Mathematische Zeitschrift, Band 53, Heft 5, S. 456—462 (1951).

Remaksche Zerlegungen für Gruppen mit Paarungen.

Von

Günter Pickert in Tübingen.

Bei einer Gruppe mit Operatoren bewirkt jeder Operator eine homomorphe Abbildung der Gruppe in sich. Eine Abbildung einer Menge in sich läßt sich nun aber auch auffassen als eine in dieser Menge erklärte Relation, nämlich die zwischen einem Element und seinem Bild bestehende. In naheliegender Weise verallgemeinere ich daher den Begriff „Operator“ zum Begriff „Paarung“ [1]) so, daß jede Paarung in der Gruppe eine Relation hervorruft, welche noch einer der Homomorphiebedingung entsprechenden Bedingung genügen muß. Die so entstehende Struktur „Gruppe mit Paarungen“ fällt unter den von mir in einer früheren Arbeit [2]) eingeführten Strukturbegriff, und der dafür definierte Homomorphiebegriff liefert den Paarungshomomorphismus als Verallgemeinerung des Operatorhomomorphismus. Für Gruppen mit Paarungen führe ich ein direktes Produkt ein, welches für Paarungen, die Operatoren sind, in das direkte Produkt von Gruppen mit Operatoren übergeht. Dann zeige ich, wie der übliche Beweis [3]) für Existenz und Eindeutigkeit einer Remakschen Zerlegung bei Gruppen mit Paarungen abgeändert werden muß. Diese Abänderungen werden einerseits durch den neuen Homomorphiebegriff, andererseits durch die neue Definition des direkten Produktes bedingt.

Es sei $\mathfrak{G}$ eine multiplikativ geschriebene Gruppe, $\mathfrak{R}$ eine nichtleere Menge und $r \to \mathfrak{P}_r$ ($r \in \mathfrak{R}$, $0 \subset \mathfrak{P}_r \subset \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$) eine Abbildung von $\mathfrak{R}$ in die Menge der nichtleeren Teilmengen von $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$. Jedes Element r von $\mathfrak{R}$ ruft also in $\mathfrak{G}$ eine Relation $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ hervor. Ich nenne $\mathfrak{R}$ einen *Paarungsbereich* und seine Elemente *Paarungen* von $\mathfrak{G}$, wenn aus $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ und $(a', b') \in \mathfrak{P}_r$ stets $(a a'^{-1}, b b'^{-1}) \in \mathfrak{P}_r$ folgt. $\mathfrak{G}$ wird dann als *Gruppe mit Paarungen* bezeichnet. Insbesondere ist eine Gruppe $\mathfrak{G}$

---

[1]) Die Anregung dazu sowie den Namen „Paarung“ verdanke ich der Arbeit von Wielandt: Zur Abgrenzung der selbstadjungierten Eigenwertaufgaben I, Math. Nachr. 2 (1949), S. 328—339.

[2]) Pickert: Bemerkungen zum Homomorphiebegriff, Diese Zeitschr. 53 (1950), S. 375—386. (Im folgenden als H zitiert.) Auf die Bezeichnungserklärungen am Anfang dieser Arbeit sei auch für die vorliegende Arbeit verwiesen.

[3]) Siehe Zassenhaus: Lehrbuch der Gruppentheorie I (Leipzig 1937) (im folgenden als G zitiert), S. 78—81.

mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{R}$ eine solche Gruppe mit Paarungen, wenn — unter $r \cdot a$ das Ergebnis der Anwendung von $r \in \mathfrak{R}$ auf $a \in \mathfrak{G}$ verstanden — als $\mathfrak{P}_r$ die Menge der Paare $(a, r \cdot a)$ genommen wird. Allgemein bezeichne ich eine Paarung r als einen *Operator*, wenn es zu jedem $a \in \mathfrak{G}$ genau ein $b \in \mathfrak{G}$ mit $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ gibt; dieses b kann man dann wieder durch $r \cdot a$ bezeichnen. Eine Paarung r des Paarungsbereiches heiße *s-zulässig* $(s \in \mathfrak{R})$, wenn aus $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$, $(a, a') \in \mathfrak{P}_s$, $(b, b') \in \mathfrak{P}_s$ stets $(a', b') \in \mathfrak{P}_r$ folgt. Ist s ein Operator, so bedeutet dies: Aus $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ folgt $(s \cdot a, s \cdot b) \in \mathfrak{P}_r$. Ist auch noch r ein Operator, so kann man dieser Bedingung sogar die einfache Form $r \cdot (s \cdot a) = s \cdot (r \cdot a)$ geben. Für Operatoren r, s bedeutet also s-Zulässigkeit von r dasselbe wie r-Zulässigkeit von s, was für irgendwelche Paarungen natürlich nicht immer richtig ist. Bei $\mathfrak{R}' \leqq \mathfrak{R}$ soll $\mathfrak{R}'$-Zulässigkeit die s-Zulässigkeit für alle $s \in \mathfrak{R}'$ bedeuten. Einen im Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ enthaltenen Operatorenbereich $\mathfrak{R}_0$ nenne ich *ausgezeichnet*, falls jede in $\mathfrak{R} - \mathfrak{R}_0$ liegende Paarung $\mathfrak{R}_0$-zulässig ist. Macht man dann in der üblichen Weise die Menge $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ durch die Multiplikation $(a, b)(a', b') = (a a', b b')$ und die äußere Verknüpfung $r \cdot (a, b) = (r \cdot a, r \cdot b)$ (für alle $r \in \mathfrak{R}_0$) zu einer Gruppe $\mathfrak{G}^*$ mit dem Operatorenbereich $\mathfrak{R}_0$, so lassen sich die an $\mathfrak{P}_r$ gestellten Forderungen so ausdrücken: *Für jedes* $r \in \mathfrak{R} - \mathfrak{R}_0$ *ist* $\mathfrak{P}_r$ *eine bez.* $\mathfrak{R}_0$ *zulässige Untergruppe von* $\mathfrak{G}^*$. Hat eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ eine Untergruppe $\mathfrak{G}'$, für welche $\mathfrak{P}'_r = \mathfrak{P}_r \frown \mathfrak{G}' \times \mathfrak{G}' > 0$ ist, so wird $\mathfrak{G}'$ wieder als Gruppe mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ und der Abbildung $r \to \mathfrak{P}'_r$ $(r \in \mathfrak{R})$ aufgefaßt.

Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ läßt sich in folgender Weise als Struktur[4] $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ über der Menge $\mathfrak{G}$ beschreiben: ϱ' und ϱ'' seien umkehrbare Abbildungen von $\mathfrak{R}$ auf die untereinander und zu $\{1, 2, 3\}$ elementefremden Mengen $\mathfrak{J}'$ bzw. $\mathfrak{J}''$; dann wird $\mathfrak{S}$ definiert als Menge der Abbildungen μ von $\{1, 2, 3\} \smile \mathfrak{J}' \smile \mathfrak{J}''$ in $\mathfrak{G}$ mit $(\mu 1)(\mu 2) = \mu 3$ und $(\mu \varrho' r, \mu \varrho'' r) \in \mathfrak{P}_r$. Der Homomorphiebegriff[5] für Strukturen $(\mathfrak{G}, \mathfrak{S})$ führt nun zu folgender Definition: Als *Paarungshomomorphismus* einer Gruppe $\mathfrak{G}$ in die Gruppe $\mathfrak{G}'$ mit gemeinsamem Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ und den Abbildungen $r \to \mathfrak{P}_r$ bzw. $r \to \mathfrak{P}'_r$ wird ein Homomorphismus σ von $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{G}'$ bezeichnet, für den $\sigma \mathfrak{P}_r \leqq \mathfrak{P}'_r$ $(r \in \mathfrak{R})$ gilt, d. h. aus $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ stets $(\sigma a, \sigma b) \in \mathfrak{P}'_r$ folgt. Im Falle $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$, $\mathfrak{P}_r = \mathfrak{P}'_r$ bezeichnet man den Paarungshomomorphismus als *Paarungsendomorphismus*. Ein umkehrbarer Paarungshomomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}'$ heißt *Paarungsisomorphismus*, wenn seine Umkehrung wieder ein Paarungshomomorphismus ist. Daß nicht jeder umkehrbare Paarungshomomorphismus ein Paarungsisomorphismus ist, zeigt das Beispiel: $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}' = \{e, a\}$ mit e als neutralem Element, $\mathfrak{R} = \{1\}$, $\mathfrak{P}_1 = \{(e, e), (a, e)\}$, $\mathfrak{P}'_1 = \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$, σ die identische Abbildung von $\mathfrak{G}$. Im Falle $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}'$, $\mathfrak{P}_r = \mathfrak{P}'_r$ wird

[4]) Siehe H, 1.1.

[5]) Siehe H, 1.2.

ein Paarungsisomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}'$ als *Paarungsautomorphismus* bezeichnet. Betrachtet man die Untergruppen $\mathfrak{P}_r$ der oben eingeführten Gruppe $\mathfrak{G}^*$, so ruft ein Paarungsendomorphismus σ wegen $\sigma((a, b)(a', b')) = \sigma(a, b)\,\sigma(a', b')$ und $\sigma\mathfrak{P}_r \leqq \mathfrak{P}_r$ einen Endomorphismus von $\mathfrak{P}_r$ hervor. Ist der Endomorphismus σ von $\mathfrak{G}$ zudem noch normal, d. h. $\sigma(a b a^{-1}) = a(\sigma b) a^{-1}$ für alle $a, b \in \mathfrak{G}$, so ist $\sigma\mathfrak{P}_r$ ein Normalteiler von $\mathfrak{P}_r$; denn für (a, b) und (c, d) aus $\mathfrak{P}_r$ gilt $(a, b)\,(\sigma c, \sigma d)\,(a, b)^{-1} = (a(\sigma c)\,a^{-1}, b(\sigma d)\,b^{-1}) = \sigma(a c a^{-1}, b d b^{-1})$. Zwei Endomorphismen σ, τ von $\mathfrak{G}$ heißen bekanntlich *addierbar*, wenn die Abbildung $a \to (\sigma a)(\tau a)$ ebenfalls ein Endomorphismus ist, der dann mit $\sigma + \tau$ bezeichnet wird. Sind nun σ, τ sogar Paarungsendomorphismen, so gilt im Falle der Addierbarkeit dasselbe für $\sigma + \tau$; denn für $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ ist

$$(\sigma + \tau)(a, b) = ((\sigma a)(\tau a), (\sigma b)(\tau b)) = (\sigma a, \sigma b)(\tau a, \tau b) \in \mathfrak{P}_r.$$

Zum Zwecke späterer Verwendung beweise ich einen für Endomorphismen bekannten Tatbestand auch für Paarungsendomorphismen:

Satz 1. *Ist $\mathfrak{G}$ eine Gruppe mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ und ausgezeichnetem Operatorenbereich $\mathfrak{K}_0$, gilt der Doppelkettensatz für die bez. $\mathfrak{K}_0$ zulässigen Normalteiler von $\mathfrak{G}$ sowie für die von $\mathfrak{P}_r$ $(r \in \mathfrak{R})$, sind σ und τ normale Paarungsendomorphismen von $\mathfrak{G}$ und ruft σ eine Abbildung σ' von $\mathfrak{G}' = \tau\mathfrak{G}$ in sich hervor, so ist σ' ein Paarungsautomorphismus von $\mathfrak{G}'$, falls σ' umkehrbar oder $\sigma\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}'$ ist.*

Beweis. Daß die Umkehrbarkeit von σ' dasselbe bedeutet wie $\sigma\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}'$, zeigt man in bekannter Weise folgendermaßen. Durch Hinzufügen der sämtlichen inneren Automorphismen von $\mathfrak{G}$ wird aus $\mathfrak{K}_0$ der Operatorenbereich $\mathfrak{K}_1$ gebildet. $\sigma\mathfrak{G}'$ sowie der Kern[6]) $\mathfrak{N}$ von σ' sind dann zulässig bez. $\mathfrak{K}_1$. Im Falle $\sigma\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}'$ liefert eine bez. $\mathfrak{K}_1$ gebildete Normalreihe[7]) mittels des Isomorphismus $\sigma\mathfrak{G}' \cong \mathfrak{G}'/\mathfrak{N}$ eine ebensolche Normalreihe zwischen $\mathfrak{G}'$ und $\mathfrak{N}$, so daß $\mathfrak{N}$ nur aus dem neutralen Element bestehen kann, σ' also umkehrbar ist. Ist aber σ' umkehrbar, so liefert eine bez. $\mathfrak{K}_1$ gebildete Normalreihe von $\mathfrak{G}'$ eine eben solche von $\sigma\mathfrak{G}'$, so daß $\sigma\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}'$ sein muß. Da $\mathfrak{G}' \times \mathfrak{G}' = \tau\mathfrak{G}^*$ zulässiger Normalteiler in $\mathfrak{G}^*$ ist, ergeben sich die zu $\mathfrak{G}'$ gehörigen $\mathfrak{P}'_r = \mathfrak{P}_r \cap \tau\mathfrak{G}^*$ als zulässige Normalteiler in $\mathfrak{P}_r$ und wegen der Normalität von σ sind dann auch die $\sigma\mathfrak{P}'_r$ zulässige Normalteiler in $\mathfrak{P}_r$. Wie eben folgt aus der Umkehrbarkeit von σ' die Gleichung $\sigma'\mathfrak{P}'_r = \mathfrak{P}'_r$. Damit ist σ' als Paarungsautomorphismus erkannt. Falls $\mathfrak{P}_r$ zulässiger Normalteiler in $\mathfrak{G}^*$ ist, kommt man ohne den Doppelkettensatz für die zulässigen Normalteiler von $\mathfrak{P}_r$ aus; denn der Doppelkettensatz überträgt sich von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}^*$[8]), und $\mathfrak{P}'_r$ sowie $\sigma\mathfrak{P}'_r$ sind dann zulässige Normalteiler von $\mathfrak{G}^*$.

---

[6]) d. h. die Menge der Elemente von $\mathfrak{G}'$, welche das neutrale Element als Bild haben.

[7]) Siehe G, S. 52.

[8]) Siehe z. B. Pickert: Zur Übertragung der Kettensätze, Math. Ann. 121 (1949), 100—102.

Ist die Gruppe $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt ihrer Untergruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ und wird mit $\overline{\mathfrak{G}}$ die aus den Paaren (a_1, a_2) $(a_i \in \mathfrak{G}_i)$ mit der Multiplikation $(a_1, a)(b_1, b_2) = (a_1 b_1, a_2, b_2)$ bestehende Gruppe bezeichnet, so ist $(a_1, a_2) \to a_1 a_2$ ein Isomorphismus von $\overline{\mathfrak{G}}$ auf $\mathfrak{G}$. Üblicherweise bezeichnet man a_i dann als die *$\mathfrak{G}_i$-Komponente* von $a_1 a_2$. Ist nun zu $\mathfrak{G}$ ein Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ mit $r \to \mathfrak{P}_r$ gegeben und $\mathfrak{P}_r^{(i)} = \mathfrak{P}_r \cap \mathfrak{G}_i \times \mathfrak{G}_i > 0$ $(i = 1, 2)$, so wird $\mathfrak{R}$ durch die Zuordnung $r \to \mathfrak{P}_r^{(i)}$ auch Paarungsbereich von $\mathfrak{G}_i$. Für die Gruppen mit Paarungen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$ gibt es nun entsprechend zu $\overline{\mathfrak{G}}$ die direkte Vereinigung [9]) der beiden Strukturen. Man erkennt leicht, daß man diese direkte Vereinigung als die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ auffassen kann, wobei dem Element r von $\mathfrak{R}$ die Menge der Paare $((a_1, a_2), (b_1, b_2))$ mit $(a_i, b_i) \in \mathfrak{P}_r^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ zugeordnet wird. Dann ist offenbar $(a_1, a_2) \to a_1 a_2$ ein Paarungshomomorphismus von $\overline{\mathfrak{G}}$ auf $\mathfrak{G}$. Er ist genau dann ein Paarungsisomorphismus, wenn für jedes $r \in \mathfrak{R}$ aus $(a_1 a_2, b_1 b_2) \in \mathfrak{P}_r$ auch $(a_i, b_i) \in \mathfrak{P}_r$ $(i = 1, 2)$ folgt; wegen der Gruppeneigenschaft von $\mathfrak{P}_r$ kann man sich bei dieser Forderung sogar auf $i = 1$ oder $i = 2$ beschränken. Diese Betrachtungen führen zu folgender Ausdehnung des Begriffs „direktes Produkt“ auf Gruppen mit Paarungen: Eine Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ heißt *$\mathfrak{R}$-direktes Produkt* $\mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2$ der Untergruppen $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$, falls $\mathfrak{G}$ direktes Produkt von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ ist und mit a_1, b_1 als $\mathfrak{G}_1$-Komponenten von $a, b \in \mathfrak{G}$ für jedes $r \in \mathfrak{R}$ aus $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ stets $(a_1, b_1) \in \mathfrak{P}_r$ folgt. Dann hat also $\mathfrak{G}_i$ ebenfalls den Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ mit $r \to \mathfrak{P}_r^{(i)} = \mathfrak{P}_r \cap \mathfrak{G}_i \times \mathfrak{G}_i > 0$ und $\mathfrak{G}$ ist paarungsisomorph zur direkten Vereinigung der Gruppen $\mathfrak{G}_i$ mit Paarungen. Weiter ist der Normalteiler $\mathfrak{G}_i$ von $\mathfrak{G}$ zulässig bez. jedes in $\mathfrak{R}$ enthaltenen Operators r; denn aus $a \in \mathfrak{G}_i$ und $(a, r \cdot a) \in \mathfrak{P}_r$ folgt ja, daß $r \cdot a$ mit seiner $\mathfrak{G}_i$-Komponente übereinstimmt und somit ebenfalls in $\mathfrak{G}_i$ liegt. Daher umfaßt der Begriff des $\mathfrak{R}$-direkten Produktes auch den Begriff des direkten Produktes für Gruppen mit Operatoren. Folgt aus $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2$, daß entweder $\mathfrak{G}_1$ oder $\mathfrak{G}_2$ nur aus dem neutralen Element besteht, so nenne ich $\mathfrak{G}$: *$\mathfrak{R}$-direkt unzerlegbar*. Für $\mathfrak{R}$-direkte Produkte mit mehreren Faktoren gilt natürlich die von den direkten Produkten her bekannte Assoziativität, so daß Klammern fortgelassen werden können. $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{G}_n$ bedeutet neben der Darstellung von $\mathfrak{G}$ als direktes Produkt der Untergruppen $\mathfrak{G}_i$ offenbar, daß aus $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ für die $\mathfrak{G}_i$-Komponenten a_i, b_i von a bzw. b ebenfalls $(a_i, b_i) \in \mathfrak{P}_r$ gilt. Der Endomorphismus von $\mathfrak{G}$, welcher jedem Element seine $\mathfrak{G}_i$-Komponente zuordnet, ist somit ein Paarungsendomorphismus. Ich bezeichne ihn im folgenden als den *zu $\mathfrak{G}_i$ gehörigen Zerlegungsendomorphismus*. Bei $\mathfrak{R}$-direkt unzerlegbaren $\mathfrak{G}_i$, die nicht nur das neutrale Element enthalten, soll $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{G}_n$ wie bei Gruppen ohne Paarungen als *Remaksche Zerlegung* bezeichnet werden.

[9]) Siehe H, 2. 1.

Ich beweise nun drei Sätze als Vorbereitung auf den Hauptsatz über REMAKsche Zerlegungen.

Satz 2. *Wenn ein Paarungshomomorphismus σ der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ auf die Gruppe $\mathfrak{H}$ den Kern $\mathfrak{G}_2$ hat und einen Paarungsisomorphismus des Normalteilers $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{H}$ hervorruft, so ist $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2$.*

Beweis. Bekanntlich[10]) ist $\mathfrak{G}$ das direkte Produkt von $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ und $\tau^{-1}\sigma a$ die $\mathfrak{G}_1$-Komponente von $a \in \mathfrak{G}$, wenn τ der von σ hervorgerufene Paarungsisomorphismus von $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{H}$ ist. Aus $(a, b) \in \mathfrak{P}_r$ folgt nun auch $(\tau^{-1}\sigma a, \tau^{-1}\sigma b) \in \mathfrak{P}_r$, d. h. aber, es gilt $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \circ \mathfrak{G}_2$.

Satz 3. *Besteht die Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ nicht nur aus ihrem neutralen Element, ist σ ein Paarungshomomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf einen Normalteiler $\overline{\mathfrak{G}}$ der $\mathfrak{R}$-direkt unzerlegbaren Gruppe $\mathfrak{H}$, τ ein Paarungshomomorphismus von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{J}$ und $\tau \cdot \sigma$ ein Paarungsisomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{J}$, so ist σ ein Paarungsisomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{H}$ und τ ein solcher von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{J}$.*

Beweis. τ ruft offenbar in $\overline{\mathfrak{G}}$ einen Paarungshomomorphismus τ' auf $\mathfrak{J}$ hervor. Da $\tau' \cdot \sigma$ ein Paarungsisomorphismus ist, sind σ und τ' ebenfalls Paarungsisomorphismen[11]) auf $\overline{\mathfrak{G}}$ bzw. $\mathfrak{J}$. Da $\overline{\mathfrak{G}}$ nicht nur aus dem neutralen Element besteht, folgt nach Satz 2 schließlich noch $\overline{\mathfrak{G}} = \mathfrak{H}$ und damit $\tau' = \tau$.

Satz 4. *Gilt in der $\mathfrak{R}$-direkt unzerlegbaren Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ und ausgezeichnetem Operatorenbereich $\mathfrak{R}_0$ sowie in den $\mathfrak{P}_r (r \in \mathfrak{R})$ der Doppelkettensatz für die bez. $\mathfrak{R}_0$ zulässigen Normalteiler, so folgt daraus, daß, wenn eine Summe addierbarer normaler Paarungsendomorphismen ein Paarungsautomorphismus ist, dasselbe für einen der Summanden gilt.*

Beweis. Dem üblichen Beweisgang folgend[12]) beschränkt man sich auf den Fall zweier normaler Paarungsautomorphismen ω_1, ω_2, deren Summe der identische Automorphismus ist, und weiß dann, daß nicht $\omega_1^n = \omega_2^n = 0$ sein kann und daß sich eine natürliche Zahl n mit $\omega_i^{2n}\mathfrak{G} = \omega_i^n\mathfrak{G}$ $(i = 1, 2)$ bestimmen läßt. Nach Satz 1 ruft also ω_i^n einen Paarungsautomorphismus von $\omega_i^n\mathfrak{G}$ hervor. Wegen der $\mathfrak{R}$-direkten Unzerlegbarkeit von $\mathfrak{G}$ bleiben nach Satz 2 also nur die Möglichkeiten $\omega_i^n = 0$ oder $\omega_i^n\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$. Danach ist aber jedenfalls $\omega_1\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$ oder $\omega_2\mathfrak{G} = \mathfrak{G}$, und somit nach Satz 1 ω_1 oder ω_2 ein Paarungsautomorphismus.

Nach diesen Vorbereitungen gelingt der Beweis des Hauptsatzes über REMAKsche Zerlegungen:

Satz 5. *Gilt in der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ und ausgezeichnetem Operatorenbereich $\mathfrak{R}_0$ sowie in den $\mathfrak{P}_r$ $(r \in \mathfrak{R})$ der Doppel-*

---

[10]) Siehe G, S. 78, Satz 3.

[11]) Siehe H, 1. 3.

[12]) Siehe G, S. 79, Satz 6.

kettensatz für die bez. $\mathfrak{R}_0$ *zulässigen Normalteiler, so besitzt* $\mathfrak{G}$ *eine* REMAK*sche Zerlegung. Sind für eine solche Gruppe* $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{G}_n = \mathfrak{H}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{H}_m$ *zwei* REMAK*sche Zerlegungen und* σ_i, τ_i *die dabei zu* $\mathfrak{G}_i$ *bzw. zu* $\mathfrak{H}_i$ *gehörigen Zerlegungsendomorphismen, so gilt* $n = m$; *bei passender Numerierung ist ferner* $\sum_{i=1}^{n} \tau_i \cdot \sigma_i$ *ein normaler Paarungsautomorphismus von* $\mathfrak{G}$, *welcher die erste in die zweite Zerlegung überführt, und es gilt* $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{H}_k \circ \mathfrak{G}_{k+1} \circ \cdots \circ \mathfrak{G}_n$ $(k = 1, \ldots)$.

Beweis. Aus dem Existenzbeweis für eine REMAKsche Zerlegung der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Operatorenbereich $\mathfrak{R}_0$ [13]) geht hervor, daß man erst recht eine REMAKsche Zerlegung für die Gruppe $\mathfrak{G}$ mit dem Paarungsbereich $\mathfrak{R}$ angeben kann. Um die Eindeutigkeitsaussagen des Satzes nachzuweisen, geht man wie beim üblichen Beweis [13]) vor. Die $\sigma_1 \cdot \tau_i$ rufen addierbare normale Paarungsendomorphismen τ_i' von $\mathfrak{G}_1$ hervor, deren Summe der identische Automorphismus ist. Nach Satz 4 muß also einer der Summanden, etwa τ_1' ein Paarungsautomorphismus von $\mathfrak{G}_1$ sein [14]). Da $\mathfrak{G}_1$ nicht nur aus dem neutralen Element besteht und $\tau_1 \mathfrak{G}_1$ ein Normalteiler der $\mathfrak{R}$-direkt unzerlegbaren Gruppe $\mathfrak{H}_1$ ist, ruft τ_1 daher nach Satz 3 einen Paarungsisomorphismus von $\mathfrak{G}_1$ auf $\mathfrak{H}_1$ hervor. Die $\tau_1 \cdot \sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ sind nun addierbar und $\omega_1 = \tau_1 \cdot \sigma_1 + \sum_{i=2}^{n} \sigma_i$ somit ein normaler Paarungsendomorphismus von $\mathfrak{G}$. Ist $\omega_1 a$ gleich dem neutralen Element e von $\mathfrak{G}$, so folgt $e = \sigma_1 \omega_1 a = \sigma_1 \tau_1 \sigma_1 a = \tau_1' \sigma_1 a$, also $\sigma_1 a = e$; daraus ergibt sich weiter

$$\prod_{i=2}^{n} \sigma_i a = \omega_1 a = e, \quad \text{d. h. } \sigma_i a = e \text{ für } i = 2, \ldots, n$$

und somit $a = e$. Damit ist die Umkehrbarkeit von ω_1 gezeigt, und nach Satz 1 ist daher ω_1 ein Paarungsautomorphismus. Er führt $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \circ \cdots \circ \mathfrak{G}_n$ in $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \circ \mathfrak{G}_2 \circ \cdots \circ \mathfrak{G}_n$ über. Für $n = 1$ ist die Behauptung damit bewiesen. Es braucht also nur noch im Falle $n > 1$ der Schluß von $n - 1$ auf n durchgeführt zu werden. Die in den Zerlegungen $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \circ \mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1 \circ \mathfrak{G}'$ zu $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_2 \circ \cdots \circ \mathfrak{H}_m$ und $\mathfrak{G}' = \mathfrak{G}_2 \circ \cdots \circ \mathfrak{G}_n$ gehörenden Zerlegungsendomorphismen seien τ bzw. σ. Offenbar ist $\tau = \sum_{i=2}^{n} \tau_i$. Aus $\tau a = b$ folgt $ab^{-1} \in \mathfrak{H}_1$, woraus sich für $a \in \mathfrak{G}'$ wegen $ba^{-1} \in \mathfrak{H}_1$ weiter $a = \sigma b$ ergibt. τ ruft also einen umkehrbaren Paarungshomomorphismus τ' von $\mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{H}'$ hervor. Andererseits folgt aus $a = \sigma b$ die Beziehung $ba^{-1} \in \mathfrak{H}_1$ und somit für $b \in \mathfrak{H}'$ weiter $b = \tau a$. Demnach ist τ' sogar eine Abbildung *auf* $\mathfrak{H}'$, und σ

[13]) Siehe G, S. 80.

[14]) Satz 4 ist anwendbar, da jeder zulässige Normalteiler von $\mathfrak{G}_1$ oder von $\mathfrak{P}_r' = \mathfrak{P}_r \frown \mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_1$ auch ein solcher von $\mathfrak{G}$ bzw. von $\mathfrak{P}_r$ ist und sich daher der Doppelkettensatz von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}_r$ auf $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{P}_r'$ überträgt.

ruft in $\mathfrak{H}'$ die Umkehrabbildung $\tau'^{-1} = \sigma'$ hervor. Damit hat sich τ' als Paarungsisomorphismus von $\mathfrak{G}'$ auf $\mathfrak{H}'$ ergeben, und es gilt

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_2 \circ \cdots \circ \mathfrak{H}_m = \tau\mathfrak{G}_2 \circ \cdots \circ \tau\mathfrak{G}_n.$$

Nach Induktionsvoraussetzung ist somit $n-1 = m-1$, also $n = m$. Mit σ_i' als dem von σ_i in $\mathfrak{G}'$ hervorgerufenen Endomorphismus ist $\tau' \cdot \sigma_i' \cdot \sigma'$ der zu $\tau\mathfrak{G}_i$ gehörige Zerlegungsendomorphismus von $\mathfrak{H}'$, so daß nach passender Umnumerierung der $\mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_n, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ zufolge der Induktionsvoraussetzung $\omega' = \sum_{i=2}^{n} \tau_i \cdot (\tau' \cdot \sigma_i' \cdot \sigma') = \sum_{i=2}^{n} \tau_i \cdot \sigma_i' \cdot \sigma'$ ein normaler Paarungsautomorphismus von $\mathfrak{H}'$ sein muß, welcher $\tau\mathfrak{G}_i$ in $\mathfrak{H}_i$ überführt. $\omega' \cdot \tau' = \sum_{i=2}^{n} \tau_i \cdot \sigma_i'$ ist somit ein normaler Paarungsisomorphismus von $\mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{H}'$, der $\mathfrak{G}_i$ in $\mathfrak{H}_i$ überführt. Durch $\omega(a a') = a(\omega' \tau' a')$ $(a \in \mathfrak{H}_1,\, a' \in \mathfrak{G}')$ wird daher ein Paarungsautomorphismus von $\mathfrak{G}$ definiert und der Paarungsautomorphismus $\omega \cdot \omega_1$ von $\mathfrak{G}$ führt $\mathfrak{G}_i$ in $\mathfrak{H}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ über. Wegen $\omega \cdot \omega_1 = \sum_{i=1}^{n} \tau_i \cdot \sigma_i$ ist damit auch der zweite Teil der Eindeutigkeitsaussage bewiesen. Nach Induktionsvoraussetzung ist ferner

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}_2 \circ \cdots \circ \mathfrak{H}_k \circ \tau\mathfrak{G}_{k+1} \circ \cdots \circ \tau\mathfrak{G}_n \qquad (k = 2, \ldots, n).$$

φ_i sei dabei der zu $\tau\mathfrak{G}_i$ $(i = k+1, \ldots, n)$ gehörige und ψ_i der zu $\mathfrak{H}_i$ $(i = 2, \ldots, k)$ gehörige Zerlegungsendomorphismus. Bekanntlich ist dann $\mathfrak{G}$ direktes Produkt der Untergruppen $\mathfrak{H}_1, \ldots, \mathfrak{H}_k, \mathfrak{G}_{k+1}, \ldots, \mathfrak{G}_n$. Um es auch als $\mathfrak{R}$-direktes Produkt nachzuweisen, benutze ich die Tatsache, daß $(\sigma\psi_i\tau a)(\psi_i\tau a)^{-1} \in \mathfrak{H}_1$ und $(\sigma\tau a)a^{-1} \in \mathfrak{H}_1$ für $a \in \mathfrak{G}$ gilt. Wegen $\tau a = (\psi_2\tau a) \ldots (\psi_k\tau a)(\varphi_{k+1}\tau a) \ldots (\varphi_n\tau a)$ ist daher

$$(\psi_2\tau a) \ldots (\psi_k\tau a)(\sigma\varphi_k\tau a) \ldots (\sigma\varphi_n\tau a)\, a^{-1} \in \mathfrak{H}_1.$$

Unter Beachtung von $\sigma\varphi_i\tau a \in \mathfrak{G}_i$ bedeutet das: $\psi_i\tau a$ $(i = 2, \ldots, k)$ und $\sigma\varphi_i\tau a$ $(i = k+1, \ldots, n)$ sind die $\mathfrak{H}_i$ bzw. die $\mathfrak{G}_i$-Komponente von a. Da $\psi_i\tau$ und $\sigma\varphi_i\tau$ Paarungsendomorphismen sind, ist damit alles bewiesen.

Die in den Sätzen 1, 4, 5 gemachte Voraussetzung über $\mathfrak{P}_r$ erübrigt sich, sobald $\mathfrak{P}_r$ zulässiger Normalteiler in $\mathfrak{G}^*$ ist: Für Satz 1 wurde dies schon bei seinem Beweis bemerkt, Satz 4 benötigt die Voraussetzung nur für die Zurückführung auf Satz 1, und für Satz 5 ist außerdem nur wesentlich, daß sich die Normalteilereigenschaft von $\mathfrak{P}_r$ auf $\mathfrak{P}_r \cap \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}_1$ überträgt und daher Satz 4 auf $\mathfrak{G}_1$ angewandt werden kann.

(Eingegangen am 2. Mai 1950.)