Mathematische Zeitschrift, Band 55, Heft 3, S. 292—298 (1952).

Ergänzungsgleichheit k-dimensionaler Polyeder.

Von

H. Hadwiger in Bern.

I. Zerlegungsgleichheit.

$A, B, C, \ldots$ sollen abgeschlossene und eigentliche[1]) Polyeder des k-dimensionalen euklidischen Raumes R_k bezeichnen. Unter $A+B$ wird wie üblich ein Polyeder verstanden, das sich im Sinne der Elementargeometrie in die beiden Polyeder A und B zerlegen läßt, so daß also A und B höchstens Randpunkte, jedoch keine inneren Punkte gemeinsam haben. Alle im folgenden vorkommenden Polyederadditionen sind stets stillschweigend an diese Konvention gebunden. — Es sei weiter G eine Bewegungsgruppe im R_k, die bis auf die Bedingung $T \lessdot G$, wonach die Translationsgruppe T als Untergruppe in G enthalten sein soll, beliebig gewählt werden kann. — Zwei Polyeder A und B heißen *G-gleich* (kongruent), geschrieben $A \cong B$, wenn B durch eine Bewegung der Gruppe G aus A hervorgeht. Die G-Gleichheit ist offenbar reflexiv, symmetrisch und transitiv. — Zwei Polyeder A und B nennen wir *G-zerlegungsgleich,* geschrieben $A \sim B$, wenn sie sich in paarweise G-gleiche Teilpolyeder zerlegen lassen, so daß also $A = \Sigma_1^n A_\nu$ und $B = \Sigma_1^n B_\nu$ gilt, wobei $A_\nu \cong B_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ist. Wie sich leicht überprüfen läßt, ist die G-Zerlegungsgleichheit wieder reflexiv, symmetrisch und transitiv.

Es soll noch eine für die Zerlegungstheorie der Polyeder nützliche Bezeichnungsweise eingeführt werden: Ist n eine natürliche Zahl, so bedeute $n \cdot A$ ein Polyeder, das sich in n Teilpolyeder zerlegen läßt, die alle mit A G-zerlegungsgleich sind, so daß sich also $n \cdot A = \Sigma_1^n A_\nu$, $A_\nu \sim A$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ aufschreiben läßt. Alle Polyeder, die sich bei vorgegebenem n und A als $n \cdot A$ darstellen lassen, sind unter sich offenbar G-zerlegungsgleich; es gilt $n \cdot (A+B) = n \cdot A + n \cdot B$, $(n+m) \cdot A = n \cdot A + m \cdot A$, $nm \cdot A = n \cdot m \cdot A$.

II. Ergänzungsgleichheit.

Zwei Polyeder A und B heißen *G-ergänzungsgleich,* wenn sich durch Hinzufügung zweier G-zerlegungsgleicher Polyeder C und D zwei G-

[1]) Ein eigentliches Polyeder sei als Vereinigungsmenge endlich vieler k-dimensionaler abgeschlossener nicht-entarteter Simplexe darstellbar.

zerlegungsgleiche Polyeder gewinnen lassen, so daß also mit $C \sim D$ sich $A + C \sim B + D$ ergibt. Es gilt nun der folgende

Satz A. *Sind zwei eigentliche Polyeder A und B des k-dimensionalen euklidischen Raumes bezogen auf eine Bewegungsgruppe G G-ergänzungsgleich, so sind sie auch G-zerlegungsgleich, d. h. aus $A + C \sim B + D$ und $C \sim D$ folgt $A \sim B$.*

Wir wollen noch besonders darauf hinweisen, daß Satz A bei Zulassung uneigentlicher oder unterdimensionaler Polyeder falsch wird. In der Tat: Es sei W ein k-dimensionaler Würfel und $k > 1$; wählt man A als (0-dim.) Ecke und B als (1-dim.) Kante von W und setzt $C = D = W$, so sind die Voraussetzungen des Satzes erfüllt, aber die Behauptung $A \sim B$ ist natürlich unrichtig [2]).

Für gewöhnliche Polyeder ($k = 3$) und bezogen auf Ergänzungs- und Zerlegungsgleichheit im klassischen Sinn (G = volle Bewegungsgruppe) wurde unser Satz A von J. P. Sydler [3]) erstmals allgemein bewiesen. Damit ist die Unterscheidung von Zerlegungsgleichheit und Ergänzungsgleichheit, die man seit Euklid stets beachten mußte, als unwesentlich erkannt; jedoch liegt diese Tatsache wesentlich tiefer, als man vor allem im Hinblick auf den elementargeometrischen Charakter der Fragestellung geneigt ist anzunehmen. — Die Sydlersche Beweiskonstruktion kann nicht ohne weiteres auf den höher-dimensionalen Fall angewendet werden, jedoch haben wir in unserem Beweis, den wir in Abschnitt IV entwickeln, einen interessanten Gedanken des Sydlerschen Beweises sehr wesentlich verwendet. Der Aufstieg in die höheren Dimensionen wird ermöglicht erstens durch eine neue Einteilung der Polyeder in Zylinderklassen, die in Abschnitt III näher erklärt ist, und zweitens durch einen vom Verf. kürzlich bewiesenen Satz [4]), wonach inhaltsgleiche Parallelotope T-zerlegungsgleich sind.

Es gibt noch eine Ergänzungsgleichheit anderer Art, die für die weitere Entwicklung der Zerlegungstheorie der Polyeder von Bedeutung ist: Zwei Polyeder A und B wollen wir *G-selbstergänzungsgleich* nennen, wenn sie durch Hinzufügung je gleich vieler mit A und B je G-zer-

---

[2]) Diese Bemerkung zeigt, daß die sich auf die Ergänzungsgleichheit beziehenden Sätze tiefer liegen müssen. Es gibt keine logisch-formalen Beweise wie sie etwa für die Verifikation der Transitivität ohne weiteres zur Verfügung stehen; die polyedrische Struktur muß in Verbindung mit der vorausgesetzten Eigentlichkeit sich an passender Stelle einschalten. In engem Zusammenhang mit diesen Schwierigkeiten steht auch die Tatsache, daß die entsprechenden Sätze für die Multikongruenz oder Endlichgleichheit von Punktmengen allgemein unrichtig sind. Vgl. z. B. hierüber A. Tarski, Über das absolute Maß linearer Punktmengen. Fund. math. **30**, 1938, 218–234 insb. Bemerkungen zum Subtraktionssatz 1. 15.

[3]) J. P. Sydler, Sur la décomposition des polyèdres. Comment. math. helv. **16**, 1943/44, 266—273.

[4]) H. Hadwiger, Translative Zerlegungsgleichheit k-dimensionaler Parallelotope. Collectanea math. **3**, 1951.

legungsgleicher Polyeder in G-zerlegungsgleiche Polyeder übergehen, so daß also $n \cdot A \sim n \cdot B$ gilt. Hier gilt analog der folgende

Satz B. *Sind zwei eigentliche Polyeder A und B des k-dimensionalen euklidischen Raumes bezogen auf eine Bewegungsgruppe G G-selbstergänzungsgleich, so sind sie auch G-zerlegungsgleich, d. h. aus $n \cdot A \sim n \cdot B$ folgt $A \sim B$.*

Unser Satz B hängt sehr eng mit einer Gruppe von Sätzen zusammen, die in einem allgemeinen Abbildungssatz von D. König und S. Válko[5]) ihren Ursprung haben, und deren Beweise verwickelt sind. Die bereits oben erwähnte Einteilung in Zylinderklassen von Abschnitt III ermöglicht hier einen direkten und kurzen Beweis, den wir ebenfalls in Abschnitt IV entwickeln werden.

III. Zylinderklassen.

Um eine einfache Beschreibung einiger im folgenden zur Anwendung kommenden Operationen zu ermöglichen, charakterisieren wir die Punkte des Raumes durch ihre in einem Ursprung 0 angreifenden Ortsvektoren. — Eine *Dilatation* mit λ $(0 < \lambda < \infty)$ führt das Polyeder A in das zu A homothetische Polyeder λA über; die Ortsvektoren der Punkte von $A' = \lambda A$ sind durch $\mathfrak{a}' = \lambda \mathfrak{a}$ gegeben, wobei $\mathfrak{a}$ die Ortsvektoren der Punkte von A bedeuten. — Die *Minkowskische Addition* $A \times B$ zweier Polyeder A und B kann wie folgt erklärt werden: Die Ortsvektoren der Punkte von $C = A \times B$ ergeben sich nach Ansatz $\mathfrak{c} = \mathfrak{a} + \mathfrak{b}$, wobei die Ortsvektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ der Punkte von A und B unabhängig variieren sollen. Die Minkowskische Addition ist kommutativ, assoziativ und in Verbindung mit der Dilatation distributiv. Im Rahmen dieser Arbeit soll die Operation $A \times B$ nur in dem spezielleren Fall zur Anwendung kommen, wo beide Polyeder A und B unterdimensional sind und in den beiden eigentlichen Teilräumen R_{k_a} und R_{k_b} des R_k der Dimension k_a und k_b $(0 < k_a,\, k_b < k)$ liegen, welche keine Parallelität aufweisen, also keine Raumrichtung gemeinsam haben sollen. Ein sich auf diese Weise ergebendes Polyeder $A \times B$ nennen wir einen *Zylinder*. Für derartige Zylinder gelten Gesetze wie $(A + B) \times C = (A \times C) + (B \times C)$, $(\lambda A \times \lambda B) = \lambda (A \times B)$ usw. — Ein Polyeder A wollen wir nun einen *i-stufigen Zylinder* nennen, wenn eine Darstellung als i-stufige Minkowskische Summe der Form $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_i$ möglich ist, wobei $A_\nu \subset R_{k_\nu}$, $k_\nu \geqq 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, i)$ und $k_1 + k_2 + \cdots + k_i = k$ gilt. Die Stufenzahl i stellt einen Grad zylindrischer Entartung dar. Innerhalb dieser Klassifikation ist ein 1-stufiger Zylinder (niedrigste Entartung) ein beliebiges Polyeder, also nicht notwendigerweise ein eigentlich zylindrisches Polyeder; dagegen ist ein k-stufiger Zylinder

[5]) D. König und S. Valkó, Über mehrdeutige Abbildungen von Mengen. Math. Ann. **95**, 1925, 135—138.

(höchste Entartung) offenbar ein Parallelotop. — Nach dem soeben erörterten Gesichtspunkte wollen wir nun innerhalb der Klasse $\mathfrak{R}$ der k-dimensionalen eigentlichen Polyeder eine Skala $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1 \supset \mathfrak{R}_2 \supset \cdots \supset \mathfrak{R}_k$ von Teilklassen fixieren: Die Klasse $\mathfrak{R}_i$ bestehe aus allen Polyedern von $\mathfrak{R}$, die mit endlich vielen i-stufigen Zylindern G-zerlegungsgleich sind.

Wir beweisen nun den folgenden

Hilfssatz. *Ist* $A \in \mathfrak{R}_i$, *so gilt* $A = A' + n^i \cdot \frac{1}{n} A$, *wobei* $A' \in \mathfrak{R}_{i+1}$ *ausfällt*; *für* $i = k$ *ist* A' *leer.*

Für $i = 1$ handelt es sich um die k-dimensionale Verallgemeinerung eines Lemmas von J. P. SYDLER[6]); für $i = k$ ergibt sich die triviale Tatsache, daß sich ein k-dimensionales Parallelotop A in n^k homothetische Parallelotope $\frac{1}{n} A$ zerlegen läßt.

Den Beweis des Hilfssatzes führen wir zunächst für *Fall a*: Es sei $i = 1$. Es genügt offenbar, den Beweis für den spezielleren Fall zu führen, daß A ein eigentliches k-dimensionales Simplex S ist. Da G nach der Bedingung $T \lessdot G$ die Translationen enthält, darf eine Ecke von S im Ursprung 0 angenommen werden. Die Ortsvektoren $\mathfrak{s}$ der Punkte von S bilden nun die k-parametrige Schar

$$\mathfrak{s} = \Sigma_1^k \alpha_\nu \mathfrak{a}_\nu \quad [1 \geqq \alpha_1 \geqq \cdots \geqq \alpha_k \geqq 0],$$

wobei die $\mathfrak{a}_\nu$ k linear unabhängige Kantenvektoren von S bezeichnen. Es sei zunächst ein λ, $0 < \lambda < 1$, beliebig gewählt. Es gibt nun eine von λ abhängige Zerlegung von S in $k+1$ Teile S_μ, also $S = \Sigma_0^k S_\mu$, deren Teile durch die Ansätze

$$\mathfrak{s}_\mu = \Sigma_1^k \alpha_\nu \mathfrak{a}_\nu \quad [1 \geqq \alpha_1 \geqq \cdots \geqq \alpha_\mu \geqq \lambda \geqq \alpha_{\mu+1} \geqq \cdots \geqq \alpha_k \geqq 0]$$

gegeben sind; $\mathfrak{s}_\mu$ bezeichnen die Ortsvektoren der Punkte von S_μ. Mühelos erkennt man, daß die S_μ paarweise keine inneren Punkte aufweisen können und daß sie in ihrer Vereinigung das Simplex S vollständig ausfüllen, so daß eine richtige Zerlegung vorliegt. Weiter sieht man, daß $S_0 \cong \lambda S$ und $S_k \cong (1-\lambda) S$ gilt, wobei man wieder $T \lessdot G$ zu beachten hat. Für $0 < \mu < k$ ist dagegen $S_\mu = P_\mu \times Q_\mu$, falls P_μ bzw. Q_μ die μ- bzw. $(k-\mu)$-dimensionalen Simplexe bezeichnen, deren Ortsvektoren durch die Ansätze $\mathfrak{p} = \Sigma_1^\mu \alpha_\nu \mathfrak{a}_\nu$ $[1 \geqq \alpha_1 \geqq \cdots \geqq \alpha_\mu \geqq \lambda]$ bzw. $\mathfrak{q} = \Sigma_{\mu+1}^k \alpha_\nu \mathfrak{a}_\nu$ $[\lambda \geqq \alpha_{\mu+1} \geqq \cdots \geqq \alpha_k \geqq 0]$ gegeben sind. Die S_μ sind demnach eigentliche Zylinder und gehören sicher zu Klasse $\mathfrak{R}_2$.

Zusammenfassend haben wir das Ergebnis[7]) $S = \lambda S + (1-\lambda) S + S'$ mit $S' \in \mathfrak{R}_2$ gewonnen. Setzen wir der Reihe nach $\lambda = \frac{1}{n}, \frac{1}{n-1}, \ldots, \frac{1}{2}$,

[6]) loc. cit.: Fußnote [3]).

[7]) Diese Zerlegung wurde in anderem Zusammenhang bereits beschrieben und angewendet. Vgl. H. HADWIGER, Zur Inhaltstheorie der Polyeder. Collectanea math. **3**, 1950, 136—168; insb. § 4.

wobei wir das obige Ergebnis in passender Weise aufeinanderfolgend verwerten, so resultiert $S = n \cdot \frac{1}{n} S + S'$ mit $S' \in \mathfrak{R}_2$. Da sich nun ein beliebiges Polyeder A in Simplexe zerlegen läßt, gilt offenbar auch $A = n \cdot \frac{1}{n} A + A'$ mit $A' \in \mathfrak{R}_2$, w.z.b.w. Im Fall $k = 1$ ist offensichtlich A' leer.

Nun zu *Fall b*: Es sei $1 < i \leqq k$. Das Polyeder A sei zunächst selbst ein eigentlicher i-stufiger Zylinder. Nach Definition gilt demnach $A = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_i$, wobei $A_\nu \in R_{k_\nu}$, $k_\nu \geqq 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, i)$ und $k_1 + k_2 + \cdots + k_i = k$ ist. Das k_ν-dim. Polyeder A_ν gestattet nach dem soeben sichergestellten Ergebnis von Fall a in seinem Trägerraum R_{k_ν} eine Zerlegung $A_\nu = A'_\nu + n \cdot \frac{1}{n} A_\nu$, wo A'_ν für $k_\nu > 1$ einen eigentlichen Zylinder des R_{k_ν} bedeutet, für $k_\nu = 1$ aber leer ist. Für das ursprüngliche Zylinderpolyeder A resultiert nun die Darstellung

$$A = \left(A'_1 + n \cdot \frac{1}{n} A_1\right) \times \left(A'_2 + n \cdot \frac{1}{n} A_2\right) \times \cdots \times \left(A'_i + n \cdot \frac{1}{n} A_i\right).$$

Nach den geltenden Kommutativ- und Distributivregeln läßt sich dies wie folgt entwickeln

$$A = \Sigma A'_{\nu_1} \times \cdots \times A'_{\nu_j} \times n \cdot \frac{1}{n} A_{\mu_1} \times \cdots \times n \cdot \frac{1}{n} A_{\mu_{i-j}},$$

wobei $\nu_1, \ldots, \nu_j$ eine Kombination der Indizes $1, 2, \ldots, i$ zur Klasse j und $\mu_1, \ldots, \mu_{i-j}$ die komplementäre Kombination der gleichen Indizes zur Klasse $i - j$ bezeichnet; die Summation ist über alle Kombinationen zur Klasse j und über alle j von $j = 0$ bis $j = i$ zu erstrecken. Für $j = 0$ ist der einzige Summand

$$n \cdot \frac{1}{n} A_1 \times n \cdot \frac{1}{n} A_2 \times \cdots \times n \cdot \frac{1}{n} A_i = n^i \cdot \frac{1}{n} A.$$

Für $j > 1$ enthält jeder nicht leere Summand in seiner Darstellung als i-stufige Minkowskische Summe wenigstens ein Glied A'_ν, das nach Konstruktion im Minkowskischen Sinne weiter zerfällt, da es in seinem Trägerraum R_{k_ν} ein eigentliches Zylinderpolyeder ist. Jeder derartige Summand ist somit mindestens eine $(1 + i)$-stufige Minkowskische Summe und stellt also einen wenigstens $(1 + i)$-stufigen Zylinder dar. Zusammenfassend läßt sich demnach das Ergebnis $A = A' + n^i \cdot \frac{1}{n} A$ mit $A' \in \mathfrak{R}_{i+1}$ feststellen. Ist nun allgemeiner $A \in \mathfrak{R}_i$, so läßt sich nach unserer Konvention A in Teilpolyeder zerlegen, die alle mit i-stufigen Zylinderpolyedern G-zerlegungsgleich sind. Indem man das oben erzielte Ergebnis einzeln auf diese Zylinderpolyeder anwendet und dann zusammenfaßt, ergibt sich die Behauptung unseres Hilfssatzes. Der Fall $i = k$ ist in der soeben entwickelten Beweisführung formal enthalten; die A'_ν sind alle leer und so wird auch A' leer.

IV. Beweise der Sätze über die Zerlegungsgleichheit ergänzungsgleicher Polyeder.

Zunächst wenden wir uns dem Beweis von Satz A zu: Es gelte also

$$\text{(a)}\ A + C \sim B + D \qquad \text{und} \qquad \text{(b)}\ C \sim D.$$

Falls $A, B \in \mathfrak{R}_k$ gilt, so daß diese beiden als eigentlich vorausgesetzten Polyeder mit Parallelotopen G-zerlegungsgleich sind, folgt die Behauptung $A \sim B$ mit der sich aus (a) und (b) ergebenden Inhaltsgleichheit $V(A) = V(B)$ auf Grund des oben erwähnten Satzes[8]), wonach inhaltsgleiche eigentliche Parallelotope T-zerlegungsgleich, insbesondere also auch G-zerlegungsgleich sind. — Wir treffen nun die induktive Annahme, daß die Richtigkeit des Satzes A bereits unter der Nebenbedingung $A, B \in \mathfrak{R}_{i+1}$ erwiesen sei, wo $1 \leqq i < k$ ist. Nach dem soeben Erwähnten trifft diese Annahme für $i = k - 1$ sicher zu. Es liege nun der Fall vor, wo $A, B \in \mathfrak{R}_i$ gilt. Nach dem im Abschnitt III bewiesenen Hilfssatz über die Zerlegung von Zylinderpolyedern läßt sich eine Zerlegung (c) $A = P + n^i \cdot \frac{1}{n} A$ vorkehren, wobei $P \in \mathfrak{R}_{i+1}$ gilt. Die hier willkürlich wählbare natürliche Zahl n genüge der Nebenbedingung $n^{k-i} > 1 + V(C)/V(A)$. Man beachte an dieser Stelle, daß die Voraussetzung der Eigentlichkeit von A in der Form $V(A) > 0$ beansprucht wird. — Wir führen nun ein Polyeder $S = n^i \cdot \frac{1}{n} C$ ein und bemerken zunächst, daß $V(S) = n^{i-k} V(C)$ ist. Im Hinblick auf die für n geforderte Nebenbedingung rechnet man mit $V(P) = (1 - n^{i-k}) V(A)$ leicht aus, daß $V(P) > V(S)$ ausfällt. Nach elementaren Überlegungen ist S zu einem Teilpolyeder von P T-zerlegungsgleich, also auch G-zerlegungsgleich; dies wollen wir nunmehr wie folgt ausdrücken: (d) $P \sim T + n^i \cdot \frac{1}{n} C$. Durch Einsatz in (c) wird hieraus $A \sim T + n^i \cdot \frac{1}{n}(A + C)$ und weiter nach (a) auch $A \sim T + n^i \cdot \frac{1}{n}(B + D)$ oder wieder nach (b) schließlich $A \sim T + n^i \cdot \frac{1}{n}(B + C)$. Vergleichen wir jetzt wieder mit (d), so resultiert (x) $A \sim P + n^i \cdot \frac{1}{n} B$. Analog zu (c) hat man auch (y) $B \sim Q + n^i \cdot \frac{1}{n} B$.

Führen wir noch die beiden Hilfspolyeder $U = n^i \cdot \frac{1}{n} B + C$ und $V = n^i \cdot \frac{1}{n} B + D$ ein, so ergibt sich nach (a) aus (x) und (y) $P + U \sim Q + V$. Da aber auch $U \sim V$ gilt, und nach Konstruktion $P, Q \in \mathfrak{R}_{i+1}$ ist, folgert man auf Grund der induktiven Voraussetzung zunächst $P \sim Q$ und nach (x) und (y) somit die Behauptung $A \sim B$ für den vorgesehenen

[8]) loc. cit.: Fußnote [4]).

Fall $A, B \in \mathfrak{N}_i$. Diese ist demnach auch für $i = 1$, d. h. auch für beliebige Polyeder richtig, w. z. b. w.

Nun zum Beweis von Satz B: Es gelte also (a) $n \cdot A \sim n \cdot B$. Falls $A, B \in \mathfrak{N}_k$ gilt, ergibt sich die Behauptung $A \sim B$ mit der aus (a) folgenden Inhaltsgleichheit $V(A) = V(B)$ in gleicher Weise wie beim vorstehenden Beweis. — Wir treffen wieder die induktive Annahme, daß die Richtigkeit von Satz B bereits unter der Nebenbedingung $A, B \in \mathfrak{N}_{i+1}$ erwiesen sei. Für $i = k - 1$ trifft diese Annahme sicher zu. Es liege nun der Fall $A, B \in \mathfrak{N}_i$ vor. Analog wie beim vorstehenden Beweis betrachten wir zwei Zerlegungen der Form (b) $A = P + n^i \cdot \frac{1}{n} A$ und ebenso (c) $B = Q + n^i \cdot \frac{1}{n} B$ mit $P, Q \in \mathfrak{N}_{i+1}$. Nach (a) folgt jetzt $n \cdot P + n^{i+1} \cdot \frac{1}{n} A \sim n \cdot Q + n^{i+1} \cdot \frac{1}{n} B$. Da nach (a) offenbar $n^{i+1} \cdot \frac{1}{n} A \sim n^{i+1} \cdot \frac{1}{n} B$ gilt, folgt nach Satz A aus der vorstehenden Relation $n \cdot P \sim n \cdot Q$ und wegen $P, Q \in \mathfrak{N}_{i+1}$ nach der induktiven Annahme also $P \sim Q$. Bedenkt man, daß wegen $i \geqq 1$ nach (a) offensichtlich $n^i \cdot \frac{1}{n} A \sim n^i \cdot \frac{1}{n} B$ gilt, so resultiert nach den Darstellungen (b) und (c) $A \sim B$ für den Fall $A, B \in \mathfrak{N}_i$. Diese Behauptung ist demnach auch richtig für $i = 1$, d. h. auch für beliebige Polyeder, w. z. b. w.

(Eingegangen am 3. Oktober 1951.)