Werk

Titel: § 8. Fn-Räume.

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0055|log36

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beweis. Es genügt wegen 4.8, den ersten Teil der Behauptung zu beweisen. Wegen 5.2 dürfen wir $\gamma(s) \equiv 0$ annehmen, also die Operation Γ betrachten.

1. Fall ($\mathsf{P}\mathfrak{P}$). Γ sei in $\mathfrak{E} \in \mathsf{P}$ erklärt. Dann sind die Funktionale $f_s(\mathfrak{x}) = \int_0^{\to\infty} \Gamma(s,t)\, x(t)\, dt$ nach 7.2 stetig. Also ist Γ $\mathfrak{E}\mathfrak{P}$-stetig.

2. Fall ($\mathsf{M}\mathfrak{P}$). Der Beweis verläuft wie im ersten Fall.

3. Fall ($\mathsf{M}\mathfrak{M}$). Ist Γ in $\mathfrak{E} \in \mathsf{M}$ erklärt, so ist $\mathfrak{E} \subseteq \Gamma^U \mathfrak{M}$. Γ bildet $\Gamma^U \mathfrak{M}$ stetig in $\mathfrak{M}$ ab ($\backsim$ 7.3), also ist Γ erst recht $\overline{\mathfrak{E}}\mathfrak{M}$-stetig ($\backsim$ 4.4).

4. Fall ($\mathsf{P}\mathfrak{M}$). Γ sei in $\mathfrak{E} \in \mathsf{P}$ erklärt. Dann ist Γ, aufgefaßt als Operation aus $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{M}$, auch in dem zu $\mathfrak{E}$ gehörigen Raum $\overline{\mathfrak{E}} \in \mathsf{M}$ erklärt. Γ bildet $\overline{\mathfrak{E}}$ stetig in $\mathfrak{M}$ ab, also ist Γ erst recht $\mathfrak{E}\mathfrak{M}$-stetig (man vgl. die F-Normen von $\mathfrak{E}$ und $\overline{\mathfrak{E}}$ in 5.1).

Zusätze zu 7.1 finden sich in § 8 (8.6) und in § 11.

Wir tragen die beim Beweis verwendeten Sätze 7.2 und 7.3 nach:

Satz 7.2. *Ein Funktional der Form* $f(\mathfrak{x}) = \int_0^{\to\infty} \gamma(t)\, x(t)\, dt$ *ist* M- *und* P-*stetig.*

Beweis. f ist genau dann in einem Raum $\mathfrak{E} \in \mathsf{M}$ oder $\mathfrak{E} \in \mathsf{P}$ erklärt, wenn γ $\mathfrak{E}$ in $\mathfrak{K}$ abbildet; nach 5.2 ist diese Abbildung stetig. Das Funktional $g(\mathfrak{y}) = \int_0^{\to\infty} y(t)\, dt$ ist in $\mathfrak{K}$ stetig, woraus die Behauptung folgt.

Satz 7.3. *Γ bildet den Raum $\Gamma^U \mathfrak{M}$ stetig in $\mathfrak{M}$ ab.*

Beweis. $y(s) = \int_0^{\to\infty} \Gamma(s,t)\, x(t)\, dt$ ($\mathfrak{x} \in \Gamma^U \mathfrak{M}$) ist meßbar ($\backsim$ 6.8). Es ist $|y(s)| \leqq \varkappa_0(\gamma_s \mathfrak{x}) \leqq \varkappa(\gamma_s \mathfrak{x})$ für fast alle s, somit $\mu(\mathfrak{y}) \leqq \mu(\mathfrak{x}) + \mu(\varkappa(\gamma_s \mathfrak{x}))$, woraus sich die Stetigkeit ergibt.

§ 8.

F_σ-Räume.

Sei $\mathfrak{W}$ ein linearer Raum. Die $\mathfrak{E}_p$ seien F-Räume, die lineare Unterräume in $\mathfrak{W}$ bilden. Es gelte $\mathfrak{E}_p \subseteq \mathfrak{E}_{p+1}$ ($p = 0, 1, \ldots$) und

Eigenschaft 8.1. *Aus* $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}[\mathfrak{E}_p]$, $\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{y}[\mathfrak{E}_q]$ folgt $\mathfrak{x} = \mathfrak{y}$.

Im linearen Raum $\mathfrak{E} = \bigcup \mathfrak{E}_p$ definieren wir einen Konvergenzbegriff:

$\mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}[\mathfrak{E}] \backsim \mathfrak{x}_n \to \mathfrak{x}[\mathfrak{E}_p]$ *für mindestens ein p.*

Versehen mit diesem Konvergenzbegriff heißt $\mathfrak{E}$ ein *F_σ-Raum*. Die $\mathfrak{E}_p$ nennen wir eine *Definitionsfolge* von $\mathfrak{E}$ und schreiben $\mathfrak{E} \sim \{\mathfrak{E}_p\}$. Offenbar kann $\mathfrak{E}$ mittels verschiedener Definitionsfolgen bestimmt werden. Die $\mathfrak{E}_p$ gehören alle zu dem von dem F_σ-Raum $\mathfrak{E}$ erzeugten F-System E. Ein F-Raum $\mathfrak{F}$ ist ein F_σ-Raum $\mathfrak{F} \sim \{\mathfrak{F}_p\}$ mit $\mathfrak{F}_p = \mathfrak{F}$ ($p = 0, 1, \ldots$).