Werk

Titel: Reelle Eigenwerte verallgemeinerter Hillscher Eigenwertaufgaben 2. Ordnung

Autor: Strutt, M.J.O

Ort: Berlin

Jahr: 1943

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0049|log54

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Reelle Eigenwerte verallgemeinerter Hillscher Eigenwertaufgaben 2. Ordnung.

Von

M. J. O. Strutt in Eindhoven (Holland).

Einleitung und Zusammenfassung.

Die Hillsche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + w(z) \cdot \{\lambda + \gamma \Phi(z)\} = 0,$$

wo λ und γ reelle Parameter und $\Phi(z)$ eine reellwertige periodische Funktion mit der reellen Periode ζ darstellen, hat bereits zu vielen Arbeiten Anlaß gegeben. Als Ausgangspunkt wird meistens der Satz von Floquet benutzt, demzufolge obige Gleichung Lösungen mit der Eigenschaft: $w(z+\zeta) = \sigma w(z)$ aufweist. Hier ist σ der charakteristische Faktor, der entweder reell, oder komplex mit dem Modul 1 wird. In den genannten Arbeiten wird auf verschiedenen Wegen versucht, den charakteristischen Faktor, der nicht von z, sondern nur von λ, γ, ζ und Φ abhängt, zu bestimmen, ohne daß hierbei bisher ein voller Erfolg zu verzeichnen wäre.

Wir haben die obige Fragestellung umgedreht und betrachten ζ, σ und Φ als gegeben, die jeweils zusammengehörigen Parameterwerte λ und γ dagegen als gesucht[1]). Es entsteht eine homogene lineare Randwertaufgabe 2. Ordnung, welche allerdings, wie leicht einzusehen, nicht selbstadjungiert ist (die Differentialgleichung wohl, aber die Randbedingungen nicht). Die Eigenwerte für $|\sigma| = 1$ dieser Aufgabe können durch Extremumseigenschaften bestimmt und dementsprechend berechnet werden[1]). Auch Eigenwertschranken lassen sich auf dieser Grundlage in verschiedener Weise angeben. Die Parameter λ und γ können als rechtwinklige Koordinaten in einer Ebene betrachtet werden, in der die Eigenwerte auf analytischen Kurven liegen. Eine Reihe von Eigenschaften dieser Kurven läßt sich in allgemeiner Weise ableiten und bestimmt den Kurvenverlauf im großen.

Nach Erledigung dieser Hillschen Aufgabe im engeren Sinne kann die Frage aufgeworfen werden, in welcher Weise sie zu verallgemeinern wäre.

---

[1]) M. J. O. Strutt, Verslagen Nederl. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam **52** (1943), S. 83–90, 97–104.

Eine Möglichkeit besteht darin, daß wir die Zahl der Parameter bei einer Differentialgleichung 2. Ordnung erweitern und auf eine Gleichung der Form:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \lambda w + w\gamma_1\Phi_1(z) + w\gamma_2\Phi_2(z) = 0$$

übergehen, in der Φ_1 und Φ_2 reellwertige periodische Funktionen mit der gleichen Grundperiode ζ und λ, γ_1, γ_2 reelle Parameter darstellen. Diese Gleichungsform tritt, wie wir an Beispielen zeigen (§ 6) in Fragestellungen der mathematischen Physik auf. Bei den gleichen Randbedingungen wie oben können für die zusammengehörigen Eigenwerte λ, γ_1 und γ_2 wieder untere Schranken mit Hilfe einer geeigneten GREENschen Funktion angegeben werden (§ 2). Weiter gelten für diese Eigenwerte, analog wie im Fall zweier Parameter, Maximum-Minimum-Eigenschaften (§ 3). Auf Grund dieser Extremumseigenschaften ergeben sich neue Schranken für die Eigenwerte (§ 4). Wenn wir λ, γ_1 und γ_2 als rechtwinklige Raumkoordinaten betrachten, liegen die Eigenwerte auf analytischen Flächen. Es gibt zu jedem reellen σ, oder komplexen σ mit dem Modul 1 eine abzählbar unendliche Zahl getrennter Flächen. Nur Flächen, welche zu $\sigma = +1$ oder zu $\sigma = -1$ gehören, können einander treffen und keine einzige Fläche kann sich selber von endlicher Ordnung berühren oder schneiden (§ 5). Als Beispiel zu den vorangehenden Ausführungen bringen wir zwei Gleichungen der mathematischen Physik: die erweiterte MATHIEUsche Gleichung und die LAMÉsche Potentialgleichung. In diesen beiden Fällen wird graphisch gezeigt, wie bekannte Eigenwerte in bezug auf einige der oben berechneten unteren Schranken liegen (§ 6). Zum näheren Studium der Eigenwertflächen werden $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ auf einer solchen Fläche berechnet (§ 7) und aus dem Ergebnis wird geschlossen (§ 8), daß λ für jene Flächen, welche zu $|\sigma| = 1$ gehören (σ reell oder komplex), eine ganze transzendente Funktion von γ_1 und γ_2 ist. Weiter berechnen wir auch die zweiten Ableitungen von λ nach γ_1 und γ_2, welche die Krümmung der Eigenwertflächen bestimmen (§ 9). Die Lagenordnung der Eigenwertflächen ergibt sich (§ 10) durch eine kleine Erweiterung von Berechnungen, welche H. A. KRAMERS veröffentlicht hat, und zwar zeigt sich, daß sie entlang Geraden im λ-, γ_1-, γ_2-Raum, welche bestimmte Bedingungen erfüllen, mit der von H. A. KRAMERS und O. HAUPT in einfacheren Fällen angegebenen übereinstimmt. Beispiele lassen schließen, daß die angegebenen hinreichenden Bedingungen für diese Lagenordnung auch notwendig sind. In der Umgebung der λ-Achse weisen die Eigenwertflächen einfache Eigenschaften auf (§ 11). Aus den Extremumseigenschaften der Eigenwerte wird auf den Verlauf von Eigenwertflächen im großen geschlossen (§ 12) Hierauf wenden wir uns dem asymptotischen Verlauf der Eigenwertflächen für $|\lambda| + |\gamma_1| + |\gamma_2| \gg \zeta^{-2}$

zu. Zunächst werden die asymptotischen Lösungen der HILLschen Differentialgleichung nach R. E. LANGER im Falle zweier Nullstellen der Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ im Bereich einer Grundperiode der unabhängigen Veränderlichen z angegeben. Hieraus werden die Eigenwertgleichungen abgeleitet (§ 14). Bevor aus ihnen der asymptotische Verlauf der Eigenwertflächen gefolgert wird, stellen wir einige Hilfsbetrachtungen in § 15 zusammen. Das wichtigste Ergebnis in bezug auf die asymptotische Lage der Eigenwertflächen in § 16 besteht darin, daß je zwei benachbarte ungleichnamig (halb- bzw. ganz-) periodische Eigenwertflächen asymptotisch nahe zusammenliegen. Das gleiche gilt für alle zu komplexen σ-Werten gehörenden Eigenwertflächen, welche zwischen zwei benachbarten ungleichnamigen periodischen Eigenwertflächen liegen. Weiter wird in § 16 angegeben, daß entlang Geraden, für welche die Lagenordnung der Eigenwertflächen nach O. HAUPT und H. A. KRAMERS gilt, zu jedem komplexen σ und zu $\sigma = \pm 1$ abzählbar unendlich viele Eigenwerte liegen. Entlang anderen Geraden liegen zu jedem reellen oder komplexen σ-Wert abzählbar unendlich viele positive sowie negative Eigenwerte. Die Lage dieser Eigenwerte wird asymptotisch berechnet. In § 17 wird abgeleitet, daß asymptotisch für alle Eigenwertflächen zu $|\sigma| \approx 1$ gilt: $\gamma_1 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_1 + \gamma_2 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_2 < 0$ sowie $\partial^2\lambda/\partial\gamma^2 < 0$, wo $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$. Für $\lambda \to -\infty$ ist $|\partial^2\lambda/\partial\gamma^2| \to 0$. Die genannten Ergebnisse können fast alle unter bestimmten Voraussetzungen auf den Fall ausgedehnt werden, daß die Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ im Grundperiodenbereich von z insgesamt $2n$ Nullstellen aufweist (§ 18 und 19).

Als weitere Verallgemeinerung der HILLschen Gleichung betrachten wir m Parameter $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_m$, sowie m Funktionen $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_m$ an Stelle der obigen Parameter γ_1 und γ_2 und zwei Funktionen Φ_1 und Φ_2 (Abschnitt IV). Auch in diesem Fall lassen sich mit Hilfe der GREENschen Funktion sowie der Maximum-Minimum-Eigenschaften Eigenwertschranken angeben. Diese Schranken werden auf den interessanten Sonderfall abzählbar unendlich vieler Parameter γ_k sowie ebensovieler Funktionen Φ_k angewandt, der bei $\Phi_1 = \cos(2\pi z/\zeta)$, $\Phi_2 = \cos(4\pi z/\zeta)$, $\ldots \Phi_m = \cos(2m\pi/\zeta)$ zur HILLschen Gleichung im engeren Sinne mit *gerader* Funktion Φ gehört. Die Parameter γ_k stellen dann die Fourier-Koeffizienten dieser Funktion Φ dar, und falls Φ z. B. der DIRICHLETschen Bedingung genügt, können für diese Koeffizienten leicht untere Schranken angegeben werden (§ 20). Die Eigenwerte liegen jetzt auf Hyperflächen, deren wichtigste allgemeinen Eigenschaften in Analogie zum obigen Fall zweier Parameter γ_k abgeleitet werden (§ 21). Auch Lage und Verlauf dieser Hyperflächen entsprechen denjenigen der Eigenwertflächen im obigen dreidimensionalen Parameterraum (§ 22). Nachdem auch die asymptotischen Eigenschaften der Eigenwerthyperflächen zusammengestellt worden sind (§ 23), wird schließlich eine Anwendung auf

die LAMÉsche Wellengleichung gegeben, bei der vier Parameter $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$ und γ_3 auftreten (§ 24).

Wir überblicken hier die *Eigenwerte* einer Klasse von Randwertaufgaben 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten. Die *Eigenfunktionen* solcher Aufgaben sind dabei nur gestreift worden und sollen in einer späteren Arbeit eingehend behandelt werden. Auch weitere Verallgemeinerungen der HILLschen Aufgabe, so z. B. auf Gleichungen n-ter Ordnung, sollen in einer späteren Arbeit zur Behandlung kommen.

I. Allgemeine Eigenschaften der Eigenwerte.

§ 1.

Aufgabenstellung.

Wir betrachten die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} + \{\lambda + \gamma_1 \Phi_1(z) + \gamma_2 \Phi_2(z)\} w(z) = 0, \tag{1}$$

wo λ, γ_1 und γ_2 reelle Parameter und Φ_1 sowie Φ_2 reellwertige Funktionen darstellen, welche periodisch sind mit der Grundperiode ζ. Wenn die Periode von Φ_2 ein ganzes Vielfaches jener von Φ_1 oder umgekehrt ist, so wird ζ gleich der *größten* der beiden Perioden. Die Funktionen sollen stückweise stetig und in konvergente FOURIER-Reihen entwickelbar sein. Bekanntlich kann *jede* Differentialgleichung 2. Ordnung mit entsprechenden periodischen Koeffizienten durch eine Transformation der abhängigen Veränderlichen in die Form (1) gebracht werden. Die Lösungen w der Gleichung (1) sollen den Randbedingungen:

$$\begin{cases} w(z_0 + \zeta) = \sigma\, w(z_0); \\ w'(z_0 + \zeta) = \sigma\, w'(z_0) \end{cases} \tag{2}$$

genügen, wo Akzente Differentiation nach z bedeuten und z_0 einen beliebig gewählten Wert der abhängigen Veränderlichen darstellt. Die Größe σ soll reell, oder aber komplex mit dem Modul 1 sein. Wir suchen bei gegebenen Werten von zwei der drei Parameter λ, γ_1 und γ_2 den dritten zu bestimmen und nennen dies eine verallgemeinerte HILLsche Eigenwertaufgabe. Für die obengenannten Werte von σ gibt es, wie wir in dieser Arbeit zeigen werden, sicherlich reelle Werte des gesuchten Parameters, welche die Eigenwertaufgabe erfüllen. Allerdings sind nicht *alle* Eigenwerte, welche zu diesen σ-Werten gehören, reell.

§ 2.

Untere Schranken für die γ-Eigenwerte mit den kleinsten Beträgen.

Mit Hilfe einer geeignet gewählten GREENschen Funktion $G(z, \mathfrak{z})$ kann die obige HILLsche Eigenwertaufgabe als lineare homogene Integralgleichung geschrieben werden ($z_1 = z_0 + \zeta$):

$$w(z) = \delta \int_{z_0}^{z_1} \{\gamma_1 \Phi_1(\mathfrak{z}) + \gamma_2 \Phi_2(\mathfrak{z})\} \cdot G(z, \mathfrak{z}) \cdot w(\mathfrak{z})\, d\mathfrak{z}. \tag{3}$$

Den hier eingeführten Parameter δ können wir nachträglich gleich 1 setzen. Die GREENsche Funktion $G(z, \mathfrak{z})$ lautet im vorliegenden Fall[1]):

$$\begin{cases} G(z,\mathfrak{z}) = \dfrac{-\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \sin\{\sqrt{\lambda}(z-\mathfrak{z}+\zeta)\} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin\{\sqrt{\lambda}(z-\mathfrak{z})\}}{\sigma^2 - 2\sigma\cos\zeta\sqrt{\lambda} + 1} & \text{für } z \leqq \mathfrak{z}; \\ G(z,\mathfrak{z}) = \dfrac{\frac{\sigma}{\sqrt{\lambda}} \sin\{\sqrt{\lambda}(z-\mathfrak{z}-\zeta)\} - \frac{\sigma^2}{\sqrt{\lambda}} \sin\{\sqrt{\lambda}(z-\mathfrak{z})\}}{\sigma^2 - 2\sigma\cos\zeta\sqrt{\lambda} + 1} & \text{für } z \geqq \mathfrak{z}. \end{cases} \tag{4}$$

Wenn der Nenner des Ausdrucks (4) verschwindet, muß eine verallgemeinerte GREENsche Funktion G_a eingeführt werden, die für $\sigma = \exp(i\zeta\sqrt{\lambda})$, $\zeta\sqrt{\lambda} = n\pi$, $n = \pm 1, \pm 2$, usw. wird[1]):

$$\begin{cases} G_{a_1}(z,\mathfrak{z}) = \dfrac{1}{\zeta\sqrt{\lambda}}(z-z_0)\sin\{\sqrt{\lambda}(z-\mathfrak{z})\} + \dfrac{1}{\zeta\lambda}\sin\{\sqrt{\lambda}(\mathfrak{z}-z_0)\} \cdot \\ \qquad\qquad \cdot \sin\{\sqrt{\lambda}(z-z_0)\} \quad \text{für } z \leqq \mathfrak{z}; \\ G_{a_1}(z,\mathfrak{z}) = \dfrac{1}{\zeta\sqrt{\lambda}}(z-z_0)\sin\{\sqrt{\lambda}(z-\mathfrak{z})\} + \dfrac{1}{\zeta\lambda}\sin\{\sqrt{\lambda}(\mathfrak{z}-z_0)\} \cdot \\ \qquad\qquad \cdot \sin\{\sqrt{\lambda}(z-z_0)\} - \dfrac{1}{\sqrt{\lambda}}\sin\{\sqrt{\lambda}(z-\mathfrak{z})\} \quad \text{für } z \geqq \mathfrak{z} \end{cases} \tag{4a}$$

und für $\lambda = 0$[2]) sowie $\sigma = +1$:

$$G_{a2}(z,\mathfrak{z}) = \frac{1}{2\zeta}(z-\mathfrak{z})^2 - \tfrac{1}{2}|z-\mathfrak{z}| + C \quad \text{für } z \gtrless \mathfrak{z}, \tag{4b}$$

wo C eine willkürliche Konstante darstellt.

Aus dem Konvergenzradius der NEUMANNschen Reihe der Gleichung (3) ergibt sich sofort eine Schranke für δ:

$$\delta^{-2} \leqq \int_{z_0}^{z_1}\int_{z_0}^{z_1} \{\gamma_1\Phi_1(\mathfrak{z}) + \gamma_2\Phi_2(\mathfrak{z})\}^2 \cdot |G(z,\mathfrak{z})|^2\, dz\, d\mathfrak{z},$$

oder, mit Hilfe der SCHWARZschen Ungleichung:

$$\delta^{-2} \leqq \int_{z_0}^{z_1}\int_{z_0}^{z_1} (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \cdot |G(z,\mathfrak{z})|^2\, dz\, d\mathfrak{z}.$$

[2]) R. COURANT u. D. HILBERT, Methoden der math. Physik, Bd. 1, 1. Aufl., S. 294. Berlin, Springer, 1924.

Hieraus erhält man für $\delta = 1$ unmittelbar die gewünschten Schranken für die Eigenwertparameter γ_1 und γ_2:

$$(5) \qquad (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1} \leqq \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2) \cdot |G(z, \zeta)|^2 \, dz \, d\zeta.$$

Durch nochmalige Anwendung der SCHWARZschen Ungleichung kann (5) noch etwas umgeformt werden:

$$(5a) \qquad (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-2} \leqq \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} (\Phi_1^2 + \Phi_2^2)^2 dz \, d\zeta \cdot \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} |G(z, \zeta)|^4 \, dz \, d\zeta.$$

Wenn ψ^2 die obere Grenze von $\Phi_1^2 + \Phi_2^2$ im Bereich $z_0 \leqq z, \zeta \leqq z_1$ darstellt, können wir auch schreiben:

$$(5b) \qquad (\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1} \leqq \psi^2 \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} |G(z, \zeta)|^2 dz \, d\zeta.$$

Die obigen Gleichungen (5), (5a) und (5b) gelten, falls links der zum Eigenwert mit dem *kleinsten* absoluten Betrag gehörige Wert $\gamma_1^2 + \gamma_2^2$ eingesetzt wird. Falls zwei *gleiche* Eigenwerte mit dem kleinsten absoluten Betrag vorhanden sind, kann links $2\,(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1}$ geschrieben werden, bei drei gleichen solchen Eigenwerten $3\,(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)^{-1}$, usw.

Wir können die drei Parameter λ, γ_1 und γ_2 als rechtwinklige Koordinaten auffassen und erhalten dann aus den Gleichungen (5), (5a) und (5b) *Rotationsflächen um die λ-Achse als Schranken für γ_1 und γ_2.* In den früher berechneten Sonderfällen[1]) entstehen diese Rotationsflächen nach Gleichung (5b) unmittelbar durch Rotation der gezeichneten Kurven von Fig. 1(a—d) um die λ-Achse.

§ 3.

Maximum-Minimum-Eigenschaften der Eigenwerte für $|\sigma| = 1$.

Wir setzen voraus, daß die untengenannten Eigenwerte existieren. Nach früheren Ausführungen[1]) ist bei gegebenen Werten γ_1 und γ_2 jeder Eigenwert λ durch eine Maximum-Minimum-Eigenschaft gekennzeichnet. Wir betrachten den Ausdruck:

$$(6) \qquad M = -\int_{z_0}^{z_1} w^* \frac{d^2 w}{dz^2} \, dz - \gamma_1 \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z) w^* w \, dz - \gamma_2 \int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z) \, w^* w \, dz,$$

in dem w eine den Randbedingungen (2) genügende, zweimal stetig differenzierbare Funktion darstellt. Die Funktion w^* ist zu w adjungiert[1]).

Es sei an dieser Stelle hervorgehoben[1]), daß die allgemeine HILLsche Eigenwertaufgabe, wie sie hier betrachtet wird, *nicht* selbstadjungiert ist,

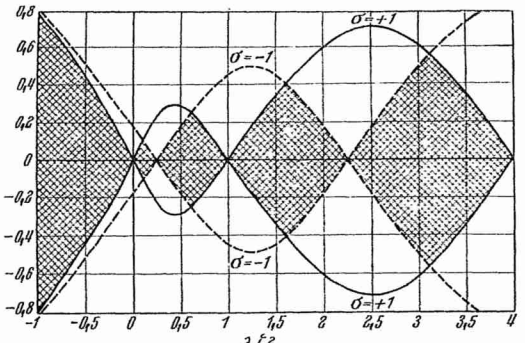

Fig. 1 a.

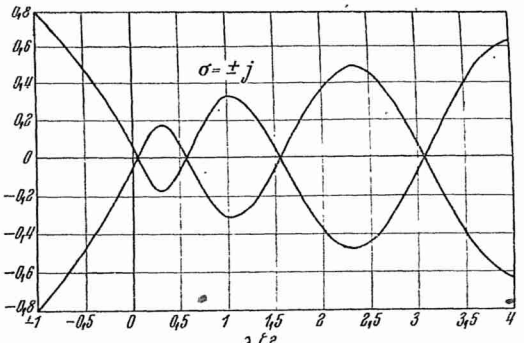

Fig. 1 b.

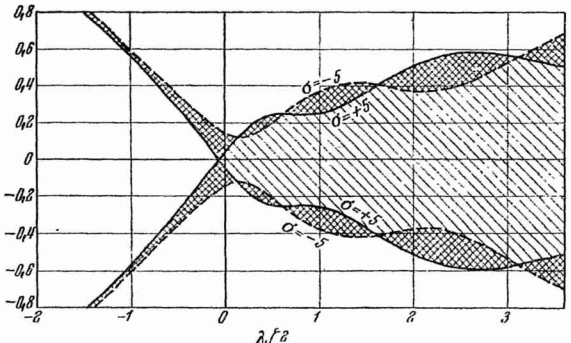

Fig. 1 c.

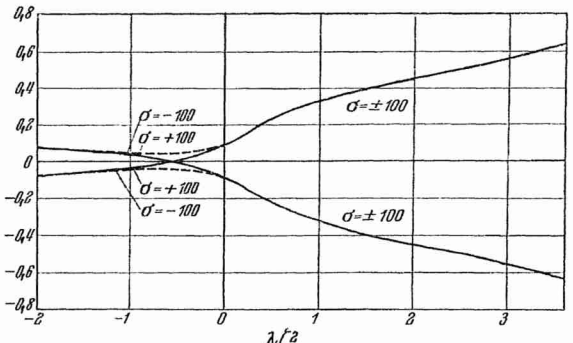

Fig. 1 d.

* Fig. 1 (a—d). Ordinate: $\zeta^2/4\pi^2\sqrt{I}$, wo $I=\int_{z_0}^{z_1}\int_{z_0}^{z_1}|G(z,\zeta)|^2\,dz\,d\zeta$ und G gegeben durch Gleichung (4). Abszisse: $\lambda\zeta^2/4\pi^2$. Fig. 1a: $\sigma=\pm 1$, Fig. 1b: $\sigma=\pm i$, Fig. 1c: $\sigma=\pm 5$, Fig. 1d: $\sigma=\pm 100$. In den schraffierten Bereichen der Fig. 1a für pos. λ gibt es keine Eigenwerte für reelle σ-Werte und für neg. λ keine Eigenwerte für komplexe σ-Werte. Diese Kurven sollen alle um die λ-Achse rotieren. Die entstandenen Flächen bilden untere Eigenwertschranken im γ_1-, γ_2-, λ-Raum.

aber für $\sigma = \pm 1$ in eine selbstadjungierte Aufgabe übergeht. In diesen Fällen gehen die unten angeführten Maximum-Minimum-Eigenschaften in die für polare selbstadjungierte Aufgaben bekannten über.

Wenn w quellenmäßig mit Hilfe einer der GREENschen Funktionen (4), (4a) oder (4b) dargestellt wird:

$$w(z) = \int_{z_0}^{z_1} G(z, \zeta) \cdot f(\zeta)\, d\zeta, \tag{6a}$$

wo f eine stetige integrierbare Funktion ist, so erhält man für w^* die Darstellung:

$$w^*(z) = \int_{z_0}^{z_1} G^*(z, \zeta) \cdot f^*(\zeta)\, d\zeta = \int_{z_0}^{z_1} G(\zeta, z)\, f^*(\zeta)\, d\zeta, \tag{6b}$$

wo G^* die zu G adjungierte GREENsche Funktion ist, welche aus G durch Verwechslung von z und ζ hervorgeht, während f^* zu f konjugiert komplex ist, ebenso wie w^* zu w. Die Funktion w^* genügt den zu (2) adjungierten Randbedingungen, welche aus (2) entstehen, indem σ durch $1/\sigma$ ersetzt wird. Die Funktionen w und w^* sollen den Bedingungen:

$$\int_{z_0}^{z_1} w(z)\, w^*(z)\, dz = 1 \tag{7}$$

und:

$$\int_{z_0}^{z_1} w(z)\, F_k(z)\, dz = 0,\ k = 1, 2, 3 \ldots n - 1, \tag{8}$$

genügen, wo $F_k(z)$ einem Satz stetiger integrierbarer Funktionen angehört. *Der kleinste Eigenwert λ ist das Minimum von M unter der Nebenbedingung* (7), *wenn w und w^* variiert werden.* Dieser kleinste Eigenwert hat, wie aus den in Fig. 1 angegebenen Schranken zu schließen ist, einen endlichen Betrag, falls $|\gamma_1|$ und $|\gamma_2|$ endlich sind. Die weiteren Eigenwerte λ numerieren wir ihrer Größe nach, von diesem kleinsten Eigenwert ausgehend. *Der n-te Eigenwert λ wird erhalten, indem man das Minimum von M bei Variation von w und w^* unter den Nebenbedingungen* (7) *und* (8) *für bestimmte Funktionen F_k berechnet und dann dieses Verfahren für andere Funktionen F_k wiederholt, bis das Minimum möglichst groß wird.*

In analoger Weise sind auch die Eigenwerte γ_1 (bzw. γ_2) bei gegebenen Werten der Parameter λ und γ_2 (bzw. γ_1) durch Maximum-Minimum-Eigenschaften bestimmt[1]). Wir werden dies kurz für die Eigenwerte $\gamma_1 = \gamma_2/\mu_2$ ausführen und betrachten den Ausdruck:

$$M = -\int_{z_0}^{z_1} w^* \left(\frac{d^2 w}{dz^2} + \lambda w\right) dz = -\int_{z_0}^{z_1} w \left(\frac{d^2 w^*}{dz^2} + \lambda w^*\right) dz \tag{9}$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$(10) \qquad \int_{z_0}^{z_1} \{\Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z)\} \cdot w(z) \cdot w^*(z) \cdot dz = N_2;$$

$$(11) \qquad \int_{z_0}^{z_1} \{\Phi_1(z) + \mu_2 \Phi_2(z)\} \cdot w(z) \cdot F_k(z) \cdot dz = 0; \qquad k = 1, 2, \ldots n-1.$$

Wir setzen zunächst voraus, M sei für alle in Betracht kommenden Funktionen w und w^* positiv definit und $\Phi_1 + \mu_2 \Phi_2 = g$ wechsele im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ das Vorzeichen. Dann ist der n-te positive Eigenwert γ_1 nach der Größe geordnet gleich dem Maximum-Minimum von M, wenn wir für einen bestimmten Satz der Funktionen F_k die Funktionen w und w^* bei $N_2 = +1$ variieren, bis M ein Minimum erreicht und dieses Verfahren für andere Sätze von Funktionen F_k wiederholen, bis das Minimum möglichst hoch wird. Der Betrag des n-ten negativen Eigenwertes γ_1 (nach der Größe der Beträge geordnet) ist das Maximum-Minimum von M für Funktionen w und w^*, für welche $N_2 = -1$ ist. Falls M negativ definit ist und g das Vorzeichen im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ wechselt, wird der n-te positive Eigenwert gleich dem Maximum-Minimum von $-M$ für Funktionen w und w^*, für welche $N_2 = -1$ ist. Der Betrag des n-ten negativen Eigenwertes γ_1 wird gleich dem Maximum-Minimum von $-M$ für Funktionen w und w^*, für welche $N_2 = +1$ ist. Falls M verschiedene Vorzeichen haben kann und g im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ positiv ist, wird der n-te positive Eigenwert γ_1 gleich dem Maximum-Minimum von M für Funktionen w und w^*, für welche M positiv und $N_2 = +1$ ist. Der Betrag des n-ten negativen Eigenwertes γ_1 wird das Maximum-Minimum von $-M$ für Funktionen w und w^*, für welche M negativ und $N_2 = +1$ ist. Falls M verschiedene Vorzeichen haben kann und g im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ negativ ist, wird der n-te positive Eigenwert das Maximum-Minimum von $-M$ für alle w und w^*, für welche M negativ und $N_2 = -1$ ist. Der Betrag des n-ten negativen Eigenwertes ist das Maximum-Minimum von M für Funktionen w und w^*, für welche M positiv und $N_2 = -1$ ist.

Bei der Durchführung der Maximum-Minimum-Verfahren nähern sich bei geeigneten Stetigkeitsvoraussetzungen die Funktionen F_k der Gleichungen (8) und (11) den Eigenfunktionen $w_1^*, w_2^*, \ldots w_{n-1}^*$, welche zu den jeweils $n-1$ Eigenwerten niedrigerer Ordnung gehören, während w und w^* sich der Eigenfunktion bzw. adjungierten Eigenfunktion zum n-ten Eigenwert nähern.

Wir können offenbar auch $\gamma_1 = \mu_1 \gamma_2$ setzen und dann an Stelle der Gleichungen (10) und (11) die Ausdrücke:

$$(10\,a) \qquad \int_{z_0}^{z_1} \{\mu_1 \Phi_1(z) + \Phi_2(z)\} \cdot w(z) \cdot w^*(z) \cdot dz = N_1$$

und

$$(11a) \qquad \int_{z_0}^{z_1} \{\mu_1 \Phi_1(z) + \Phi_2(z)\} \cdot w(z) \cdot F_k(z) \cdot dz = 0; \quad k = 1, 2, \ldots n - 1$$

betrachten. An Stelle des Eigenwertes γ_1 erhalten wir dann nach den obigen Maximum-Minimum-Verfahren den Eigenwert γ_2. Offenbar kommen die beiden angeführten Möglichkeiten darauf hinaus, daß wir in einer Ebene $\lambda = \text{konst.}$ entlang einem bestimmten Radius von der λ-Achse aus fortschreiten und auf diesem Radius den n-ten Eigenwert aufsuchen. Der entsprechende Radius berechnet sich aus γ_1 bzw. γ_2 nach $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \gamma_1^2 (1 + \mu_2^2)$ bzw. $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = \gamma_2^2 (1 + \mu_1^2)$.

§ 4.

Eigenwertschranken auf Grund der Extremumseigenschaften.

Zur Anwendung der obengenannten Extremumseigenschaften bestimmen wir zunächst das Vorzeichen des Ausdrucks M nach Gleichung (9). Mit Hilfe der GREENschen Funktionen nach Gleichungen (4), (4a) und (4b) formen wir diesen Ausdruck etwas um und benutzen hierbei die Gleichung:

$$\frac{d^2 G}{dz^2} + \lambda G = 0,$$

welche für alle z im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$, außer für $z = \mathfrak{z}$, gilt sowie die weitere Bedingung:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{\partial G}{\partial z}\right]_{z=\mathfrak{z}-\varepsilon}^{z=\mathfrak{z}+\varepsilon} = -1.$$

Beide Gleichungen gelten in derselben Form auch für $G^*(z, \mathfrak{z}) = G(\mathfrak{z}, z)$. Wir setzen die quellenmäßigen Darstellungen (6a) und (6b) für w und für w^* in Gleichung (9) ein und erhalten mit Hilfe obiger Bedingungsgleichungen für G und G^*:

$$(9a) \qquad M = \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} G^*(z, \mathfrak{z}) \cdot f^*(\mathfrak{z}) \cdot f(z)\, dz\, d\mathfrak{z} = \int_{z_0}^{z_1} \int_{z_0}^{z_1} G(z, \mathfrak{z}) \cdot f(\mathfrak{z}) \cdot f^*(z) \cdot dz\, d\mathfrak{z}.$$

Indem wir für f eine Funktion wählen, welche nach einem geeigneten Grenzübergang überall verschwindet, außer für $\mathfrak{z}_1$, wo sie jeden endlichen Wert überschreitet, so erkennen wir, daß in diesem Fall das Vorzeichen von M mit demjenigen von $G(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1)$ zusammenfällt:

$$(9b) \qquad \text{Vorz.}(M) = \text{Vorz.}[G^*(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1)] = \text{Vorz.}[G(\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_1)].$$

Falls das Vorzeichen der Ausdrücke (9b) nicht von $\mathfrak{z}_1$ abhängt, ist auch das Vorzeichen von M für alle stetigen integrierbaren Funktionen f das gleiche, d. h. M positiv oder negativ definit. Aus den Gleichungen (4), (4a) und (4b) ist zu ersehen, daß dieser Fall hier vorliegt.

Die Extremumseigenschaften der Eigenwerte gestatten unmittelbar ihren Vergleich mit jenen einfacher Eigenwertaufgaben, deren Eigenwerte sich direkt angeben lassen. Für diesen Vergleich kann eine früher[1]) angegebene Eigenwertänderungstafel benutzt werden. Die Funktionen Φ_1 und Φ_2 der Gleichung (1) sollen im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ beide das Vorzeichen wechseln. Es sei $\Phi_{\max}$ größer als der größte Wert von $|\Phi_1|$ und von $|\Phi_2|$, $\Phi_{\min} = -\Phi_{\max}$ kleiner als der kleinste Wert von Φ_1 und Φ_2. Wir setzen:

$$\begin{cases} g_{\max} = (1 + |\mu_2|)\,\Phi_{\max}; \\ g_{\min} = (1 + |\mu_2|)\,\Phi_{\min} \end{cases} \tag{12}$$

im Falle, daß γ_1 und:

$$\begin{cases} g_{\max} = (|\mu_1| + 1)\,\Phi_{\max}; \\ g_{\min} = (|\mu_1| + 1)\,\Phi_{\min}, \end{cases} \tag{12a}$$

falls γ_2 als Eigenwertparameter verwendet wird. Hier ist offenbar $g_{\max} >$ dem größten und $g_{\min} <$ dem kleinsten Wert von g. Die zu $g_{\max}$ an Stelle von $\Phi_1 + \mu_2\Phi_2$ bzw. $\mu_1\Phi_1 + \Phi_2$ in Gleichung (1) gehörigen Eigenwerte seien $\Gamma^{\max}$, die zu $g_{\min}$ gehörigen Eigenwerte $\Gamma^{\min}$. Wir wollen hier die Fälle $\sigma = \pm 1$ betrachten, bemerken aber, daß für komplexe σ-Werte auf gleichem Wege analoge Ergebnisse abgeleitet werden können. Es gilt:

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} \Gamma^{\max} \cdot g_{\max} \\ \Gamma^{\min} \cdot g_{\min} \end{matrix}\right\} = \left(\dfrac{2\pi m}{\zeta}\right)^2 - \lambda \quad \text{für} \quad \sigma = +1; \\ \left.\begin{matrix} \Gamma^{\max} \cdot g_{\max} \\ \Gamma^{\min} \cdot g_{\min} \end{matrix}\right\} = \dfrac{(2m+1)^2\pi^2}{\zeta^2} - \lambda \quad \text{für} \quad \sigma = -1; \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad m = 0, 1, 2, \ldots. \end{cases} \tag{13}$$

Für positiv definite Werte von M gibt es nur positive Werte $\Gamma^{\max}$ und nur negative Werte $\Gamma^{\min}$, für negativ definite Werte von M nur negative Werte $\Gamma^{\max}$ und nur positive Werte $\Gamma^{\min}$. In diesen Fällen ist:
für M positiv definit:

$$\gamma_{+n1} \text{ bzw. } \gamma_{+n2} \geqq \Gamma^{\max}_{+n};\ \gamma_{-n1} \text{ bzw. } \gamma_{-n2} \leqq \Gamma^{\min}_{-n};$$

für M negativ definit:

$$\gamma_{-n1} \text{ bzw. } \gamma_{-n2} \leqq \Gamma^{\max}_{-n};\ \gamma_{+n1} \text{ bzw. } \gamma_{+n2} \geqq \Gamma^{\min}_{+n},$$

wo $+n$ den n-ten positiven Eigenwert und $-n$ den n-ten negativen Eigenwert bezeichnet. Zur weiteren Vereinfachung sei $\Phi_{\max} = |\Phi_{\min}| = \Phi$, $|\mu_1| \leqq 1$, $|\mu_2| \leqq 1$. Wir können dann $g_{\max}$ durch 2Φ und $g_{\min}$ durch -2Φ ersetzen. Weiter wird: $\Gamma^{\max}_{+n} = |\Gamma^{\min}_{-n}| = \Gamma^{\min}_{+n} = |\Gamma^{\max}_{-n}| = \Gamma$ und folglich:

$$\gamma^2_{+n1} \text{ bzw. } \gamma^2_{+n2} \geqq \Gamma^2,$$

also:

$$\gamma^2_{+n1} + \gamma^2_{+n2} \geqq 2\,\Gamma^2. \tag{14}$$

Links steht in dieser Gleichung (14) das Quadrat des Radius von der λ-Achse aus in einer Ebene $\lambda =$ konst. bis zum n-ten Eigenwert in der betreffenden Richtung, während Γ den jeweils n-ten Eigenwert darstellt, der sich aus (13) ergibt, falls wir $g_{\max}$ durch 2Φ und $g_{\min}$ durch -2Φ ersetzen. Die Eigenwerte (13) sind in der Fig. 2 gezeichnet worden. Wenn wir dieses Bild um die λ-Achse rotieren lassen, können wir unmittelbar (14) anwenden.

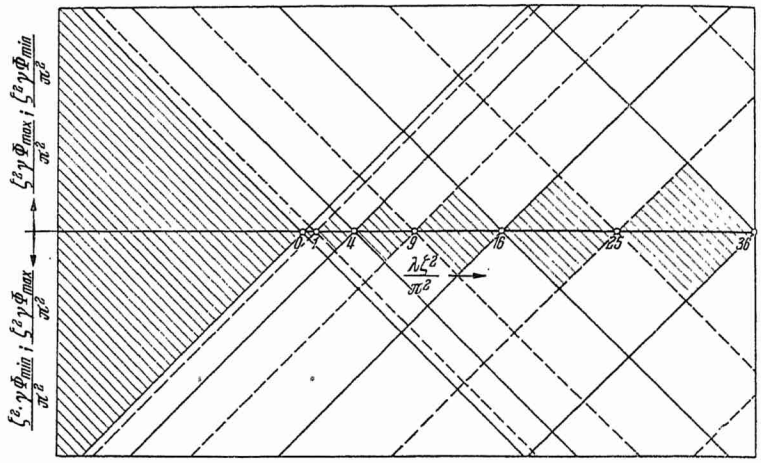

Fig. 2. Darstellung der Eigenwerte nach Gleichung (13) für $\sigma = +1$ (ausgezogen) und für $\sigma = -1$ (gestrichelt). Der Ordinatenmaßstab ist der gleiche wie der Abszissenmaßstab. An Stelle der Bezeichnungen $\Phi_{\max}$ bzw. $\Phi_{\min}$ im Bilde lese man $g_{\max}$ bzw. $g_{\min}$. Wenn die Figur um die λ-Achse rotiert, entstehen untere Schranken im γ_1-, γ_2-, λ-Raum nach Gleichung (14) für alle entsprechenden Eigenwerte.

Diese Schranken für den jeweils n-ten Eigenwert unserer Aufgabe bilden ein Beispiel für die Anwendung der angeführten Extremumseigenschaften der Eigenwerte.

Wir können aus diesen Eigenschaften auch *obere* Schranken für die Eigenwerte, z. B. mit den jeweils kleinsten Beträgen ableiten. Mit Hilfe des Ritzschen oder eines verwandten Verfahrens können sie weiterhin dazu verwendet werden, die Eigenwerte angenähert zu berechnen.

§ 5.

Die Eigenwerte liegen auf analytischen Flächen.

Wir wollen zunächst zeigen, *daß σ eine ganze transzendente Funktion der Parameter λ, γ_1 und γ_2 ist.* Hierzu gehen wir von zwei Lösungen w_{I} und w_{II} der Gleichung (1) aus, welche den Anfangsbedingungen: $w_{\mathrm{I}}(z_0) = 1$,

$w_{\mathrm{I}}'(z_0) = 0, w_{\mathrm{II}}(z_0) = 0, w_{\mathrm{II}}'(z_0) = 1$ genügen (Akzente bedeuten Differentiation nach z). Für σ ergibt sich mit Hilfe dieser Lösungen die Gleichung[3]):

$$\sigma^2 - \sigma\{w_{\mathrm{I}}(z_1) + w_{\mathrm{II}}'(z_1)\} + 1 = 0. \tag{15}$$

Die Funktionen w_{I} und w_{II} sind analytische und ganze Funktionen der Parameter λ, γ_1 und γ_2. Das gilt auch für jede Wurzel σ. Wenn wir σ einen festen Wert erteilen, entsteht eine analytische Beziehung zwischen den Parametern, welche im λ-, γ_1-, γ_2-Raum durch *analytische Flächen* dargestellt wird. Einem bestimmten σ-Wert entsprechen im allgemeinen *abzählbar unendlich viele getrennte Flächen*, welche sich ins Unendliche erstrecken, wie aus asymptotischen Lösungen der Gleichung (1) gefolgert werden kann[4]). Die einzelnen Eigenwertflächen können im Endlichen nicht endigen und haben sich stetig ändernde Ableitungen jeder Ordnung. Durch diese Eigenschaften sind in einem Punkte des $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$-Raumes, durch den mehrere Flächen hindurchgehen, die einzelnen Flächen voneinander zu unterscheiden. Da die Gleichung (15) höchstens zwei zusammenfallende Wurzeln σ haben kann, können durch einen Raumpunkt höchstens zwei verschiedene Flächen hindurchgehen. Es erhebt sich die Frage, ob eine Eigenwertfläche im obigen Sinne auch mit sich selber im Endlichen zusammentreffen kann. In diesem Fall könnte man von einem Treffpunkt ausgehend entlang einer im Endlichen geschlossenen Raumkurve auf der Fläche wieder zum gleichen Treffpunkt zurückgelangen.

Wir können zeigen, daß nur für $\sigma = \pm 1$ zwei verschiedene Eigenwertflächen durch einen Punkt gehen können. Weiter ergibt sich, daß *keine* Eigenwertflächen (für keinen einzigen reellen oder komplexen σ-Wert, in letzterem Fall mit dem Betrag 1) sich selber treffen können.

Der Beweis des ersten Satzes geht von Gleichung (15) aus. Für jeden Wert von $\sigma \neq \pm 1$ gibt es für die gleichen Werte λ, γ_1 und γ_2 einen zweiten σ-Wert derart, daß das Produkt beider σ-Werte gleich $+1$ ist. Zu jedem dieser Werte gehört *eine* und nur eine Eigenfunktion. Auf jeder Eigenwertfläche, welche einem σ-Wert $\neq \pm 1$ entspricht, liegen demnach ausschließlich *einfache* Eigenwerte. Wenn nun durch einen Punkt des $\lambda, \gamma_1, \gamma_2$-Raumes zwei Eigenwertflächen hindurchgehen würden, wäre der betreffende Punkt ein zweifacher Eigenwert. Dies geht z. B. aus der Tatsache hervor, daß die ersten und (oder) die höheren Differentialquotienten von λ nach γ_1 und γ_2 verschieden sein müßten. Wenn im betreffenden Punkt nur eine einzige Eigenfunktion vorhanden wäre und demnach ein einfacher Eigenwert vorläge, wären diese Differentialquotienten (vgl. § 7) *eindeutig* bestimmt. Wenn aber ein

---

[3]) Z. B. M. J. O. STRUTT, Ergebn. d. Math., Bd. 1, H. 3, S. 14., Berlin, Springer, 1932.

[4]) M. J. O. STRUTT, Verslagen Nederl. Akademie van Wetenschappen Amsterdam 52 (1943), Nr. 4 und 5, S. 153–162 und S. 212–222.

zweifacher Eigenwert vorläge, kämen wir mit dem obigen Schluß in Widerspruch, der besagt, daß jeder Punkt der Eigenwertfläche ein einfacher Eigenwert ist. Im Falle $\sigma = +1$ oder -1 können der Gleichung (15) zwei zusammenfallende σ-Werte genügen. Jedem σ-Wert entspricht wieder eine Eigenwertfläche mit nur einfachen Eigenwerten, den beiden zusammenfallenden σ-Werten kann somit ein Treffpunkt zweier Eigenwertflächen, also ein zweifacher Eigenwert entsprechen.

Der Beweis des zweiten Satzes ergibt sich daraus, daß für die Eigenwertflächen $\sigma = \pm 1$ der Parameter λ eine ganze transzendente Funktion von γ_1 und γ_2 ist, wie in § 8 gezeigt wird. Hierdurch können diese Eigenwertflächen *sich selber* nicht treffen.

Wenn zwei Flächen Schnittpunkte bilden, so liegen diese auf analytischen Raumkurven. Es können auch Eigenwertflächen auftreten, welche im Endlichen in sich geschlossen sind.

Durch die oben angegebenen Eigenwertschranken werden dem Verlauf der Eigenwertflächen ebenfalls Schranken auferlegt. So können z. B. in den schraffierten Bereichen der Fig. 1a, welche man als Rotationsgebiete um die λ-Achse auffassen soll, für positive λ-Werte keine Eigenwertflächen für reelle σ-Werte und für negative λ-Werte keine Eigenwertflächen für komplexe σ-Werte bei $|\sigma| = 1$ verlaufen.

§ 6.

Anwendungen auf Gleichungen der mathematischen Physik.

Hier sollen zwei Gleichungen der mathematischen Physik gestreift werden, welche als Sonderfälle der Gleichung (1) aufgefaßt werden können.

Bei der Transformation der partiellen Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_4^2} = 0$$

(der Wellengleichung in drei Dimensionen, oder Laplaceschen Potentialgleichung in vier Dimensionen entsprechend) auf ein System krummliniger Koordinaten, dem homofokale Paraboloide des Raumes x_1, x_2, x_3 zugrunde liegen, ergeben sich nach Trennung der abhängigen veränderlichen Differentialgleichungen der Form[5]):

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \left\{\eta - \frac{1}{8}\xi^2 - (p+1)\,\xi\cos 2z + \frac{\xi^2}{8}\cos 4z\right\} w = 0,$$

welche genau der Gleichung (1) entsprechen. Zwischen den vorliegenden Parametern η, ξ und p einerseits und den Parametern λ, γ_1 und γ_2 andererseits

bestehen die Beziehungen: $\lambda = \eta - \xi^2/8$; $\gamma_1 = -(p+1)\,\xi$; $\gamma_2 = \xi^2/8$. Diese Beziehungen erlauben sofort aus Fig. 1a untere Schranken für die periodischen Eigenwerte in der λ-, γ_2-Ebene bei gegebenem p-Wert herzuleiten. Diese sind in Fig. 3 dargestellt, während zugleich Eigenwertkurven nach E. L. INCE[5]) für $p = 4$ eingezeichnet worden sind.

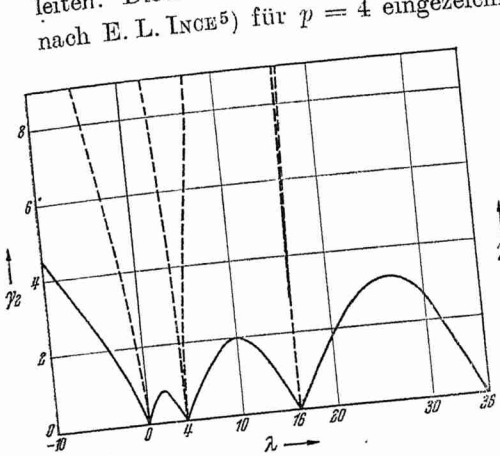

Fig. 3a.

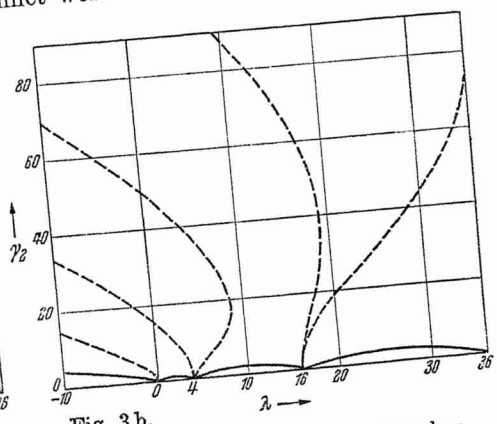

Fig. 3b.

Fig. 3. Untere Eigenwertschranken für $\sigma = +1$ der verallgemeinerten MATHIEUschen Eigenwertaufgabe. Senkrechte Projektion auf die λ-, γ_2-Ebene. Die ausgezogenen Kurven gehen aus der Fig. 1a hervor und stellen die unteren Eigenwertschranken dar. Die gestrichelten Eigenwertkurven gehen aus den von E. L. INCE berechneten Kurven hervor und liegen dementsprechend außerhalb der Schranken. Fig. a und b stellen die gleichen Kurven in zwei Maßstäben für die Ordinaten dar. Fig. b zeigt den allgemeinen Eigenwertkurvenverlauf für größere γ_2-Werte, der den in Abschn. II und III angegebenen Charakter aufweist. Entsprechend der Bemerkung im Anschluß an (5 b) können im vorliegenden Fall die gezeichneten unteren Eigenwertschranken noch etwas erhöht werden.

Als zweiten Fall betrachten wir die LAMÉsche Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y\{h - n(n+1)\,k^2 sn^2\, x\} = 0,$$

welche durch die Umformung[6]):

$$z = am(x,k); \quad \frac{dz}{dx} = (1 - k^2 \sin^2 z)^{1/2}$$

die Gestalt:

$$(1 - k^2 \sin^2 z)\frac{d^2 y}{dz^2} - k^2 \sin z \cos z \frac{dy}{dz} + \{h - n(n+1)\,k^2 \sin^2 z\}\, y = 0$$

erhält. Die weitere Umformung:

$$w = y\, e^{-\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} \frac{k^2 \sin z \cos z}{1 - k^2 \sin^2 z}\, dz}$$

---

[5]) P. HUMBERT, Potentiels et prépotentiels, S. 31. Paris, Gauthiers-Villars, 1936; E. L. INCE, Proc. London Math. Soc. **23** (1923), S. 56–74.

[6]) E. L. INCE, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **60** (1940), S. 84.

führt zu:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + w\left[h + \frac{\{h - n(n+1)\}k^2\sin^2 z}{1-k^2\sin^2 z} + \right.$$
$$\left. + \frac{\frac{k^2}{4}\cos 2z\,(1-k^2\sin^2 z) + \frac{3}{4}k^4\sin^2 z\cos^2 z}{(1-k^2\sin^2 z)^2}\right] = 0.$$

Da $k < 1$ ist, bleibt der Ausdruck in eckigen Klammern beschränkt und er entspricht dem Klammerausdruck in Gleichung (1), wenn wir setzen:

$$\lambda = h; \quad \gamma_1 = h - n(n+1); \quad \gamma_2 = 1; \quad \zeta = z;$$

$$\Phi_1 = \frac{k^2\sin^2 z}{1-k^2\sin^2 z}; \quad \Phi_2 = \frac{\frac{k^2}{4}\cos 2z\,(1-k^2\sin^2 z) + \frac{3}{4}k^4\sin^2 z\cos^2 z}{(1-k^2\sin^2 z)^2}$$
$$= \frac{\frac{k^2}{4}\cos^2 z\,(1+k^2\sin^2 z) + \frac{k^2}{4}\sin^2 z\,(k^2-1)}{(1-k^2\sin^2 z)^2}.$$

Wir müssen somit zunächst die Schnittkurven der Eigenwertflächen mit der Ebene $\gamma_2 = 1$ bilden und dann in dieser Ebene die Eigenwertkurven mit den Geraden $\gamma_1 + n(n+1) = \lambda$ zum Schnitt bringen. Die Schnittpunkte liefern für jeden Wert von n unmittelbar die Eigenwerte $\lambda = h$ der LAMÉschen Aufgabe. Wir haben die unteren Schranken der Fig. 1a auf diese Aufgabe angewandt und in der λ-, γ_1-Ebene die in Fig. 4 gezeichneten Eigen-

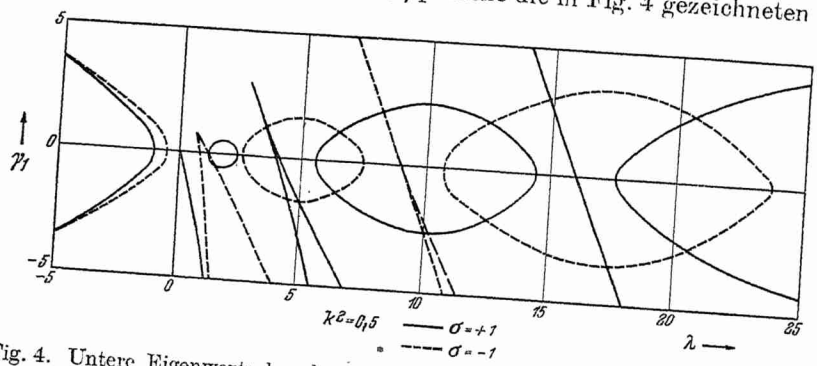

Fig. 4. Untere Eigenwertschranken der LAMÉschen Eigenwertaufgabe für $\sigma = +1$ (ausgezogene, in bezug auf die λ-Achse symmetrische Kurven) und für $\sigma = -1$ (gestrichelte, in bezug auf die λ-Achse symmetrische Kurven). Senkrechte Projektion auf die γ_1-, λ-Ebene. Die übrigen gestrichelten bzw. ausgezogenen Kurven gehen aus den von E. L. INCE berechneten Eigenwerten hervor. Alle Kurven gelten für $k^2 = 0{,}5$.

wertschranken erhalten, während zugleich einige von E. L. INCE[6]) für $k^2 = 0{,}5$ berechnete Eigenwertkurven eingezeichnet worden sind. Im vorliegenden Fall führt die Bemerkung im Anschluß an (5b) zu einer Erhöhung der gezeichneten unteren Eigenwertschranken.

II. Allgemeiner Verlauf der Eigenwertflächen.

§ 7.

Berechnung von $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und von $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ auf einer Eigenwertfläche.

Bei dieser Berechnung nehmen wir zunächst an, der betrachtete Punkt im Parameterraum mit den rechtwinkligen Koordinaten λ, γ_1 und γ_2 sei ein *einfacher* Eigenwert der HILLschen Aufgabe. Wir gehen von Gleichung (1) aus und erteilen den Parametern λ, γ_1 und γ_2 je einen infinitesimalen Zuwachs $d\lambda, d\gamma_1$ und $d\gamma_2$. Zum ursprünglichen Eigenwert gehört die Eigenfunktion w und die Gleichung (1), zum geänderten Eigenwert die Eigenfunktion $\mathfrak{w} = w + \mathfrak{w}_1$ und die Gleichung:

$$\frac{d^2\mathfrak{w}}{dz^2} + (\lambda + d\lambda)\,\mathfrak{w} + (\gamma_1 + d\gamma_1)\,\Phi_1(z)\,\mathfrak{w} + (\gamma_2 + d\gamma_2)\,\Phi_2(z)\,\mathfrak{w} = 0.$$

Indem wir Produkte infinitesimaler Größen vernachlässigen und Gleichung (1) berücksichtigen, entsteht:

$$\frac{d^2\mathfrak{w}_1}{dz^2} + (\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)\,\mathfrak{w}_1 = -w\cdot d\lambda - w\cdot\Phi_1\cdot d\gamma_1 - w\cdot\Phi_2\cdot d\gamma_2. \tag{16}$$

Die Funktion $\mathfrak{w}_1$ genügt, ebenso wie w, den Randbedingungen (2). Wir schreiben auch die zu (1) adjungierte Gleichung an:

$$\frac{d^2w^*}{dz^2} + (\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)\,w^* = 0, \tag{1a}$$

wo w^* die zu w adjungierte Eigenfunktion darstellt. Sie genügt den zu (2) adjungierten Randbedingungen, welche aus (2) hervorgehen, wenn σ durch $1/\sigma$ ersetzt wird. Wir multiplizieren (16) mit w^* und (1a) mit $\mathfrak{w}_1$. Darauf integrieren wir von z_0 bis z_1 und bilden die Differenz der entstandenen Gleichungen:

$$\int_{z_0}^{z_1}\left(w^*\frac{d^2\mathfrak{w}_1}{dz^2} - \mathfrak{w}_1\frac{d^2w^*}{dz^2}\right)dz = -d\lambda\cdot\int_{z_0}^{z_1} w\,w^*\,dz - d\gamma_1\cdot\int_{z_0}^{z_1} w\,w^*\,\Phi_1(z)\,dz - d\gamma_2\cdot\int_{z_0}^{z_1} w\,w^*\,\Phi_2(z)\,dz.$$

Die linke Seite verschwindet (GREENsche Formel) und wir erhalten, indem wir $d\lambda = (\partial\lambda/\partial\gamma_1)\cdot d\gamma_1 + (\partial\lambda/\partial\gamma_2)\cdot d\gamma_2$ setzen:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_1} = -\frac{\int_{z_0}^{z_1}\Phi_1(z)\,w\,w^*\,dz}{\int_{z_0}^{z_1} w\,w^*\,dz};\qquad \frac{\partial\lambda}{\partial\gamma_2} = -\frac{\int_{z_0}^{z_1}\Phi_2(z)\,w\,w^*\,dz}{\int_{z_0}^{z_1} w\,w^*\,dz}. \tag{17}$$

Im Falle, daß der Ausgangspunkt des λ-, γ_1-, γ_2-Raumes ein *zweifacher* Eigenwert der HILLschen Aufgabe ist, gehören zu ihm zwei Eigenfunktionen

w_1 und w_2. Wir haben in § 5 gezeigt, daß dieser Fall nur für $\sigma = \pm 1$ auftreten kann und für diese σ-Werte ist unsere Aufgabe selbstadjungiert, also $w \equiv w^*$. Wir werden in diesem Fall $\partial \lambda / \partial \gamma_1$ berechnen. An Stelle der Gleichung (16) erhalten wir jetzt (es sei: $d\gamma_2 \equiv 0$):

$$(16\,\text{a}) \quad \frac{d^2 \mathfrak{w}_1}{dz^2} + (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)\, \mathfrak{w}_1 = -\,(d\lambda + \Phi_1 \cdot d\gamma_1)\,(a_1 w_1 + a_2 w_2),$$

wo a_1 und a_2 zunächst unbekannte Faktoren sind. An die Stelle der Gleichung (1) treten jetzt zwei Gleichungen, mit $w = w_1$ und mit $w = w_2$, beide mit den gleichen Werten λ, γ_1 und γ_2. Wir multiplizieren (16a) mit w_1 und die Gleichung (1) für w_1 mit $\mathfrak{w}_1$. Darauf integrieren wir von z_0 bis z_1 und bilden die Differenz der entstandenen Gleichungen. Mit Hilfe der GREENschen Formel entsteht:

$$a_1 \cdot d\lambda \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_1^2\, dz + a_2 \cdot d\lambda \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_1 w_2\, dz + a_1 \cdot d\gamma_1 \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1 w_1^2\, dz + \\ + a_2 \cdot d\gamma_1 \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1 w_1 w_2\, dz = 0.$$

Mit der zweiten Gleichung (1) für w_2 und der Gleichung (16a) verfahren wir analog und erhalten:

$$a_1 \cdot d\lambda \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_1 w_2\, dz + a_2 \cdot d\lambda \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_2^2\, dz + a_1 \cdot d\gamma_1 \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1 w_1 w_2\, dz + \\ + a_2 \cdot d\gamma_1 \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1 w_2^2\, dz = 0.$$

Die entstandenen beiden homogenen linearen Gleichungen für a_1 und a_2 haben nur dann eine nicht verschwindende Lösung, wenn die Determinante, gebildet aus den Koeffizienten von a_1 und a_2, verschwindet. Diese Bedingung liefert unmittelbar die gesuchte Gleichung für $\partial \lambda / \partial \gamma_1$:

$$(17\,\text{a}) \qquad \begin{vmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} \bar{\alpha}_{11} + \bar{\beta}_{11} & \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} \bar{\alpha}_{12} + \bar{\beta}_{12} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} \bar{\alpha}_{21} + \bar{\beta}_{21} & \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} \bar{\alpha}_{22} + \bar{\beta}_{22} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\bar{\alpha}_{kl} = \int_{z_0}^{z_1} w_k w_l\, dz; \quad \bar{\beta}_{kl} = \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z)\, w_k w_l\, dz; \quad k, l = 1,2.$$

Die Größe $\partial \lambda / \partial \gamma_2$ kann ebenfalls aus Gleichung (17a) berechnet werden, indem $\partial \lambda / \partial \gamma_1$ durch $\partial \lambda / \partial \gamma_2$ und im Ausdruck $\bar{\beta}_{kl}$ die Funktion $\Phi_1(z)$ durch $\Phi_2(z)$ ersetzt wird. In diesem Fall ist nicht sofort ersichtlich, welche Werte von $\partial \lambda / \partial \gamma_1$ und $\partial \lambda / \partial \gamma_2$ jeweils zur gleichen Eigenwertfläche gehören. Wir können dies aber wie folgt erkennen. Es sei $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$.

Dann entsteht für $\partial\lambda/\partial\gamma$ eine zu (17a) genau analoge Gleichung, in der aber $\bar{\beta}_{kl}$ die Bedeutung:

$$\bar{\beta}_{kl} = \int_{z_0}^{z_1} (\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2)\, w_k\, w_l\, dz$$

hat. Indem wir μ_1 und μ_2 alle reellen Werte erteilen, bewegen wir uns bei jeder Wurzel $\partial\lambda/\partial\gamma$ von (17a) in der entsprechenden Berührungsebene der betreffenden Eigenwertfläche. Wir müssen demnach jene Werte $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ als zusammengehörig bezeichnen, bei denen die aus (17a) hervorgehende Quadratwurzel *gleiches* Vorzeichen hat.

§ 8.

Der Parameter λ als Funktion von γ_1 und γ_2 entlang den Eigenwertflächen, für die gilt: $|\sigma| = 1$.

Wir haben bereits im § 5 gesehen, daß λ für alle Eigenwertflächen eine analytische Funktion von γ_1 und γ_2 ist. Jetzt wollen wir einen Schritt weitergehen und zeigen, daß λ für jene Eigenwertflächen, für die $|\sigma| = 1$ ist, eine *eindeutige* Funktion von γ_1 und γ_2 ist. Anders gesagt: *Für diese Eigenwertflächen mit* $|\sigma| = 1$ *ist* λ *eine ganze transzendente Funktion von* γ_1 *und von* γ_2.

Den Beweis führen wir dadurch, daß wir zeigen: Für $|\sigma| = 1$ sind $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ für alle endlichen Werte von γ_1 und γ_2 *endlich*. Im Falle einfacher Eigenwerte geht dieser Satz unmittelbar aus Gleichung (17) hervor. Denn für $|\sigma| = 1$ ist w^* zu w konjugiert komplex und somit der Nenner beider Ausdrücke $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ positiv und $\neq 0$. Im Falle zweifacher Eigenwerte müssen wir von Gleichung (17a) ausgehen. Die genannten Differentialquotienten sind hier stets endlich, falls $\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{22} - \bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{21} \neq 0$. Ausgeschrieben lautet dieser Ausdruck:

$$\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{22} - \bar{\alpha}_{12}\bar{\alpha}_{21} = \int_{z_0}^{z_1} w_1^2\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_2^2\, dz - \Big[\int_{z_0}^{z_1} w_1 w_2\, dz\Big]^2$$

und infolge der SCHWARZschen Ungleichung ist er stets >0, falls w_1 und w_2 linear unabhängig sind. Im Falle, daß diese Voraussetzung nicht zutrifft, ist aber der Eigenwert einfach und haben wir bereits oben gesehen, daß $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ stets endlich sind.

Weil wir in § 5 gesehen haben, daß Treffpunkte von Eigenwertflächen nur für $\sigma = \pm 1$ auftreten können und weil für diese σ-Werte λ eine ganze Funktion von γ_1 und γ_2 ist, können wir schließen, *daß nie eine Eigenwertfläche mit sich selber zusammentreffen kann*. Denn eine solche Fläche könnte nicht durch eine eindeutige Funktion λ von γ_1 und γ_2 dargestellt werden.

Wir bemerken, daß obiger Schluß, λ sei eine ganze Funktion von γ_1 und γ_2, auch auf die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + \{\lambda \cdot \psi(z) + \gamma_1 \cdot \Phi_1(z) + \gamma_2 \cdot \Phi_2(z)\} w(z) = 0$$

mit den obigen Randbedingungen (2) ausgedehnt werden kann, falls die Funktion $\psi(z)$ im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ das Vorzeichen nicht ändert.

Im besonderen Fall, daß $\Phi_1(z)$ im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ das Vorzeichen nicht ändert, ist für $|\sigma| = 1$ nach (17) auch γ_1 eine ganze Funktion von λ für jeden festen Wert von γ_2. Entsprechendes läßt sich aus (17a) schließen. Falls $\Phi_2(z)$ das Vorzeichen nicht ändert, gilt das gleiche für γ_2 als Funktion von λ bei festem γ_1.

Unter bestimmten Einschränkungen können wir auch für $|\sigma| \neq 1$ schließen, daß λ eine ganze Funktion von γ_1 und γ_2 ist. Es sei in Gleichung (1): $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 < 0$ im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ und σ positiv. Dann wechseln w und w^* in diesem Bereich das Vorzeichen nicht und unser Satz folgt hier somit unmittelbar aus Gleichung (17).

§ 9.

Berechnung der zweiten Ableitungen von λ nach γ_1 und γ_2 entlang den Eigenwertflächen.

Wir setzen voraus, daß ein einfacher Eigenwert vorliegt. Als ersten Schritt zur Berechnung der zweiten Differentialquotienten ermitteln wir die Änderung $\mathfrak{w}_1$ der Eigenfunktion w. Für konstante Werte von γ_1 und γ_2 sollen abzählbar unendlich viele Eigenwerte λ_k ($k = 0, 1, 2, 3, \ldots$) zum vorgegebenen σ-Wert, mit den entsprechenden Eigenfunktionen w_k vorhanden sein. Diese Eigenfunktionen sollen einen *vollständigen Satz* bilden und wir entwickeln $\mathfrak{w}_1$ nach diesen Funktionen w_k in eine absolut und gleichmäßig konvergente Reihe (die Möglichkeit dieser Entwicklung ergibt sich aus den Eigenschaften von $\mathfrak{w}_1$, vgl. Verslagen Ned. Akademie van Wetenschappen **52** (1943), Nr. 8 und 9):

$$\mathfrak{w}_1 = d\gamma_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k w_k(z) + d\gamma_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B_k w_k(z). \tag{18}$$

Diese Reihe setzen wir in (16) ein und schreiben λ_n an Stelle von λ und w_n an Stelle von w. Unter Berücksichtigung von (1) entsteht:

$$\begin{cases} d\gamma_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_k) A_k w_k + d\gamma_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_k) B_k w_k \\ \qquad = -w_n \cdot d\lambda - w_n \Phi_1(z) \cdot d\gamma_1 - w_n \Phi_2(z) \cdot d\gamma_2. \end{cases} \tag{19}$$

Indem wir (19) mit w_k^*, der zu w_k adjungierten Eigenfunktion, multiplizieren, von z_0 bis z_1 integrieren und die Biorthogonalität[1]):

$$\int_{z_0}^{z_1} w_k(z) \cdot w_l^*(z)\, dz = 0 \quad \text{für } k \neq l$$

sowie (17) berücksichtigen, entstehen die Gleichungen:

$$A_k = \frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z) \cdot w_n(z) \cdot w_k^*(z) \cdot dz}{(\lambda_k - \lambda_n) \int_{z_0}^{z_1} w_k(z) \cdot w_k^*(z) \cdot dz} \quad \text{für } k \neq n;$$

$$B_k = \frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z) \cdot w_n(z) \cdot w_k^*(z) \cdot dz}{(\lambda_k - \lambda_n) \int_{z_0}^{z_1} w_k(z) \cdot w_k^*(z) \cdot dz} \quad \text{für } k \neq n.$$

Die Koeffizienten A_n und B_n sind zunächst unbestimmt ($= 0/0$), werden aber infolge der Normierung:

$$\int_{z_0}^{z_1} \mathfrak{w} \cdot \mathfrak{w}^* \cdot dz = \int_{z_0}^{z_1} w \cdot w^* \cdot dz = 1,$$

wo $\mathfrak{w}^*$ die zu $\mathfrak{w}$ adjungierte Eigenfunktion darstellt, gleich Null.

Wir erweitern jetzt (16) mit den zunächst vernachlässigten Gliedern 2. Ordnung:

$$\text{(16b)}\quad \frac{d^2 \mathfrak{w}_1}{dz^2} + (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)\, \mathfrak{w}_1 = -w \cdot d\lambda - \mathfrak{w}_1 \cdot d\lambda - w\Phi_1 \cdot d\gamma_1 - \\ - \mathfrak{w}_1 \Phi_1 \cdot d\gamma_1 - w\Phi_2 \cdot d\gamma_2 - \mathfrak{w}_1 \Phi_2 \cdot d\gamma_2,$$

setzen:

$$d\lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} d\gamma_1 + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} d\gamma_2 + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1^2} (d\gamma_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} d\gamma_1 d\gamma_2 + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_2^2} \cdot (d\gamma_2)^2$$

und führen (18) in (16b) ein. Da die Glieder 1. Ordnung bereits oben behandelt wurden, können wir uns auf die Glieder 2. Ordnung beschränken. Wir fassen jeweils die mit $(d\gamma_1)^2$, $(d\gamma_2)^2$ und $d\gamma_1 \cdot d\gamma_2$ multiplizierten Glieder zusammen und erhalten:

$$\text{(20)}\quad w_n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k w_k + \Phi_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k w_k = 0;$$

$$\text{(21)}\quad w_n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_2^2} + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B_k w_k + \Phi_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B_k w_k = 0;$$

$$\text{(22)}\quad 2 w_n \frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k w_k + \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} \sum_{k=0}^{\infty} B_k w_k + \\ + \Phi_1 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} B_k w_k + \Phi_2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A_k w_k = 0.$$

Wir multiplizieren (20) mit w_n^*, integrieren von z_0 bis z_1 und berücksichtigen (17). Es ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1^2} = \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z)\, w_k^*\, w_n\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z)\, w_k\, w_n^*\, dz}{(\lambda_n - \lambda_k) \int_{z_0}^{z_1} w_n\, w_n^*\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_k\, w_k^*\, dz}, \tag{23}$$

wo das Akzent beim Summenzeichen andeutet, daß das Glied $n = k$ nicht auftritt. Weiter ergibt sich in analoger Weise aus (21):

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_2^2} = \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z)\, w_k^*\, w_n\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z)\, w_k\, w_n^*\, dz}{(\lambda_n - \lambda_k) \int_{z_0}^{z_1} w_n\, w_n^*\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_k\, w_k^*\, dz} \tag{24}$$

und aus (22):

$$2\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \gamma_1 \partial \gamma_2} = \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_2\, w_k^*\, w_n\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_1\, w_k\, w_n^*\, dz}{(\lambda_n - \lambda_k) \int_{z_0}^{z_1} w_n\, w_n^*\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_k\, w_k^*\, dz} + \tag{25}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty}{}' \frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_1\, w_k^*\, w_n\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} \Phi_2\, w_k\, w_n^*\, dz}{(\lambda_n - \lambda_k) \int_{z_0}^{z_1} w_n\, w_n^*\, dz \cdot \int_{z_0}^{z_1} w_k\, w_k^*\, dz}.$$

Besondere Fälle obiger Gleichungen (23), (24) und (25), für selbstadjungierte Aufgaben, wurden bereits von anderer Seite behandelt[7]).

Im Falle, daß wir von einem zweifachen Eigenwert unserer Aufgabe ausgehen, müssen wir zunächst aus (17a) die zwei Werte von $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ sowie die entsprechenden Werte von $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ berechnen. Darauf ergeben sich aus den homogenen linearen Gleichungen für a_1 und a_2 im Falle von $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und in einem von $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ je zwei Sätze zusammengehöriger Werte dieser Koeffizienten und diese führen jeweils auf zwei verschiedene Eigenfunktionen $w_n = a_1 w_1 + a_2 w_2$, welche in den beiden Fällen im allgemeinen verschieden sind. Einsetzen dieser Eigenfunktionen w_n in (23), (24) und (25) ergibt je zwei Werte für diese Differentialquotienten. Diese können auch zusammenfallen, falls (17a) zwei zusammenfallende Wurzeln hat. Bei der Berechnung dieser Größen aus (20), (21) und (22) ist darauf zu achten, daß die beiden Eigenfunktionen, welche jeweils zur γ_1-Richtung gehören, zueinander orthogonal sind, und das gleiche gilt auch für die Eigenfunktionen, welche zur γ_2-Richtung gehören. Welche Eigenfunktionen dieser beiden Richtungen jeweils zur gleichen Eigenwertfläche gehören, ergibt sich nach der Bemerkung am Schluß von § 7.

---

[7]) Vgl. z. B. E. KAMKE, Differentialgleichungen, S. 228. Leipzig, Akademischer Verlag, 1942; E. SCHRÖDINGER, Ann. d. Phys. **80** (1926), S. 440.

§ 10.

Lagenordnung der Eigenwertflächen.

O. HAUPT[8]) hat auf Grund der Oszillationssätze bewiesen, daß bei konstanten Werten γ_1 und γ_2 und von $-\infty$ bis ∞ wachsendem λ zunächst ein einfacher ganzperiodischer ($\sigma = +1$) Eigenwert auftritt, dann zwei halbperiodische ($\sigma = -1$), darauf zwei ganzperiodische Eigenwerte usw. Zwischen zwei benachbarten gleichartigen periodischen Eigenwerten ist σ reell und $|\sigma| \gtrless 1$, zwischen zwei benachbarten ungleichartigen periodischen Eigenwerten ist σ komplex und $|\sigma| = 1$. H. A. KRAMERS[9]) hat diese Sätze in elementarer Weise und verschärfter Form hergeleitet, indem er zeigte, daß der Ausdruck in geschweiften Klammern der Gleichung (15), den wir mit f bezeichnen, für $\partial f/\partial\lambda = 0$ der Ungleichung $|f| \geqq 2$ genügt und daß dann $\partial^2 f/\partial\lambda^2$ das Vorzeichen von $-f$ hat. Hieraus geht hervor: Falls zwischen benachbarten gleichartig periodischen Eigenwerten ein λ-Eigenwert zu einem vorgegebenen reellen σ-Wert auftritt, so liegt im genannten λ-Bereich ein und nur ein zweiter Eigenwert zum gleichen σ, außer im Fall, daß für den erstgenannten Eigenwert gilt: $\partial f/\partial\lambda = 0$. Zwischen zwei ungleichartigen periodischen Eigenwerten liegt zu jedem komplexen σ mit $|\sigma| = 1$ ein und nur ein λ-Eigenwert.

Wir wollen diese für jeweils konstante γ_1- und γ_2-Werte abgeleiteten Sätze auf veränderliche Werte dieser Parameter unter der Voraussetzung beschränkter Funktionen Φ_1 und Φ_2 erweitern. Hierzu gehen wir von einem beliebigen Punkt Λ_0, Γ_1, Γ_2 des λ, γ_1, γ_2-Raumes aus und ziehen die Verbindungsgerade von diesem Punkt nach einem weiteren Punkt λ, γ_1, γ_2 dieses Raumes. Diese Gerade entsteht durch den Schnitt zweier Ebenen: $\gamma_1 - \Gamma_1 = (\lambda - \Lambda_0)\operatorname{tg}\varphi_1$ und $\gamma_2 - \Gamma_2 = (\lambda - \Lambda_0)\cdot\operatorname{tg}\varphi_2$. Wir rechnen diese Winkel φ_1 und φ_2 positiv für $\gamma_1 > \Gamma_1$, $\gamma_2 > \Gamma_2$ und $\lambda > \Lambda_0$ und zählen sie von der λ-Achse aus. Die Gleichung (1) schreibt sich mit Hilfe dieser Größen:

$$\left\{\frac{d^2w}{dz^2} - \Lambda_0\Phi_1 w\operatorname{tg}\varphi_1 - \Lambda_0\Phi_2 w\operatorname{tg}\varphi_2 + \Gamma_1\Phi_1 w + \Gamma_2\Phi_2 w + \lambda w(1 + \Phi_1\operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2\operatorname{tg}\varphi_2) = 0.\right. \tag{26}$$

Wir machen nun mit einigen geringfügigen Änderungen von der Rechenweise Gebrauch, die H. A. KRAMERS[9]) verwendet hat. Wenn w_1 und w_2 zwei beliebige linear unabhängige Lösungen von (26) darstellen, ergibt sich für f die Formel:

$$cf = \begin{vmatrix} w_1(z_1) & w_2(z_1) \\ w_1'(z_0) & w_2'(z_0) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} w_1'(z_1) & w_2'(z_1) \\ w_1(z_0) & w_2(z_0) \end{vmatrix}; \quad c = \begin{vmatrix} w_1(z) & w_1'(z) \\ w_2(z) & w_2'(z) \end{vmatrix}, \tag{27}$$

wo Akzente Differentiation nach z bezeichnen. Zur Berechnung von $\partial f/\partial\lambda$ müssen wir $\partial w/\partial\lambda$ und $\partial w'/\partial\lambda$ ermitteln, wo w eine der Lösungen w_1 oder

[8]) O. HAUPT, Math. Ann. **76** (1915), S. 67—104; **79** (1919), S. 278—285.
[9]) H. A. KRAMERS, Physica, Haag, **2** (1935), S. 483—490.

w_2 bezeichnet. Die Funktion $\partial w/\partial\lambda \equiv w_\lambda$ genügt der aus (26) hervorgehenden unhomogenen Gleichung:

$$\frac{d^2 w_\lambda}{dz^2} + w_\lambda [- \Lambda_0 \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 - \Lambda_0 \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2 + \Gamma_1 \Phi_1 + \Gamma_2 \Phi_2 + \lambda (1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2)] = - w (1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2).$$

Wir bestimmen eine Lösung w_λ dieser inhomogenen linearen Differentialgleichung, welche den Anfangsbedingungen $w_\lambda(z_0) = 0$ und $w'_\lambda(z_0) = 0$ genügt (Akzent bezeichnet Differentiation nach z). Diese Lösung wird durch:

$$(28) \quad w_\lambda = \frac{1}{c} \int_{z_0}^{z} \begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z) \\ w_1(\mathfrak{z}) & w_2(\mathfrak{z}) \end{vmatrix} w(\mathfrak{z}) \cdot [1 + \Phi_1(\mathfrak{z}) \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2(\mathfrak{z}) \cdot \operatorname{tg}\varphi_2] \, d\mathfrak{z}$$

dargestellt. Wegen der angeführten Anfangsbedingungen der Funktion w_λ brauchen wir beim Differenzieren von (27) nach λ nur $w_1(z_1)$, $w'_1(z_1)$, $w_2(z_1)$, $w'_2(z_1)$ als Veränderliche zu betrachten und erhalten nach leichter Rechnung:

$$(29) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \lambda} = - \alpha_{21} J_{11} + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) J_{12} + \alpha_{12} J_{22}, \\ \text{wo:} \\ k, l = 1,2; \; J_{kl} = \dfrac{1}{c} \displaystyle\int_{z_0}^{z_1} w_k(z) \, w_l(z) \, [1 + \Phi_1(z) \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2(z) \cdot \operatorname{tg}\varphi_2] \, dz \end{cases}$$

und wo:

$$(30) \quad \begin{cases} c\alpha_{11} = \begin{vmatrix} w_1(z_1) & w'_1(z_1) \\ w_2(z_0) & w'_2(z_0) \end{vmatrix}; \quad c\alpha_{12} = - \begin{vmatrix} w_1(z_1) & w'_1(z_1) \\ w_1(z_0) & w'_1(z_0) \end{vmatrix}; \\ c\alpha_{22} = - \begin{vmatrix} w_2(z_1) & w'_2(z_1) \\ w_1(z_0) & w'_1(z_0) \end{vmatrix}; \quad c\alpha_{21} = \begin{vmatrix} w_2(z_1) & w'_2(z_1) \\ w_2(z_0) & w'_2(z_0) \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Nochmaliges Differenzieren von (29) nach λ führt unter Berücksichtigung von (27) und (28) zur Formel:

$$(31) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} = - f (J_{11} J_{22} - J_{12}^2) - \alpha_{21} \frac{\partial J_{11}}{\partial \lambda} + (\alpha_{11} - \alpha_{22}) \frac{\partial J_{12}}{\partial \lambda} + \alpha_{12} \frac{\partial J_{22}}{\partial \lambda}.$$

Wenn λ im Betrag sehr groß: $\zeta^2 |\lambda| \gg 1$ und negativ ist, werden weger (26), *falls die Winkel* φ_1 *und* φ_2 *derart gewählt werden, daß der Klammeraus druck* ψ, *mit dem* λ *multipliziert ist, für alle* z *positiv und* $\neq 0$ *wird*, die Funktionen $w_1(z)$ und $w_2(z)$ angenähert[10]):

$$w_1 \approx \psi^{-1/4} \cdot e^{-\sqrt{|\lambda|} \int_{z_0}^{z} \psi^{1/2} dz} \quad \text{und} \quad w_2 \approx \psi^{-1/4} \cdot e^{+\sqrt{|\lambda|} \int_{z_0}^{z} \psi^{1/2} dz},$$

wo:

$$\psi = 1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2.$$

[10]) R. COURANT u. D. HILBERT, Methoden d. math. Physik, Bd. 1, 1. Au S. 335 u. 368.

Folglich ist hier:

$$f \approx e^{\sqrt{|\lambda|}\int_{z_0}^{z_1} \psi^{1/2}\,dz} \tag{32a}$$

und somit f positiv und im Betrag sehr groß. Für sehr große positive λ-Werte $\zeta^2\lambda \gg 1$ wird:

$$w_1 \approx \psi^{-1/4} \cdot \cos\left\{\sqrt{\lambda}\int_{z_0}^{z} \psi^{1/2}\,dz\right\} \quad \text{und} \quad w_2 \approx \psi^{-1/4} \cdot \sin\left\{\sqrt{\lambda}\int_{z_0}^{z} \psi^{1/2}\,dz\right\},$$

also:

$$f \approx 2\cos\left(\sqrt{\lambda}\int_{z_0}^{z_1} \psi^{1/2}\,dz\right). \tag{32b}$$

Für λ von $-\infty$ bis ∞ wachsend fängt f demnach mit sehr großen positiven Werten an, sinkt und erreicht ein Minimum, darauf ein Maximum usw., um schließlich dem pendelnden Wert (32b) zuzustreben.

Für $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\Gamma_1 = 0$ und $\Gamma_2 = 0$ nimmt der Punkt $\lambda = 0$ des λ-, γ_1-, γ_2-Raumes eine Ausnahmestellung ein. Hier ist $\partial f/\partial\lambda = 0$ und $\partial^2 f/\partial\lambda^2$ wechselt das Vorzeichen (positiv für negatives λ und negativ für positives λ). Für diesen Punkt gelten unsere nächsten Betrachtungen bezüglich $\partial^2 f/\partial\lambda^2$ nicht.

Wir wollen nun dartun, daß für $\partial f/\partial\lambda = 0$ stets gilt: $|f| \geqq 2$. Die Lösungen w_1 und w_2 enthalten je zwei zunächst willkürliche Konstanten, von denen je eine zur Normierung dient und die zweite noch frei wählbar ist. Wir wählen sie derart, daß $J_{12} = 0$. Die Winkel φ_1 und φ_2 seien wieder derart gewählt, daß $1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2$ für alle z positiv ist. Dann haben J_{11} und J_{22} und folglich für $\partial f/\partial\lambda = 0$ auch α_{12} und α_{21} gleiches Vorzeichen. Da stets gilt: $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$, ist $\alpha_{11}\alpha_{22} \geqq 1$ und folglich ist $|f| = |\alpha_{11} + \alpha_{22}| \geqq 2$. Weiter wollen wir zeigen, daß für $\partial f/\partial\lambda = 0$ das Vorzeichen von $\partial^2 f/\partial\lambda^2$ gleich demjenigen von $-f$ ist. Hierzu wählen wir w_1 und w_2 derart, daß α_{12} und α_{21} verschwinden. Aus (29) geht dann für $\partial f/\partial\lambda = 0$ hervor:

$$(\alpha_{11} - \alpha_{22})\,J_{12} = 0.$$

Wir nehmen zunächst an, daß $|f| > 2$ ist. Dann ist wegen $|f| = |\alpha_{11} + \alpha_{22}|$ und $\alpha_{11}\alpha_{22} = 1 + \alpha_{12}\alpha_{21} = 1$ offenbar $\alpha_{11} - \alpha_{22} \neq 0$ und folglich $J_{12} = 0$. Hierdurch erhalten wir aus (31):

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2}\right)_{\text{für } \frac{\partial f}{\partial\lambda} = 0} = -f J_{11} J_{22} + (\alpha_{11} - \alpha_{22})\frac{\partial J_{12}}{\partial\lambda}.$$

Es ist: $|\alpha_{11} - \alpha_{22}| < |\alpha_{11} + \alpha_{22}| = |f|$, da $\alpha_{11}\alpha_{22} = 1$, und wir können auch zeigen, daß $|\partial J_{12}/\partial\lambda| < J_{11}J_{22}$ ist (es sei $\psi = 1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2$):

$$\frac{\partial J_{12}}{\partial\lambda} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\lambda}\int_{z_0}^{z_1} w_1(z)\cdot w_2(z)\cdot\psi(z)\cdot dz$$

$$= \frac{1}{c}\int_{z_0}^{z_1}\{w_{1\lambda}(z)\cdot w_2(z) + w_1(z)\cdot w_{2\lambda}(z)\}\,\psi(z)\cdot dz$$

$$= \frac{1}{c^2}\int_{z_0}^{z_1} dz\int_{z_0}^{z} d\mathfrak{z}\cdot\psi(z)\cdot\begin{vmatrix} w_1(z) & w_2(z)\\ w_1(\mathfrak{z}) & w_2(\mathfrak{z})\end{vmatrix}\cdot\psi(\mathfrak{z})\{w_1(\mathfrak{z})w_2(z) + w_1(z)\cdot w_2(\mathfrak{z})\}$$

$$= \frac{1}{c^2}\int_{z_0}^{z_1} dz\int_{z_0}^{z} d\mathfrak{z}\cdot\psi(z)\cdot\psi(\mathfrak{z})\cdot\{w_1^2(z)\,w_2^2(\mathfrak{z}) - w_1^2(\mathfrak{z})\,w_2^2(z)\}.$$

Folglich ist:

$$\left|\frac{\partial J_{12}}{\partial\lambda}\right| < \frac{1}{c^2}\int_{z_0}^{z_1}\psi(z)\,dz\int_{z_0}^{z}\psi(\mathfrak{z})\cdot d\mathfrak{z}\cdot\{w_1^2(\mathfrak{z})w_2^2(z) + w_1^2(z)w_2^2(\mathfrak{z})\}$$

$$= \frac{1}{c^2}\int_{z_0}^{z_1} w_1^2(\mathfrak{z})\,\psi(\mathfrak{z})\,d\mathfrak{z}\int_{z_0}^{z_1} w_2^2(z)\,\psi(z)\,dz + J_{11}J_{22}.$$

Im Falle, daß $|f| = 2$, gilt für $\alpha_{12} = \alpha_{21} = 0$ wegen $\alpha_{11}\alpha_{22} = 1$ die Gleichung $\alpha_{11} = \alpha_{22}$, und wir erhalten aus (31):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\lambda^2} = -f(J_{11}J_{22} - J_{12}^2).$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist:

$$J_{11}J_{22} - J_{12}^2 = \frac{1}{c^2}\int_{z_0}^{z_1} w_1^2(z)\,\psi(z)\cdot dz\cdot\int_{z_1}^{z_1} w_2^2(z)\,\psi(z)\cdot dz$$

$$- \frac{1}{c^2}\left[\int_{z_0}^{z_1} w_1(z)w_2(z)\,\psi(z)\,dz\right]^2 \geqq 0,$$

falls w_1 und w_2 linear unabhängig sind, was wir ja vorausgesetzt haben. Folglich ist allgemein für $\partial f/\partial\lambda = 0$ die Ungleichung $|f| \geqq 2$ erfüllt und für $f \geqq 2$ sowie $\partial f/\partial\lambda = 0$ das Vorzeichen von $\partial^2 f/\partial\lambda^2$ gleich dem von $-f$, falls $\psi = 1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \varphi_2 \operatorname{tg}\varphi_2$ für alle z positiv ist. Die oben für konstante Werte von γ_1 und γ_2 angegebenen Sätze gelten demnach auch entlang den hier betrachteten Geraden, welche durch die Winkel φ_1 und φ_2 bestimmt werden.

Man kann leicht zeigen, daß es für Winkel, welche dieser Bedingung *nicht* genügen, Gerade gibt, entlang denen eine andere Lagenordnung der Eigenwerte gilt. Ein Beispiel hierzu liefert die MATHIEUsche Gleichung (Ergebn. d. Math. I, H. 3, S. 24). Die genannte Bedingung ist somit nicht nur hinreichend, sondern auch notwendig.

§ 11.

Verlauf der Eigenwertflächen in der Umgebung der λ-Achse.

Auf der λ-Achse sind nur für $\lambda < 0$ Eigenwerte zu reellen σ-Werten mit $|\sigma| > 1$ vorhanden. Für $\lambda > 0$ sind die Punkte $\zeta \sqrt{\lambda} = n\pi;\ n = 1, 2, 3, \ldots$ zweifache Eigenwerte, und zwar für ungerade n halbperiodische und für gerade n ganzperiodische Eigenwerte. Durch jeden dieser Punkte gehen zwei Eigenwertflächen. Durch den Punkt $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \lambda = 0$ geht eine einzige Fläche, da er einen einfachen ganzperiodischen Eigenwert darstellt. Für alle Punkte der λ-Achse außer $\zeta \sqrt{\lambda} = n\pi;\ n = 1, 2, 3 \ldots$ gilt

$$\zeta \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} = -\int_{z_6}^{z_1} \Phi_1(z)\, dz;\quad \zeta \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} = -\int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z)\, dz, \tag{33}$$

da hier ww^* gleich einer Konstanten wird. Diese Gleichungen (33) bestimmen die Berührungsebene der Eigenwertfläche im betreffenden Punkt der λ-Achse. Wenn wir insbesondere den Punkt $\lambda = 0$ ins Auge fassen, so sind für $\partial\lambda/\partial\gamma_1 > 0$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2 > 0$ positive γ_1- und γ_2-Werte vorhanden, für die es nur positive Eigenwerte λ gibt. Analog gibt es für $\partial\lambda/\partial\gamma_1 < 0$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2 > 0$ positive γ_2- und zugleich negative γ_1-Werte dieser Eigenschaft usw.

In den Punkten $\zeta \sqrt{\lambda} = n\pi;\ n = 1, 2, 3 \ldots$ müssen $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ aus (17a) berechnet werden. Für diese Größen ergeben sich je zwei verschiedene oder zwei zusammenfallende Werte, je nachdem die Diskriminante D von (17a) nicht oder wohl verschwindet. Wegen $\bar{\alpha}_{12} = \bar{\alpha}_{21} = 0$ und $\bar{\beta}_{12} = \bar{\beta}_{21}$ gilt hier:

$$D = \left(\frac{\bar{\beta}_{22}}{\bar{\alpha}_{22}} - \frac{\bar{\beta}_{11}}{\bar{\alpha}_{11}}\right)^2 + 4\frac{\bar{\beta}_{12}^2}{\bar{\alpha}_{11}\bar{\alpha}_{22}}. \tag{34}$$

Wir nennen Δ_{11} und Δ_{12} die beiden Werte von $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und analog Δ_{21} und Δ_{22} die beiden Werte von $\partial\lambda/\partial\gamma_2$. Dann lauten die Gleichungen der beiden Berührungsebenen der Eigenwertflächen in den zweifachen Eigenwertpunkten Λ der λ-Achse:

$$\begin{cases} \lambda = \Lambda + \Delta_{11}\gamma_1 + \Delta_{21}\gamma_2; \\ \lambda = \Lambda + \Delta_{12}\gamma_1 + \Delta_{22}\gamma_2. \end{cases} \tag{35}$$

Dieses Gleichungspaar bestimmt die *Berührungsgerade der Schnittkurve oder Berührungskurve* beider Eigenwertflächen durch den betreffenden Punkt der λ-Achse. Welche Werte Δ jeweils in einer der Gleichungen (35) zusammengehören, ist am Schluß von § 7 auseinandergesetzt. Der betreffende Punkt der λ-Achse ist ein isolierter Berührungspunkt der beiden Eigenwertflächen, falls die Gleichung (17a) für $\partial\lambda/\partial\gamma$, wo $\gamma_1 = \mu_1\gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2\gamma$ sowie:

$$\bar{\beta}_{kl} = \int_{z_0}^{z_1} (\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2)\, w_k w_l\, dz$$

für alle reellen Werte von μ_1 und μ_2 je zwei zusammenfallende Wurzeln aufweist.

§ 12.

Verlauf der Eigenwertflächen im großen.

Nach § 3 Gleichung (9) ist für $\gamma_1 = \mu_1\gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2\gamma$ der n-te positive oder negative Eigenwert γ das Maximum-Minimum des Ausdrucks:

$$M = -\int_{z_0}^{z_1} w\left(\frac{d^2 w^*}{dz^2} + \lambda w^*\right) dz = \int_{z_0}^{z_1} \left(\frac{dw}{dz}\frac{dw^*}{dz} - \lambda w w^*\right) dz \tag{36}$$

unter gewissen Nebenbedingungen. Für $|\sigma| = 1$ sind w und w^* konjugiert komplex und geht aus (36) hervor, daß M positiv definit ist für $\lambda \leqq 0$. Das gleiche können wir aus (9b) an Hand der Gleichung (4) schließen. In diesem λ-Bereich wird demnach der Betrag jedes Eigenwertes γ für $|\sigma| = 1$ größer (zumindest nicht kleiner), falls λ abnimmt. *Alle Eigenwertflächen für* $|\sigma| = 1$ *verlaufen demnach für* $-\infty < \lambda \leqq 0$ *derart, daß* $\gamma \cdot \partial\lambda/\partial\gamma$ *negativ ist, wo* $\gamma_1 = \mu_1\gamma$ *und* $\gamma_2 = \mu_2\gamma$ *gesetzt wurde.* Jede Ebene parallel zur γ_1-, γ_2-Ebene für $\lambda \leqq 0$ muß demnach jede der Eigenwertflächen für $|\sigma| = 1$ in einer einzigen ebenen analytischen, in sich im Endlichen *geschlossenen* Kurve schneiden. Im Falle $\int_{z_0}^{z_1} \Phi_1(z)\, dz = 0$ und gleichzeitig $\int_{z_0}^{z_1} \Phi_2(z)\, dz = 0$ berührt die γ_1-, γ_2-Ebene die Eigenwertfläche für $\sigma = +1$, welche durch den Punkt $\lambda = \gamma_1 = \gamma_2 = 0$ hindurchgeht, in diesem Punkt.

Wir betrachten jetzt jene Eigenwertflächen für $|\sigma| = 1$, welche jeweils, wenn λ von $-\infty$ nach $+\infty$ wächst, zum *kleinsten* λ-Wert gehören. Für diese Flächen wird der betreffende Eigenwert λ nach § 3 Gleichung (6) und (7) als das Minimum des Ausdrucks:

$$\lambda = \frac{-\int_{z_0}^{z_1} w^* \cdot \frac{d^2 w}{dz^2}\, dz - \gamma \int_{z_0}^{z_1} (\mu_1\Phi_1 + \mu_2\Phi_2)\, w w^*\, dz}{\int_{z_0}^{z_1} w(z)\, w^*(z)\, dz} \tag{37}$$

für alle zweimal stetig differenzierbaren adjungierten Funktionen w und w^* erhalten, welche den Randbedingungen (2) bzw. den hierzu adjungierten Randbedingungen, mit $1/\sigma$ an Stelle von σ genügen. Wenn für w und w^* die zu den gewählten Werten σ, μ_1, μ_2 und γ gehörigen Eigenfunktionen in (37) eingesetzt werden, entsteht unmittelbar der dazugehörige Eigenwert λ. Wir können (37) aber, wenn wir wieder $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$ einführen, auch so auffassen, daß sie die Gleichung der *Berührungsebene* der Eigenwertfläche im betrachteten Eigenwertpunkt $\lambda = \Lambda_0, \gamma_1 = \Gamma_1, \gamma_2 = \Gamma_2$ darstellt, während λ, γ_1 und γ_2 als veränderliche rechtwinklige Koordinaten gelten. Wenn wir auf dieser Berührungsebene bleiben, so ist zu jedem Wertepaar γ_1, γ_2 der zugehörige λ-Wert der obigen Minimumeigenschaft zufolge *größer* als der λ-Eigenwert, der für diese γ_1 und γ_2 auf der Eigenwertfläche für den vorgegebenen σ-Wert liegt. Die Berührungsebenen können, da diese Eigenschaft für sie alle gilt, die zugehörigen Eigenwertflächen, außer im Berührungspunkt, nicht schneiden oder berühren. *Die genannten Eigenwertflächen müssen also stets konvex nach der Seite der Berührungsebenen (d. h. nach wachsendem λ) gekrümmt sein.* Außer für $|\sigma| = 1$ gelten diese Überlegungen auch für jene Eigenwertflächen für reelle positive σ-Werte, für welche λ eine ganze transzendente Funktion von γ_1 und von γ_2 ist (vgl. § 8). Hierzu gehören die Fälle, in denen $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 < 0$ und $\sigma > +1$ ist[11]).

Wir können die Krümmung der obengenannten Eigenwertflächen in einigen einfachen Fällen an Hand der Gleichungen (23), (24) und (25) verfolgen. Es sei z. B. $|\sigma| = 1$ und wir fassen den kleinsten Eigenwert λ_0 ins Auge, der zu diesen σ gehört. Dann ergibt sich, da die beiden Ausdrücke im Zähler jedes Gliedes von (23) und (24) konjugiert komplex zueinander sind, daß alle Glieder von (23) und (24) ein negatives Vorzeichen haben. Hierdurch sind somit die Vorzeichen von $\partial^2 \lambda / \partial \gamma_1^2$ und $\partial^2 \lambda / \partial \gamma_2^2$ in diesen Fällen festgelegt. Aus (23), (24) und (25) lassen sich die *Krümmungsradien* der Eigenwertflächen berechnen.

Die Berührungsgeraden aller Eigenwertflächen für komplexe σ-Werte bilden stets Winkel φ_1 und φ_2 nach § 10 derart, daß $1 + \Phi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ *nicht* für alle z positiv ist. Falls dieser Satz nicht gelten würde, könnten Geraden angegeben werden, denen Winkel φ_1 und φ_2 entsprechen würden, für welche der Ausdruck $1 + \Phi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg} \varphi_2$ überall positiv wäre und welche eine der genannten Eigenwertflächen zweimal schneiden würden, ohne zwischen diesen Schnittpunkten eine Eigenwertfläche für reelles σ zu treffen. In diesem Fall wäre zwischen diesen Schnittpunkten eine Nullstelle von

[11]) Eine analoge Schlußweise wie oben durchgeführt, wurde bereits von H. SCHAEFER, ZS. f. angew. Math. Mech. 14 (1934), S. 367—368, sowie Diss. Hannover 1934 (herausgegeben 1937) in anderen Fällen angewandt.

$\partial f/\partial\lambda$ auf der Geraden vorhanden, für die $|f| < 2$ wäre und dies ist mit der Lagenordnung der Eigenwertflächen nach § 10 im Widerspruch. Falls eine Eigenwertfläche für $\sigma = +1$ oder $= -1$ eine Berührungsgerade aufweist, deren Winkel φ_1 und φ_2 der Bedingung $1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2 \geqq 0$ für alle z genügen, so muß beiderseits des Berührungspunktes auf dieser Geraden $|f| < 2$ sein, wie aus der Lagenordnung der Eigenwertflächen nach § 10 hervorgeht.

Auf den Eigenwertflächen für reelle σ-Werte mit $|\sigma| \gtrless 1$ liegt für positive λ-Werte je mindestens eine Nullstelle von $\partial\gamma_1/\partial\lambda$ und von $\partial\gamma_2/\partial\lambda$. Dies geht aus den unteren Eigenwertschranken nach § 2 hervor. Entlang einer solchen Eigenwertfläche ändern sich bei monotonem Fortschreiten derart, daß γ_1, γ_2 und λ sich monoton ändern, von einer solchen Nullstelle aus $\partial\gamma_1/\partial\lambda$ und $\partial\gamma_2/\partial\lambda$ monoton, solange die Winkel φ_1 und φ_2 der Berührungsgeraden im betreffenden Punkt der Bedingung genügen, daß $1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2 \geqq 0$ ist. Falls der Satz nicht gelten würde, könnte man Geraden angeben, entlang denen im gleichen Punkt $\partial f/\partial\lambda = 0$ und $f \cdot \partial^2 f/\partial\lambda^2$ positiv wäre, was mit der Lagenordnung der Eigenwertflächen nach § 10 im Widerspruch stünde.

III. Asymptotischer Verlauf der Eigenwertflächen.

§ 13.

Asymptotische Integration der verallgemeinerten Hillschen Gleichung.

Die asymptotische Integration der Gleichung:

$$\frac{d^2 w}{d z^2} + \{\lambda + \gamma_1 \Phi_1(z) + \gamma_2 \Phi_2(z)\} w(z) = 0 \tag{1}$$

erfordert besondere Überlegungen, falls der Ausdruck in geschweiften Klammern im Grundbereich $z_0 \leqq z \leqq z_0 + \zeta = z_1$ Nullstellen aufweist. Diese ausführlich u. a. von R. E. LANGER[12]) betrachteten Verhältnisse hängen direkt mit der STOKESschen Erscheinung zusammen, bei welcher beiderseits einer solchen Nullstelle auf der reellen z-Achse verschiedene asymptotische Darstellungen für die gleiche Funktion gelten. Wir setzen zunächst voraus, daß der Ausdruck in geschweiften Klammern im Grundbereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ die mit Rücksicht auf seine Periodizität kleinstmögliche von Null verschiedene Anzahl von Nullstellen aufweist, d. h. *zwei einfache Nullstellen*. Er sei negativ für $z_0 \leqq z \leqq \alpha_1$, positiv für $\alpha_1 \leqq z \leqq \alpha_2$ und negativ für $\alpha_2 \leqq z \leqq z_1$. Die

[12]) R. E. LANGER, Trans. Amer. math. Soc. **36** (1934), S. 90—106; Bull. Amer. math. Soc. **40** (1934), S. 545—582.

obige Voraussetzung soll für Werte von λ, γ_1 und γ_2 gelten, welche der Ungleichung:

$$\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2} dz \gg 1; \quad \alpha_3 = \alpha_1 + \zeta$$

entsprechen. Sie bedingt bestimmte Annahmen über den Verlauf der Funktionen $\Phi_1(z)$ und $\Phi_2(z)$ von z, auf die wir in § 15 noch näher eingehen werden.

In den genannten Bereichen gelten folgende asymptotische Darstellungen[12]) der Lösungen von (1):

Für $z_0 \leqq z < \alpha_1$:

$$(38) \quad w(z) \approx \frac{A_1 [1 + O(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_1|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta)^{-1}]}{|\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/4}} \times$$
$$\times \left\{ \sin \eta_1 \cdot e^{\int_z^{\alpha_1} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2} dz} + \frac{\cos \eta_1}{2} \cdot e^{-\int_z^{\alpha_1} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2} dz} \right\};$$

für $\alpha_1 < z < \alpha_2$:

$$(39) \quad w(z) \approx \frac{A_1}{(\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/4}} \cdot \cos \left\{ \int_{\alpha_1}^{z} (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/2} dz - \frac{\pi}{4} + \eta_1 \right\} +$$
$$+ O(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_1|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta)^{-5/4};$$

für $\alpha_1 < z < \alpha_2$:

$$(40) \quad w(z) \approx \frac{A_2}{(\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/4}} \cdot \cos \left\{ \int_{z}^{\alpha_2} (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/2} dz - \frac{\pi}{4} + \eta_2 \right\} +$$
$$+ O(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_1|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta)^{-5/4};$$

für $\alpha_2 < z < \alpha_3 = \alpha_1 + \zeta$:

$$(41) \quad w(z) \approx \frac{A_2 [1 + O(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_1|}\,\zeta + \sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta)^{-1}]}{|\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/4}} \times$$
$$\times \left\{ \sin \eta_2 \cdot e^{\int_{\alpha_2}^{z} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2} dz} + \frac{\cos \eta_2}{2} \cdot e^{-\int_{\alpha_2}^{z} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2} dz} \right\}.$$

Für die Wahl der Konstanten A_1, A_2, η_1, η_2 und λ (oder γ_1, γ_2) haben wir bei gegebenem γ_1, γ_2 (oder λ) und σ die Bedingung, daß der zweite und dritte obige Ausdruck im Bereich $\alpha_1 < z < \alpha_2$ identisch sein müssen, sowie die Bedingung $w(z + \zeta) = \sigma \cdot w(z)$, welche zusammen vier Gleichungen ergeben. Die letzte erforderliche Bestimmungsgleichung ergibt sich aus der Normierung der Eigenfunktionen.

§ 14.

Asymptotische Eigenwertformeln bei zwei Nullstellen.

Wir schreiben:

$$\int_z^{\alpha_2}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz=\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz-$$
$$-\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz=\beta_1-\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz$$

und erhalten an Stelle von (40):

$$(40\,a)\quad w(z)\approx\frac{A_2}{(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/4}}\Big[\cos\Big\{\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz\Big\}\cdot$$
$$\cdot\cos\Big\{-\beta_1+\frac{\pi}{4}-\eta_2\Big\}-\sin\Big\{\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz\Big\}\cdot$$
$$\cdot\sin\Big\{-\beta_1+\frac{\pi}{4}-\eta_2\Big\}\Big]+O\,(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta+\sqrt{|\gamma_1|}\,\xi+\sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta)^{-5/4}.$$

Die Gleichung (39) lautet ausgeschrieben:

$$(39\,a)\quad w(z)\approx\frac{A_1}{(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/4}}\Big[\cos\Big\{\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz\Big\}\cdot$$
$$\cdot\cos\Big(\frac{\pi}{4}-\eta_1\Big)+\sin\Big\{\int_{\alpha_1}^{z}(\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz\Big\}\cdot\sin\Big(\frac{\pi}{4}-\eta_1\Big)+$$
$$+O\,(\sqrt{|\lambda|}\,\zeta+\sqrt{|\gamma_1|}\,\zeta+\sqrt{|\gamma_2|}\,\zeta)^{-5/4}.$$

Das Verhältnis der Koeffizienten der veränderlichen cos- und sin-Glieder muß in Gleichung (39a) das gleiche sein wie in Gleichung (40a):

$$(42\,a)\qquad \operatorname{cotg}\Big(\frac{\pi}{4}-\eta_1\Big)=\operatorname{cotg}\Big(\beta_1-\frac{\pi}{4}+\eta_2\Big)$$

und auch die Koeffizienten selber müssen gleich sein, also:

$$(42\,b)\qquad A_1\cos\Big(\frac{\pi}{4}-\eta_1\Big)=A_2\cos\Big(\beta_1-\frac{\pi}{4}+\eta_2\Big).$$

In analoger Weise schreiben wir für $\alpha_3>z^*\geqq z_1$:

$$\int_{\alpha_2}^{z^*}|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}\,dz=\int_{\alpha_2}^{\alpha_3}|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}\,dz-$$
$$-\int_{z^*}^{\alpha_3}|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}\,dz$$
$$=\beta_2-\int_{z^*}^{\alpha_3}|\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}\,dz$$

und in letzterem Integral können die Grenzen wegen der Periodizität von Φ_1 und Φ_2 durch z bis α_1 ersetzt werden, wenn $z^* = z + \zeta$. Folglich ergibt sich aus (41):

$$(41\,a)\quad w(z^*) \approx \frac{A_2\,[1 + O(\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \sqrt{|\gamma_2|})^{-1}\,\zeta^{-1}]}{|\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|^{1/4}} \Big\{ \sin\eta_2 \cdot e^{\beta_2 - \int_z^{\alpha_1} |\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}\,dz} + \frac{\cos\eta_2}{2} \cdot e^{-\beta_2 + \int_z^{\alpha_1} |\lambda+\gamma_1\Phi_1+\gamma_2\Phi_2|^{1/2}\,dz} \Big\}.$$

Damit $w(z^*) = \sigma \cdot w(z)$, müssen die Gleichungen:

$$(43\,a)\qquad \sigma A_1 \sin\eta_1 = \frac{A_2}{2}\cos\eta_2\, e^{-\beta_2};$$

$$(43\,b)\qquad \sigma \frac{A_1}{2}\cos\eta_1 = A_2 \sin\eta_2\, e^{\beta_2}$$

gelten. Mit den oben eingeführten Bezeichnungen:

$$(44)\quad \beta_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)^{1/2}\,dz; \quad \beta_2 = \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} |\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|^{1/2}\,dz$$

erhalten wir aus (43a) und (43b):

$$(45)\qquad 4\operatorname{tg}\eta_1 = \operatorname{cotg}\eta_2 \cdot e^{-2\beta_2},$$

und aus (42a):

$$(46)\quad \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right) = \operatorname{cotg}\left(\beta_1 - \frac{\pi}{4} + \eta_2\right), \text{ oder } (n + \tfrac{1}{2})\,\pi - \eta_1 = \beta_1 + \eta_2,$$

wo $n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$.

Indem wir (43a) durch (42b) dividieren, ergibt sich:

$$\frac{\sigma \sin\eta_1}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right)} = \frac{\cos\eta_2 \cdot e^{-\beta_2}}{2\cos\left(\eta_2 + \beta_1 - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

In diese Gleichung führen wir für $\sin\eta_1$ links den aus (45) folgenden Wert ein, machen darauf von (46) Gebrauch und finden:

$$(47)\qquad \sigma = 2\,e^{\beta_2} \cdot \frac{\cos(\eta_1 + \beta_1)}{\cos\eta_1} = 2\,e^{\beta_2}(\cos\beta_1 - \operatorname{tg}\eta_1 \sin\beta_1).$$

Wenn wir (43b) durch (42b) dividieren, entsteht:

$$\frac{\sigma\cos\eta_1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right)} = \frac{\sin\eta_2 \cdot e^{\beta_2}}{\cos\left(\beta_1 - \frac{\pi}{4} + \eta_2\right)}.$$

Für $\sin\eta_2$ führen wir den aus (45) folgenden Wert ein und machen wieder von (46) Gebrauch:

$$(48)\qquad \frac{1}{\sigma} = 2\,e^{\beta_2} \cdot \frac{\cos(\eta_2 + \beta_1)}{\cos\eta_2} = 2\,e^{\beta_2}(\cos\beta_1 - \operatorname{tg}\eta_2 \cdot \sin\beta_1).$$

Man kann mit Hilfe von (46) leicht beweisen, daß (47) und (48) identisch sind.

Die Gleichung (45) lehrt unter der Voraussetzung $\beta_2 \gg 1$, daß entweder η_1 oder η_2 oder beide Winkel fast gleich einem ganzen Vielfachen von π sein müssen. Die zwei erstgenannten Fälle führen zu zwei σ-Werten, deren Produkt gleich 1 ist. Dies steht mit der Gleichung (15) im Einklang, da beide σ-Werte zum gleichen Wertesatz λ, γ_1, γ_2 gehören. Wir wollen die entsprechende Rechnung jetzt ausführen. Aus (45) und (46) ergibt sich für:

$$\eta_1 = n_1 \pi + \varepsilon_1, \text{ wo } |\varepsilon_1| \ll 1,\ n_1 = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots; \tag{49}$$

$$4\,\varepsilon_1 = e^{-2\beta_2} \operatorname{tg}(\beta_1 + \varepsilon_1). \tag{50}$$

Weiter ergeben (45) und (46) für:

$$\eta_2 = n_2 \pi + \varepsilon_2, \text{ wo } |\varepsilon_2| \ll 1,\ n_2 = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots; \tag{51}$$

$$4\,\varepsilon_2 = e^{-2\beta_2} \operatorname{tg}(\beta_1 + \varepsilon_2). \tag{52}$$

Folglich kann $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ gesetzt werden und wir erhalten:

$$\varepsilon^2 - \varepsilon \operatorname{cotg} \beta_1 \cdot \left(1 - \frac{e^{-2\beta_2}}{4}\right) + \frac{e^{-2\beta_2}}{4} = 0.$$

Da voraussetzungsgemäß $e^{-2\beta_2} \ll 1$, entsteht:

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{cotg} \beta_1}{2} \pm \frac{1}{2} \left(\operatorname{cotg}^2 \beta_1 - e^{-2\beta_2}\right)^{1/2}.$$

Diese Gleichungen betrachten wir für zwei Fälle: $\operatorname{cotg}^2 \beta_1 \gg e^{-2\beta_2}$ und $\operatorname{cotg}^2 \beta_1$ von gleicher Größenordnung wie $\exp(-2\beta_2)$. Im ersten Fall gilt das untere Zeichen des Wurzelausdrucks, weil $|\varepsilon| \ll 1$ und somit:

$$\varepsilon \approx \frac{1}{4} \frac{e^{-2\beta_2}}{\operatorname{cotg} \beta_1}.$$

Wir können also in erster Näherung in diesem Fall ε und somit ε_1 sowie ε_2 in Gleichung (47) und (48) im Argument gegen β_1 vernachlässigen. Im zweiten Fall setzen wir: $\beta_1 = (r + \frac{1}{2})\pi - \delta$, wo $r = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$ und erhalten:

$$\varepsilon = \frac{\delta}{2} \pm \frac{1}{2} \left(\delta^2 - e^{-2\beta_2}\right)^{1/2}.$$

Offenbar ist ε hier reell oder komplex, je nachdem die Diskriminante positiv oder negativ ist. Ein Sonderfall tritt auf, wenn die Diskriminante verschwindet. Dann ist $\delta = 2\,\varepsilon = \pm \exp(-\beta_2)$ und liegt somit der bereits oben erwähnte Fall vor, daß gleichzeitig gilt:

$$\eta_1 = n_1 \pi + \varepsilon_1 \quad \text{und} \quad \eta_2 = n_2 \pi + \varepsilon_2.$$

In diesem Sonderfall ergeben (47) und (48) $\sigma = \pm 1$. Da β_1 und β_2 stets reell sind, wird σ reell oder komplex, je nachdem ε reell oder komplex ist. In letzterem Fall ist $|\sigma| = 1$ und gelten obige gleichzeitige Gleichungen.

§ 15.

Hilfssätze.

Wir wollen unter der Voraussetzung, daß $\Phi_1(z)$ und $\Phi_2(z)$ *beschränkt* sind, zunächst angeben, für welche Werte von λ, γ_1 und γ_2 die Bedingung $\beta_2 \gg 1$ erfüllt sein kann. Diese Bedingung hält ein, daß $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ in einem Teil des Bereichs $z_0 \leqq z \leqq z_1$ negativ mit einem Betrag $\gg \zeta^{-2}$ ist. Da Φ_1 und Φ_2 *beschränkt* sind, ist es bei Werten $|\lambda|\zeta^2$ vergleichbar mit 1 notwendig, daß $\zeta^2(|\gamma_1| + |\gamma_2|) \gg 1$. Falls $\gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ im genannten Bereich das Vorzeichen nicht wechselt und $|\gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|$ über einer endlichen Grenze Φ_0 bleibt, kann für $|\lambda|\zeta^2$ vergleichbar mit 1 und $\zeta^2(|\gamma_1| + |\gamma_2|) \gg 1$ keine Nullstelle des Ausdrucks $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ auftreten. In diesem Fall kann somit $\beta_2 \gg 1$ nur für $|\lambda|\zeta^2 \gg 1$ bei $\zeta^2(|\gamma_1| + |\gamma_2|) \gg 1$ erfüllt sein.

Wenn dagegen $\gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ im genannten z-Bereich das Vorzeichen wechselt, können offenbar auch für $|\lambda|\zeta^2$ vergleichbar mit 1 und $(|\gamma_1| + |\gamma_2|)\zeta^2 \gg 1$ Nullstellen im Grundbereich auftreten.

Wie ändern sich β_1 und β_2 bei Änderungen der Parameter λ, γ_1 und γ_2? Zur Beantwortung dieser Frage bilden wir die Differentialquotienten von β_1 und β_2 nach λ, γ_1 und nach γ_2:

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \lambda} = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{dz}{(\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/2}}; \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial \lambda} = -\frac{1}{2} \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{dz}{|\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}}.$$

Die Integranden dieser Ausdrücke sind definitionsgemäß positiv. Somit ändern sich β_1 und β_2 bei wachsendem λ *monoton*. Weiter gilt

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \gamma_1} = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\Phi_1 \, dz}{(\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/2}}; \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial \gamma_1} = -\frac{1}{2} \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \frac{\Phi_1 \, dz}{|\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}}.$$

Die entsprechenden Ausdrücke mit Φ_2 im Zähler der Integranden an Stelle von Φ_1 ergeben sich für $\partial \beta_1 / \partial \gamma_2$ und $\partial \beta_2 / \partial \gamma_2$. Wir setzen $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$. Somit wird:

$$\frac{\partial \beta_1}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2}{(\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2)^{1/2}} dz; \quad \frac{\partial \beta_2}{\partial \gamma} = \frac{1}{2} \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} - \frac{\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2}{|\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}} dz.$$

Diese Integranden ändern bei wachsendem γ fast im ganzen Integrationsbereich ihr Vorzeichen nicht, falls $|\gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2| \gg \lambda$. Somit sind β_1 und β_2 monotone Funktionen von γ, und zwar ändern sie sich bei wachsendem γ in positivem Sinne, wenn der betreffende Integrand positiv ist und in negativem Sinne, wenn der Integrand negativ ist.

Wie müssen $\Phi_1(z)$ und $\Phi_2(z)$ beschaffen sein, damit für die obengenannten Werte von γ_1, γ_2 und λ stets zwei und nur zwei Nullstellen im Grundbereich vorhanden sind? Hierfür gilt die Bedingung, daß die Funktion $\gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2$ bei wachsendem z *monoton* von einem kleinsten zu einem größten Wert steigen und dann wieder auf den kleinsten Wert monoton herabsinken muß. Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, falls Φ_1 und Φ_2 die gleiche Grundperiode aufweisen und je für sich bei wachsendem z monoton von einem kleinsten bis zu einem höchsten Wert steigen und dann wieder auf den kleinsten Wert monoton herabsinken, während die Kleinst- und Höchstwerte zum gleichen z gehören.

§ 16.

Asymptotische Lage der Eigenwertflächen.

Aus den Betrachtungen in § 14 kann geschlossen werden, daß die Gleichungen (47) und (48) in der Form:

$$\sigma_1 = 2\, e^{\beta_2} \cos(\beta_1 + \varepsilon) \tag{47 a}$$

bzw.

$$\frac{1}{\sigma_2} = 2\, e^{\beta_2} \cos(\beta_1 + \varepsilon) \tag{48 a}$$

geschrieben werden können, je nachdem η_1 bzw. η_2 nahezu gleich einem ganzen Vielfachen von π ist. Für $|\delta| \leqq \exp(-\beta_2)$ kann hieraus abgeleitet werden:

$$f = \sigma_1 + \frac{1}{\sigma_1} = \sigma_1 + \sigma_2 = (-1)^r\, 2\,\delta\, e^{\beta_2}, \tag{53}$$

wo f die gleiche Bedeutung hat wie in § 10.

Da β_1 und β_2 von gleicher Größenordnung sind, wird die Änderung von f bei Änderung von λ bzw. γ wegen $\delta = (r + \frac{1}{2})\pi - \beta_1$ überwiegend durch den Exponentialfaktor bestimmt. Somit ist f nach § 15 im betrachteten Bereich der Gleichung (53) eine monotone Funktion von λ und von γ, da β_2 eine monotone Funktion dieser Größen ist. Weiter wechselt f bei gleichem δ das Vorzeichen, wenn r sich um 1 ändert. Hieraus geht hervor, daß f asymptotisch entlang jeder Geraden parallel zur λ-Achse sowie entlang jeder Geraden, welche die λ-Achse senkrecht schneidet, im wesentlichen in gleicher Weise verläuft wie in § 10 nach H. A. Kramers und O. Haupt entlang Parallelen zur λ-Achse allgemein gezeigt: Auf zwei halbperiodische Eigenwerte folgen stets zwei ganzperiodische, zwischen ungleichnamigen periodischen Eigenwerten ist σ komplex und $|\sigma| = 1$, zwischen gleichnamigen periodischen Eigenwerten ist σ reell und $|\sigma| \gtrless 1$. Allgemein gilt dieser Verlauf asymptotisch entlang *jeder* Geraden durch die λ-Achse des γ_1-, γ_2-, λ-Raumes. Dies folgt aus der asymptotischen Krümmung der Eigenwertflächen, die wir in § 17 behandeln.

Wenn wir die benachbarten δ-Werte, für welche f nach (53) gleich ± 2 wird, mit δ_1 und δ_2 bezeichnen, so ist:

$$|\delta_1 - \delta_2| = 2\, e^{-\beta_2}, \tag{54}$$

und da β_2 von der Größenordnung $\zeta(\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \sqrt{|\gamma_2|})$ ist, liegen diese beiden δ-Werte nahe zusammen. Wir lassen nun γ_1 und γ_2 konstant und bezeichnen die λ-Werte, welche zu δ_1 und δ_2 gehören, bzw. mit λ_1 und λ_2. Dann wird, da β_1 von gleicher Größenordnung wie β_2 ist, die Größe $|\lambda_1 - \lambda_2| = \Delta\lambda$ höchstens von der Größenordnung:

$$\zeta(\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \sqrt{|\gamma_2|}) \exp\{-\zeta(\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \sqrt{|\gamma_2|})\}.$$

Somit liegen auch die beiden genannten λ-Werte sehr nahe zusammen. In analoger Weise kann man schließen, daß bei konstantem λ und veränderlichem γ die Größe $\Delta\gamma$, welche in diesen Fällen der obigen Größe $\Delta\lambda$ entspricht, von gleicher Größenordnung wird wie oben $\Delta\lambda$. Je *zwei ungleichnamige periodische Eigenwertflächen liegen asymptotisch somit nahe zusammen.* Das gleiche gilt offenbar von allen zwischenliegenden Eigenwertflächen zu komplexen σ-Werten. Beispiele für diese asymptotische Lage liefern die MATHIEUsche Gleichung (Ergebn. d. Math. **1**, H. 3, S. 24) sowie verwandte Gleichungen (ebenda, S. 40).

Wenn wir im Ausdruck $\lambda + \gamma_1 \Phi_1(z) + \gamma_2 \Phi_2(z)$ die Parameter γ_1 und γ_2 konstant halten und λ *abnehmen* lassen, wird β_2 größer und rücken demnach die obengenannten Eigenwertflächen *näher* zusammen.

Die obige asymptotische Lage der Eigenwerte wurde bereits früher[13]) angegeben. Die dortige Rechnung berücksichtigte die STOKESsche Erscheinung nicht und führte deshalb zu Formeln, welche von den obigen abweichen.

Wir wollen den Verlauf von f entlang Geraden im λ-, γ_1-, γ_2-Raum noch etwas genauer verfolgen. Wie in § 10 führen wir die beiden Winkel φ_1 und φ_2 ein, welche eine solche Gerade durch den Punkt Λ_0, Γ_1, Γ_2 des Parameterraumes festlegen. Wir unterscheiden Geraden 1. Art, welche Winkel φ_1 und φ_2 bilden, derart, daß für alle z gilt: $1 + \Phi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 \geqq 0$ und Geraden 2. Art, für welche in gewissen z-Bereichen gilt: $1 + \Phi_1 \cdot \operatorname{tg}\varphi_1 + + \Phi_2 \cdot \operatorname{tg}\varphi_2 < 0$. Entlang Geraden der 1. Art haben wir bereits in § 10 allgemein den Verlauf von f bestimmt. Es handelt sich hier somit darum, diesem Verlauf entlang Geraden der 2. Art nachzugehen. In Gleichung (26) ist im letzten Summanden w mit $\lambda(1 + \Phi_1 \operatorname{tg}\varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg}\varphi_2)$ multipliziert. Dieser Faktor nimmt, wenn $|\lambda|$ über alle Grenzen wächst, entlang den genannten Geraden 2. Art voraussetzungsgemäß positive und negative Werte an, welche ebenfalls über alle Grenzen wachsen. Im Falle zweier Null-

[13]) M. J. O. STRUTT, Math. Ann. **101** (1929), S. 559—569.

stellen im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ können wir aus den obigen asymptotischen Formeln schließen, daß f entlang solchen Geraden positive und negative Werte annimmt, welche ebenfalls über alle Grenzen wachsen, und zwar sowohl für $\lambda \to -\infty$ als für $\lambda \to +\infty$.

Diese Überlegungen führen zum Schluß: *Entlang Geraden der 1. Art gibt es zu jedem reellen σ, dessen Modul größer oder kleiner als 1 ist, nur eine endliche Anzahl von Eigenwerten. Auf Geraden der 2. Art gibt es zu jedem reellen σ mit $|\sigma| \gtrless 1$ eine abzählbar unendliche Anzahl von Eigenwerten mit positiven λ-Werten und eine ebensolche Zahl mit negativen λ-Werten.* Wenn als Ausnahmefall φ_1 oder φ_2 (oder beide Winkel gleichzeitig) gleich einem ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ ist, ändert sich letzter Satz für Geraden 2. Art wie folgt: *Wenn wir $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$ setzen, gibt es im Falle φ_1 oder φ_2 (oder beide Winkel zugleich) gleich einem ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ eine abzählbar unendliche Anzahl positiver und eine ebensolche Zahl negativer γ-Eigenwerte zu jedem reellen σ-Wert, dessen Modul größer oder kleiner als 1 ist.* Zu jedem reellen oder komplexen σ-Wert mit $|\sigma| = 1$ gibt es entlang Geraden der 1. sowie der 2. Art eine abzählbar unendliche Zahl von Eigenwerten. Entlang Geraden der 1. Art gehören hierzu, bis auf eine endliche Zahl negativer Werte, nur positive λ-Werte. Entlang Geraden der 2. Art gehören hierzu abzählbar unendlich viele negative sowie eine ebensolche Zahl positiver Eigenwerte λ. Im obengenannten Ausnahmefall gibt es entlang Geraden 2. Art eine abzählbar unendliche Zahl negativer sowie eine ebensolche Zahl positiver Eigenwerte γ, wo $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$ und $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$ ist, zu allen σ-Werten mit $|\sigma| = 1$.

Wir können die Lage der obengenannten Eigenwerte asymptotisch, d. h. für $|\lambda| \to \infty$ (bzw. im Ausnahmefall $|\gamma| \to \infty$) an Hand obiger Formeln noch genauer verfolgen. Aus Gleichung (47a) und (48a) folgt:

$$\beta_1 + \varepsilon = \arccos\left(\frac{\sigma_1}{2}\, e^{-\beta_2}\right), \quad \text{bzw.} \quad = \arccos\left(\frac{e^{-\beta_2}}{2\,\sigma_2}\right).$$

Asymptotisch für $\beta_2 \to \infty$ wird somit:

$$\beta_1 + \varepsilon = (r + \tfrac{1}{2})\,\pi + q, \quad \text{wo } r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

und:

$$\lim_{\beta_2 \to \infty} |q| \to 0.$$

Wegen der asymptotischen Bedeutung von β_1 für $(|\lambda| + |\gamma_1| + |\gamma_2|)\,\zeta^2 \to \infty$:

$$\lim \beta_1 \to |\lambda|^{1/2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (1 + \Phi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg} \varphi_2)^{1/2}\, dz$$

im Falle $\varphi_1 \neq (n_1 + \tfrac{1}{2})\,\pi$ und $\varphi_2 \neq (n_2 + \tfrac{1}{2})\,\pi$, wo $n_1, n_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ und:

$$\lim \beta_1 \to |\gamma|^{1/2} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\Phi_1 \cdot \mu_1 + \Phi_2 \cdot \mu_2)^{1/2}\, dz$$

im Falle $\varphi_1 = (n_1 + \frac{1}{2})\pi$ oder $\varphi_2 = (n_2 + \frac{1}{2})\pi$ (oder beides zugleich) ergibt sich unter Berücksichtigung der Beziehung $\lim \varepsilon \to 0$ für die zwei genannten Fälle bei $|\sigma| = 1$ und $|\sigma| \approx 1$:

$$|\lambda| \approx \frac{(r + {}^1/_2)^2 \pi^2}{\zeta^2 I_1^2}, \quad \text{bzw.:} \quad |\gamma| \approx \frac{(r + {}^1/_2)^2 \pi^2}{\zeta^2 I_2^2},$$

wo:

$$I_1 \zeta = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (1 + \Phi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg} \varphi_2)^{1/2} dz; \quad I_2 \zeta = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2)^{1/2} dz.$$

Für reelle σ-Werte und $|\sigma| \gtrless 1$ erhält man:

$$|\lambda| \approx \frac{(2r\pi \pm a)^2}{\zeta^2 I_1^2}, \quad \text{bzw.} \quad |\gamma| \approx \frac{(2r\pi \pm a)^2}{\zeta^2 I_2^2},$$

wo:

$$a = \arccos\left(\frac{\sigma}{2} e^{-\beta_2}\right), \quad \text{oder} = \arccos\left(\frac{e^{-\beta_2}}{2\sigma}\right).$$

Vom Arcus ist z. B. der Hauptwert zu wählen.

Endlich bemerken wir, daß für negative reelle σ-Werte, deren Modul einen bestimmten Wert übersteigt, der Punkt $\Lambda_0, \Gamma_1, \Gamma_2$, durch den die betrachtete Gerade hindurchgeht, so gewählt werden kann, daß entlang Geraden 1. Art bei geeignet gewählten Winkeln φ_1 und φ_2 *kein einziger* reeller Eigenwert auftritt, wie aus den in § 2 angegebenen Eigenwertschranken folgt (Fig. 1d).

§ 17.

Asymptotischer Verlauf der Eigenwertflächen.

Wir wollen asymptotisch entlang den Eigenwertkurven die Differentialquotienten $\partial\lambda/\partial\gamma_1$ und $\partial\lambda/\partial\gamma_2$ berechnen. Hierzu gehen wir von einer der Gleichungen (47a) oder (48a) aus:

$$\sigma = 2 e^{\beta_2} \cos(\beta_1 + \varepsilon)$$

und betrachten zunächst den Fall, daß $\sigma = \pm 1$, also

$$\beta_1 = (r + \tfrac{1}{2})\pi \pm e^{-\beta_2}; \quad r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Hieraus ergibt sich:

$$(55) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial\gamma_1} \approx -\dfrac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \dfrac{\Phi_1 dz}{(\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)^{1/2}}}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \dfrac{dz}{(\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)^{1/2}}} \pm e^{-\beta_2} \cdot \dfrac{\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \dfrac{\Phi_1 dz}{|\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|^{1/2}}}{\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \dfrac{dz}{|\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|^{1/2}}}; \\ \dfrac{\partial\lambda}{\partial\gamma_2} \approx -\dfrac{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \dfrac{\Phi_2 dz}{(\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)^{1/2}}}{\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \dfrac{dz}{(\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2)^{1/2}}} \pm e^{-\beta_2} \cdot \dfrac{\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \dfrac{\Phi_2 dz}{|\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|^{1/2}}}{\int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \dfrac{dz}{|\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2|^{1/2}}}. \end{cases}$$

Das 2. Glied rechts kann jeweils unter der Voraussetzung $\beta_2 \gg 1$ gegen das 1. vernachlässigt werden.

Im Falle negativer λ-Werte ist $\gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ im Bereich $\alpha_1 < z < \alpha_2$ überall positiv und wird nach (55):

$$\gamma_1 \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} + \gamma_2 \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_2} < 0.$$

Dieser Schluß gilt auch für λ positiv und $\lambda \ll |\gamma_1 + \gamma_2| \gg \zeta^{-2}$. Asymptotisch gilt somit dieser in § 12 für die Flächen zu den *kleinsten* λ-Eigenwerten hergeleitete Verlauf allgemein für *alle* periodischen Eigenwertflächen.

Für komplexe σ gilt:

$$\beta_1 = (r + \tfrac{1}{2})\pi \pm \mu e^{-\beta_2},$$

wo μ eine positive Größe < 1 darstellt. Die Gleichung (55), in der das 2. Glied fortgelassen werden kann, gilt somit asymptotisch auch für diese Eigenwertflächen und die obige Schlußfolgerung $\gamma_1 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_1 + \gamma_2 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_2 < 0$ ebenfalls im gleichen Umfang.

Für reelle Werte von σ, für die, falls $|\sigma| > 1$ ist, gilt: $|\sigma| \ll \exp(\beta_2)$ und falls $|\sigma| < 1$ gilt: $|\sigma| \gg \exp(-\beta_2)$, für welche also $|\sigma|$ von der Größenordnung 1 ist, können die Eigenwertflächen wieder aus der letzten Gleichung berechnet werden, wenn $\mu > 1$ angenommen wird, wie aus Gleichung (47a) und (48a) hervorgeht. Für diese Eigenwertflächen gilt offenbar die obige Folgerung $\gamma_1 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_1 + \gamma_2 \cdot \partial\lambda/\partial\gamma_2 < 0$ auch im gleichen Umfang.

Wenn für alle λ- und γ-Werte, welche in § 15 behandelt wurden, die Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ stets 2 und nur 2 Nullstellen hat, können aus Gleichung (55) noch weitere Schlüsse gezogen werden.

Wir setzen $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$, $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$ und γ positiv. Die Funktion $\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2$ von z soll bei wachsendem z monoton von einem kleinsten (negativen) bis zu einem größten (positiven) Wert ansteigen und wieder auf den kleinsten Wert herabsinken. Der größte Wert sei $\Phi_{\max}$. Dann wird für $\lambda \to -\infty$ und γ positiv nach Gleichung (55): $\partial\lambda/\partial\gamma \to -\Phi_{\max}$. Bei monotoner Abnahme von λ nimmt $|\partial\gamma/\partial\lambda|$ ebenfalls monoton ab. Wir können schließen, daß asymptotisch $\partial^2\lambda/\partial\gamma^2$ für die Eigenwertflächen *negativ* ist und haben somit den Sinn der asymptotischen *Krümmung* dieser Flächen bestimmt, sofern σ komplex oder exakt oder nahezu gleich $+1$ oder -1 ist. Für $\lambda \to -\infty$ wird $|\partial^2\lambda/\partial\gamma^2| \to 0$.

Die periodischen Eigenwertflächen nähern sich für $\lambda \to -\infty$ den Eigenwertflächen, für welche $\delta = 0$ und somit $\beta = (r + \frac{1}{2})\pi$ ist. Für diese Flächen gilt $\sigma = \pm i$ und die entsprechenden Eigenfunktionen haben demnach die

Periode 4ζ. Wir können schließen, daß sich die halb- und die ganzperiodischen Eigenfunktionen asymptotisch für $\lambda \to -\infty$ diesen Eigenfunktionen mit der Periode 4ζ nähern. Die entsprechende Tatsache wurde von E. L. INCE[14]) bei der MATHIEUschen Gleichung angegeben.

Durch die oben angegebene asymptotische Krümmung der Eigenwertflächen kann eine Berührungsgerade einer Fläche, welche die λ-Achse schneidet, dieselbe Fläche asymptotisch in keinem weiteren Punkt treffen. Hieraus folgt die allgemeine Gültigkeit der in § 16 angegebenen Lagenordnung für *jede* Gerade dieser Art im betrachteten asymptotischen Bereich.

§ 18.

Eigenwertformeln für $2n$ Nullstellen.

Wir setzen jetzt voraus, die Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2$ habe im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ insgesamt $2n$ Nullstellen: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_{2n}$; und es sei $\alpha_{2n+1} = \alpha_1 + \zeta$. Weiter soll sie im Bereich $\alpha_1 \leqq z \leqq \alpha_2$ positiv sein, im Bereich $\alpha_2 \leqq z \leqq \alpha_3$ negativ, im Bereich $\alpha_3 \leqq z \leqq \alpha_4$ positiv usw. In diesen Bereichen gelten dann asymptotisch die Lösungen (39), (40), (41) usw. und sie enthalten insgesamt $4n$ Konstanten: $A_1, A_2 \ldots A_{2n}, \eta_1, \eta_2, \ldots \eta_{2n}$. Zur Berechnung dieser $4n$ Größen sowie des Parameters λ, wenn γ_1 und γ_2 sowie σ gegeben sind, liefern uns die Stetigkeits- und Randbedingungen insgesamt $4n$ Gleichungen, während die noch fehlende letzte Gleichung sich aus der Normierung der betreffenden Eigenfunktion ergibt.

Wir schreiben die zuerstgenannten $4n$ Gleichungen an und benutzen die Abkürzungen:

$$\beta_{kl} = \int_{\alpha_k}^{\alpha_l} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2|^{1/2}\, dz, \qquad \begin{matrix} k = 1, 2, \ldots 2n, \\ l = 2, 3, \ldots 2n+1. \end{matrix}$$

Analog zu den Gleichungen (42a) und (42b) erhalten wir:

56)
$$\begin{cases} \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right) = \operatorname{cotg}\left(\beta_{12} - \frac{\pi}{4} + \eta_2\right); \\ \operatorname{cotg}\left(\frac{\pi}{4} - \eta_3\right) = \operatorname{cotg}\left(\beta_{34} - \frac{\pi}{4} + \eta_4\right); \\ A_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right) = A_2 \cos\left(\beta_{12} - \frac{\pi}{4} + \eta_2\right); \\ A_3 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta_3\right) = A_4 \cos\left(\beta_{34} - \frac{\pi}{4} + \eta_4\right), \text{ usw.} \end{cases}$$

[14]) E. L. INCE. Proc. Roy. Soc. Edinburgh **46** (1925/26), S. 20–29, 316–322; (1927), S. 294–301.

und analog zu (43a) und (43b):

$$(57)\qquad \begin{cases} A_2 \sin\eta_2 \cdot e^{\beta_{23}} = \dfrac{A_3}{2}\cos\eta_3; \\ A_4 \sin\eta_4 \cdot e^{\beta_{45}} = \dfrac{A_5}{2}\cos\eta_5; \\ \dfrac{A_2}{2}\cos\eta_2 \cdot e^{-\beta_{23}} = A_3 \sin\eta_3; \\ \dfrac{A_4}{2}\cos\eta_4 \cdot e^{-\beta_{45}} = A_5 \sin\eta_5, \text{ usw.} \end{cases}$$

Die letzten dieser Gleichungen lauten:

$$(57\text{a})\qquad \begin{cases} A_{2n} \sin\eta_{2n} \cdot e^{\beta_{2n,\,2n+1}} = \sigma \dfrac{A_1}{2}\cos\eta_1; \\ \dfrac{A_{2n}}{2}\cos\eta_{2n} \cdot e^{-\beta_{2n,\,2n+1}} = \sigma A_1 \sin\eta_1. \end{cases}$$

Aus (57) ergibt sich:

$$(58)\qquad 4\,\mathrm{tg}\,\eta_3 = e^{-2\beta_{23}}\,\mathrm{cotg}\,\eta_2;\quad 4\,\mathrm{tg}\,\eta_5 = e^{-2\beta_{45}}\,\mathrm{cotg}\,\eta_4, \text{ usw.},$$

und schließlich aus (57a):

$$(58\text{a})\qquad 4\,\mathrm{tg}\,\eta_1 = e^{-2\beta_{2n,\,2n+1}} \cdot \mathrm{cotg}\,\eta_{2n},$$

während aus (56) hervorgeht:

$$(59)\qquad (n_1 + \tfrac{1}{2})\pi - \eta_1 = \beta_{12} + \eta_2;\ (n_3 + \tfrac{1}{2})\pi - \eta_3 = \beta_{34} + \eta_4, \text{ usw.},$$

wo:

$$n_1 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \text{ usw.}$$

Wir dividieren die erste Gleichung (57a) durch die dritte Gleichung (56) und erhalten:

$$\frac{\sigma\cos\eta_1}{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \eta_1\right)} = \frac{A_{2n}\sin\eta_{2n}\cdot e^{\beta_{2n,\,2n+1}}}{A_2\cos\left(\beta_{12} - \frac{\pi}{4} + \eta_2\right)}.$$

Mit Hilfe der 1. Gleichung (57) drücken wir A_2 durch A_3 aus, darauf mit Hilfe der 4. Gleichung (56) A_3 durch A_4 usw. Unter Berücksichtigung von (59) entsteht:

$$(60)\qquad \sigma = 2^n \cdot e^{\beta_{23}+\beta_{45}+\cdots\beta_{2n,\,2n+1}} \cdot \frac{\cos(\eta_1+\beta_{12})}{\cos\eta_1}\cdot\frac{\cos(\eta_3+\beta_{34})}{\cos\eta_3}\cdots\frac{\cos(\eta_{2n-1}+\beta_{2n-1,\,2n})}{\cos\eta_{2n-1}}.$$

In analoger Weise ergibt sich:

$$(61)\qquad \frac{1}{\sigma} = 2^n \cdot e^{\beta_{23}+\beta_{45}+\cdots\beta_{2n,\,2n+1}} \cdot \frac{\cos(\eta_2+\beta_{12})}{\cos\eta_2}\cdot\frac{\cos(\eta_4+\beta_{34})}{\cos\eta_4}\cdots\frac{\cos(\eta_{2n}+\beta_{2n-1,\,2n})}{\cos\eta_{2n}}.$$

Man kann leicht zeigen, daß (61) und (60), welche den Gleichungen (48) und (47) entsprechen, identisch sind.

Aus (58) und (58a) kann geschlossen werden, daß entweder η_2 oder η_3 oder beide, entweder η_4 oder η_5 oder beide, ... entweder η_{2n} oder η_1 oder beide nahezu gleich einem ganzen Vielfachen von π sein müssen, falls wir voraussetzen:

$$\beta_{23} \gg 1; \quad \beta_{45} \gg 1; \ \ldots \ \beta_{2n,\,2n+1} \gg 1.$$

Unter dieser Voraussetzung lassen sich aus den Eigenwertformeln (60) und (61) für $2n$ Nullstellen analoge Folgerungen über die Eigenwertflächen ziehen, wie aus (47) und (48) für zwei Nullstellen.

§ 19.

Asymptotische Eigenwertflächen für $2n$ Nullstellen.

Wir wollen zeigen, daß sich für $|\sigma| \approx 1$ unter obengenannter Voraussetzung ergibt: $\beta_{12} = (r_1 + \frac{1}{2})\pi - \delta_1$, oder $\beta_{34} = (r_3 + \frac{1}{2})\pi - \delta_3, \ldots$ $\beta_{2n-1,\,2n} = (r_{2n-1} + \frac{1}{2})\pi - \delta_{2n-1}$, wo alle r positive oder negative ganze Zahlen darstellen, während alle $|\delta| \ll 1$ sind. Es können auch mehrere β-Werte gleichzeitig obigen Bedingungen genügen. Den Beweis führen wir für $n = 2$ aus. Für höhere n-Werte verläuft er ebenso.

Wir nehmen zunächst an, daß nicht gleichzeitig η_1 und η_4 sowie η_2 und η_3 nahezu gleich einem ganzen Vielfachen von π sind, sondern nur jeweils eine dieser Größen. Dann gibt es folgende Fälle: 1. η_1 und η_2, 2. η_1 und η_3, 3. η_2 und η_4, 4. η_3 und η_4 nahezu gleich einem ganzen Vielfachen von π. Im 1. Fall geht aus (59) hervor: $\beta_{12} = (r_1 + \frac{1}{2})\pi - \delta_1$. Im 2. Fall ergibt sich aus (60):

$$\sigma = 2^2 \cdot e^{\beta_{23} + \beta_{45}} (\cos \beta_{12} - \operatorname{tg} \eta_1 \cdot \sin \beta_{12})(\cos \beta_{34} - \operatorname{tg} \eta_3 \cdot \sin \beta_{34}),$$

oder:

$$\sigma \approx 2^2 \cdot e^{\beta_{23} + \beta_{45}} \cos \beta_{12} \cdot \cos \beta_{34}$$

und für $|\sigma| \approx 1$ müssen wegen $\beta_{23} \gg 1$ und $\beta_{45} \gg 1$ entweder β_{12} oder β_{34} oder beide nahezu gleich einem ungeraden Vielfachen von $\pi/2$ sein. Im 3. Fall können wir diese Schlußweise im Anschluß an (61) mit gleichem Ergebnis wiederholen. Im 4. Fall ergibt sich aus (59) unmittelbar: $\beta_{34} = (r_3 + \frac{1}{2})\pi - \delta_3$. Wenn η_1 und η_4 oder η_2 und η_3 gleichzeitig nahezu gleich einem ganzen Vielfachen von π sind, läßt sich die obige Schlußweise im wesentlichen ebenso durchführen.

Es ist also stets für $|\sigma| \approx 1$ eine der Größen $\beta_{12}, \beta_{34}, \ldots \beta_{2n-1,\,2n}$ nahezu gleich einem ungeraden Vielfachen von $\pi/2$. Die in § 15 angeführten Überlegungen lehren im vorliegenden Fall, daß sich diese Größen bei monotoner

Änderung von λ oder von γ ebenfalls monoton ändern. Eine Wiederholung der Schlußweise von § 16 ergibt sodann unmittelbar, daß auch im vorliegenden Fall asymptotisch je zwei ungleichnamige periodische Eigenwertflächen nahe zusammenliegen, falls nur *eine* der Größen $\beta_{12}, \beta_{34} \ldots$ gleich $(r + \frac{1}{2})\pi - \delta$ ist. Falls mehrere dieser Größen diese Eigenschaft aufweisen, können wir vom Hilfssatz Gebrauch machen, daß sie sich alle bei Änderung von λ oder γ in *gleichem* Sinne ändern. Hieraus folgt auch in diesem Falle die Gültigkeit des obigen asymptotischen Lagensatzes. Wenn λ abnimmt, rücken je zwei ungleichnamige benachbarte Eigenwertflächen näher zusammen.

Auch im vorliegenden Fall kann man das Analogon der Gleichung (55) aus dem angegebenen Wert einer der Größen $\beta_{12}, \beta_{34}, \ldots$ herleiten, wobei die Integrationsgrenzen, welche zum betreffenden β-Wert gehören, eingesetzt werden müssen. Für alle Eigenwertflächen, für welche $|\sigma| \approx 1$ gilt somit asymptotisch: $\gamma \cdot \partial\lambda/\partial\gamma < 0$ unter den gleichen Voraussetzungen wie bei zwei Nullstellen.

Wenn die Nullstellenzahl sich beim Ändern von λ, γ_1 und γ_2 im Sinne von § 15 nicht ändert, kann in analoger Weise wie in § 16 geschlossen werden, daß $\partial^2\lambda/\partial\gamma^2$ für die Eigenwertflächen mit $|\sigma| \approx 1$ asymptotisch negativ ist und für $\lambda \to -\infty$ wird: $|\partial^2\lambda/\partial\gamma^2| \to 0$.

Unter den genannten Voraussetzungen erhält man demnach bei $2n$ Nullstellen im wesentlichen den gleichen asymptotischen Flächenverlauf wie bei zwei Nullstellen.

Es kann der Fall eintreten, daß zwei einfache Nullstellen der Funktion $\lambda + \gamma_1\Phi_1 + \gamma_2\Phi_2$ zu einer doppelten Nullstelle zusammenfallen. In solchen Fällen und auch bei mehrfachen Nullstellen höherer Ordnung ergeben sich gegenüber den mitgeteilten keine wesentlich neuen Gesichtspunkte. Man kann sie dadurch behandeln, daß einige der obigen β-Werte gleich Null gesetzt werden.

IV. Erweiterung auf $m+1$ Parameter.

§ 20.

Schranken für die Eigenwerte bei $m+1$ Parametern.

An Stelle der Gleichung (1) betrachten wir jetzt die Gleichung:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \lambda w + \{\gamma_1\Phi_1(z) + \gamma_2\Phi_2(z) + \cdots + \gamma_m\Phi_m(z)\}w = 0, \tag{62}$$

wo $\Phi_1, \Phi_2, \ldots \Phi_m$ reellwertige periodische Funktionen mit der gemeinsamen Grundperiode ζ darstellen, welche den Bedingungen für die Entwicklung in absolut und gleichmäßig konvergente FOURIER-Reihen genügen. Die $m+1$-Parameter $\lambda, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m$ sind reell, ebenso wie die unabhängige Veränder-

liche z. Wir suchen Lösungen dieser Gleichung (62), welche der Bedingung $w(z+\zeta) = \sigma w(z)$ für alle z, oder anders geschrieben:

$$(63) \qquad \begin{cases} w(z_0+\zeta) = \sigma w(z_0); \\ w'(z_0+\zeta) = \sigma w'(z_0), \end{cases}$$

wo Akzente Differentiation nach z bezeichnen, genügen. Bei gegebenen Werten von σ sowie von m der genannten $m+1$ Parameter suchen wir den $(m+1)$-ten Parameter so zu bestimmen, daß (63) und (62) erfüllt werden (verallgemeinerte Hillsche Aufgabe). Offenbar handelt es sich um eine Erweiterung der eingangs im Anschluß an Gleichung (1) und (2) gestellten Aufgabe, und wir werden versuchen, die bei letztgenannter Aufgabe erhaltenen Ergebnisse auf die vorliegende anzuwenden.

Hierzu betrachten wir die $m+1$ Parameter als rechtwinklige Koordinaten in einem $(m+1)$-dimensionalen euklidischen Raume. Die Gleichung (5) kann unmittelbar auf den vorliegenden Fall ausgedehnt werden und ergibt

$$(64) \qquad (\gamma_1^2+\gamma_2^2+\cdots+\gamma_m^2)^{-1} \leqq \int_{z_0}^{z_1}\int_{z_0}^{z_1} (\Phi_1^2+\Phi_2^2+\cdots+\Phi_m^2)\,|G(z,\mathfrak{z})|^2\,dz\,d\mathfrak{z},$$

wo G die durch (4), (4a) oder (4b) dargestellte Funktion ist. Wenn ψ^2 den Höchstwert des ersten Faktors im Integranden bezeichnet, entsteht die Formel:

$$(64a) \qquad (\gamma_1^2+\gamma_2^2+\cdots+\gamma_m^2)^{-1} \leqq \psi^2 \int_{z_0}^{z_1}\int_{z_0}^{z_1} |G(z,\mathfrak{z})|^2\,dz\,d\mathfrak{z}.$$

Wir können demnach von jedem Punkt der λ-Achse aus eine m-dimensionale Kugeloberfläche im $(\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m)$-Raum bestimmen, innerhalb derer für diesen λ-Wert keine γ-Eigenwerte liegen.

Als Anwendung betrachten wir die Hillsche Gleichung:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + \lambda w + w\left(\gamma_1 \cos\frac{2\pi z}{\zeta} + \frac{\gamma_2}{2}\cos 2\frac{2\pi z}{\zeta} + \cdots\right) = 0.$$

Der Klammerausdruck stellt bei gleichmäßig beschränkten Größen γ_1, γ_2, $\gamma_3, \ldots$ die Fourier-Reihe einer der Dirichletschen Bedingung genügenden geraden Funktion von z dar. Hierbei wird ψ^2 nach (64a) gegeben durch:

$$\psi^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots = \frac{\pi^2}{6}$$

und die Schranken für die Parameter gehen unmittelbar aus (64a) hervor. Die Reihe in den Klammern links konvergiert z. B., falls die periodische Funktion der Hillschen Gleichung eine stetige Ableitung 1. Ordnung und eine stückweise stetige Ableitung 2. Ordnung hat.

Die in § 3 angegebenen Maximum-Minimum-Eigenschaften der Eigenwerte können ebenfalls unmittelbar auf den vorliegenden Fall übertragen werden. Als Beispiel sei γ, wo $\gamma_1 = \mu_1\gamma$, $\gamma_2 = \mu_2\gamma \ldots \gamma_m = \mu_m\gamma$, zu be-

stimmen, während die $m + 1$-Größen λ, μ_1, μ_2, ... μ_m vorgegeben sind. Wir betrachten den Ausdruck (9) sowie:

$$N = \int_{z_0}^{z_1} (\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2 + \cdots + \mu_m \Phi_m)\, w(z)\, w^*(z)\, dz \tag{65}$$

und die Nebenbedingungen:

$$\int_{z_0}^{z_1} (\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2 + \cdots + \mu_m \Phi_m)\, w(z)\, F_k(z)\, dz = 0, \tag{66}$$

$$k = 1, 2, 3, \ldots n - 1.$$

Für positive definite Werte M nach (9) ist der n-te positive Eigenwert γ der höchste Wert, den das Minimum von M annehmen kann, wenn wir die stetigen zweimal differenzierbaren adjungierten Funktionen w und w^*, welche den Randbedingungen (63) bzw. den hierzu adjungierten Randbedingungen sowie der Gleichung $N = 1$ [nach (65)] und den Nebenbedingungen (66) genügen, variieren und die stetigen Funktionen F_k verändern, bis das Maximum-Minimum von M erreicht wird.

Aus diesen und analogen Maximum-Minimum-Eigenschaften können auch im vorliegenden Fall mit $m + 1$ Parametern Schranken für dieselben hergeleitet werden. So z. B. *obere* Schranken für den jeweiligen Eigenwert mit dem kleinsten Betrag, welche zusammen mit den unteren Schranken nach (64) und (64a) diese Eigenwerte einschließen. Andererseits können wir die Eigenwerte der vorliegenden Aufgabe infolge ihrer Maximum-Minimum-Eigenschaften auch mit Eigenwerten anderer, einfach lösbarer Aufgaben vergleichen.

Als Beispiel hierzu wollen wir die Betrachtungen von § 4 auf den vorliegenden Fall erweitern. Wir gehen von der oben gegebenen Formulierung der Eigenwertaufgabe aus und suchen für gegebene Werte von μ_1, μ_2, ... μ_m sowie von λ für $\sigma = \pm 1$ Schranken für den n-ten Eigenwert γ. Es sei $g_{\max}$ der größte (positiv vorausgesetzte) und $g_{\min}$ der kleinste (negativ vorausgesetzte) Wert von $g = (\mu_1 \Phi_1 + \mu_2 \Phi_2 + \cdots + \mu_m \Phi_m)$. Die zu $g_{\max}$ an Stelle von g gehörenden Eigenwerte nennen wir $\Gamma^{\max}$, die zu $g_{\min}$ an Stelle von g gehörenden dagegen $\Gamma^{\min}$. Dann gelten auch im vorliegenden Fall die Gleichungen (13) sowie die Ungleichungen:

$$\text{für } M \text{ positiv definit: } \gamma_{+n} \geqq \Gamma^{\max}_{+n};\quad \gamma_{-n} \leqq \Gamma^{\min}_{-n};$$
$$\text{für } M \text{ negativ definit: } \gamma_{-n} \leqq \Gamma^{\max}_{-n};\quad \gamma_{+n} \geqq \Gamma^{\min}_{+n}.$$

Falls wir $g_{\max} = |g_{\min}|$ wählen, indem der kleinste der beiden absoluten Werte dem größten gleich gemacht wird, ist:

$$\Gamma^{\max}_{+n} = \left|\Gamma^{\min}_{-n}\right| = \left|\Gamma^{\max}_{-n}\right| = \Gamma^{\min}_{+n} = \Gamma$$

und:

$$|\gamma_{\pm n}| \geqq \Gamma.$$

§ 21.

Eigenwerthyperflächen.

Aus Gleichung (15) geht hervor, daß die Eigenwerte im vorliegenden Fall auf analytischen Hyperflächen liegen, welche je durch eine analytische Gleichung mit den $m + 1$ Parametern als Veränderlichen bestimmt werden. Aus asymptotischen Betrachtungen (vgl. § 23) kann geschlossen werden, daß für jeden gegebenen σ-Wert abzählbar viele und zwar ∞^1 solcher Hyperflächen vorhanden sind. Die Überlegungen von § 5 führen auch im vorliegenden Fall zum Schluß, daß durch jeden Punkt $\lambda, \gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m$ des $(m + 1)$-dimensionalen Raumes höchstens zwei verschiedene Eigenwerthyperflächen hindurchgehen können, und daß ein solcher zweifacher Eigenwert nur für $\sigma = +1$ oder $\sigma = -1$ auftreten kann. Weiter ergibt sich, daß λ eine ganze transzendente Funktion der Parameter $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ für jene Eigenwertflächen ist, für die gilt: $|\sigma| = 1$ (vgl. unten). Hierdurch ist es ausgeschlossen, daß durch einen Punkt eine und dieselbe Eigenwerthyperfläche zweimal hindurchgeht.

Eine Wiederholung der Rechnung von § 7 für den vorliegenden Fall führt bei einem einfachen Eigenwert auf die Gleichungen:

$$(67) \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_1} = -\frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_1 w w^* dz}{\int_{z_0}^{z_1} w w^* dz}; \quad \cdots \frac{\partial \lambda}{\partial \gamma_m} = -\frac{\int_{z_0}^{z_1} \Phi_m w w^* dz}{\int_{z_0}^{z_1} w w^* dz}.$$

Bei einem zweifachen Eigenwert ergibt sich für jeden dieser Differentialquotienten eine der Gleichung (17a) analoge Gleichung, in der $\bar{\alpha}_{kl}$ die gleiche Bedeutung hat, aber $\bar{\beta}_{kl}$ durch:

$$\bar{\beta}_{kl} = \int_{z_0}^{z_1} \Phi_r w_k w_l dz; \quad r = 1, 2, \ldots m; \; k, l = 1, 2$$

gegeben ist. Die beiden Berührungshyperebenen werden durch die Gleichungen:

$$\lambda = \Lambda + \Delta_{11}(\gamma_1 - \Gamma_1) + \Delta_{21}(\gamma_2 - \Gamma_2) + \cdots + \Delta_{m1}(\gamma_m - \Gamma_m);$$
$$\lambda = \Lambda + \Delta_{12}(\gamma_1 - \Gamma_1) + \Delta_{22}(\gamma_2 - \Gamma_2) + \cdots + \Delta_{m2}(\gamma_m - \Gamma_m)$$

dargestellt, in denen der Eigenwert durch $\Lambda, \Gamma_1, \ldots \Gamma_m$ bestimmt ist, während $\Delta_{11}, \ldots \Delta_{m1}$ sowie $\Delta_{21}, \ldots \Delta_{m2}$ die Werte der Differentialquotienten $\partial\lambda/\partial\gamma_1, \ldots \partial\lambda/\partial\gamma_m$ im betreffenden Eigenwertpunkt bezeichnen, welche aus (17a) hervorgehen. Wie im Anschluß an (17a) erörtert, gehören auch hier jene Werte dieser Größen jeweils zu einer Berührungshyperebene, bei denen die aus (17a) hervorgehende Quadratwurzel das gleiche Vorzeichen hat.

In analoger Weise wie in § 8 gezeigt, ergibt sich aus den obigen Werten von $\partial\lambda/\partial\gamma_1$, $\partial\lambda/\partial\gamma_2$, $\ldots$ $\partial\lambda/\partial\gamma_m$, daß λ für jene Eigenwertflächen, welche

zu $|\sigma| = 1$ gehören, eine ganze transzendente Funktion von $\gamma_1, \gamma_2 \ldots \gamma_m$ ist. Auch die weiteren Bemerkungen am Ende von § 8 können sinngemäß auf diesen Fall übertragen werden.

Die in § 9 durchgeführten Berechnungen ergeben im vorliegenden Fall unmittelbar Werte für $\partial^2\lambda/\partial\gamma_1^2$, $\partial^2\lambda/\partial\gamma_2^2$, ... $\partial^2\lambda/\partial\gamma_1\,\partial\gamma_2$ usw., welche durch einfache Änderungen der Formeln (23), (24) und (25) angeschrieben werden können.

§ 22.

Lage und Verlauf der Eigenwerthyperflächen.

Im Anschluß an die Ausführungen in § 10 können wir die Lagenordnung der Eigenwerte nach O. Haupt und H. A. Kramers auf Geraden ausdehnen, welche als Schnitt der m Hyperebenen:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 - \Gamma_1 &= (\lambda - \Lambda_0)\,\mathrm{tg}\,\varphi_1;\\
\gamma_2 - \Gamma_2 &= (\lambda - \Lambda_0)\,\mathrm{tg}\,\varphi_2;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\gamma_m - \Gamma_m &= (\lambda - \Lambda_0)\,\mathrm{tg}\,\varphi_m
\end{aligned}$$

durch den Punkt Λ_0, Γ_1, Γ_2, ... Γ_m gehen. Die betreffenden Sätze: *Für* $\lambda \to -\infty$ *gilt*:

$$f \to + \exp\{\sqrt{|\lambda|}\cdot\int_{z_0}^{z_1}(1 + \Phi_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 + \Phi_2\,\mathrm{tg}\,\varphi_2 + \cdots + \Phi_m\,\mathrm{tg}\,\varphi_m)^{1/2}\,dz\};$$

bei wachsendem λ *sinkt* f *bis zu einem kleinsten Wert herab und pendelt dann weiter jeweils zwischen einem Minimum und einem Maximum hin und her*; *für* $\partial f/\partial\lambda = 0$ *gilt*: $|f| \geqq 2$ *und* $f\cdot\partial^2 f/\partial\lambda^2 < 0$; gelten im Falle, daß $1 + \Phi_1\,\mathrm{tg}\,\varphi_1 + \cdots + \Phi_m\,\mathrm{tg}\,\varphi_m$ positiv ist.

In der Umgebung der λ-Achse stimmt der Verlauf der Eigenwerthyperflächen mit jenem der Eigenwertflächen nach § 11 überein und die dortigen Sätze können sinngemäß auf den vorliegenden Fall übertragen werden.

Der erste Satz von § 12 lautet hier: Alle Eigenwerthyperflächen für $|\sigma| = 1$ verlaufen für $-\infty < \lambda \leqq 0$ derart, daß $\gamma\cdot\partial\gamma/\partial\lambda < 0$ ist, wo $\gamma_1 = \mu_1\gamma$; $\gamma_2 = \mu_2\gamma$; ... $\gamma_m = \mu_m\gamma$. Der im Anschluß an Gleichung (37) in § 12 bewiesene Minimalsatz für die Eigenwertflächen mit den jeweils kleinsten λ-Eigenwerten, für welche λ eine eindeutige Funktion von γ_1 und γ_2 ist, kann ebenfalls auf den Fall mehrerer Parameter γ übertragen werden. Für die entsprechenden Eigenwerthyperflächen gilt $\partial^2\lambda/\partial\gamma^2 < 0$, wo γ die oben angegebene Bedeutung hat. Dieser Satz kann auch aus den Differentialquotienten 2. Ordnung gefolgert werden, welche oben in § 21 für den Fall von m Parametern $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ genannt wurden.

§ 23.

Asymptotischer Verlauf der Eigenwerthyperflächen.

Wir betrachten zuerst den Fall, daß die Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 + \cdots + \gamma_m \Phi_m$ im Bereich $z_0 \leqq z \leqq z_1$ genau *zwei* Nullstellen aufweist. Mit den Abkürzungen:

$$\beta_1 = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \cdots + \gamma_m \Phi_m)^{1/2} dz;$$

$$\beta_2 = \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} |\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \cdots + \gamma_m \Phi_m|^{1/2} dz,$$

wo $\alpha_3 = \alpha_1 + \zeta$, während die obige Klammerfunktion im Bereich $\alpha_1 \leqq z \leqq \alpha_2$ positiv und im Bereich $\alpha_2 \leqq z \leqq \alpha_3$ negativ ist, ergeben sich die Eigenwertgleichungen (47) und (48). Die weiteren Betrachtungen von § 14 können sinngemäß übernommen werden. Falls wieder: $\gamma_1 = \mu_1 \gamma$; $\gamma_2 = \mu_2 \gamma$; $\cdots$ $\gamma_m = \mu_m \gamma$ gesetzt wird, kann geschlossen werden, daß β_1 und β_2 *monotone* Funktionen von λ und von γ sind. Bei veränderlichen Werten der Parameter sind stets zwei und nur zwei Nullstellen vorhanden, falls $\gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 + \cdots + \gamma_m \Phi_m$ bei wachsendem z in der Periode ζ monoton von einem kleinsten bis zu einem höchsten und dann wieder bis zum kleinsten Wert verläuft. Die von O. Haupt und H. A. Kramers (vgl. § 22) angegebene Reihenfolge der Eigenwerte gilt asymptotisch entlang jeder Geraden durch die λ-Achse oder parallel zu dieser Achse. Asymptotisch liegen je zwei gleichnamige periodische Eigenwertflächen nahe zusammen, was man daran erkennt, daß der Abstand der Schnittpunkte zweier solcher Flächen mit einer Geraden der genannten Art von der Größenordnung:

$$\zeta (\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \cdots + \sqrt{|\gamma_m|}) \exp\{-\zeta (\sqrt{|\lambda|} + \sqrt{|\gamma_1|} + \cdots + \sqrt{|\gamma_m|})\}$$

ist. Bei abnehmendem λ und konstanten Werten der übrigen Parameter rücken zwei Eigenwerthyperflächen der genannten Art näher zusammen. Die weiteren Sätze von § 16 gelten sinngemäß auch im vorliegenden Fall. Geraden 1. Art sind jetzt durch die Ungleichung:

$$\psi \equiv 1 + \Phi_1 \operatorname{tg} \varphi_1 + \Phi_2 \operatorname{tg} \varphi_2 + \cdots + \Phi_m \operatorname{tg} \varphi_m \geqq 0$$

bestimmt und Geraden 2. Art durch die Ungleichung $\psi \gtrless 0$.

Wir kommen, entsprechend den Betrachtungen von § 17, zum *asymptotischen* Verlauf der Eigenwerthyperflächen. Im vorliegenden Fall ist: $\gamma \cdot \partial \lambda / \partial \gamma < 0$, wo γ die bereits obengenannte Bedeutung hat und pos. ist.

Falls stets zwei und nur zwei Nullstellen der Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \cdots + \gamma_m \Phi_m$ vorhanden sind, während $\Phi_{\max}$ den größten (positiven) Wert dieser Funktion bei veränderlichem z bezeichnet, erhält man für $\lambda \to -\infty$ und γ positiv asymptotisch: $\partial\lambda/\partial\gamma \to -\Phi_{\max}$. Bei monotoner Abnahme von λ nimmt $|\partial\gamma/\partial\lambda|$ ebenfalls monoton ab. Asymptotisch ist $\partial^2\lambda/\partial\gamma^2$ für die Eigenwerthyperflächen negativ. Für $\lambda \to -\infty$ wird $|\partial^2\lambda/\partial\gamma^2| \to 0$. Auch hier nähern sich alle Eigenwerthyperflächen für $|\sigma| \approx 1$ asymptotisch für $\lambda \to -\infty$ den Eigenwerthyperflächen für $\sigma = \pm i$, denen Eigenfunktionen der Periode 4ζ entsprechen.

Der Fall, daß die Funktion $\lambda + \gamma_1 \Phi_1 + \gamma_2 \Phi_2 + \cdots + \gamma_m \Phi_m$ im Grundbereich $2n$ Nullstellen aufweist, kann im Anschluß an die obigen Betrachtungen sowie an § 18 ohne weiteres in analoger Weise erledigt werden wie jener zweier Nullstellen dieser Funktion.

§ 24.

Anwendungsbeispiel aus der mathematischen Physik.

Die Wellengleichung im dreidimensionalen Raum:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

führt nach Transformation auf ein System krummliniger orthogonaler elliptischer Koordinaten nach Trennung der unabhängigen Veränderlichen auf Differentialgleichungen der Form [15]):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y\,(h + a k^2\, sn^2 x + b\, dn^4 x) = 0.$$

Auf diese Gleichung wenden wir die Transformation:

$$z = am\,(x, k); \quad \frac{dz}{dx} = (1 - k^2 \sin^2 x)^{1/2}; \quad k^2 < 1$$

an und erhalten:

$$(1 - k^2 \sin^2 z)\frac{d^2 y}{dz^2} - k^2 \sin z \cos z \frac{dy}{dz} + \\ + \{h + a k^2 \sin^2 z + b\,(1 - k^2 \sin^2 z)^2\} \cdot y = 0.$$

Weiter setzen wir:

$$w = y e^{-\frac{1}{2}\int_{z_0}^{z} \frac{k^2 \sin z \cos z}{1 - k^2 \sin^2 z}\, dz}$$

---

[15]) Vgl. z. B. M. J. O. STRUTT, Ergebn. d. Math. I, H. 3, S. 76, Berlin, Springer, 1932.

und finden:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + w\left\{h + \frac{(h+a)\,k^2\sin^2 z}{1-k^2\sin^2 z} + b\,(1-k^2\sin^2 z)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{\frac{k^2}{4}\cos^2 z\,(1+k^2\sin^2 z) + \frac{k^2}{4}\sin^2 z\,(k^2-1)}{(1-k^2\sin^2 z)^2}\right\} = 0.$$

Wenn wir nun $\lambda = h$, $\gamma_1 = h + a$, $\gamma_2 = b$ und $\gamma_3 = 1$ setzen, sowie

$$\Phi_1 = \frac{k^2\sin^2 z}{1-k^2\sin^2 z}; \quad \Phi_2 = (1-k^2\sin^2 z)^2;$$
$$\Phi_3 = \frac{\frac{k^2}{4}\cos^2 z\,(1+k^2\sin^2 z) + \frac{k^2}{4}\sin^2 z\,(k^2-1)}{(1-k^2\sin^2 z)^2},$$

gelangen wir zu einer erweiterten HILLschen Gleichung mit vier Parametern.

Ich möchte an dieser Stelle Herrn N. S. MARKUS für seine Hilfe bei der Berechnung der GREENschen Funktionen (4) und (4a) sowie der Abb. 1, 3 und 4 herzlich danken.

(Eingegangen am 30. Mai 1943.)