konstante Komponenten hat, also ein körperfester Vektor ist. Die Veränderlichkeit von

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{A}\mathfrak{x}' \tag{38}$$

beruht dann nur auf der Veränderlichkeit von $\mathfrak{A}$, d. h. auf der Drehbewegung des Körpers; $\mathfrak{A}$ gibt die jeweilige Stellung des Kreisels im Raum an. Nun kann man in diesem Fall die zeitliche Ableitung von $\mathfrak{x}$ einerseits durch den Ausdruck $\dot{\mathfrak{A}}\mathfrak{x}'$ darstellen, andererseits in üblicher Weise durch das Vektorprodukt mit dem Vektor der Drehgeschwindigkeit $\mathfrak{w} = (w_x, w_y, w_z)$ oder durch das Produkt mit dem infinitesimalen Drehungsaffinor $\mathfrak{W}$, dessen Komponenten im (xyz)-System

$$
\begin{aligned}
W_{11} &= W_{22} = W_{33} = 0, \quad & W_{32} &= -W_{23} = w_x,\\
W_{13} &= -W_{31} = w_y, & W_{21} &= -W_{12} = w_z
\end{aligned}
$$

sind:

$$\dot{\mathfrak{x}} = [\mathfrak{w}, \mathfrak{x}] = \mathfrak{W}\mathfrak{x} = \dot{\mathfrak{A}}\mathfrak{x}'. \tag{39}$$

Hier setzen wir (38) ein sowie die entsprechende Beziehung für die Drehgeschwindigkeit

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{A}\mathfrak{w}', \tag{40}$$

wobei $\mathfrak{w}'$ durch Überführung des körperfesten Achsensystems in die Normallage unter Festhaltung der Komponenten (u, v, w) aus $\mathfrak{w}$ entsteht. $\mathfrak{w}'$ ist also nur insoweit veränderlich, als diese Komponenten (u, v, w) sich ändern, während in $\dot{\mathfrak{w}}$ auch die Änderung von $\mathfrak{A}$ eingeht. Ferner ist zu berücksichtigen, daß der Affinor $\mathfrak{W}$ sich gemäß der Bedingung $\mathfrak{W}\mathfrak{x} = \mathfrak{A}(\mathfrak{W}'\mathfrak{x}')$ transformieren, also dem Gesetz

$$\mathfrak{W} = \mathfrak{A}\mathfrak{W}'\mathfrak{A}^{-1} \tag{41}$$

gehorchen muß, wobei infolge der Orthogonalität von $\mathfrak{A}$ wiederum die Beziehung $\mathfrak{W}'\mathfrak{x}' = [\mathfrak{w}'\mathfrak{x}']$ gilt. Dann folgen aus (39) bis (41) die Beziehungen zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{W}$:

$$\mathfrak{W}\mathfrak{A} = \dot{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A}\mathfrak{W}', \quad \mathfrak{W} = \dot{\mathfrak{A}}\mathfrak{A}^{-1}, \quad \mathfrak{W}' = \mathfrak{A}^{-1}\dot{\mathfrak{A}}. \tag{42}$$

$\mathfrak{W}'$ ist mit $\mathfrak{w}'$ gegeben, die Komponenten ($\Re e\,\omega$, $\Im m\,\omega$, w) von $\mathfrak{w}'$ sind in Abschnitt 1 ermittelt worden. Aus der letzten der Gleichungen (42) ergibt sich, wenn wir den aus $\mathfrak{W}$ durch Integration entstehenden gleichfalls antimetrischen Affinor

$$\int_{t_1}^{t} \mathfrak{W}'\,dt = \mathfrak{U} \tag{43}$$

und entsprechend

$$\int_{t_1}^{t} \mathfrak{w}'\,dt = \mathfrak{u} \tag{44}$$

setzen, die jeweilige Stellung $\mathfrak{A}$ in der Gestalt

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{C} = \mathfrak{D}\mathfrak{A}_1 \text{ mit } \mathfrak{C} = \exp\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{D} = \mathfrak{A}_1\mathfrak{C}\mathfrak{A}_1^{-1}. \tag{45}$$

(Man könnte sagen; $\mathfrak{u}$ bedeutet den Umdrehungswinkel, den die Drehgeschwindigkeitskomponenten u, v, w um die Hauptträgheitsachsen erzeugen würden, wenn diese Drehungen sich gegenseitig nicht beeinflussen würden.) Sind nun (α, β, γ) die Komponenten von $\mathfrak{u}$ im körperfesten System und ist

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \psi^2, \tag{46}$$

so finden sich für die Potenzen von $\mathfrak{U}$ die Beziehungen[3])

$$\mathfrak{U}^3 = \{\mathfrak{u};\mathfrak{u}\} - \psi^2\mathfrak{E}; \quad \mathfrak{U}^3 = -\psi^2\mathfrak{U}, \quad \mathfrak{U}^4 = -\psi^2\mathfrak{U}^2. \tag{47}$$

Aus der Potenzreihe für $\exp\mathfrak{U}$ ergibt sich infolgedessen

$$\begin{aligned} \mathfrak{C} = \exp\mathfrak{U} &= \mathfrak{E} + \mathfrak{U}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\psi^2)^n}{(2n+1)!} + \mathfrak{U}^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\psi^2)^{n-1}}{(2n)!} \\ &= \mathfrak{E} + \mathfrak{U}\frac{\sin\psi}{\psi} + \mathfrak{U}^2\frac{1-\cos\psi}{\psi^2} \\ &= \mathfrak{E}\cos\psi + \mathfrak{U}\frac{\sin\psi}{\psi} + \{\mathfrak{u};\mathfrak{u}\}\frac{1-\cos\psi}{\psi^2} \end{aligned} \tag{48}$$

und somit nach (45)

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1\cos\psi + \mathfrak{A}_1\mathfrak{U}\frac{\sin\psi}{\psi} + \mathfrak{A}_1\{\mathfrak{u};\mathfrak{u}\}\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}. \tag{49}$$

Legen wir das raumfeste Achsensystem so, daß es zur Zeit $t = t_1$ mit dem Hauptachsensystem zusammenfällt, so wird $\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{E}$ und $\mathfrak{A} = \mathfrak{D} = \mathfrak{C}$. $\mathfrak{C}$ läßt sich als orthogonale Matrix nach (37) durch (von $\mathfrak{A}_1$ aus gemessene)

[3]) $\{\mathfrak{a};\mathfrak{b}\}$ bezeichnet die Dyade: $\mathfrak{c}\{\mathfrak{a};\mathfrak{b}\}\mathfrak{b} = (\mathfrak{c}\mathfrak{a})(\mathfrak{b}\mathfrak{b})$; $\mathfrak{E}$ ist der Einheitstensor.

EULERsche Winkel λ, ϑ, φ darstellen, die nach (37) am schnellsten aus den Gleichungen

$$\text{(50)} \qquad \operatorname{tg}\lambda = \frac{C_{32}}{C_{31}}, \quad \cos\vartheta = C_{33}, \quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{C_{23}}{C_{13}}$$

zu entnehmen sind. Die dazu benutzten Komponenten von $\mathfrak{C}$ sind nach (48)

$$\text{(51)} \qquad \begin{aligned} C_{13} &= +\beta\frac{\sin\psi}{\psi} + \alpha\gamma\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}, \\ C_{23} &= -\alpha\frac{\sin\psi}{\psi} + \beta\gamma\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}, \\ C_{31} &= -\beta\frac{\sin\psi}{\psi} + \alpha\gamma\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}, \\ C_{32} &= +\alpha\frac{\sin\psi}{\psi} + \beta\gamma\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}, \\ C_{33} &= +\cos\psi + \gamma^2\frac{1-\cos\psi}{\psi^2}. \end{aligned}$$

Für Anwendungen in einer geplanten späteren Untersuchung sei auch die Auflösung dieser Gleichungen nach α, β, γ angegeben. Dazu wird zuerst ψ berechnet. Setzt man

$$\text{(52)} \qquad E = \frac{C_{13}+C_{31}}{C_{32}-C_{23}} = \frac{C_{23}+C_{32}}{C_{13}-C_{31}} = \gamma\frac{1-\cos\psi}{\psi\sin\psi},$$

so ergibt sich

$$(C_{33}-\cos\psi)\frac{1-\cos\psi}{\sin^2\psi} = E^2,$$

also

$$\text{(53)} \qquad \cos\psi = \frac{C_{33}-E^2}{1+E^2}.$$

Wenn man die Komponenten von $\mathfrak{C}$ nach (37) durch (von $\mathfrak{A}_1$ aus gemessene) EULERsche Winkel ausdrückt, erhält man für E aus (52)

$$\text{(54)} \qquad E = -\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\lambda+\varphi).$$

Damit folgt aus (53) nach einigen Umformungen

$$\text{(55)} \qquad \cos\tfrac{1}{2}\psi = \cos\tfrac{1}{2}\vartheta\cos\tfrac{1}{2}(\lambda+\varphi).$$

Nachdem so ψ bekannt ist, findet man α, β aus den Ausdrücken für $C_{32}-C_{23}$ und $C_{13}-C_{31}$, γ aus (52) und (54):

$$\text{(56)} \qquad \begin{aligned} \alpha &= +\psi\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta}{\sin\frac{1}{2}\psi}\sin\tfrac{1}{2}(\lambda-\varphi), \\ \beta &= -\psi\frac{\sin\frac{1}{2}\vartheta}{\sin\frac{1}{2}\psi}\cos\tfrac{1}{2}(\lambda-\varphi), \\ \gamma &= -\psi\frac{\cos\frac{1}{2}\vartheta}{\sin\frac{1}{2}\psi}\sin\tfrac{1}{2}(\lambda+\varphi). \end{aligned}$$

3. Die Drehungen des Kreisels.

Die in Abschnitt 2 aufgeführten Formeln gelten als rein kinematische Beziehungen allgemein, sowohl für alle vier oben unterschiedenen Fälle wie auch für den unsymmetrischen Kreisel. Zu ihrer Auswertung kommt es nun auf die Berechnung der Winkel $\alpha, \beta, \gamma, \psi$ an, wofür außer (44) nach (42) und (5) folgende Gleichungen bestehen:

$$\alpha + i\beta = \int_{t_1}^{t} \omega(\tau)\, d\tau; \quad \gamma = \int_{t_1}^{t} w(\tau)\, d\tau. \tag{57}$$

Hier sind jetzt die einzelnen Fälle zu unterscheiden. Wir geben die Formeln für α, β, γ; für ψ hingegen bleibt die Formel (46) anzuwenden.

Fall 1. $h \neq 0$, $r = 0$, $w_1 = 0$.

$$\begin{aligned} \alpha + i\beta &= \omega_1 (t - t_1) + \tfrac{1}{2} m (t - t_1)^2; \\ \alpha &= u_1 (t - t_1) + \tfrac{1}{2} p (t - t_1)^2, \\ \beta &= v_1 (t - t_1) + \tfrac{1}{2} q (t - t_1)^2, \\ \gamma &= 0. \end{aligned} \tag{58}$$

Fall 2. $h \neq 0$, $r = 0$, $w = w_1 \neq 0$.

$$\alpha + i\beta = \frac{m}{i h w} (t - t_1) + \left(\frac{i \omega_1}{h w} - \frac{m}{h^2 w^2} \right) [\operatorname{cis}(-\zeta) - 1]; \tag{59}$$

$$\alpha = \frac{q}{h w} (t - t_1) + (1 - \cos\zeta) \left(\frac{v_1}{h w} + \frac{p}{h^2 w^2} \right) + \sin\zeta \left(\frac{u_1}{h w} - \frac{q}{h^2 w^2} \right),$$

$$\beta = -\frac{p}{h w} (t - t_1) + (1 - \cos\zeta) \left(\frac{-u_1}{h w} + \frac{q}{h^2 w^2} \right) + \sin\zeta \left(\frac{v_1}{h w} + \frac{p}{h^2 w^2} \right),$$

$$\gamma = w(t - t_1).$$

Fall 3. $h \neq 0$, $r \neq 0$.

Mit den Formeln

$$\begin{aligned} \int_0^x (\cos u\, C u + \sin u\, S u) \frac{du}{\sqrt{u}} &= \frac{1}{2} (C^2 x + S^2 x), \\ \int_0^x (\cos u\, S u - \sin u\, C u) \frac{du}{\sqrt{u}} &= \cos x\, C x + \sin x\, S x - 2\sqrt{x} \end{aligned} \tag{60}$$

läßt sich die aus (50) und (33) zunächst erhaltene Gleichung

$$\begin{aligned} \alpha + i\beta = \{\omega_1 \operatorname{cis}\eta_1 - m k \varepsilon_1 [C(\sigma\eta_1) + i\sigma S(\sigma\eta_1)]\} \int_{t_1}^{t} \operatorname{cis}(-\eta)\, d\tau \\ + m k \varepsilon \int_{t_1}^{t} \operatorname{cis}(-\eta) [C(y) + i\sigma S(y)]\, d\tau \end{aligned} \tag{61}$$

wiederum unter Benutzung von (26), (29), (31) und von

$$\operatorname{cis}(-\eta) = \cos y - i\sigma \sin y$$

auswerten zu

$$\begin{aligned}\alpha + i\beta = \{&\omega_1 k \operatorname{cis}\eta_1 - m k^2 \varepsilon_1 [C(\sigma\eta_1) + i\sigma S(\sigma\eta_1)]\} \cdot [C(\eta_1, \eta) - i\sigma S(\eta_1, \eta)] \\ &+ m k^2 \varepsilon \Big\{ \frac{\varepsilon}{2} [C^2(\sigma\eta) + S^2(\sigma\eta)] - \frac{\varepsilon_1}{2} [C^2(\sigma\eta_1) + S^2(\sigma\eta_1)] \\ &+ i\sigma [\varepsilon \cos\eta\, C(\sigma\eta) + \varepsilon \sin\eta\, S(\sigma\eta) - \varepsilon_1 \cos\eta_1\, C(\sigma\eta_1) \\ &- \varepsilon_1 \sin\eta_1\, S(\sigma\eta_1) - 2\varepsilon \sqrt{|\eta|} + 2\varepsilon_1 \sqrt{|\eta_1|}]\Big\}.\end{aligned}$$

Hierin lassen sich noch einige Zusammenfassungen vornehmen, und man erhält

$$\begin{aligned}\alpha + i\beta = {}& \omega_1 k \operatorname{cis}\eta_1 [C(\eta_1, \eta) - i\sigma S(\eta_1, \eta)] \\ &+ \tfrac{1}{2} m k^2 \{C^2(\eta_1, \eta) + S^2(\eta_1, \eta) + (1 - \varepsilon\varepsilon_1)[C^2(\sigma\eta_1) + S^2(\sigma\eta_1)]\} \\ &+ i\sigma m k^2 \{S(\sigma\eta)[\sin\eta + \varepsilon\varepsilon_1 C(\sigma\eta_1)] + C(\sigma\eta)[\cos\eta - \varepsilon\varepsilon_1 S(\sigma\eta_1)] \\ &- \varepsilon\varepsilon_1 [\cos\eta_1 C(\sigma\eta_1) + \sin\eta_1 S(\sigma\eta_1)] - 2(\sqrt{|\eta|} - \varepsilon\varepsilon_1 \sqrt{|\eta_1|})\}.\end{aligned} \tag{62}$$

Trennung in Realteil und Imaginärteil liefert

$$\begin{aligned}\alpha = {}& u_1 k [\cos\eta_1 C(\eta_1, \eta) + \sigma \sin\eta_1 S(\eta_1, \eta)] \\ &- v_1 k [\sin\eta_1 C(\eta_1, \eta) - \sigma \cos\eta_1 S(\eta_1, \eta)] \\ &+ \tfrac{1}{2} p k^2 \{C^2(\eta_1, \eta) + S^2(\eta_1, \eta) + (1 - \varepsilon\varepsilon_1)[C^2(\sigma\eta_1) + S^2(\sigma\eta_1)]\} \\ &- \sigma q k^2 \{S(\sigma\eta)[\sin\eta + \varepsilon\varepsilon_1 C(\sigma\eta_1)] + C(\sigma\eta)[\cos\eta - \varepsilon\varepsilon_1 S(\sigma\eta_1)] \\ &- \varepsilon\varepsilon_1 [\cos\eta_1 C(\sigma\eta_1) + \sin\eta_1 S(\sigma\eta_1)] - 2(\sqrt{|\eta|} - \varepsilon\varepsilon_1 \sqrt{|\eta_1|})\}, \\ \beta = {}& v_1 k [\cos\eta_1 C(\eta_1, \eta) + \sigma \sin\eta_1 S(\eta_1, \eta)] \\ &+ u_1 k [\sin\eta_1 C(\eta_1, \eta) - \sigma \cos\eta_1 S(\eta_1, \eta)] \\ &+ \tfrac{1}{2} q k^2 \{C^2(\eta_1, \eta) + S^2(\eta_1, \eta) + (1 - \varepsilon\varepsilon_1)[C^2(\sigma\eta_1) + S^2(\sigma\eta_1)]\} \\ &+ \sigma p k^2 \{S(\sigma\eta)[\sin\eta + \varepsilon\varepsilon_1 C(\sigma\eta_1)] + C(\sigma\eta)[\cos\eta - \varepsilon\varepsilon_1 S(\sigma\eta_1)] \\ &- \varepsilon\varepsilon_1 [\cos\eta_1 C(\sigma\eta_1) + \sin\eta_1 S(\sigma\eta_1)] - 2(\sqrt{|\eta|} - \varepsilon\varepsilon_1 \sqrt{|\eta_1|})\},\end{aligned} \tag{63}$$

$$\gamma = h^{-1}\zeta = \frac{\eta - \eta_1}{h} = \frac{r}{2}(t - t_1)(t + t_1 - 2t_0) = w_1(t - t_1) + \frac{1}{2} r (t - t_1)^2.$$

Fall 4. $h = 0$.

$$\begin{aligned}\alpha &= u_1(t - t_1) + \tfrac{1}{2} p (t - t_1)^2, \\ \beta &= v_1(t - t_1) + \tfrac{1}{2} q (t - t_1)^2, \\ \gamma &= w_1(t - t_1) + \tfrac{1}{2} r (t - t_1)^2.\end{aligned} \tag{64}$$

Mit (58), (59), (63), (64) sind für alle vier Fälle die Winkel α, β, γ berechnet. Aus ihnen ergeben sich nach (51) fünf Komponenten des Drehungsaffinors $\mathfrak{C}$, mit dem die jeweilige Stellung des Kreisels $\mathfrak{A}$

nach (45) aus der Anfangsstellung $\mathfrak{A}_1$ folgt. Die EULERschen Winkel, durch welche sich der Übergang von der Anfangsstellung $\mathfrak{A}_1$ zur jeweils erreichten Stellung $\mathfrak{A}$ bewirken läßt, sind nunmehr aus (50) zu entnehmen. Damit ist die Bewegung des symmetrischen Kreisels unter der Wirkung von Drehkräften, welche bezüglich der selber beweglichen Hauptträgheitsachsen zeitfeste Komponenten haben, vollständig beschrieben.

(Eingegangen am 24. Oktober 1951.)