Werk

Titel: Die Potenzreihe der reziproken Gammafunktion

Autor: Kneser, H.

Ort: Berlin

Jahr: 1950

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0052|log59

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Die Potenzreihe der reziproken Gammafunktion.

Herrn OSKAR PERRON zum 70. Geburtstag am 7. Mai 1950 gewidmet.

Von

Hellmuth Kneser in Tübingen.

Die Haupteigenschaften der Gammafunktion, ihre Differenzengleichung, Ergänzungs- und Produktformel sowie ihre Darstellung durch ein unendliches Produkt, haben keinen engen Zusammenhang mit ihrer Darstellung durch Potenzreihen. Immerhin ist aber der Kehrwert der Gammafunktion eine der grundlegenden ganzen Funktionen der Analysis, und so mag es lohnen, ihre — überall konvergente — Potenzreihe zu untersuchen. Wir setzen sie in der Form

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} s^n \tag{1}$$

an. Natürlich kann man jeden einzelnen Beiwert c_n aus dem Produkt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(1-s)} &= e^{-Cs} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{s}{n}\right) e^{s/n} \\ &= \exp\left(-Cs - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{s^m}{m n^m}\right) \\ &= \exp\left(-Cs - \sum_{m=2}^{\infty} \frac{\zeta(m)}{m} s^m\right)\end{aligned}$$

durch die EULERsche Konstante C und die Werte $\zeta(2), \zeta(3), \ldots$ der RIEMANNschen Zetafunktion ausdrücken; aber diese Ausdrücke geben keine Auskunft über die Größe und das Vorzeichen von c_n bei großem n. Wir greifen deshalb zu der additiven Darstellung der Funktion (1) durch das HANKELsche Integral

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi i} \int w^{s-1} e^w \, dw. \tag{2}$$

Entwickelt man in ihm den Integranden nach Potenzen von s und integriert man nach Gliedern, so ergibt sich für c_n ein Integral, das zur Paßintegration einlädt. Wir werden diese durchführen bis zu dem folgenden Ergebnis:

Die Gleichung

$$z e^z = -n \quad (z = x + y i) \tag{3}$$

hat für $n \geqq 1$ *genau eine Wurzel* p *im Streifen* $0 < y < \pi$. *Mit ihr gilt*

$$\begin{aligned} c_n &= \sqrt{\frac{2\,\mathrm{l}\,n}{\pi n}}\,\mathrm{Im}\,[p^n e^{-n/p}(1 + o(1))] \\ &= \sqrt{\frac{2\,\mathrm{l}\,n}{\pi n}}\,|p|^n \exp(-n\,\mathrm{Re}\,(p^{-1}))\,\{\sin n\,(\arg p - \mathrm{Im}\,(p^{-1})) + o(1)\}\,^{1)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Was dies Hauptergebnis bedeutet, wird erst klar durch die folgende Aussage über die Abhängigkeit der komplexen Funktion p von n:

Bei hinreichend großem n *konvergiert und gilt eine Reihendarstellung*

$$\begin{aligned} p = {} & \mathrm{l}\,n - \mathrm{ll}\,n + \frac{\mathrm{ll}\,n}{\mathrm{l}\,n} + \frac{1}{\mathrm{l}\,n^2}\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{ll}\,n^2 - \mathrm{ll}\,n - \frac{1}{2}\pi^2\right) + \\ & + \frac{1}{\mathrm{l}\,n^3}\left(\frac{1}{3}\,\mathrm{ll}\,n^3 - \frac{3}{2}\,\mathrm{ll}\,n^2 + (1 - \pi^2)\,\mathrm{ll}\,n + \frac{3}{2}\pi^2\right) + \cdots \\ & + \pi i\Big[1 - \frac{1}{\mathrm{l}\,n} + \frac{1}{\mathrm{l}\,n^2}(-\mathrm{ll}\,n + 1) + \\ & + \frac{1}{\mathrm{l}\,n^3}\left(-\mathrm{ll}\,n^2 + 3\,\mathrm{ll}\,n + \frac{1}{3}\pi^2 - 1\right) + \cdots\Big]. \end{aligned} \tag{5}$$

Sie ist bis auf die ersten beiden Glieder eine Doppelpotenzreihe in den Größen $\mathrm{ll}\,n/\mathrm{l}\,n$ *und* $1/\mathrm{l}\,n$, *so daß man die weggelassenen Glieder in ein* $O\,(\mathrm{ll}\,n^4/\mathrm{l}\,n^4)$ *zusammenfassen oder bei früherem Abbrechen entsprechend verfahren kann.*

Man sieht hieraus, daß man nicht ohne Verlust an Gehalt der Aussage in (4) für p einen festen Abschnitt der Reihe (5), ergänzt durch ein O-Glied einsetzen kann; denn das O-Glied würde immer etwa $O(\mathrm{l}\,z^{-k})$ lauten und könnte nie auf die Größenordnung $o(1/n)$ gebracht werden, während die p enthaltenden Teile von (4) immer den Faktor oder Exponenten n mit sich führen.

Durch (4) werden anscheinend der Folge (c_n) dauernde Vorzeichenwechsel beigelegt. Auch über diese werden wir genauen Aufschluß bekommen; wir beweisen:

Das Argument des Sinus in (4) *nimmt bei jedem genügend großen* k *Werte aus der Strecke* $(k + \frac{1}{2})\pi < \varphi < (k + \frac{3}{2})\pi$ *an. Zwischen diesen und den in derselben Weise zu* $k + 1$ *statt* k *gehörenden Werten von* n *wechselt die Folge* (c_n) *genau einmal das Vorzeichen.*

---

[1]) Um die Formeln mit gehäuften Logarithmenzeichen etwas zu kürzen, sei die folgende Verabredung getroffen: $\mathrm{l}\,z$ bezeichnet den durch $-\pi < \mathrm{Im}\,(\mathrm{l}\,z) \leqq \pi$ festgelegten Wert des natürlichen Logarithmus; ferner sei $\mathrm{l}\,z^{-1} = (\mathrm{l}\,z)^{-1}$ und entsprechend in ähnlichen Fällen. Z. B. würde $3\,\mathrm{ll}\,z^2$ ausführlich geschrieben so lauten: $3\,(\log\log z)^2$.

Die Abschätzungen werden im folgenden ohne viel Rücksicht auf ihre zahlenmäßige Brauchbarkeit vorgenommen. Bei etwas sparsamerem Verfahren werden sie aber auch zur Zahlenrechnung brauchbar. Frl. A. Wiedersheim hat in ihrer Tübinger Prüfungsarbeit die Probe darauf gemacht: eines ihrer Ergebnisse ist $c_n > 0$ für $n = 1000001$.

§ 1.

Ansatz zur Paßintegration.

In (2) kann der Integrationsweg folgendermaßen gewählt werden: sei $\frac{1}{2}\pi < \beta < \pi$ und $r > 0$; dann führe der Weg längs der Graden $\arg w = -\beta$ aus dem Unendlichen nach $r e^{-\beta i}$, von da längs des Kreises $|w| = r$ im positiven Sinne nach $r e^{\beta i}$, von da längs der Graden $\arg w = \beta$ ins Unendliche. Setzen wir $w = e^z$, $z = x + y i$, so erhalten wir den folgenden Weg: von rechts aus dem Unendlichen wagerecht nach $\mathrm{l}\, r - \beta i$, von da senkrecht nach $\mathrm{l}\, r + \beta i$, von da wagerecht nach rechts ins Unendliche. Wir wollen gleich, weil es später bequem ist, $r = e^{\pi}$, $\mathrm{l}\, r = \pi$ setzen, bezeichnen den Weg mit L und haben dann

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{sz} \exp(e^z)\, dz.$$

Entwickeln wir den Faktor e^{sz} in die Exponentialreihe und integrieren wir gliedweise, so wird

$$\frac{1}{\Gamma(1-s)} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \int_L z^n \exp(e^z)\, dz,$$

und durch Vergleich mit (1) erhalten wir

$$2\pi i\, c_n = \int_L z^n \exp(e^z)\, dz. \tag{6}$$

Die Integration nach Gliedern bei der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \exp(e^z)\, s^n z^n / n! \tag{7}$$

ist auf dem senkrechten Teil von L wegen ihrer gleichmäßigen Konvergenz zulässig. Auf den wagerechten Teilen ist $|y| = \beta < \pi \leqq x$, $|z| < x\sqrt{2}$; also ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\exp(e^z)|\, (x|s|\sqrt{2})^n / n! = \exp(e^x \cos\beta + x|s|\sqrt{2})$$

eine konvergente Majorante von (7). Da die rechte Seite wegen $\cos\beta < 0$ ein konvergentes Integral von $x = \pi$ bis $x = \infty$ liefert, war die Integration nach Gliedern auch auf den wagerechten Teilen von L zulässig.

Die obere Hälfte des Weges L, also der Weg von π über $\pi+\beta i$ nach $\beta i+\infty$ heiße H; die untere ist das Spiegelbild von H an der reellen Achse, in umgekehrter Richtung durchlaufen. Statt (6) können wir also

$$2\pi i\, c_n = \int_H z^n \exp(e^z)\, dz - \int_{\bar{H}} z^n \exp(e^z)\, dz$$

schreiben. Da der Integrand bei konjugierten Werten von z selbst konjugierte Werte annimmt, ist das zweite Integral konjugiert zum ersten, und wir haben

$$\pi c_n = \operatorname{Im} \int_H z^n \exp(e^z)\, dz. \tag{8}$$

§ 2.

Der Paß.

Die Betragsfläche des Integranden über der z-Ebene hat, wenn $n>0$ ist, eine Mulde bei $z=0$ und ein Tal, das sich in der Breite $\frac{1}{2}\pi < y < \frac{3}{2}\pi$ wagerecht nach rechts ins Unendliche erstreckt. Mulde und Tal werden — so vermutet man — durch einen Paß getrennt, und über diesen wird man den Integrationsweg legen. Wir schreiben den Integranden als $e^{f(z)}$, setzen also

$$f(z) = n\,\mathrm{l}\,z + e^z;$$

dann muß der Paß eine Nullstelle von $f'(z) = n z^{-1} + e^z$, d. h. eine von 0 verschiedene Lösung der Gleichung (3) sein.

Wir beschränken uns von vornherein auf den Streifen $0<y<\pi$. Bei jedem reellen n muß am Paß der imaginäre Teil $e^x(x\sin y + y\cos y)$ von $z e^z$ verschwinden, d. h. der Paß liegt allemal auf der Kurve

$$x = -y \operatorname{ctg} y. \tag{9}$$

Sie beginnt bei $z=-1$ und führt über $z=\frac{1}{2}\pi i$ mit $y\to\pi$ nach rechts ins Unendliche. Auf ihr geht der Realteil von $z e^z$ stetig von $-e^{-1}$ nach $-\infty$ und zwar monoton; denn an einer Umkehrstelle müßte, da auf (9) der Imaginärteil den festen Wert 0 hat, die Ableitung von $z e^z$ verschwinden, und das tut sie nur bei $z=-1$. Wir finden also bei jedem $n>e^{-1}$ genau einen Paß im Streifen $0<y<\pi$; er heiße $z=p=\alpha+\beta i$. Damit ist zugleich gesagt, wie wir den bisher unbestimmten Wert β festlegen. Die Bedingung $\beta>\frac{1}{2}\pi$ ist dabei für $n>\frac{1}{2}\pi$ erfüllt. Dann führt der Weg H über p, sofern $\alpha \geqq \pi$ ist. Später werden wir noch verlangen, daß auch der Wert $p-n^{-2/5}$ auf H liegt, d. h. daß $\alpha - n^{-2/5} \geqq \pi$ ist. Auch dies ist für hinreichend große n der Fall, weil p mit wachsendem n nach rechts ins Unendliche rückt. Es genügt $n \geqq 120$, wie eine Überschlagsrechnung zeigt.

Um genauer zu ermitteln, wie sich p bei großem n verhält, setzen wir

$$p = (1 + q)\,\mathrm{l}(-n). \tag{10}$$

Von den Logarithmen gilt

$$\mathrm{l}\,p - \mathrm{ll}(-n) = \mathrm{l}(1 + q) \tag{11}$$

ohne Zusatz eines Vielfachen von $2\pi i$, weil der Imaginärteil der linken Seite zwischen $-\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ liegt. Da p die Gleichung (3) erfüllt, ist

$$p + \mathrm{l}\,p = \mathrm{l}(-n), \tag{12}$$

ebenfalls ohne Zusatz eines Vielfachen von $2\pi i$.

Wir schließen jetzt p in ein Rechteck ein. Ist $x \geqq \mathrm{l}\,n$, so ist $|z\,e^z| \geqq n\,\mathrm{l}\,n > n$. Ist aber $0 < y < \pi$, $0 < x \leqq \mathrm{l}\,n - \mathrm{ll}\,n$, so folgt

$$|z\,e^z| = |z|\,n/\mathrm{l}\,n < (x + \pi)\,n/\mathrm{l}\,n \leqq n - (\mathrm{ll}\,n - \pi)\,n/\mathrm{l}\,n \leqq n,$$

sobald $\mathrm{ll}\,n \geqq \pi$ ist. Da aber p die Gleichung (3) erfüllt und daher $|p\,e^p| = n$ ist, gehört p bei hinreichend großem n dem Rechteck

$$\mathrm{l}\,n - \mathrm{ll}\,n < x < \mathrm{l}\,n, \quad 0 < y < \pi$$

an. Nach (10) folgt daraus

$$|q| < \frac{\pi + \mathrm{ll}\,n}{|\mathrm{l}(-n)|} < \frac{\pi + \mathrm{ll}\,n}{\mathrm{l}\,n} \to 0 \qquad (n \to \infty). \tag{13}$$

Aus (10), (11) und (12) folgt

$$q\,\mathrm{l}(-n) + \mathrm{ll}(-n) + \mathrm{l}(1 + q) = 0.$$

Setzen wir in dieser Gleichung

$$u = -\mathrm{ll}(-n)/\mathrm{l}(-n), \quad v = -1/\mathrm{l}(-n),$$

so schreibt sie sich

$$q = u + v\,\mathrm{l}(1 + q). \tag{14}$$

Da $\mathrm{l}(1 + q)$ bei $q = 0$ regulär ist, läßt sich (14) durch eine bei $u = v = 0$ reguläre Funktion von u und v auflösen. Genauer: es gibt einen Wert $r > 0$ derart, daß jede dem Bereich $|u| < r$, $|v| < r$, $|q| < r$ angehörende Lösung von (14) durch die Lagrangesche Umkehrreihe

$$\begin{aligned} q &= u + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{v^k}{k!} \frac{d^{k-1}\,\mathrm{l}(1 + u)^k}{d\,u^{k-1}} \\ &= u + v\left(u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \cdots\right) + v^2\left(u - \frac{3\,u^2}{2} + \cdots\right) + v^3(u + \cdots) + \cdots \end{aligned} \tag{15}$$

dargestellt wird. Da u und v mit $n \to \infty$ gegen Null gehen — denn es ist ja $|\mathrm{l}(-n)| > |\mathrm{l}\,n|$ und $|\mathrm{ll}(-n)| \leqq \pi + \mathrm{l}(\pi + \mathrm{l}\,n)$ — und von q nach (13) dasselbe gilt, wird also die durch (10) erklärte Größe q bei hinreichend großem n durch die Reihe (15) dargestellt. Wir können den Gültigkeitsbereich der Reihe (15) noch genauer angeben. Sie stellt

eine analytische Funktion von u und v, und damit von n dar, wenn n solche positiven Werte annimmt, daß das Wertpaar (u, v) dem Gebiet der absoluten Konvergenz der Doppelreihe (15) angehört. Da aber, wie wir im Anhang feststellen werden, für $n \geqq 1$ die Beträge $|u|$ und $|v|$ mit wachsendem n abnehmen, ist das von einer Stelle an, etwa für $n > n_0$ der Fall. Für $n > n_0$ stellt also die Reihe in (15) eine analytische Funktion von n dar, und ebenso ist q eine dort analytische Funktion von n. Für genügend große n stimmen beide überein; also stimmen sie als analytische Funktionen bei allen $n > n_0$ überein. Das genaue Gebiet der absoluten Konvergenz der Reihe wird ebenfalls im Anhang ermittelt werden.

Eine Entwicklung von p nach steigenden Potenzen von u und v bekommen wir, indem wir (15) in (10) einsetzen. Dabei ordnen wir gleich nach dem Gesamtgrad:

$$\begin{aligned} p &= \mathfrak{l}(-n) - q/v \\ &= \mathfrak{l}(-n) - u v^{-1} - u + (\tfrac{1}{2} u^2 - u v) + (-\tfrac{1}{3} u^3 + \tfrac{3}{2} u^2 v - u v^2) + \cdots. \end{aligned}$$

Um hieraus Real- und Imaginärteil von p kennen zu lernen, setzen wir ein

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}(-n) &= \mathfrak{l} n + \pi i, \\ u v^{-1} &= \mathfrak{ll}(-n) = \mathfrak{ll} n + \mathfrak{l}(1 + \pi i/\mathfrak{l} n) = \\ &= \mathfrak{ll} n + \frac{\pi i}{\mathfrak{l} n} + \frac{\pi^2}{2 \mathfrak{l} n^2} - \frac{\pi^3 i}{3 \mathfrak{l} n^3} + \cdots, \\ v &= -\frac{1}{\mathfrak{l}(-n)} = -\frac{1}{\mathfrak{l} n} + \frac{\pi i}{\mathfrak{l} n^2} + \frac{\pi^2}{\mathfrak{l} n^3} + \cdots, \\ u &= u v^{-1} . v = -\frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n} + \pi i \frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n^2} - \frac{\pi i}{\mathfrak{l} n^2} + \pi^2 \frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n^3} - \frac{3 \pi^2}{2 \mathfrak{l} n^3} + \cdots, \\ \frac{1}{2} u^2 &= \frac{\mathfrak{ll} n^2}{2 \mathfrak{l} n^2} - \pi i \frac{\mathfrak{ll} n^2}{\mathfrak{l} n^3} + \pi i \frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n^3} + \cdots, \\ -u v &= -\frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n^2} + 2 \pi i \frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n^3} - \frac{\pi i}{\mathfrak{l} n^3} + \cdots, \\ -\frac{1}{3} u^3 &= \frac{\mathfrak{ll} n^3}{3 \mathfrak{l} n^3} + \cdots, \quad \frac{3}{2} u^2 v = -\frac{3 \mathfrak{ll} n^2}{2 \mathfrak{l} n^3} + \cdots, \quad -u v^2 = \frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n^3} + \cdots \end{aligned}$$

und erhalten

$$\begin{aligned} p &= \alpha + \beta i \\ &= \mathfrak{l} n - \mathfrak{ll} n + \frac{\mathfrak{ll} n}{\mathfrak{l} n} + \frac{1}{\mathfrak{l} n^2} \left(\frac{1}{2} \mathfrak{ll} n^2 - \mathfrak{ll} n - \frac{1}{2} \pi^2 \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\mathfrak{l} n^3} \left(\frac{1}{3} \mathfrak{ll} n^3 - \frac{3}{2} \mathfrak{ll} n^2 + (1 - \pi^2) \mathfrak{ll} n + \frac{3}{2} \pi^2 \right) + \cdots \\ &\quad + \pi i \left[1 - \frac{1}{\mathfrak{l} n} + \frac{1}{\mathfrak{l} n^2} (-\mathfrak{ll} n + 1) + \frac{1}{\mathfrak{l} n^3} \left(-\mathfrak{ll} n^2 + 3 \mathfrak{ll} n + \frac{1}{3} \pi^2 - 1 \right) + \cdots \right]; \end{aligned}$$

das ist grade die Reihe (4) aus der Einleitung. Der Konvergenzbereich dieser Reihe ist weniger übersichtlich als der der nach Potenzen von

u und v fortschreitenden Reihen, umfaßt aber jedenfalls ein Gebiet $(|1/\mathrm{l}\,n| < r_1,\ |\mathrm{ll}\,n/\mathrm{l}\,n| < r_1)$ mit $r_1 > 0$; denn wir haben ja nur für u und v die sie darstellenden konvergenten Potenzreihen ohne absolutes Glied eingesetzt, die nach Potenzen von $1/\mathrm{l}\,n$ und $\mathrm{ll}\,n/\mathrm{l}\,n$ fortschreiten.

§ 3.

Integralauswertung.

Wir haben jetzt das in (8) stehende Integral

$$H = \int_H z^n \exp(e^z)\, dz$$

asymptotisch auszuwerten. Um aber die in der Einleitung gemachten Aussagen über die Zeichenwechsel der Beiwerte c_n zu begründen, ziehen wir auch das Integral

$$H_1 = \int_H \mathrm{l}(z/p)\, z^n \exp(e^z)\, dz = d\,H_0/dn - \mathrm{l}\,p \cdot H_0$$

heran. Den Hauptbeitrag zu H_0 wird die Umgebung des Passes p liefern. Wir trennen daher eine Strecke der Länge $2a$ mit dem Mittelpunkt p von H ab und teilen überhaupt H in die folgenden gradlinigen Teile:

$$\begin{aligned} A &\text{ von } \pi \text{ bis } \pi + \beta i, \\ B^- &\text{ von } \pi + \beta i \text{ bis } p - a, \\ C &\text{ von } p - a \text{ bis } p + a, \\ B^+ &\text{ von } p + a \text{ bis } \beta i + \infty. \end{aligned}$$

Von vornherein wollen wir

$$0 < a \to 0 \qquad (n \to \infty) \tag{16}$$

annehmen; dann liegt bei genügend großem n der Teilpunkt $p - a$ sicher auf H. Die von den Teilen A bis B^+ herrührenden Beiträge zu den Integralen H_0 und H_1 bezeichnen wir mit A_0 bis B_0^+, A_1 bis B_1^+.

Für die Integrale A_0 und A_1 genügt eine grobe Schätzung. Auf A ist $\exp(e^z)$ beschränkt, $x = \pi$, $0 \leqq y < \pi$ und daher $|z| < \pi\sqrt{2}$. Da die Länge von A kleiner als π ist, haben wir

$$A = O((\pi\sqrt{2})^n). \tag{17}$$

Da auf A ferner $0 \leqq \arg z < \pi/4$, also $\mathrm{l}\,z$ beschränkt und $p \sim \mathrm{l}\,n$, $\mathrm{l}\,p \sim \mathrm{ll}\,n$ ist, wird

$$A_1 = O((\pi\sqrt{2})^n\, \mathrm{ll}\,n). \tag{18}$$

Für die anderen Integrale brauchen wir vor allem einige Kenntnis des Verhaltens der Funktion $f(z)$ und ihrer Ableitungen auf der Strecke C.

Es ist

$$f(z) = n\,\mathrm{l}\,z + e^z, \quad f'(z) = \frac{n}{z} + e^z, \quad f''(z) = -\frac{n}{z^2} + e^z, \quad f'''(z) = \frac{2n}{z^3} + e^z,$$

$$f'(p) = 0, \quad f''(p) = -\frac{n}{p^2} - \frac{n}{p} \sim -\frac{n}{\mathrm{l}\,n} \tag{19}$$

und daher auch

$$\operatorname{Re} f''(p) \sim -n/\mathrm{l}\,n. \tag{20}$$

Auf der ganzen Strecke C ist[2])

$$f'''(z) = \frac{2n}{z^3} + e^p e^{z-p} = O\left(\frac{n}{\mathrm{l}\,n^3}\right) - \frac{n}{p}\,O(1) = O\left(\frac{n}{\mathrm{l}\,n}\right). \tag{21}$$

Durch mehrfache Integration und mit Rücksicht auf die gleichmäßige Gültigkeit der O-Aussagen folgt daraus

$$f'(p \pm a) = \pm a f''(p) + O\left(\frac{a^2 n}{\mathrm{l}\,n}\right) \sim \mp \frac{a n}{\mathrm{l}\,n}, \tag{22}$$

$$f(z) = f(p) + \tfrac{1}{2} f''(p)(z-p)^2 + O(a^3 n/\mathrm{l}\,n), \tag{23}$$

dies letzte natürlich nur für z auf C.

Jetzt können wir C_0 und C_1 abschätzen. Auf C ist

$$\exp(f(z) - f(p)) = \exp[\tfrac{1}{2} f''(p)(z-p)^2 + O(a^3 n/\mathrm{l}\,n)].$$

Setzen wir von jetzt an

$$a^3 n/\mathrm{l}\,n \to 0 \tag{24}$$

voraus, so erhalten wir

$$\exp(f(z) - f(p)) = \exp[\tfrac{1}{2} f''(p)(z-p)^2] + \exp[\tfrac{1}{2} \operatorname{Re} f''(p)(z-p)^2]\, O(a^3 n/\mathrm{l}\,n).$$

Setzen wir $z = p + t$ und integrieren wir von $-a$ bis a, so folgt

$$e^{-f(p)} C_0 = \int_{-a}^{a} \exp(\tfrac{1}{2} f''(p) t^2)\, dt + \int_{-a}^{a} \exp(\tfrac{1}{2} \operatorname{Re} f''(p) t^2)\, dt\, O(a^3 n/\mathrm{l}\,n). \tag{25}$$

Wegen (19) und (20) konvergieren bei großem n die beiden Integrale, wenn wir sie von $-\infty$ bis ∞ statt von $-a$ bis a erstrecken. Dabei wird das zweite, das einen positiven Integranden hat, vergrößert zu

$$\sqrt{-2\pi/\operatorname{Re} f''(p)} = O(\sqrt{\mathrm{l}\,n/n}).$$

Im ersten setzen wir

$$t\sqrt{-\tfrac{1}{2} f''(p)} = u$$

und erhalten, mit dem Faktor $\sqrt{-2/f''(p)}$ versehen, das Fehlerintegral

---

[2]) Alle Grenzwert- oder Beschränkungsaussagen, also Formeln mit den Zeichen O, o oder $\sim$ in denen von n unabhängige Veränderliche vorkommen, sollen gleichmäßig in diesen Veränderlichen gelten, natürlich soweit diese Werte aus den ihnen zugewiesenen, häufig von n abhängigen Bereichen annehmen, so wie hier z auf der von n abhängigen Strecke C beliebig ist.

$\int e^{-uu}\,du$, erstreckt von $-b$ bis b, worin $b = a\sqrt{-\frac{1}{2}f''(p)}$ gesetzt ist. Für die Quadratwurzel nehmen wir den Wert (oder einen der beiden Werte) mit nicht negativem Realteil. Nach (19) gilt dann

$$\operatorname{Re} b \to +\infty, \quad \arg b \to 0,$$

wenn wir an die Größe a die weitere Anforderung

$$a\sqrt{n/\mathrm{l}\,n} \to \infty \tag{26}$$

stellen. Damit wird dann

$$\int_{-b}^{b} e^{-uu}\,du \to \sqrt{\pi},$$

$$\int_{-a}^{a} \exp\left(\tfrac{1}{2}f''(p)\,t^2\right)dt \sim \sqrt{-2\pi/f''(p)} \sim \sqrt{2\pi\,\mathrm{l}\,n/n},$$

und aus (25) folgt

$$e^{-f(p)}C_0 = (1+o(1))\sqrt{2\pi\,\mathrm{l}\,n/n} + O\left(\sqrt{\mathrm{l}\,n/n}\right)O(a^3 n/\mathrm{l}\,n) \sim \sqrt{2\pi\,\mathrm{l}\,n/n}. \tag{27}$$

Zur Abschätzung von C_1 genügt es, die für alle z auf C gültige Beziehung

$$\mathrm{l}(z/p) = O(a/|p|) = O(a/\mathrm{l}\,n)$$

heranzuziehen; mit (20) ergibt sie

$$\begin{aligned} e^{-f(p)}C_1 &= O(a/\mathrm{l}\,n)\int_{-a}^{a}\exp\left(\tfrac{1}{2}\operatorname{Re} f''(p)\,t^2\right)dt \\ &= O\left(\frac{a}{\mathrm{l}\,n\sqrt{-\operatorname{Re} f''(p)}}\right) = O\left(\frac{a}{\sqrt{n\,\mathrm{l}\,n}}\right). \end{aligned} \tag{28}$$

Auf den Strecken $B^{\pm}$ betrachten wir den Realteil von $f''(z)$. Es ist dort $x \geqq \pi > y$, $\cos y = \cos\beta < 0$; daraus folgt

$$\operatorname{Re} f''(z) = -n\,|z|^{-4}\operatorname{Re}(z^2) + e^x\cos\beta < 0.$$

Setzen wir

$$z = p \pm a \pm t, \quad \varphi(t) = \operatorname{Re} f(z), \quad b^+ = +\infty, \quad b^- = \alpha - a - \pi,$$

so durchläuft z die Strecke $B^{\pm}$, wenn t von 0 bis $b^{\pm}$ geht, und es ist

$$\varphi(0) = \operatorname{Re} f(p \pm a), \quad \varphi'(0) = \pm\operatorname{Re} f'(p \pm a), \quad \varphi''(t) = \operatorname{Re} f''(z) \leqq 0,$$
$$\varphi(t) \leqq \varphi(0) + t\,\varphi'(0) = \operatorname{Re} f(p \pm a) \pm t\operatorname{Re} f'(p \pm a).$$

(In jeder Formel ist durchweg das obere oder durchweg das untere Vorzeichen zu lesen.) Wegen (22) ist nun $\pm\operatorname{Re} f'(p \pm a) < 0$ bei hinreichend großem n und daher

$$\begin{aligned} |B_0^{\pm}| &\leqq \int_0^{b^{\pm}} e^{\varphi(t)}\,dt \leqq \int_0^{\infty}\exp\left(\varphi(0) + t\,\varphi'(0)\right)dt \\ &= \mp\exp\left(\operatorname{Re} f(p \pm a)\right)/\operatorname{Re} f'(p \pm a). \end{aligned} \tag{29}$$

Bei den Integralen $B_1^{\pm}$ kommt der Faktor $\mathfrak{l}(z/p)$ hinzu. Auf der Strecke B^- ist

$$1 < |z| \leqq p, \quad 0 < \arg z < \pi/4, \quad 0 < \arg p < \pi/4,$$
$$|\mathfrak{l}(z/p)| \leqq |\mathfrak{l}|z/p|| + |\arg(z/p)| < \mathfrak{l}|p| + \pi/4 = O(\mathfrak{ll}\, n);$$

das gibt

$$B_1^- = O(\mathfrak{ll}\, n) \exp(\operatorname{Re} f(p-a))/\operatorname{Re} f'(p-a). \tag{30}$$

Auf der Strecke B^+ ist $\operatorname{Re}(z/p) \geqq 1$, also $|w| \geqq 1$, wenn w die grade Strecke von 1 bis z/p durchläuft; auf B^+ gilt daher

$$|\mathfrak{l}(z/p)| = \left|\int_1^{z/p} w^{-1}\, dw\right| \leqq |z/p - 1| = (a+t)/|p|.$$

So bekommen wir

$$\begin{aligned} |B_1^+| &\leqq |p|^{-1} \exp \operatorname{Re} f(p+a) \int_0^\infty (a+t) \exp(t \operatorname{Re} f'(p+a))\, dt \\ &= |p|^{-1} \exp \operatorname{Re} f(p+a) \left(\frac{a}{-\operatorname{Re} f'(p+a)} + \frac{1}{(\operatorname{Re} f'(p+a))^2}\right). \end{aligned} \tag{31}$$

§ 4.

Schlußfolgerungen.

Aus den Ergebnissen (17), (18) und (27) bis (31) werden wir die in der Einleitung behaupteten Sätze ableiten. Zunächst können wir die in § 3 über a gemachten Voraussetzungen (16), (24) und (26) erfüllen, indem wir

$$a = n^{-2/5}$$

setzen. Dann vergleichen wir alle behandelten Integrale mit C_0. Dazu stellen wir fest

$$f(p) = n\,\mathfrak{l}\, p + e^p = n\,\mathfrak{l}(\mathfrak{l}\, n + O(\mathfrak{ll}\, n)) - n/p \sim n\,\mathfrak{ll}\, n.$$

Mit (27) zusammen gibt das

$$\mathfrak{l}|C_0| \sim n\,\mathfrak{ll}\, n. \tag{32}$$

Aus (17) und (18) entnehmen wir

$$\mathfrak{l}|A_\nu \mathfrak{l}\, n| < k\, n \qquad (\nu = 0, 1)$$

mit festem k, so daß sich

$$\mathfrak{l}|A_\nu \mathfrak{l}\, n/C_0| \to -\infty,$$

$$A_0 = o(C_0), \quad A_1 \mathfrak{l}\, n = o(C_0) \tag{33}$$

ergibt. Der Vergleich von (27) und (28) ergibt

$$C_1/C_0 = O(a/\mathfrak{l}\, n) = o(1/\mathfrak{l}\, n),$$

$$C_1 \mathfrak{l}\, n = o(C_0). \tag{34}$$

Um die Abschätzungen (29) bis (31) entsprechend auszuwerten, ziehen wir aus (22) die Folgerung

$$\mp f'(p \pm a) \sim n^{3/5}/\mathrm{l}\, n.$$

Sie zeigt, daß der Faktor, mit dem $\exp \operatorname{Re} f(p \pm a)$ in (29) bis (31) versehen ist, allemal mit $n \to \infty$ gegen Null geht, sogar wenn ihm noch ein Faktor $\mathrm{l}\, n$ hinzugesetzt wird. Es ist also

$$B_\nu^{\pm} \mathrm{l}\, n = o(\exp \operatorname{Re} f(p \pm a)). \tag{35}$$

Aus (23) folgt aber, wenn man (20) heranzieht,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} f(p \pm a) - \operatorname{Re} f(p) &= \tfrac{1}{2} a^2 \operatorname{Re} f''(p) + O(n^{-1/5}/\mathrm{l}\, n) \\ &= -(1 + o(1))\, n^{1/5}/2\, \mathrm{l}\, n + O(n^{-1/5}/\mathrm{l}\, n) \sim -n^{1/5}/2\, \mathrm{l}\, n. \end{aligned}$$

Bei genügend großem n ist also

$$\operatorname{Re} f(p \pm a) - \operatorname{Re} f(p) < -n^{1/5}/3\, \mathrm{l}\, n.$$

Mit (27) und (35) folgt daraus

$$\mathrm{l}\, |B_\nu^{\pm} \mathrm{l}\, n / C_0| < -n^{1/5}/3\, \mathrm{l}\, n + O(\mathrm{l}\, n) \to -\infty,$$

$$B_\nu^{\pm} \mathrm{l}\, n = o(C_0). \tag{36}$$

Nach der Zerlegung des Integrationsweges zu Anfang des § 3 ist

$$H_\nu = A_\nu + B_\nu^- + C_\nu + B_\nu^+ \qquad (\nu = 0, 1);$$

nach (33), (34) und (36) gilt daher

$$H_0 \sim C \sim e^{f(p)} \sqrt{2\pi\, \mathrm{l}\, n / n}, \tag{37}$$

$$H_1 \mathrm{l}\, n = o(C_0) = o(H_0). \tag{38}$$

Nun ist H_0 das Integral auf der rechten Seite von (8), und es ist

$$f(p) = n\, \mathrm{l}\, p + e^p = n\, \mathrm{l}\, p - n/p.$$

Setzen wir dies in (37) ein, so haben wir die Behauptung (4) der Einleitung. Die andere Behauptung, die über die Zeichenwechsel, folgt aus (38). Es ist ja

$$H_1 = \frac{d H_0}{d n} - H_0 \mathrm{l}\, p = o(H_0/\mathrm{l}\, n),$$

$$\begin{aligned} \frac{d \arg H_0}{d n} &= \operatorname{Im}\left(\frac{1}{H_0} \frac{d H_0}{d n}\right) = \operatorname{Im}(\mathrm{l}\, p + H/H_0) \\ &= \operatorname{Im} \mathrm{l}\, p + o(1/\mathrm{l}\, n) \sim \pi/\mathrm{l}\, n, \end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt ohne weiteres aus (5) folgt. Das Argument von H_0 wächst also über alle Grenzen und nimmt bei hinreichend großem n dauernd zu, aber beliebig langsam. Daraus folgt die Behauptung der Einleitung über die Zeichenwechsel der Folge (c_n).

Anhang.

Wie in § 2 angekündigt, wollen wir hier bestätigen, daß die Größen $|u|$ und $|v|$ mit wachsendem $n > 1$ monoton gegen Null streben. Dabei war

$$u = -\mathfrak{l}\mathfrak{l}(-n)/\mathfrak{l}(-n), \quad v = -1/\mathfrak{l}(-n).$$

Bei v erkennt man sofort: mit $n \to \infty$ wächst $|\mathfrak{l}(-n)|^2 = \mathfrak{l}\, n^2 + \pi^2$ monoton ins Unendliche, nimmt also $|v|$ monoton gegen Null ab. Um bei u dasselbe zu erkennen, bilden wir

$$\begin{aligned} \mathfrak{l}\,|u| &= \operatorname{Re}(\mathfrak{l}\mathfrak{l}\mathfrak{l}(-n) - \mathfrak{l}\mathfrak{l}(-n)), \\ \frac{d\,\mathfrak{l}\,|u|}{dn} &= \operatorname{Re}\left(\frac{1}{n\,\mathfrak{l}(-n)\,\mathfrak{l}\mathfrak{l}(-n)} - \frac{1}{n\,\mathfrak{l}(-n)}\right) \\ &= -\operatorname{Re}\frac{1 - \mathfrak{l}\mathfrak{l}(-n)^{-1}}{n\,\mathfrak{l}(-n)} \sim \frac{-1}{n\,\mathfrak{l}\,n}. \end{aligned} \tag{39}$$

Das Schlußglied ist die Ableitung von $-\mathfrak{l}\mathfrak{l}\,n$; aus $-\mathfrak{l}\mathfrak{l}\,n \to -\infty$ folgt daher $\mathfrak{l}\,|u| \to -\infty$. Die Monotonie wird erwiesen, indem wir uns davon überzeugen, daß das vorletzte Glied in (39) für $n \geqq 1$ negativ ist, und dies wiederum ist gesichert, wenn wir sehen, daß Zähler und Nenner des Bruches beide in der rechten oberen Viertelebene liegen. Beim Nenner $n(\mathfrak{l}\,n + \pi i)$ ist das klar. Um den Zähler zu behandeln, setzen wir für den Augenblick $\mathfrak{l}\mathfrak{l}(-n) = \gamma + \delta i$; dann ist

$$\gamma = \mathfrak{l}\,|\mathfrak{l}(-n)| \geqq \mathfrak{l}\,\pi > 1, \quad \delta = \arg \mathfrak{l}(-n) > 0.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re}(\mathfrak{l}\mathfrak{l}(-n)^{-1}) = \frac{\gamma}{\gamma^2 + \delta^2} < \frac{\gamma^2}{\gamma^2 + \delta^2} < 1, \\ &\operatorname{Re}(1 - \mathfrak{l}\mathfrak{l}(-n)^{-1}) > 0, \\ &\operatorname{Im}(1 - \mathfrak{l}\mathfrak{l}(-n)^{-1}) = \frac{\delta}{\gamma^2 + \delta^2} > 0, \end{aligned}$$

wie behauptet war.

Die zweite Aufgabe dieses Anhangs ist es, den genauen Bereich der (absoluten) Konvergenz der Doppelpotenzreihe (15) festzustellen. Dieser hat bekanntlich, abgesehen von Randpunkten, die Gestalt $|u| < \varphi(|v|)$, worin $\varphi(s)$ bei nicht negativem s der größte derjenigen Werte r ist, für die die durch (15) dargestellte Funktion in dem ganzen Doppelzylinder $|u| < r$, $|v| < s$ bzw. für $|u| < r$, $v = 0$ regulär ist.

Um die Profilfunktion $\varphi(s)$ zu ermitteln, greifen wir auf die Erklärung der Funktion $q(u, v)$ zurück. Setzen wir

$$F(q, u, v) = u + v\,\mathfrak{l}(1 + q) - q,$$

so ist q diejenige analytische Funktion von u und v, die im Nullpunkt regulär ist und den Wert 0 hat und die in ihrem ganzen Verlauf die

Gleichung $F = 0$ — gegebenenfalls mit einem anderen Wert des Logarithmus — erfüllt. Wir stellen zunächst fest, wie weit sie auf den Achsen $u = 0$ und $v = 0$ regulär ist. Für $u = 0$, $|v| < 1$ löst $q = 0$ die Gleichung $F = 0$, und es ist $F_q = v/(1+q) - 1 \neq 0$; also ist q dort regulär. Für $v = 1$, $q = u = 0$ dagegen ist $F_q = 0$, $F_u = 1 \neq 0$; also ist dort q singulär. Für $v = 0$ haben wir die Lösung $q = u$; und solange $|u| < 1$ bleibt, ist F regulär und $F_q \neq 0$, so daß wieder q regulär ist.

Weiter betrachten wir reelle Werte q, u und v. Die Gleichung $F = 0$ verlangt, in der reellen q-t-Ebene einen Schnittpunkt der Kurven

$$t = q - u, \quad t = v\,\mathrm{l}(1+q)$$

zu finden. Ist $v \leqq 0$, so gibt es genau einen; ist $0 < v < 1$, so sind es genau zwei, solange u nicht unter den — negativen — Wert sinkt, bei dem Berührung zwischen den beiden Kurven eintritt. Der rechts gelegene geht für $u = 0$ in den Nullpunkt über. All das erkennt man sofort aus der Monotonie der beiden Kurven und der Konvexität der zweiten. Berührung tritt ein, wenn außer $F = 0$ noch

$$1 = \frac{d(q-u)}{dq} = \frac{d}{dq}(v\,\mathrm{l}(1+q)) = \frac{v}{1+q}$$

gilt, d. h. wenn

$$-u = 1 - v - v\,\mathrm{l}\,v = \psi(v)$$

ist. Dann fallen zwei Wurzeln der Gleichung $F = 0$ zusammen; die Funktion $q(u, v)$ verzweigt sich, ist also singulär. Die Funktion $\psi(v)$ nimmt stetig von 1 zu 0 ab, wenn v von 0 bis 1 geht. Wir fassen zusammen:

Die durch die Reihe (15) *dargestellte Funktion* $q(u, v)$ *ist regulär für* $0 \leqq v < 1$, $0 \leqq -u < \psi(v)$, *dagegen singulär bei den Stellen* $0 < v < 1$, $u = -\psi(v)$.

Von der Profilfunktion $\varphi(s)$ wissen wir hiernach das folgende. Weil q für $v = 0$, $|u| < 1$ regulär ist, ist $\varphi(0) \geqq 1$. Weil q regulär ist für $u = 0$, $|v| < 1$, aber nicht für $u = 0$, $v = 1$, ist $\varphi(s) > 0$ für $0 < s < 1$, aber $\varphi(1) = 0$. Ferner ist $\varphi(s) \leqq \psi(s)$, weil q für $v = s$, $u = -\psi(s)$ singulär ist. Schließlich weiß man allgemein, daß $\mathrm{l}\,\varphi(s)$, soweit $\varphi > 0$ ist, eine nach oben konvexe nicht zunehmende Funktion von $\mathrm{l}\,s$ ist. Aus all dem folgt, daß $\varphi(s)$ für $0 \leqq s \leqq 1$ eine abnehmende stetige Funktion ist. Nun sei $0 < s_0 < 1$; dann ist q jedenfalls regulär für $|u| < \varphi(s)$, $|v| < s$. Ist $|u| < \varphi(s_0)$, aber $|v| = s_0$, so wählen wir $s' > s_0$ so nahe bei s_0, daß noch $|u| < \varphi(s')$ gilt. Dann ist $|u| < \varphi(s')$, $|v| < s'$ und daher q an der Stelle (u, v) regulär. Ist $|u| = \varphi(s_0)$, $|v| < s_0$, so wählen wir s'' zwischen $|v|$ und s_0. Dann ist $|u| < \varphi(s'')$, $|v| < s''$ und daher wieder q an der Stelle (u, v) regulär. Damit erfüllt die Funktion $f(w, z) = -q(-w, z)$ die Voraussetzungen des Singularitätensatzes über

Potenzreihen mit positiven Beiwerten, den wir in der folgenden Form anwenden[3]):

Sei $r_0 > 0$, $s_0 > 0$. *Die Funktion* $f(w, z)$ *sei regulär, wenn die Ungleichungen* $|w| \leqq r_0$, $|z| \leqq s_0$ *gelten und in mindestens einer von ihnen die Gleichheit nicht besteht. Sie sei aber nicht in allen Punkten mit* $|w| = r_0$, $|z| = s_0$ *regulär. Die Beiwerte in ihrer Potenzreihe seien reell und nicht negativ. Dann ist* $w = r_0$, $z = s_0$ *ein singulärer Punkt für* $f(w, z)$.

In der Tat sieht man an (15), daß die Voraussetzung über die Beiwerte erfüllt ist; die anderen Voraussetzungen — mit $r_0 = \varphi(s_0)$ — waren grade bestätigt worden. Danach ist $u = -\varphi(s_0)$, $v = s_0$ eine singuläre Stelle für $q(u, v)$. Es muß daher $\varphi(s_0) \geqq \psi(s_0)$ sein. Da wir schon früher $\varphi(s_0) \leqq \psi(s_0)$ festgestellt haben, ist $\varphi(s_0) = \psi(s_0)$ für jedes s_0 zwischen 0 und 1. Unser Ergebnis ist daher:

Der Bereich der absoluten Konvergenz der Reihe (15) *besteht abgesehen von Randpunkten, aus den Punkten* (u, v) *mit*

$$|v| < 1, \quad |u| < 1 - |v| + |v| \, l \, |v|.$$

Eine Überschlagsrechnung zeigt, daß die Reihe (15) etwa für $n = 100$ konvergiert, allerdings noch nicht so schnell, daß sie zur Zahlenrechnung brauchbar wäre.

---

[3]) Bei Funktionen einer Veränderlichen ist dies der früher sogenannte Satz von VIVANTI. Der hier ausgesprochene Satz wird genau so bewiesen. Nimmt man an, $f(w, z)$ sei regulär bei $z = r_0$, $w = s_0$ und setzt man $w = \frac{1}{2} r_0 + u$, $z = \frac{1}{2} s_0 + v$, so erhält man eine Funktion von u und v, die für $|u| \leqq \frac{1}{2} r_0$, $|v| \leqq \frac{1}{2} s_0$ regulär ist. Ihre Potenzreihe konvergiert daher bei geeignetem $\delta > 0$ für $u = \frac{1}{2} r_0 + \delta$, $v = \frac{1}{2} s_0 + \delta$. Sie entsteht aber aus der Potenzreihe für $f(w, z)$ durch Zerlegen der positiven Glieder in positive Teile und Zusammenfassen der Teile. Daher konvergiert die Reihe der Funktion $f(w, z)$ für $w = r_0 + \delta$, $z = s_0 + \delta$ und die Funktion $f(w, z)$ ist regulär für $|w| = r_0$, $|z| = s_0$, entgegen der Voraussetzung.

(Eingegangen am 6. Juli 1949.)