Werk

Titel: Differentialgeometrie des isotropen Raumes. II. Die Flächen konstanter Relativkrü...

Autor: Strubecker, K.,

Ort: Berlin

Jahr: 1942

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0047|log85

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Differentialgeometrie des isotropen Raumes. II.

Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$.

Von

Karl Strubecker in Wien.

Einleitung.

Die Integralflächen der Differentialgleichung

$$(*) \qquad rt - s^2 = K \neq 0$$

sind, entsprechend ihrer Bedeutung in vielen Zweigen der Geometrie, schon oft studiert worden. G. DARBOUX hat für sie eine elegante integralfreie Darstellung angegeben. Erst die von mir entwickelte Differentialgeometrie des isotropen Raumes aber gestattet, für diese Flächen eine einfache und durchsichtige geometrische Erzeugungsweise anzugeben und damit den eigentlichen geometrischen Sinn ihrer DARBOUXschen Darstellung aufzudecken. *Im isotropen Raume nämlich fallen diese Flächen mit jenen der festen Relativkrümmung*

$$(**) \qquad \frac{1}{R_1 R_2} = K \neq 0$$

zusammen, und lassen sich (ähnlich wie L. BIANCHI für die entsprechenden Flächen des elliptischen Raumes fand) in einfacher kinematischer Weise durch CLIFFORDsche Schiebung ihrer Asymptotenlinien aneinander erzeugen. Diese Asymptotenlinien sind dabei im isotropen Raume von konstanter Torsion

$$(***) \qquad \tau = \pm \sqrt{-K}$$

und darum in gewissen involutorischen Gewinden enthalten.

Eine Reihe von bemerkenswerten Eigenschaften der Flächen (*) ist von verschiedenen Autoren entdeckt worden. Auch sie finden in unserer Auffassung der Flächen als Angehörige eines isotropen Raumes ihren organischen Platz. Z. B. ist der Satz von G. SCHEFFERS, daß die Flächen (*), und nur sie, als Grundrisse ihrer Asymptotenlinien ein Schiebnetz (= ebenes Tschebyscheff-Netz) haben, das genaue Analogon des bekannten Theorems von J. N. HAZZIDAKIS bzw. L. BIANCHI, daß im euklidischen bzw. elliptischen Raume die Flächen konstanter Krümmung K, und nur sie, ein Tschebyscheffnetz aus Asymptotenlinien tragen. Ähnlich folgt der Satz von W. BLASCHKE, daß die Flächen (*), und (bis auf Affinitäten) nur sie, sogenannte uneigentliche Affinsphären sind, d. h. parallele Affinnormalen haben, sofort

daraus, daß ihre LIEschen Oskulationsflächen zweiter Ordnung CLIFFORDsche Flächen des isotropen Raumes sind, nämlich durch CLIFFORDsche Schiebungen der Schmiegtangenten aneinander erzeugbar sind.

Als interessante Beispiele werden neben den windschiefen vor allem die Dreh- und Schraubflächen mit fester Relativkrümmung behandelt. Diese ergeben sich, wie man überaus einfach zeigen kann, durch CLIFFORDsche Schiebung von allgemeinen bzw. symmetrischen Schraublinien des isotropen Raumes von entgegengesetzt gleichen Torsionen aneinander.

Um die in einer größeren Reihe erscheinende Arbeit für sich lesbar zu gestalten, sind zu Anfang in Kürze einige Hauptpunkte der Metrik und Kinematik sowie der Kurventheorie des isotropen Raumes zusammengestellt worden. Die benötigten Resultate der Flächentheorie, über die ich noch nichts veröffentlicht habe, werden in der Arbeit selbst entwickelt.

I. Metrik und Kinematik des isotropen Raumes[1].

1. Als isotrop wird ein Raum (x, y, z) bezeichnet, dessen Bogenelementquadrat durch die singuläre quadratische Form

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{1}$$

definiert ist. In ihm können die Längenverhältnisse an Kurven und Flächen direkt aus dem „Grundrisse" auf die (x, y)-Ebene entnommen werden. Ein Gleiches gilt für die Winkelmetrik. Danach ist auch die Krümmung einer Kurve als Quotient von Kontingenzwinkel der Tangente und Bogenelement gleich der gewöhnlichen Krümmung ihres Grundrisses.

Die zur z-Achse parallelen Geraden haben identisch verschwindende Längen und sollen vollisotrop heißen. Sie sind zu allen anderen Geraden und darum auch zu allen Ebenen in trivialer Weise normal. Denn ihr Grundriß ist der Nullvektor, der zu allen Grundrißvektoren normal ist.

2. Man kann die Geometrie des isotropen Raumes im Sinne FELIX KLEINS auf die folgende sechsgliedrige Gruppe G_6 stützen:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x\cos\varphi - y\sin\varphi \quad \cdot \\ y' &= b + x\sin\varphi + y\cos\varphi \quad \cdot \\ z' &= c + c_1 x \quad + c_2 y \quad + z \end{aligned}\right\} G_6. \tag{2}$$

Ihre Transformationen lassen das Bogenelement (1) invariant und sollen als Bewegungen des isotropen Raumes, kürzer gerne als „isotrope Bewegungen" bezeichnet werden. Sie wirken sich im Grundrisse als gewöhnliche ebene Bewegungen aus.

---

[1] K. STRUBECKER, Differentialgeometrie des isotropen Raumes I. Theorie der Raumkurven. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien IIa, **150** (1941), S. 1—53.

3. Die drehungsfreien ($\varphi = 0$) unter den isotropen Bewegungen (2) bilden in G_6 eine fünfgliedrige invariante Untergruppe G_5

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x \\ y' &= b \quad\quad + y \\ z' &= c + c_1 x + c_2 y + z \end{aligned}\right\} G_5, \tag{3}$$

die wir als die Gruppe der Grenzbewegungen des isotropen Raumes bezeichnen. Ihr Grundrißbild besteht aus den Translationen der (x, y)-Ebene.

4. Wie ich schon bei früheren Gelegenheiten[2]) zeigen konnte, ist es diese wichtige Grenzgruppe G_5, welche den isotropen Raum als einen letzten Grenzfall des elliptischen Raumes erkennen läßt, wobei der quasielliptische Raum von W. Blaschke[3]) ein Übergangsglied bildet.

Ähnlich wie deren sechsgliedrige Bewegungsgruppen kann nämlich auch die Grenzbewegungsgruppe G_5 des isotropen Raumes dargestellt werden als kommutatives Produkt zweier dreigliedriger einfach-transitiver Untergruppen S_3^r und S_3^l:

$$G_5 = S_3^r \cdot S_3^l = S_3^l \cdot S_3^r, \tag{4}$$

die wir wegen der Geradlinigkeit der Bahnen ihrer eingliedrigen Untergruppen als Cliffordsche Schiebungen des isotropen Raumes bezeichnen. Ausführlicher sind es die *Rechtsschiebungen* S_3^r:

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x \\ y' &= b \quad\quad + y \\ z' &= c + bx - ay + z \end{aligned}\right\} S_3^r \tag{5}$$

und die *Linksschiebungen* S_3^l:

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha + x \\ y' &= \beta \quad\quad + y \\ z' &= \gamma - \beta x + \alpha y + z \end{aligned}\right\} S_3^l. \tag{6}$$

Diese beiden Gruppen durchdringen sich für $a = b = 0$ bzw. $\alpha = \beta = 0$ in der eingliedrigen Gruppe der (gewöhnlichen) Schiebungen in vollisotroper Richtung.

5. Diese Zerlegung (4) der Grenzbewegungen in Schiebungen ist aber nur eine von unendlich vielen möglichen. In der Tat, auch die dreigliedrigen Gruppen

$$\left.\begin{aligned} x' &= a + x \\ y' &= b \quad\quad + y \\ z' &= c + Cbx - Cay + z \end{aligned}\right\} C_3^r \tag{7}$$

---

[2]) K. Strubecker, Beiträge zur Geometrie des isotropen Raumes. Journ. f. reine u. angew. Math. **178** (1938), S. 135–173; insbes. Kap. III.

[3]) W. Blaschke, Ebene Kinematik, § 5. Leipzig-Berlin 1938.

und

$$\left.\begin{aligned} x' &= \alpha + x \\ y' &= \beta \qquad\quad + y \\ z' &= \gamma - C\beta x + C\alpha y + z \end{aligned}\right\} C_3^l \tag{8}$$

liefern für jeden von Null verschiedenen Wert des Parameters C, den wir uns im reellen Falle positiv denken wollen, unsere Grenzgruppe G_5 als ihr kommutatives Produkt. Auch ihre Bahnen eingliedriger Untergruppen sind geradlinig, weshalb wir die Gruppen C_3^r und C_3^l als *rechts-* und *linksseitige C-Schiebungen* bezeichnen wollen. Für $C = 1$ erhält man die (nur terminologisch ausgezeichneten) gewöhnlichen Rechtsschiebungen S_3^r und Linksschiebungen S_3^l.

6. Man kann die Geometrie, insonderheit die Differentialgeometrie des isotropen Raumes als die Invariantentheorie der Bewegungsgruppe G_6 (2) aufbauen, wie ich es etwa für die Metrik und die Kurventheorie in Veröffentlichungen[1]), für die Flächentheorie in einer Reihe von Vorträgen in Hamburg, Wien und Jena ausgeführt habe. Es ist nötig, über einiges davon in Kürze zu berichten.

Ich beginne mit einem Bericht über die eigenartigen metrischen Verhältnisse des isotropen Raumes.

Diese Metrik ist zunächst in sich dual, d. h. es steht der *Entfernung d zweier Punkte* $P_\alpha(x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha)$, definiert durch

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \tag{9}$$

eine duale Formel für den *Winkel* δ *zweier Ebenen* gegenüber, nämlich, wenn die Gleichungen der Ebenen π_α lauten

$$z = u_\alpha x + v_\alpha y + w_\alpha, \tag{10}$$

der *Winkel*

$$\delta^2 = (u_2 - u_1)^2 + (v_2 - v_1)^2. \tag{11}$$

So wie die Punkte dabei als eigentlich vorausgesetzt waren, dürfen (*dual*) die Ebenen (10) natürlich nicht *isotrop*, d. h. z-parallel sein.

7. Diese Invarianten können verschwinden, ohne daß die Punkte oder Ebenen identisch wären, nämlich dann, wenn die Punkte und Ebenen *parallel* sind, d. h. wenn für die Koordinaten

$$x_1 = x_2 \quad \text{und} \quad y_1 = y_2 \tag{12}$$

bzw. dual

$$u_1 = u_2 \quad \text{und} \quad v_1 = v_2 \tag{13}$$

gilt. Die Grundrisse der Punkte decken sich dann und die Ebenen sind im üblichen Sinne parallel.

Als *Ersatz* existieren dann andere (rationale) Invarianten, nämlich für die parallelen Punkte ihre *Spanne*

$$l = z_2 - z_1 \tag{14}$$

und für die parallelen Ebenen ihre *Distanz*

$$\lambda = w_2 - w_1. \tag{15}$$

8. Wie der Abstand zweier Punkte, so kann auch der *Winkel φ zweier Vektoren*

$$\mathfrak{x}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha, z_\alpha) \tag{16}$$

aus ihren Grundrissen

$$\bar{\mathfrak{x}}_\alpha = (x_\alpha, y_\alpha) \tag{17}$$

direkt abgelesen werden. Falls die Vektoren bereits im Sinne von (9) Einheitsvektoren sind, gilt nämlich

$$\begin{cases} \cos\varphi = (\bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 \\ \sin\varphi = [\bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2] = x_1 y_2 - x_2 y_1. \end{cases} \tag{18}$$

9. Auch diese Invariante φ kann verschwinden, ohne daß die beiden Vektoren identisch wären, nämlich dann, wenn

$$[\bar{\mathfrak{x}}_1 \bar{\mathfrak{x}}_2] = 0 \tag{19}$$

ist, d. h. wenn die Vektoren eine *isotrope*, d. i. z-parallele *Ebene* aufspannen. Auch dann gibt es wieder eine *Ersatzinvariante*, nämlich die *Neigung* oder *Sperrung* der beiden Vektoren. Sie ist definiert durch

$$\nu = z_2 - z_1, \tag{20}$$

wenn wir annehmen, daß die parallelen Einheitsvektoren des Grundrisses (17) auch gleichorientiert sind.

10. Bemerken wir noch, daß nach (18) die *vollisotropen Vektoren*

$$\mathfrak{l} = (0, 0, l) \tag{21}$$

zu allen anderen Vektoren und damit auch zu allen Ebenen *normal* sind. Es werden also im isotropen Raume alle zu den Schmiegebenen einer Kurve normalen Binormalen und ebenso alle Normalen einer Fläche zueinander parallel, nämlich vollisotrop sein.

II. Elemente der Kurventheorie des isotropen Raumes[1]).

11. Es sei

$$\mathfrak{x}(s) = \{x(s), y(s), z(s)\} \tag{22}$$

eine bereits laut (1) auf ihren Bogen s bezogene Raumkurve und

$$\bar{\mathfrak{x}}(s) = \{x(s), y(s)\} \tag{23}$$

ihr „Grundrißvektor".

Die Raumkurve hat dann hinsichtlich der Bewegungsgruppe G_6 des isotropen Raumes zwei Differentialinvarianten niedrigster Ordnung, nämlich ihre Krümmung $\varkappa$, die nach einer bekannten Verabredung sogar rational ausgedrückt werden kann

$$\varkappa = [\bar{\mathfrak{x}}' \bar{\mathfrak{x}}''] = \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix} \tag{24}$$

und, wie schon in Ziffer 1 erwähnt, mit der euklidischen Krümmung ihres Grundrisses übereinstimmt, sowie ihre Windung oder Torsion τ

$$\tau = \frac{[\mathfrak{x}' \mathfrak{x}'' \mathfrak{x}''']}{[\bar{\mathfrak{x}}' \bar{\mathfrak{x}}'']^2} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}^2}. \tag{25}$$

12. Man kann mit jeder Raumkurve (22) invariant gegen Bewegungen des isotropen Raumes ein begleitendes Dreibein verbinden, bestehend aus

1) dem *Tangentenvektor* $\mathfrak{t}$

$$\mathfrak{t} = \mathfrak{x}'(s), \tag{26}$$

der — im Sinne von (9) — ein Einheitsvektor ist,

2) dem dazu normalen und in der Schmiegebene enthaltenen *Hauptnormalenvektor* $\mathfrak{h}$

$$\mathfrak{h} = \frac{1}{\varkappa} \mathfrak{x}''(s), \tag{27}$$

der gleichfalls ein Einheitsvektor ist, und

3) dem zu diesen beiden Vektoren normalen *Binormalenvektor* $\mathfrak{b}$

$$\mathfrak{b} = (0, 0, 1), \tag{28}$$

der vollisotrop und von der Spanne eins ist.

Für sie gilt, als Analogon der Frenetschen Formeln, das folgende System von *Ableitungsgleichungen*:

$$\left\{ \begin{array}{lcccc} \mathfrak{t}' = & . & \varkappa\mathfrak{h} & . \\ \mathfrak{h}' = & -\varkappa\mathfrak{t} & . & +\tau\mathfrak{b} \\ \mathfrak{b}' = & . & \mathfrak{o} & . \end{array} \right\}. \tag{29}$$

13. Das begleitende Dreibein fehlt an solchen Kurvenstellen, wo $\varkappa = 0$ ist. Wegen der Orthogonalität von $\mathfrak{x}'$ und $\mathfrak{x}''$ ist dies reell nur dadurch möglich, daß der Vektor $\mathfrak{x}''$, der Hauptnormalenrichtung hat, vollisotrop ist, also

$$\mathfrak{x}'' = z''\mathfrak{b} \tag{30}$$

ist. Liegt dann kein Wendepunkt vor, d. h. ist $z'' \neq 0$, so ist die Schmiegebene an dieser Stelle isotrop. Die Gleichung

$$\varkappa(s) \doteqdot 0 \tag{31}$$

kennzeichnet danach die *Kurven in isotropen Ebenen*. Bei ihnen tritt dann wieder an die Stelle der versagenden Krümmung $\varkappa$ eine *Ersatzinvariante*, nämlich die Größe

$$\varkappa^*(s) = z''(s), \tag{32}$$

die sich als Quotient der Neigung dv (20) zweier Nachbartangenten und des Bogenelementes ds erklären läßt und hier im Anschluß an H. BECK[4]) als Abweichung der Kurve unserer isotropen Ebene (von der geraden Richtung) bezeichnet wird. Ihren Reziprokwert

$$R = \frac{1}{\varkappa^*(s)} \tag{33}$$

wollen wir als den *Normalkrümmungsradius* der Kurve bezeichnen. Er wird nämlich in der Flächentheorie des isotropen Raumes an die Stelle der üblichen Normalschnittkrümmungsradien R der euklidischen Flächentheorie treten.

Kurvenstellen mit vollisotroper Tangentenrichtung sind auszuschließen.

14. Die natürlichen Gleichungen

$$\varkappa = \varkappa(s), \quad \tau = \tau(s) \tag{34}$$

legen [falls $\varkappa(s)$ nicht identisch verschwindet] eine Raumkurve ihrer Gestalt nach, d. h. bis auf Bewegungen des isotropen Raumes fest. Dabei kennzeichnet

$$\tau(s) \equiv 0 \tag{35}$$

die in nichtisotropen Ebenen enthaltenen *ebenen Kurven*. Ist aber

$$\varkappa(s) \equiv 0, \tag{36}$$

so liegt die *Kurve* nach (31) *in einer isotropen Ebene*, und man benötigt zur Festlegung der Kurve (bis auf Bewegungen des isotropen Raumes) noch die *dritte natürliche Gleichung*

$$\varkappa^* = \varkappa^*(s). \tag{37}$$

15. Als wichtige Anwendungen interessieren uns vor allem die verschiedenen Bahnkurven eingliedriger Bewegungsgruppen des isotropen Raumes. Sie haben *konstante Invarianten*. Das gibt vier Möglichkeiten:

1) Die *Schraublinien* des isotropen Raumes mit

$$\varkappa = \varkappa_0 \neq 0, \quad \tau = \tau_0 \neq 0. \tag{38}$$

Sie entstehen aus dem Musterfalle der euklidischen Schraublinien mit z-paralleler Achse durch die Bewegungen (2) des isotropen Raumes und sind *Bahnkurven* seiner *Schraubungen*. Ihre Grundrisse sind Kreise.

---

[4]) H. BECK, Zur Geometrie in der Minimalebene. Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges. **12** (1912), S. 14—30.

2) Die *Kreise* des isotropen Raumes mit

$$\varkappa = \varkappa_0 \neq 0, \quad \tau = 0. \tag{39}$$

Sie entstehen aus dem Musterfalle der euklidischen Kreise mit z-paralleler Achse durch die Bewegungen (2) des isotropen Raumes und sind *Bahnkurven* seiner *Drehungen um vollisotrope Achsen*. Sie sind Ellipsen mit kreisförmigem Grundriß.

3) Die *parabolischen Kreise* des isotropen Raumes mit

$$\varkappa = 0, \qquad \varkappa^* = \varkappa_0^* \neq 0. \tag{40}$$

Sie sind *Parabeln in isotropen Ebenen mit vollisotroper Durchmesserrichtung*. Als Musterfall diene die Parabel

$$\begin{cases} z = \dfrac{\varkappa_0^*}{2} x^2 \\ y = 0, \end{cases} \tag{41}$$

aus der alle anderen durch die Bewegungen (2) des isotropen Raumes hervorgehen. Sie treten als *Bahnen von parabolischen Drehungen* (mit Ferngeraden als Achsen) auf.

4) Die (nicht vollisotropen) *geraden Linien*

$$\varkappa = 0, \quad \varkappa^* = 0. \tag{42}$$

Sie treten als Bahnkurven von Clifford'schen Schiebungen des isotropen Raumes (vgl. Ziffer **4** und **5**) oder von gewöhnlichen Translationen auf.

16. Eine für uns besonders wichtige Gattung sind die Kurven konstanter Torsion

$$\tau = \tau_0 \neq 0. \tag{43}$$

Es gilt der für uns grundlegende *Satz*:

Alle Gewindekurven der Gewinde $\mathfrak{G}_{\tau_0}$ *des Bündels*

$$dz = A\,dx + B\,dy + \tau_0(x\,dy - y\,dx), \tag{44}$$

und nur sie, haben die konstante Torsion $\tau = \tau_0$.

Es ist im reellen Falle günstig, diese Gewinde je nach dem Vorzeichen der Torsion τ_0 ihrer Kurven zu unterscheiden. Darum sollen, unter C *eine (im reellen Falle) stets positive Konstante* verstanden, die Gewinde

$$\mathfrak{G}_C^r \ldots \; dz = A\,dx + B\,dy + C(x\,dy - y\,dx), \tag{45}$$

deren Kurven die positiv-konstante Torsion C haben, als *rechtsgewundene C-Gewinde* $\mathfrak{G}_C^r$ bezeichnet werden und ähnlich die Gewinde

$$\mathfrak{G}_C^l \ldots \; dz = A\,dx + B\,dy - C(x\,dy - y\,dx), \tag{46}$$

deren Kurven die negativ-konstante Torsion $-C$ besitzen, als *linksgewundene C-Gewinde* $\mathfrak{G}_C^l$. Gewinde (45) und (46), welche zu gleichen Werten des (reellen oder komplexen!) Parameters C gehören, liegen daher stets *involutorisch*.

17. Die Gewinde (44) gestatten nun im isotropen Raume sämtlich eine sogar *vier*gliedrige Gruppe von Bewegungen in sich, in der eine dreigliedrige Untergruppe von Grenzbewegungen enthalten ist. Es gilt nämlich, wenn wir die in Ziffer **5** geprägten Bezeichnungen auch für den komplexen Fall heranziehen, der für uns später grundlegende Satz:

Die rechtsgewundenen C-Gewinde $\mathfrak{G}_C^r$ (45) *gestatten an Grenzbewegungen alle linksseitigen C-Schiebungen* (8), *und nur sie. Ebenso gestatten die linksgewundenen C-Gewinde* $\mathfrak{G}_C^l$ (46) *an Grenzbewegungen alle rechtsseitigen C-Schiebungen* (7), *und nur sie.*

18. Seiner besonderen Einfachheit wegen heben wir noch den Fall der Kurven mit der festen Torsion $\tau = \pm 1$ und die zugehörigen Gewinde hervor, wobei wir auch die Terminologie ein wenig vereinfachen. Unsere späteren Überlegungen über Flächen fester Relativkrümmung werden sich nämlich hauptsächlich gerade auf diesen bequemsten Fall zu stützen haben. Wir fassen die Ergebnisse gleich in einem Satze zusammen:

Alle Gewindekurven der Rechtsgewinde $\mathfrak{G}_r$,

$$\mathfrak{G}_r \ldots dz = A\,dx + B\,dy + (x\,dy - y\,dx), \tag{47}$$

und nur sie, haben die feste Torsion $\tau = +1$. *Ebenso haben alle Gewindekurven der Linksgewinde* $\mathfrak{G}_l$

$$\mathfrak{G}_l \ldots dz = A\,dx + B\,dy - (x\,dy - y\,dx), \tag{48}$$

und nur sie, die feste Torsion $\tau = -1$.

Die Rechts- und Linksgewinde liegen dabei involutorisch.

Die Rechtsgewinde $\mathfrak{G}_r$ (47) *gestatten an Grenzbewegungen alle Linksschiebungen* (6) *des isotropen Raumes und nur sie. Ebenso gestatten die Linksgewinde* $\mathfrak{G}_l$ (48) *an Grenzbewegungen alle Rechtsschiebungen* (5) *und nur sie. Ihre Flächenelemente werden dabei einfach transitiv vertauscht.*

III. Einige Elemente der Krümmungstheorie der Flächen des isotropen Raumes.

19. Die Differentialgeometrie des isotropen Raumes, von der wir nun einige Punkte der Flächentheorie *herleiten* müssen, betrachtet als *regulär* nur Flächen, die sich in der Form

$$z = z(x, y) \tag{49}$$

darstellen lassen. Zylinder mit vollisotroper Erzeugendenrichtung sind also ausgeschaltet, ebenso Flächenpunkte mit isotroper Tangentialebene. Von der

Funktion $z(x, y)$ setzen wir außer Eindeutigkeit nur zweimalige stetige Differenzierbarkeit voraus[5]).

Durch das Bogenelement (1) ist die *Längenmessung* jeder Fläche und durch das Flächenelement

$$df = dx \cdot dy \tag{50}$$

ihre *Flächenmessung* invariant gegen Bewegungen des isotropen Raumes festgelegt. Beides kann, ebenso wie die *Winkelmessung* auf der Fläche, direkt aus dem Grundrisse abgenommen werden.

20. Aus der Krümmungstheorie der Flächen (49) des isotropen Raumes genügen uns hier einige einfache Elemente. Studieren wir zunächst die *Normalschnitte* der Fläche in einem ihrer Punkte $(x_0, y_0, z_0 = z(x_0, y_0))$! Sie werden, da alle Flächennormalen nach Ziffer **10** vollisotrop sind, von isotropen, d. i. z-parallelen Ebenen ausgeschnitten. Es sei durch

$$dx : dy \tag{51}$$

eine Flächenrichtung bestimmt, und es sei α ihr Winkel gegen den x-parallelen Normalschnitt, so daß

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \alpha \tag{52}$$

ist. Dann läßt sich der *Normalschnitt* $\mathfrak{x}(s)$ der Richtung (51) mit Hilfe seines Bogens s als Parameter so darstellen:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + s \cos \alpha \\ y &= y_0 + s \sin \alpha \\ z &= z(x_0 + s \cos \alpha,\ y_0 + s \sin \alpha) \end{aligned}\right\} \mathfrak{x}(s). \tag{53}$$

Die Abweichung $\varkappa^*$ dieses Normalschnittes soll nach Formel (32) berechnet werden, wobei wir aus Gründen der Analogie zur euklidischen Flächentheorie auch den Normalkrümmungsradius R nach (33) heranziehen!

Es ist zunächst

$$\varkappa^* = \frac{1}{R} = \frac{d^2 z}{ds^2} = z'' \tag{54}$$

und mit Eulerschen Bezeichnungen

$$z' = p(x, y) \cdot \cos \alpha + q(x, y) \cdot \sin \alpha \tag{55}$$

also

$$z'' = \frac{1}{R} = r \cdot \cos^2 \alpha + 2s \cdot \sin \alpha \cos \alpha + t \cdot \sin^2 \alpha \tag{56}$$

---

[5]) Es genügt für den Zweck dieser Note, wenn wir die wenigen nötigen Resultate und Formeln nur für die explizite Darstellung (49) der Fläche herleiten. Die allgemeine isotrope Flächentheorie wird in einem weiteren Teile dieser Reihe begründet werden. Ich habe über sie und die wesentlichen Ergebnisse dieser Arbeit am 4. März 1941 in Hamburg, am 16. Mai 1941 in Wien und am 24. Oktober 1941 vor der D. M. V. in Jena berichtet.

und endlich ist wegen (52)

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2}{dx^2 + dy^2}} \tag{57}$$

der gesuchte Wert $\varkappa^* = 1 : R$ der *Abweichung des Normalschnittes* bzw. des *Normalkrümmungsradius* R der Richtung $dx : dy$.

21. Die Abweichung verschwindet für die beiden *Asymptotenrichtungen*

$$r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0. \tag{58}$$

Für die beiden *Richtungen extremer Abweichung* bzw. der beiden *Extremwerte* R_1 *und* R_2 *des Normalkrümmungsradius* findet man aus (56) durch Differenzieren leicht

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\,s}{r - t} \tag{59}$$

oder nach (52)

$$\boxed{s\,dx^2 + (t - r)\,dx\,dy - s\,dy^2 = 0}\,. \tag{60}$$

22. Diese Gleichung versagt in Flächenpunkten, wo

$$r = t \quad \text{und} \quad s = 0 \tag{61}$$

ist. Dort ist die Abweichung der Normalschnitte (57) in allen Richtungen dieselbe. Es sind dies die „*Nabelpunkte*" der Fläche (49) des isotropen Raumes.

Man stellt danach z. B. leicht fest, daß außer den (nichtisotropen) *Ebenen* lediglich die *Drehparaboloide* mit vollisotroper Durchmesserrichtung

$$z = \frac{1}{2p}(x^2 + y^2) + 2\,ax + 2\,by + c \tag{62}$$

lauter Nabelpunkte tragen. Sinngemäß sind diese Paraboloide als die Kugeln des isotropen Raumes aufzufassen. Der Parameter p ist für sie (ähnlich dem Radius einer gewöhnlichen Kugel) eine kennzeichnende Bewegungsinvariante. Alle ihre Normalschnitte sind kongruente parabolische Kreise und haben daher denselben Normalkrümmungsradius $R = p$. Sie treten an die Stelle der Kugelgroßkreise. Alle nichtisotropen ebenen Schnitte einer Kugel sind Kreise.

Jede Kugel (62) des isotropen Raumes gestattet eine Gruppe von isotropen Bewegungen mit drei Freiheitsgraden, nämlich die Drehungen um die Kugeldurchmesser.

23. Die Differentialgleichung (60) für die Richtungen der Normalschnitte extremer Abweichung kann man symmetrisch auch so schreiben

$$\begin{vmatrix} dx & dy \\ r\,dx + s\,dy & s\,dx + t\,dy \end{vmatrix} = 0. \tag{63}$$

Ihr Bestehen ist also auch die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß die beiden linearen homogenen Gleichungen

$$dx\,\delta x + dy\,\delta y = 0, \tag{64}$$

$$r\,dx\,\delta x + s\,(dx\,\delta y + dy\,\delta x) + t\,dy\,\delta y = 0 \tag{65}$$

eine nichttriviale Lösung $\delta x : \delta y$ besitzen. Aus ihnen und ihrer Symmetrie folgt, daß *die beiden Richtungen extremer Abweichung* $dx : dy$ *untereinander zugleich normal* (64) *wie auch auf der Fläche konjugiert* (65) *sind.*

Wir bezeichnen diese beiden Richtungen aus Analogiegründen als die Hauptrichtungen des Flächenpunktes, ihre Normalschnitte als die Hauptnormalschnitte, deren extreme isotrope Krümmungsradien R_1 und R_2 als die beiden isotropen Hauptkrümmungsradien und die Integralkurven des Feldes der Hauptrichtungen als die Krümmungslinien der Fläche des isotropen Raumes. Dann gilt zusammenfassend der Satz:

Es gibt in jedem regulären Punkte der Fläche (49) *des isotropen Raumes, der kein Nabelpunkt ist, zwei Hauptrichtungen, deren Normalschnitte extreme Abweichungen bzw. Normalkrümmungsradien* R_1, R_2 *besitzen. Diese Hauptrichtungen und ihre Integralkurven, die Krümmungslinien der Fläche, sind durch die Differentialgleichung* (60) *bestimmt und durch die beiden Eigenschaften gekennzeichnet, zugleich normal und auf der Fläche konjugiert zu sein.*

Das Netz der Krümmungslinien einer Fläche des isotropen Raumes stimmt also mit jenem konjugierten Netze überein, das im Grundriß als Orthogonalnetz erscheint.

24. Zu diesen Linien kam Emil Müller, ohne die Idee des isotropen Raumes und seiner Krümmungstheorie zu fassen, auf einem anderen, von ihm vielfach dargelegten Wege [6]), in seiner — später insbesondere von W. Süss und seinen japanischen Schülern, vor allem J. Hirakawa in systematischer Weise ausgebauten — relativen Differentialgeometrie. E. Müller zeigte nämlich, daß die hier so genannten *Hauptkrümmungsrichtungen jene sind, in denen eine stationäre Berührung der Fläche mit Kugeln des isotropen Raumes* (62) *vorhanden ist.*

25. Um wenigstens ein einfaches Beispiel zu haben, nehmen wir das Plückersche Konoid

$$z = \frac{2\,x\,y}{x^2 + y^2}, \tag{66}$$

dessen Doppelgerade die vollisotrope z-Achse ist. Seine Krümmungslinien sind ebene Kurven, deren Ebenen sich auf zwei Büschel verteilen, deren Achsen die beiden Torsallinien der Fläche sind. *Die Krümmungslinien sind also Kreise, welche die Torsallinien in den Kuspidalpunkten der Fläche berühren.*

[6]) E. Müller, Relative Minimalflächen. Monatshefte f. Math. u. Phys. **31** (1921), S. 1—19; insbes. S. 7.

In der Tat wird das PLÜCKERsche Konoid längs jedes solchen Kreises von einer Kugel des isotropen Raumes berührt, ist also Hüllfläche zweier Kugelscharen, und die Berührungskreise sind seine Krümmungslinien.

Auch die Frage nach den Krümmungslinien der Flächen zweiter Ordnung läßt sich sofort und vollständig beantworten[7]).

26. Auch die beiden isotropen Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 lassen sich leicht ermitteln! Man kann die Gleichung (57) auch so schreiben:

$$(Rr - 1)\,dx^2 + 2\,Rs\,dx\,dy + (Rt - 1)\,dy^2 = 0. \tag{67}$$

Zu vorgegebenem Werte von R gibt es daraus zwei Richtungen, deren Normalschnitte dies R als Normalkrümmungsradius haben. Für die beiden Extremwerte R_1 und R_2 fallen diese beiden Richtungen zusammen, d. h. es verschwindet die Diskriminante von (67):

$$(Rr - 1)\,(Rt - 1) - R^2 s^2 = 0. \tag{68}$$

Somit sind die beiden isotropen Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$(rt - s^2)\,R^2 - (r + t)R + 1 = 0. \tag{69}$$

Wir errechnen daraus das arithmetische und geometrische Mittel der beiden Hauptnormalkrümmungen $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$

$$\boxed{K = \frac{1}{R_1 R_2} = rt - s^2}, \tag{70}$$

$$\boxed{H = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}(r + t)}, \tag{71}$$

und bezeichnen im Anschlusse an die Terminologie, welche L. BIANCHI für den elliptischen Raum gebrauchte[8]), K als die relative Krümmung und H als die mittlere Krümmung der Fläche (49) des isotropen Raumes. Beide Größen kommen übrigens schon bei E. MÜLLER[9]) vor, der sie aus der auf die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{P}$ der Drehparaboloide (62) gegründeten Relativgeometrie herleitete und K als die $\mathfrak{P}$-Krümmung, H als die mittlere $\mathfrak{P}$-Krümmung der Fläche bezeichnete. Die Idee des isotropen Raumes ist, wie erwähnt, E. MÜLLER noch fremd, ebenso die hier entwickelte isotrope Krümmungstheorie der Flächen, insbesondere deren Hauptformel (57).

---

[7]) K. STRUBECKER, Die Geometrie des isotropen Raumes und einige ihrer Anwendungen. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **48** (1938), S. 236–257; insbes. S. 250.

[8]) L. BIANCHI, Vorlesungen über Differentialgeometrie. Deutsch von M. LUKAT, Leipzig 1899, S. 625.

[9]) E. MÜLLER [6]) auf S. 18.

27. Die so definierte Relativkrümmung K einer Fläche des isotropen Raumes ist wohl zu unterscheiden von der Krümmung K_a, die der Fläche im Sinne Gaussens auf Grund ihres Bogenelementes (1) zukommt. In der Tat ist ja diese absolute Krümmung K_a identisch Null.

28. Man kann zu der Relativkrümmung K einer Fläche des isotropen Raumes ähnlich einem bekannten Gaussschen Vorgange auch durch eine geeignete sphärische Abbildung gelangen.

Wir bezeichnen die Kugel des isotropen Raumes

$$z = \tfrac{1}{2}(x^2 + y^2) \tag{72}$$

als Einheitskugel und bilden die Fläche (49) auf sie vermöge paralleler Tangentialebenen ab. Dem Flächenpunkte $P(x, y, z(x, y))$ entspricht so auf (72) der sphärische Bildpunkt (X, Y, Z) mit

$$\begin{cases} X = p \\ Y = q \\ Z = \tfrac{1}{2}(p^2 + q^2) \end{cases} \tag{73}$$

und korrespondierende Bereiche $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}^*$ auf der Fläche und der Kugel haben nach (50) die Flächeninhalte

$$F = \iint_{\mathfrak{B}} dx\, dy \tag{74}$$

und

$$F^* = \iint_{\mathfrak{B}^*} dX\, dY = \iint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)}\, dx\, dy. \tag{75}$$

Als ihr Verhältnis $F^* : F$ ergibt sich beim Zusammenziehen des Bereiches $\mathfrak{B}$ auf einen Punkt P der Fläche (49) der Wert

$$\lim_{\mathfrak{B} \to P} \frac{F^*}{F} = \frac{\partial(X, Y)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} r & s \\ s & t \end{vmatrix} = rt - s^2 = K, \tag{76}$$

womit in der Tat eine zweite bewegungsinvariante Definition der Relativkrümmung K einer Fläche gewonnen ist.

29. Wieweit bei solcher Definition der Relativkrümmung K die Analogie zu bekannten Theoremen des euklidischen bzw. elliptischen Raumes reicht, soll uns ferner noch die folgende Übertragung des Satzes von Beltrami und Enneper über die Torsion der Asymptotenlinien einer Fläche zeigen:

Die sich in einem Flächenpunkte der Relativkrümmung K kreuzenden Asymptotenlinien haben die entgegengesetzt gleichen Torsionen

$$\tau_1 = +\sqrt{-K}, \quad \tau_2 = -\sqrt{-K}. \tag{77}$$

In der Tat, ist auf der Fläche $z = z(x, y)$ die Kurve

$$(78) \qquad \left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(x, y) \end{aligned}\right\} \mathfrak{x}(t)$$

Asymptotenlinie, so erfüllt sie identisch in t die Differentialgleichung

$$(79) \qquad r\,dx^2 + 2\,s\,dx\,dy + t\,dy^2 = 0,$$

oder je nach der Schar, der sie angehört, entweder die beiden [äquivalenten, durch Linearspaltung aus (79) entstehenden] Gleichungen

$$(80) \qquad r\,dx + s\,dy = -\sqrt{-K}\,dy,$$

$$(81) \qquad s\,dx + t\,dy = +\sqrt{-K}\,dx,$$

oder die daraus durch Vorzeichenänderung der Quadratwurzeln hervorgehenden Gleichungen. Für die Torsion der Asymptotenlinien (78) ergibt sich so nach (25) zunächst

$$(82) \qquad \tau = \frac{[\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}}]}{[\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}]^2} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & p\dot{x}+q\dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & p\ddot{x}+q\ddot{y}+(r\dot{x}^2+2s\dot{x}\dot{y}+t\dot{y}^2) \\ \dddot{x} & \dddot{y} & p\dddot{x}+q\dddot{y}+(r\dot{x}+s\dot{y})\ddot{x}+(s\dot{x}+t\dot{y})\ddot{y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2},$$

also auf Grund der (für die dritte Zeile der Determinante schon teilweise beachteten) Identitäten in t (79) bis (81) wirklich für die eine (angeschriebene) Schar

$$(83) \qquad {}^{\bullet}\tau_1 = +\sqrt{-K}$$

und für die andere (durch Vorzeichenänderung der Wurzel entstehende) Schar

$$(84) \qquad \tau_2 = -\sqrt{-K},$$

womit der Satz von Beltrami und Enneper auf den isotropen Raum übertragen ist.

Der Satz gilt übrigens auch dann noch, wenn geradlinige Asymptotenlinien auftreten. Man hat dann als „Schmiegstreifen" der Geraden den Berührungsstreifen längs der Fläche zu nehmen und kann die Torsion τ der geradlinigen Asymptotenlinie, wie im allgemeinen Falle, als den Quotienten des Kontingenzwinkels der Tangentenebenen und des Bogenelements des Streifens definieren.

30. Wir schließen die Betrachtungen zur Krümmungstheorie der Flächen mit dem wichtigen Beispiele der Drehflächen des isotropen Raumes. Nach Ziffer **15** gehen sie aus dem Musterfalle der gewöhnlichen Dreh-

flächen mit vollisotroper, d. i. z-paralleler Drehachse durch die Bewegungen (2) des isotropen Raumes hervor. Es genügt daher als Normalform der Drehflächen diese Gleichung in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) zu nehmen:

$$z = f(r). \tag{85}$$

Ihre Krümmungslinien sind auch im isotropen Raume wieder die Parallelkreise und Meridiane; denn diese bilden ein konjugiertes und im Grundrisse orthogonales Netz. Die Parallelkreis- und Meridiantangente liefern also die Hauptrichtungen der Fläche, und die zugehörigen isotropen Ebenen, deren eine die Meridianebene selbst ist, die beiden Hauptnormalschnitte. Um deren isotrope Hauptkrümmungsradien R_1 und R_2 zu bestimmen, kann man mittels der Formeln (70) und (71) die Relativkrümmung K und mittlere Krümmung H berechnen. Es ergibt sich

$$K = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{f' f''}{r}, \tag{86}$$

$$2H = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{f'}{r} + f'' \tag{87}$$

und daraus

$$R_1 = \frac{1}{f''(r)}, \qquad R_2 = \frac{r}{f'(r)}. \tag{88}$$

R_1 gehört dabei offenbar zum Hauptnormalschnitt des Meridians, denn $f''(r)$ ist nach (32) die Abweichung der Meridiankurve.

IV. Die Flächen konstanter Relativkrümmung des isotropen Raumes.

31. Als Flächen der festen Relativkrümmung $K \neq 0$ ergeben sich aus (70) die Integralflächen der Monge-Ampèreschen Differentialgleichung

$$\boxed{rt - s^2 = K}, \tag{89}$$

die schon vielfach das Interesse der Geometer gefunden haben (vgl. Ziffer **44**). Daß ihr eigentlicher Platz die Differentialgeometrie des isotropen Raumes ist, wird erstens daraus erhellen, daß es uns möglich ist, ihre Haupteigenschaften mittels der Begriffe des isotropen Raumes leicht formulieren, herleiten und in genaue Analogien setzen zu können, zweitens aber auch daraus, daß wir im isotropen Raume eine überaus einfache geometrische Erzeugungsweise dieser Flächen angeben können.

32. Zunächst gilt für sie, dem Satze von Beltrami-Enneper zufolge, diese erste kennzeichnende Eigenschaft:

Die Asymptotenlinien der Flächen von der konstanten Relativkrümmung K haben je nach der Schar, der sie angehören, die festen Torsionen

$$\tau_1 = +\sqrt{-K}, \quad \tau_2 = -\sqrt{-K}. \tag{90}$$

Daraus folgt nach Ziffer **16** sofort:

Diese Asymptotenlinien sind daher sämtlich Gewindekurven und als solche je nach der Schar in den involutorischen Gewinden

$$(91) \qquad 1)\quad dz = A\,dx + B\,dy + \sqrt{-K}\,(x\,dy - y\,dx)$$

$$(92) \qquad 2)\quad dz = A\,dx + B\,dy - \sqrt{-K}\,(x\,dy - y\,dx)$$

enthalten.

33. Eine andere leicht zu bestätigende kennzeichnende Eigenschaft unserer Flächen (89) hat schon G. SCHEFFERS[10]) angegeben. Sie bezieht sich auf die Grundrisse der Asymptotenlinien:

Auf den Flächen (89), *und nur auf ihnen, bilden die Asymptotenlinien im Grundrisse ein Schiebnetz*[11]).

Bekanntlich sind in der Ebene die Schiebnetze die einzigen sogenannten TSCHEBYSCHEFFschen oder äquidistanten Netze ($E = G = 1$). Da ferner die Metrik der Flächen des isotropen Raumes nach (1) direkt aus dem Grundrisse ablesbar ist, kann man den Satz von SCHEFFERS auch so formulieren:

Im isotropen Raume bilden auf den Flächen konstanter Relativkrümmung (89), *und nur auf ihnen, die Asymptotenlinien ein TSCHEBYSCHEFF-Netz.*

Damit ist durch die Idee des isotropen Raumes dieser Satz von SCHEFFERS als das genaue Analogon eines bekannten Theorems von J. N. HAZZIDAKIS[12]) und A. VOSS[13]) bzw. L. BIANCHI[14]) erkannt, wonach im euklidischen bzw. elliptischen Raume die Flächen konstanter GAUSSscher bzw. Relativkrümmung durch ihr TSCHEBYSCHEFFsches Netz der Asymptotenlinien gekennzeichnet sind.

34. Im Gegensatz aber zu diesen beiden Räumen, deren allgemeinste Fläche konstanter Krümmung bisher noch unbekannt ist, gelingt es im iso-

---

[10]) G. SCHEFFERS, Eigenschaften der Integralflächen der partiellen Differentialgleichung $s^2 - rt = \text{konst}$. Math. Zeitschr. **5** (1919), S. 112—117; insbes. S. 114.

[11]) Der erste Teil des Satzes findet sich schon bei É. GOURSAT, Sur les lignes asymptotiques. Bull. soc. math. de France **24** (1896), S. 43—51; insbes. S. 47. Die Richtigkeit der hier wesentlichen Umkehrung hat aber erst SCHEFFERS bewiesen. Später hat auch H. LIEBMANN das Theorem im SCHEFFERSschen Umfange wiedergefunden, in der kaum Neues enthaltenden Note: Eine charakteristische Eigenschaft der H-Netze (Orthogonalprojektionen von Haupttangentenkurven). Math. Zeitschr. **14** (1922), S. 159—168; insbes. § 3.

[12]) J. N. HAZZIDAKIS, Über einige Eigenschaften der Flächen mit konstantem Krümmungsmaß. Crelles Journ. **88** (1880), S. 68—73.

[13]) A. VOSS, Über ein neues Prinzip der Abbildung krummer Oberflächen. Math. Annalen **19** (1881), S. 1—26; insbes. S. 7.

[14]) L. BIANCHI, Lezioni di geometria differenziale II. Bologna-Pisa 1923, S. 591.

tropen Raume wohl, diese Flächen sämtlich anzugeben und geometrisch zu konstruieren.

Es ist dabei keine Einschränkung, wenn wir — lediglich zur Vereinfachung der Ausdrucksweise — unsere dahinzielenden Überlegungen an den Flächen

$$\boxed{rt - s^2 = -1} \tag{93}$$

der Relativkrümmung

$$K = -1 \tag{94}$$

durchführen. Das Resultat wird sich (Ziffer **37**) dann auch für den allgemeinen Fall (89) sofort formulieren lassen.

35. In diesem Falle (94) sind die *Asymptotenlinien* stets *reell* und ihre *Torsion* ist je nach der Schar

$$\tau = +1 \quad | \quad \tau = -1. \tag{95}$$

Die *Asymptotenlinien* sind ferner *Gewindekurven* und liegen als solche je nach der Schar, wenn wir die Terminologie der Ziffer **18** aufgreifen, in den

Rechtsgewinden $\mathfrak{G}_r$:	*Linksgewinden* $\mathfrak{G}_l$:
$dz = A\,dx + B\,dy + (x\,dy - y\,dx)$	$dz = A\,dx + B\,dy - (x\,dy - y\,dx)$.

(96)

Da die *Grundrisse* der Asymptotenlinien ein Schiebnetz bilden, sind sie untereinander Schar für Schar *kongruent* und besitzen daher *dieselbe natürliche Gleichung*

$$\varkappa = \varkappa_1(s) \quad | \quad \varkappa = \varkappa_2(s). \tag{97}$$

Damit sind die *natürlichen Gleichungen der Asymptotenlinien selbst*

$\varkappa = \varkappa_1(s)$	$\varkappa = \varkappa_2(s)$
$\tau = +1$	$\tau = -1$,

(98)

Schar für Schar identisch, d. h. es sind nach Ziffer **14** die Asymptotenlinien auf den Flächen konstanter Relativkrümmung des isotropen Raumes untereinander Schar für Schar kongruent und können darum durch isotrope Bewegung zur Deckung gebracht werden.

Damit ist es möglich, diese Flächen kinematisch, nämlich durch geeignete Bewegung ihrer Asymptotenlinien zu erzeugen. Diese Bewegungen äußern sich aber im Grundrisse als Translationen irgendeiner Asymptotenlinie der einen Schar längs einer solchen der zweiten Schar, weil dieser Grundriß der Asymptotenlinien nach Scheffers ein Schiebnetz war. Also sind (nach Ziffer **3**) die Bewegungen, welche die Fläche erzeugen, sogar Grenzbewegungen. Und weil die Punkte der Fläche dabei sämtlich Asymptotenlinien beschreiben, also Kurven der Rechts- und Linksgewinde (96) und diese Gewinde $\mathfrak{G}_r$ bzw. $\mathfrak{G}_l$ somit festbleiben, folgt weiter, daß die erzeugenden Grenz-

bewegungen sogar Links- bzw. Rechtsschiebungen (6) bzw. (5) des isotropen Raumes sind. Denn wir wissen aus Ziffer 18, daß ein Rechtsgewinde $\mathfrak{G}_r$ an Grenzbewegungen nur die Linksschiebungen gestattet, ein Linksgewinde $\mathfrak{G}_l$ aber nur Rechtsschiebungen.

Zusammenfassend entstehen also die Flächen der konstanten Relativkrümmung $K = -1$, ausgehend von zwei beliebigen ihrer Asymptotenlinien verschiedener Scharen dadurch, daß die eine C_r, die etwa wegen des Wertes $\tau = +1$ ihrer Torsion einem Rechtsgewinde $\mathfrak{G}_r$ angehöre, rechtsseitig längs der anderen C_l verschoben wird (oder umgekehrt dies C_l, das wegen $\tau = -1$ einem Linksgewinde G_l angehört, linksseitig längs C_r verschoben wird).

36. Waren wir bisher von einer bestimmten vorgegebenen Fläche konstanter Relativkrümmung und ihren Asymptotenlinien ausgegangen, so wollen wir jetzt zeigen, daß man auch umgekehrt, ausgehend von zwei beliebigen schneidenden Kurven C_r, C_l der Torsionen $\tau = +1$ und $\tau = -1$, auf die beschriebene kinematische Art stets zu Flächen der konstanten Relativkrümmung $K = -1$ gelangt, wenn nur diese beiden Kurven C_r und C_l, in ihrem Schnittpunkte P, um Asymptotenlinien sein zu können, auch dieselbe Schmiegebene haben. Wir wollen also zeigen:

Haben die beiden Kurven C_r der Torsion $\tau = +1$ und C_l der Torsion $\tau = -1$ in ihrem Schnittpunkte P dieselbe Schmiegebene π, und verschiebt man

$$C_r \text{ rechtsseitig längs } C_l \text{ oder}$$
$$C_l \text{ linksseitig längs } C_r,$$

so erhält man eine Fläche der konstanten Relativkrümmung $K = -1$, auf der die Lagen der Kurven C_r und C_l Asymptotenlinien sind. Und zwar ist dies die allgemeinste Fläche dieser Art, d. h. die allgemeinste Integralfläche der Gleichung

$$rt - s^2 = -1.$$

In der Tat wird zunächst wegen der Kommutativität der beiden Schiebungsgruppen (5) und (6) auf beide Arten jedenfalls dieselbe Fläche erzeugt, und deren Relativkrümmung K wird nach dem Satze von Beltrami und Enneper auch den konstanten Wert -1 haben, wenn nur einmal nachgewiesen ist, daß die im Laufe der Schiebungen entstandenen Lagen der beiden Kurven C_r, C_l wirklich die Asymptotenlinien der erzeugten Fläche sind.

Dies folgt aber leicht aus der Tatsache, daß die einzelnen Kurven C_r und C_l der Torsionen $+1$ und -1 in allen Lagen den Rechts- und Linksgewinden $\mathfrak{G}_r$ und $\mathfrak{G}_l$ (47, 48) angehören. Es ist ja für sie nur zu zeigen, daß die gemeinsame Schmiegebene π der Ausgangskurven C_r und C_l (zugleich Tangentialebene der erzeugten Fläche im Schnittpunkt P) in allen Lagen von C_r und C_l auch gemeinsame Schmiegebene des jeweiligen Schnittpunkts bleibt.

Da sie dann natürlich stets Tangentialebene der Fläche sein wird, werden alle Lagen der Kurven C_r und C_l Asymptotenlinien sein.

Zum Beweise bemerken wir, daß etwa die Ausgangskurve C_r Gewindekurve eines Rechtsgewindes ist, daß also ihre Schmiegebenen mit den Nullebenen ihrer Punkte zusammenfallen. Verschiebt man nun, laut Konstruktion der Fläche das Flächenelement (P, π) linksseitig kontinuierlich längs C_r, so wird das Gewinde $\mathfrak{G}_r$, in dem C_r enthalten war, nach Ziffer **18** festbleiben, also wird aus (P, π) genau der Schmiegstreifen von C_r entstehen. Die bei dieser Linksschiebung mitgenommene Kurve C_l wird aber, wie in der Ausgangslage, in ihren Schnittpunkten mit der festen Kurve C_r die mitgenommene Ebene π immer als starr mit ihr verbundene Schmiegebene besitzen. In allen Punkten der Ausgangskurve C_r fallen also die Schmiegebenen der festen Kurve C_r und der beweglichen Kurven C_l zusammen, und damit ist zunächst die Ausgangskurve C_r als Asymptotenlinie der entstehenden Fläche nachgewiesen. Aus den gleichen Gründen ist natürlich auch die Ausgangskurve C_l Asymptotenlinie. Und da wegen der Kommutativität verschiedenartiger Schiebungen die krummen Linksschiebungen längs der einzelnen Lagen von C_r untereinander ebenso identisch sind, wie die krummen Rechtsschiebungen längs der einzelnen Lagen von C_l, gilt ein Gleiches auch für alle Kurven C_r und C_l: Auch sie sind — wie behauptet — Asymptotenlinien der Fläche.

37. Man kann in völlig analoger Weise nun auch die *Flächen mit beliebiger fester Relativkrümmung* $K \neq 0$, also die Integralflächen von (89) erzeugen. Man muß dann nur von zwei Kurven der festen Torsionen $\tau_1 = +\sqrt{-K}$ und $\tau_2 = -\sqrt{-K}$ ausgehen, die nach Ziffer **16** gleichfalls in bekannten Gewinden liegen und so gewählt sind, daß sie in ihrem Schnittpunkte gemeinsame Schmiegebene besitzen, und hat diese Kurven C_r und C_l sodann ähnlich wie vorhin mittels der *verallgemeinerten Schiebungsgruppen* (7) und (8) aneinander zu verschieben, wobei der in den Formeln (7) und (8) auftretende Parameter $C = +\sqrt{-K}$ zu setzen ist. Die einzelnen Lagen der Schiebungskurven C_r, C_l sind dabei wieder die Asymptotenlinien der erzeugten Fläche fester Relativkrümmung K.

38. Man erkennt in dieser einfachen kinematischen Erzeugungsweise der Flächen des isotropen Raumes mit fester Relativkrümmung $K \neq 0$ die völlige Analogie zu der bekannten Konstruktion, welche L. BIANCHI[15])

---

[15]) L. BIANCHI, Sulle superficie a curvatura nulla in geometria ellittica. Ann. di mat. (2) **24** (1896), S. 93—129; insbes. S. 112; oder[14]), § 594. — In einem Raume der festen Krümmung K_0 besteht zwischen der *absoluten* Krümmung K_a einer Fläche (= der GAUSSschen Krümmung ihres Bogenelementes) und ihrer *relativen* Krümmung $K_r = \frac{1}{R_1 R_2}$ die Beziehung $K_r = K_a - K_0$.

für die Flächen konstanter Relativkrümmung $K_r = K < 0$ des elliptischen Raumes der Krümmung $K_0 = -K > 0$ angegeben hat. Auf die entsprechenden Flächen des quasielliptischen Raumes und ihre Bedeutung für die ebene Kinematik hat W. BLASCHKE[16]) hingewiesen.

V. Analytische Darstellung der Flächen fester Relativkrümmung $K = rt - s^2$.

39. Man kann aus unserer kinematischen Erzeugung der Flächen fester Relativkrümmung K als Schiebflächen des isotropen Raumes sofort auch eine integrallose Darstellung für sie gewinnen, insbesondere auch jene, welche (von der Charakteristikentheorie her) G. DARBOUX zuerst angegeben hat.

Es ist dabei bequem zu bemerken, daß unsere Fläche, die wir wieder in der einfacheren Gestalt

$$rt - s^2 = -1 \tag{99}$$

annehmen, auch durch folgende, neue, der kinematischen äquivalente Konstruktion gefunden werden kann:

„Es seien (Fig. 1) als Grundkurven gegeben eine Kurve $\mathfrak{U}$ der festen Torsion $\tau = +1$, die also in einem Rechtsgewinde $\mathfrak{G}_r$ (96) liegt und eine Kurve $\mathfrak{V}$ der Torsion $\tau = -1$ aus einem Linksgewinde $\mathfrak{G}_l$ (96). Verbinden wir dann den Nullpunkt O (0, 0, 0) mit einem beliebigen Punkte U auf $\mathfrak{U}$ und V auf $\mathfrak{V}$, und ergänzen wir das Streckenpaar OU und OV derart durch einen Punkt X zu einem CLIFFORDschen Parallelogramm, daß

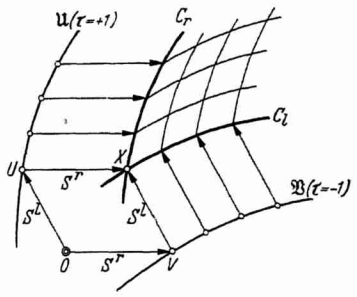

Fig. 1. Die beiden Konstruktionen der Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$.

$$UX \text{ rechtsparallel zu } OV$$

und

$$VX \text{ linksparallel zu } OU$$

ist, d. h. daß X aus U durch jene Rechtsschiebung S^r (5) entsteht, welche O nach V bringt [oder, was dasselbe ist, daß X aus V durch jene Linksschiebung S^l (6) entsteht, welche O nach U bringt], so wird, wenn U auf $\mathfrak{U}$ und V auf $\mathfrak{V}$ läuft, der Punkt X eine Fläche der Relativkrümmung $K = -1$ beschreiben, deren Asymptotenlinien zu den Kurven $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ schiebungskongruent sind.

---

[16]) W. BLASCHKE[3]), § 15.

Dabei müssen freilich noch, damit die gemeinsame Schmiegebene der Asymptotenlinien gesichert sei, die beiden Gewinde $\mathfrak{G}_r$ und $\mathfrak{G}_l$, welche $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ enthalten, so gewählt werden, daß sie dem Ursprunge O dieselbe Nullebene ν zuordnen. Jede Fläche der Relativkrümmung $K = -1$ kann so erzeugt werden."

40. Wird nämlich zum Beweise in dieser neuen Konstruktion der Punkt V auf $\mathfrak{V}$ festgehalten, während U auf $\mathfrak{U}$ beweglich ist, so beschreibt X eine aus $\mathfrak{U}$ durch Rechtsschiebung S^r entstehende Kurve C_r der Torsion $\tau = +1$, deren Schmiegebenen aus jener von U gleichfalls durch S^r hervorgeht. Da aber für U die Schmiegebene mit der Nullebene in $\mathfrak{G}_r$ zusammenfällt und dieses Rechtsgewinde $\mathfrak{G}_r$ alle Linksschiebungen verträgt, wird die Schmiegebene des Punktes X auf C_r aus der Nullebene ν von O bezüglich $\mathfrak{G}_r$ durch die Grenzbewegung $S^l \cdot S^r$ hervorgehen. Analog ergibt sich bei Festhalten von U auf $\mathfrak{U}$ für die Punkte X eine aus $\mathfrak{V}$ durch Linksschiebung S^l entstehende Kurve C_l der Torsion $\tau = -1$, deren Schmiegebene aus der Nullebene ν von O in $\mathfrak{G}_l$ durch die Grenzbewegung $S^r \cdot S^l$ hervorgeht. Insgesamt trägt also die erzeugte Fläche wirklich zwei Scharen untereinander und mit den Grundkurven $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ schiebungskongruenter Kurven C_r und C_l der Torsionen $\tau = \pm 1$, welche (wegen der Vertauschbarkeit der Schiebungen S^r und S^l) in ihren Kreuzungspunkten auch dieselbe Schmiegebene besitzen und damit in der Tat auch Asymptotenlinien der Fläche sind.

Haben wir so aus der neuen Erzeugungsart die alte hergeleitet, so ist auch das Umgekehrte leicht möglich. Dazu müßte man nur eine der Grenzbewegungen, welche einen beliebigen Flächenpunkt X nach O bringen, in irgendeiner Weise in Schiebungen S^r und S^l zerspalten. Insgesamt sind also beide Erzeugungsweisen völlig äquivalent, und es kann jede Fläche der Relativkrümmung $K = -1$ durch die neue Konstruktion gewonnen werden.

Bemerken wir noch, daß eine kongruente Verlagerung der Grundkurven $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ in ihren Gewinden $\mathfrak{G}_r$ und $\mathfrak{G}_l$ durch Links- bzw. Rechtsschiebung für die erzeugte Fläche lediglich eine zusätzlich Links- und Rechtsschiebung, insgesamt also nur eine Verlagerung durch eine Grenzbewegung bedeuten würde. Andere kongruente Veränderungen der Grundkurven $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ führen im allgemeinen auf wesentlich neue (inkongruente) Flächen.

41. Um nun von dieser geometrischen Erzeugungsweise zu analytischen Formeln für die Flächen der Relativkrümmung $K = -1$ zu gelangen, wählen wir am einfachsten die beiden Gewinde

$$\mathfrak{G}_r \ldots dz = x\,dy - y\,dx, \tag{100}$$

$$\mathfrak{G}_l \ldots dz = y\,dx - x\,dy \tag{101}$$

als jene Rechts- und Linksgewinde, welche dem Nullpunkte O (0, 0, 0), wie es die Konstruktion verlangt, dieselbe Nullebene $z = 0$ zuordnen.

Es seien dann

$$(102)\qquad \mathfrak{U}\begin{cases} x = x_r(u) \\ y = y_r(u) \\ z = z_r(u) \end{cases} \qquad \mathfrak{V}\begin{cases} x = x_l(v) \\ y = y_l(v) \\ z = z_l(v) \end{cases}$$

zwei beliebige Gewindekurven aus $\mathfrak{G}_r$ und $\mathfrak{G}_l$, so geben die Schiebungsformeln (5) und (6) als Parameter (a, b, c) der Rechtsschiebung S^r unserer Konstruktion die Koordinaten (x_l, y_l, z_l) und als Parameter (α, β, γ) der Linksschiebung S^l die Koordinaten (x_r, y_r, z_r). Das Produkt $S^r \cdot S^l = S^l \cdot S^r$ der Schiebungen führt den Nullpunkt O in den allgemeinen Punkt X der erzeugten Fläche über. Man hat so die Formeln

$$(103)\qquad X(u\,v)\ldots \quad \boxed{\begin{aligned} x &= x_r + x_l \\ y &= y_r + y_l \\ z &= z_r + z_l + x_r y_l - y_r x_l \end{aligned}}$$

als Darstellung der allgemeinsten Fläche der konstanten Relativkrümmung $K = -1$ des isotropen Raumes.

42. Um aus diesen allgemeinen Formeln speziell die Darbouxsche Darstellung der Flächen (99) mit der Relativkrümmung $K = -1$ zu gewinnen, benutzen wir die folgende Darstellung der Gewindekurven $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ (102) mittels willkürlichen Funktionen $U(u)$ und $V(v)$:

$$(104)\qquad \mathfrak{U}\begin{cases} x_r = -u \\ y_r = U' \\ z_r = 2U - uU' \end{cases} \qquad \mathfrak{V}\begin{cases} x_l = v \\ y_l = -V' \\ z_l = -2V + vV', \end{cases}$$

der sich lediglich die Gewindestrahlen $x = \text{const}$ entziehen. Nach (103) erhält man

$$(105)\qquad \boxed{\begin{aligned} x &= v - u \\ y &= U' - V' \\ z &= 2(U - V) + (u + v)(V' - U') \end{aligned}}$$

als integrallose Darstellung der Flächen mit $K = -1$, d. i. die Darbouxsche Darstellung[17]) der Integralflächen von $rt - s^2 = -1$ in der (unwesentlich geänderten) Form, die sich bei W. Blaschke[18]) findet. Um wirklich eine Fläche zu erhalten, hat man dabei freilich $U''(u) \neq V''(v)$ vorauszusetzen.

Stets sind dabei die Kurven $u = \text{const}$ und $v = \text{const}$ die Asymptotenlinien.

---

[17]) G. Darboux, Théorie des surfaces III. Paris 1894, S. 273—274. — Die Darstellung findet sich auch bei E. Goursat[11]) und Cours d'analyse math. III, Paris 1923, S. 70—71. Vgl. auch H. Beck, Kurvenkongruenzen und volumtreue Transformationen, Math. Zeitschr. 47 (1941), S. 275—290, insbes. § 8.

[18]) W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Affine Differentialgeometrie. Bearb. von K. Reidemeister, Berlin 1923, S. 216.

Der eigentliche geometrische Sinn dieser eleganten Formeln von DARBOUX *liegt also in unserer neuen Erzeugungsweise der Flächen als Schiebflächen des isotropen Raumes.*

43. Nach Ziffer **37** kann man in entsprechender Weise auch zur Darstellung der allgemeinen Flächen

$$rt - s^2 = K \neq 0 \tag{106}$$

gelangen. Sie lautet

$$\boxed{\begin{aligned} x &= x_r + x_l \\ y &= y_r + y_l \\ z &= z_r + z_l + \sqrt{-K}(x_r y_l - y_r x_l) \end{aligned}}, \tag{107}$$

wobei jetzt nur zu fordern ist, daß die Kurven (102) den Gewinden

$$dz = +\sqrt{-K}(x\,dy - y\,dx) \quad | \quad dz = -\sqrt{-K}(x\,dy - y\,dx) \tag{108}$$

entnommen sind.

Am Ende kommt dies darauf hinaus, daß im Vergleich zu vorhin die z-Koordinate der Fläche (103) den Faktor $+\sqrt{-K}$ aufnimmt, was im isotropen Raume übrigens als eine nichtvolumstreue Bewegung gedeutet werden kann.

Auch hier sind die u- und v-Linien wieder Asymptotenlinien.

44. Die Flächen $rt - s^2 = \text{const}$ $(\neq 0)$, deren hauptsächliche Eigenschaften wir in dieser Arbeit aus ihrer Bedeutung als Flächen konstanter Relativkrümmung des isotropen Raumes übersichtlich entwickeln konnten, haben schon vielfach das Interesse der Geometer gefunden. Neben G. DARBOUX [17] [19]), É. GOURSAT [11]), G. SCHEFFERS [10]), H. LIEBMANN [11]) haben sich auch E. J. WILCZYNSKI [20]) und besonders eingehend W. BLASCHKE [18]) sowie E. SALKOWSKI [21]) mit ihrem Studium befaßt, die letzten im Rahmen der

---

[19]) Vgl. auch G. DARBOUX, Théorie des surfaces I, S. 141. Paris 1887.

[20]) E. J. WILCZYNSKI, Über Flächen mit unbestimmten Direktrixkurven. Math. Annalen **76** (1915); insbes. S. 138 und 157—160.

[21]) E. SALKOWSKI, a) Affinminimalflächen und Gewindekurven. Sitz.-Ber. Berl. Math. Ges. **28** (1929), S. 114—123. b) Zur Theorie der Affinminimalflächen. Commem. Vol. Calcutta Math. Soc. Bull. **20** (1930), S. 295—308. — Daß die Asymptotenlinien der Flächen $rt - s^2 = K$ sämtlich Gewindekurven aus involutorischen Translationsbündeln linearer Komplexe sind, ist vielfach bemerkt worden. Vgl. z. B. A. PETER, Die Flächen, deren Haupttangentenkurven linearen Komplexen angehören. Diss. Leipzig 1895, S. 58 und É. KÉRAVAL, Sur les surfaces, dont les lignes asymptotiques appartiennent par leurs tangentes a un complexe linéaire. Bull. soc. math. France **39** (1911), S. 134—155. Ferner K. STRUBECKER, Über die Flächen, deren Asymptotenlinien beider Scharen linearen Komplexen angehören. Anzeiger Akad. Wiss. Wien, math. nat. Kl., Sitzung vom 23. Oktober 1941.

affinen Differentialgeometrie, wo diese Flächen als sogenannte *uneigentliche Affinsphären* auftreten, d. h. als *Flächen, deren sämtliche Affinnormalen parallel sind.*

Auch diese letzte Eigenschaft folgt organisch aus unserer Auffassung und Erzeugung der Flächen als Schiebflächen des isotropen Raumes. Betrachtet man nämlich in einem Flächenpunkte die beiden Schmiegtangenten, und verschiebt man sie im Sinne unserer kinematischen Konstruktion der Fläche aneinander, so entsteht (vgl. Ziffer **53**) eine *Cliffordsche Fläche* des isotropen Raumes, nämlich ein *hyperbolisches Paraboloid* mit vollisotroper (z-paralleler) Durchmesserrichtung, welches nach seiner Konstruktion mit der *Lieschen Oskulationsfläche zweiter Ordnung* des Flächenpunktes zusammenfällt. Somit sind in der Tat sämtliche Affinnormalen der Flächen konstanter Relativkrümmung parallel, nämlich vollisotrop, und die Flächen selbst sind uneigentliche Affinsphären.

Daß umgekehrt alle uneigentlichen Affinsphären mit vollisotroper Richtung der Affinnormalen konstante Relativkrümmung K haben, folgt aus dem Satze von Scheffers (Ziffer **33**): Die Richtebenen der Lieschen Schmiegparaboloide in den Punkten einer Asymptotenlinie sind dann nämlich *parallel*, also sind es auch die Grundrisse der zugehörigen Schmiegtangenten. D. h. die Asymptotenlinien bilden im Grundriß ein Schiebnetz und die Fläche hat wirklich konstante Relativkrümmung.

VI. Die Drehflächen und Schraubflächen konstanter Relativkrümmung.

45. Wir wollen uns nun einigen bemerkenswerten Klassen von Flächen konstanter Relativkrümmung K zuwenden, nämlich (ausführlicher) den Drehflächen und (beispielsweise) den Schraubflächen. Von ihnen läßt sich leicht der folgende bemerkenswerte Satz nachweisen:

Abgesehen vom Falle der Kugeln haben alle Dreh- und Schraubflächen konstanter Relativkrümmung $K \neq 0$ im isotropen Raume Schraublinien als Asymptotenlinien.

In der Tat müssen die Grundrisse der Asymptotenlinien wegen der Entstehung der Flächen durch Drehung bzw. Schraubung ein Drehnetz bilden; ebenso sollen sie, da die Relativkrümmung der Flächen konstant ist, nach Scheffers, ein Schiebnetz bilden. Die einzigen Netze dieser Eigenschaften entstehen aber durch Schiebung zweier Kreise aneinander.

Wenn aber die Asymptotenlinien unserer Flächen kreisförmige Grundrisse haben, so ist ihre Krümmung Schar für Schar konstant. Nach dem Satz von Beltrami und Enneper ist aber auch ihre Torsion konstant, also sind sie nach Ziffer **15** wirklich Schraublinien.

Auch die Umkehrung ist richtig, wie man leicht geometrisch, einfacher aber wohl aus der analytischen Darstellung der Fläche [Ziffer **51** (136)] erkennt.

Der triviale Sonderfall, wo die Grundrisse der Asymptotenlinien Nullkreise (Minimalgeraden) sind, liefert dabei die Kugeln des isotropen Raumes.

Man hat also zusammenfassend, und nach Ziffer **37** ausführlich formuliert, das folgende Theorem:

Verschiebt man im isotropen Raume zwei Schraublinien C_r und C_l aus Gewinden $\mathfrak{G}_C^r$ (45) und $\mathfrak{G}_C^l$ (46) aneinander, welche in ihrem Schnittpunkte gemeinsame Schmiegebene haben, und zwar C_r vermöge der Gruppe G_3^r (7) rechtsseitig längs C_l oder, was dasselbe gibt, C_l vermöge der Gruppe G_3^l (8) linksseitig längs C_r, so entsteht die allgemeinste Schraubfläche der konstanten Relativkrümmung $K = -C^2 \gtrless 0$.

Sind bei dieser Konstruktion die beiden Schraublinien C_r und C_l zueinander symmetrisch, so entsteht (abgesehen vom Falle der Kugel) die allgemeinste Drehfläche konstanter Relativkrümmung.

Denn mit den beiden Schraublinien ist auch die erzeugte Schraubfläche symmetrisch, also notwendig eine Drehfläche.

Als Nebenresultat ist damit übrigens auch die (unten noch zu ergänzende) Übertragung eines euklidischen Satzes von E. Müller[22]) auf den isotropischen Raum gewonnen, der besagt, daß durch euklidische Schiebung zweier gewöhnlicher Schraublinien mit parallelen Achsen aneinander stets eine Schraubfläche entsteht, insbesondere dann, wenn die Schraublinien symmetrisch sind, eine Drehfläche. Das letzte Resultat wurde übrigens vorher schon von A. Voss[23]) und S. Finsterwalder[24]) bemerkt.

46. Wenden wir uns nun den vier möglichen nichttrivialen (reellen) Typen von Drehflächen konstanter Relativkrümmung K zu, wobei wir dies K zu ± 1 normieren.

Als Grundriß der Asymptotenlinien erhält man wegen deren räumlicher Symmetrie ein durch zwei kongruente Kreise erzeugtes Schiebnetz, das also durch Drehung eines Kreises um einen Peripheriepunkt entsteht. Dessen Hüllkreis gehört dabei auf der Fläche zu einer gleichfalls kreisförmigen Rückkehrkante der Drehfläche, die ihrerseits Hüllkurve der schraublinigen Asymptotenlinien ist. Die Realität dieser Linien unterscheidet die drei Haupttypen, zu denen als vierter noch die isotrope Kugel kommt.

---

[22]) E. Müller, Über Schiebflächen, deren eine Erzeugendenschar aus gewöhnlichen Schraublinien besteht. Sitz.-Ber. Akad. Wiss. Wien IIa, **118** (1909), S. 3—13; insbes. S. 9—12.

[23]) A. Voss [13]), S. 13.

[24]) S. Finsterwalder, Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. **6** (1899), S. 66.

47. Erster Typus: *die einzige Möglichkeit einer Drehfläche negativkonstanter Relativkrümmung* $K = -1$. Wir wählen, indem wir uns der Ziffer **41** anschließen, die beiden folgenden reellen symmetrischen Schraublinien $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{V}$ der Torsionen ± 1 aus den Gewinden $\mathfrak{G}_r$ (100) und $\mathfrak{G}_l$ (101):

$$(109)\qquad \mathfrak{U}\begin{cases} x_r = \tfrac{1}{2}\cos u \\ y_r = \tfrac{1}{2}\sin u \\ z_r = \tfrac{1}{4}u \end{cases} \qquad \mathfrak{V}\begin{cases} x_l = \tfrac{1}{2}\cos v \\ y_l = \tfrac{1}{2}\sin v \\ z_l = -\tfrac{1}{4}v. \end{cases}$$

Durch Schiebung zweier hierzu kongruenter Kurven entsteht nach (103) die Fläche:

$$(110)\begin{cases} x = \tfrac{1}{2}(\cos u + \cos v) \\ y = \tfrac{1}{2}(\sin u + \sin v) \\ z = \tfrac{1}{4}[(u - v) - \sin(u - v)]. \end{cases}$$

Setzen wir

$$(111)\qquad \frac{v+u}{2} = \varphi, \qquad \frac{v-u}{2} = \psi,$$

so erhalten wir

$$(112)\begin{cases} x = \cos\varphi\cos\psi \\ y = \sin\varphi\cos\psi \\ z = \tfrac{1}{2}(\sin\psi\cos\psi - \psi). \end{cases}$$

Das ist wirklich eine *Drehfläche*, die man in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) wegen

$$(113)\begin{cases} r = \cos\psi \\ z = -\int_0^{\psi} \sin^2\psi\, d\psi \end{cases}$$

bequem so schreiben kann:

$$(114)\qquad \boxed{z = \int_1^r \sqrt{1 - r^2}\, dr.}$$

Dieser erste Typus realisiert die einzige Möglichkeit einer Drehfläche konstanter negativer Relativkrümmung. Er ist in Fig. 2 wiedergegeben: Man ist an den konischen Typ der euklidischen Drehflächen negativ-konstanter

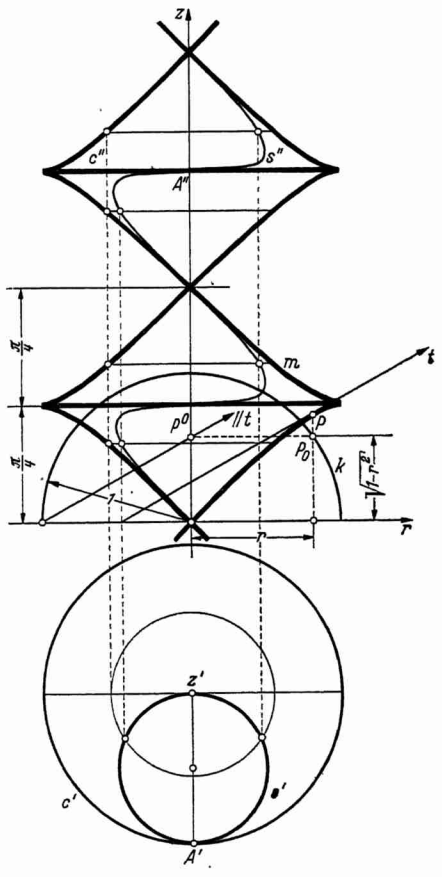

Fig. 2. Die Drehfläche konst. negativer Relativkrümmung $K = -1$ mit einer Asymptotenlinie $s = (s', s'')$. Meridian:

$$z = \int_1^r \sqrt{1 - r^2}\, dr.$$

Krümmung erinnert. Die Fläche besteht aus periodisch wiederholten konischen Teilen der Gesamthöhe $\frac{\pi}{2}$, die sich in konischen Knoten der Öffnung $\frac{\pi}{2}$ längs der z-Achse als Drehachse aneinanderreihen und bezüglich eines Rückkehrkreises c symmetrisch sind. Die Meridiankurve m wurde durch graphische Integration der Differentialgleichung

$$dz = \sqrt{1 - r^2}\, dr \tag{115}$$

nach der Isoklinenmethode mittels des Hilfskreises k bequem und sehr genau gewonnen. Sie läßt sich auch als Orthogonaltrajektorie einer z-parallelen Translationsschar von gewöhnlichen Sinuslinien definieren.

Die zu den Schraublinien $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{V}$ (109) durch Links- und Rechtsschiebungen des isotropen Raumes kongruenten Asymptotenlinien s der Fläche (110) sind deren u- und v-Linien. Ihre Grundrisse s' bilden die (doppelt überdeckte) Drehschar der Kreise, vom Radius $\frac{1}{2}$, deren Umfänge den Achsenspurpunkt z' enthalten. Eine dieser Schraublinien $s = (s', s'')$ ist im Bilde dargestellt. Sie gehen durch die Knotenpunkte der Fläche und hüllen ihre Rückkehrkreise ein.

Man kann diese Fläche leicht im Sinne der isotropen Kinematik auch durch Drehung einer Schraublinie s erzeugen, wobei eine Erzeugende z des durch s gehenden Zylinders als Drehachse fungiert, während die auf der diametralen Erzeugenden liegenden Kurvenpunkte A durch ihre Schmiegebenen die bei der Drehung des isotropen Raumes um z invariante Stellung der Bahnkreisebenen festlegen. Die genannten Diametralpunkte A selbst beschreiben dabei die Rückkehrkreise c der Fläche.

Unsere Fläche hat schon vielfach das Interesse der Geometer gefunden. Z. B. ist sie *Biegungsfläche des imaginären Drehparaboloids*[25]). Man findet sie auch bei H. Liebmann[26]). Ein unter Leitung von A. Brill konstruiertes Modell mit aufgezeichneten Asymptotenlinien ist im Verlage von M. Schilling erschienen.

48. Zweiter Typus: *erste Möglichkeit einer Drehfläche positiv-konstanter Relativkrümmung* $K = +1$. Wir wählen, entsprechend der Ziffer **43**, die symmetrischen und konjugiert-komplexen Schraublinien der Torsionen $\pm i$

$$\mathfrak{U}\begin{cases} x_r = \frac{1}{2}\cos u \\ y_r = \frac{1}{2}\sin u \\ z_r = \frac{i}{4}u \end{cases} \qquad \mathfrak{V}\begin{cases} x_l = \frac{1}{2}\cos v \\ y_l = \frac{1}{2}\sin v \\ z_l = -\frac{i}{4}v, \end{cases} \tag{116}$$

[25]) Vgl. W. Blaschke-K. Reidemeister [18]), S. 187 und die dort zitierte Literatur.
[26]) H. Liebmann [11]), S. 168.

deren Grundrisse jedoch reell, nämlich Kreise vom Radius $\frac{1}{2}$ sind. Nach (107) erhält man durch Schiebung solcher Kurven aneinander die Drehfläche

$$(117)\qquad \begin{cases} x = \cos\dfrac{u+v}{2}\cos\dfrac{u-v}{2} \\ y = \sin\dfrac{u+v}{2}\cos\dfrac{u-v}{2} \\ z = \dfrac{i}{4}\left[(u-v) - \sin(u-v)\right] \end{cases}$$

oder, wenn wir

$$(118)\qquad \frac{u+v}{2} = \varphi, \qquad \frac{u-v}{2} = i\psi$$

setzen:

$$(119)\qquad \begin{cases} x = \cos\varphi\, ch\,\psi \\ y = \sin\varphi\, ch\,\psi \\ z = \frac{1}{2}(-\psi + sh\,\psi\, ch\,\psi). \end{cases}$$

In Zylinderkoordinaten hat man für ihren Meridian m die Parameterdarstellung

$$(120)\qquad \begin{cases} r = ch\,\psi \\ z = \displaystyle\int_0^{\psi} sh^2\,\psi\, d\psi \end{cases}$$

und für die Fläche selbst die Gleichung

$$(121)\qquad \boxed{z = \int_1^r \sqrt{r^2-1}\, dr}.$$

Aus den Formeln (117) oder (121) folgt, daß diese Drehfläche konstanter Relativkrümmung $K = +1$ aus jener des ersten Typs (114) durch die imaginäre Affinität entsteht, welche die Punkte (x, y, z) durch die Punkte (x, y, iz) ersetzt. Die Fläche (Fig. 3) besitzt also den gleichen Rückkehrkreis wie der erste Typ, ihre komplexen Asymptotenlinien sind zu den Schraublinien (116) schiebungskongruent.

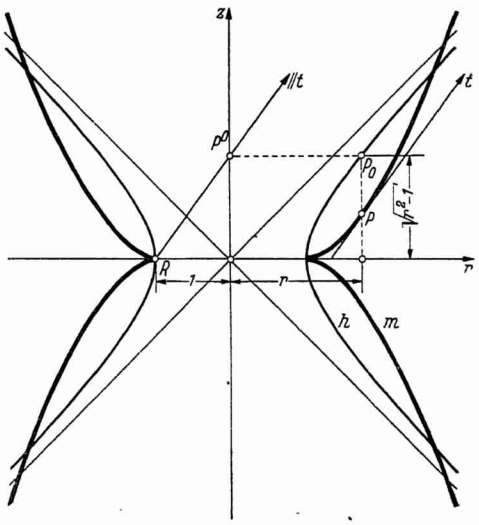

Fig. 3. Die Evolutenfläche

$$z = \int_1^r \sqrt{r^2-1}\, dr$$

des Katenoids

$$z = \tfrac{1}{2}\, ch\, 2r$$

als Drehfläche konst. positiver Relativkrümmung $K = +1$.

ergeben sich als u- und v-Linien in der Darstellung (117) der Fläche und bilden sich als dieselbe Drehschar reeller Kreise vom Radius $\frac{1}{2}$ ab, wie sie beim ersten Typ auftrat.

Der in Fig. 3 dargestellte Meridian m dieser Drehfläche wurde wieder durch graphische Integration der Differentialgleichung

$$dz = \sqrt{r^2 - 1}\, dr \tag{122}$$

nach der Isoklinenmethode mittels der gleichseitigen Hilfshyperbel h bequem gewonnen. Der Darstellung (120) entnimmt man leicht, daß diese *Meridiankurve m mit der Evolute der Kettenlinie*

$$z = \tfrac{1}{2} ch\, 2r \tag{123}$$

übereinstimmt.

Dieser erste Typus einer Drehfläche positiv-konstanter Relativkrümmung des isotropen Raumes ist also mit der Evolutenfläche des Katenoids identisch, und hat in dieser Bedeutung schon vielfaches Interesse gefunden. Z. B. hat Darboux[27]) gezeigt, daß die Zentraflächen aller Minimalflächen auf unsere Fläche abwickelbar sind. Eine andere Eigenschaft hat übrigens R. v. Lilienthal[28]) nachgewiesen, ohne freilich zu erkennen, daß die von ihm ermittelte und gezeichnete Fläche die Evolutenfläche des Katenoids ist. H. Graf und R. Sauer[29]) haben vor kurzem nachgewiesen, daß die Evolutenflächen der Katenoide unter den Drehflächen durch die Eigenschaft gekennzeichnet sind, ein sogenanntes fastrhombisches Netz aus Meridianen und Parallelkreisen zu tragen.

49. Dritter Typus: *zweite Möglichkeit einer Drehfläche positiv-konstanter Relativkrümmung $K = +1$.* Wir wählen, entsprechend der Ziffer **43**, die symmetrischen und konjugiert-komplexen Schraublinien der Torsionen $\pm i$

$$\mathfrak{U}\begin{cases} x_r = \frac{i}{2}\cos u \\ y_r = \frac{i}{2}\sin u \\ z_r = -\frac{i}{4}u \end{cases} \qquad \mathfrak{V}\begin{cases} x_l = -\frac{i}{2}\cos v \\ y_l = -\frac{i}{2}\sin v \\ z_l = +\frac{i}{4}v, \end{cases} \tag{124}$$

[27]) G. Darboux, Theorie des surfaces III, S. 386; vgl. J. Knoblauch, Grundlagen der Differentialgeometrie, § 131. Leipzig-Berlin 1913.

[28]) R. v. Lilienthal, Zur Theorie der äquidistanten Kurven auf einer Fläche. Math. Annalen **62** (1905), S. 537—567; insbes. S. 563.

[29]) H. Graf u. R. Sauer, Fastrhombische Kurvennetze und Viereckshetze. Math. Zeitschr. **44** (1938), S. 362—386; insbes. S. 374.

deren Grundrisse nullteilige Kreise des Radius $\frac{i}{2}$ sind. Durch Schiebung solcher Schraublinien aneinander erhält man nach (107) die Drehfläche

$$(125)\qquad \begin{cases} x = \frac{i}{2}(\cos u - \cos v) \\ y = \frac{i}{2}(\sin u - \sin v) \\ z = -\frac{i}{4}[(u-v) + \sin(u-v)], \end{cases}$$

oder, wenn wir

$$(126)\qquad \frac{u+v}{2} = \varphi + \frac{\pi}{2}, \qquad \frac{u-v}{2} = i\psi$$

setzen:

$$(127)\qquad \begin{cases} x = \cos\varphi\, sh\,\psi \\ y = \sin\varphi\, sh\,\psi \\ z = \frac{1}{2}(\psi + sh\,\psi\, ch\,\psi), \end{cases}$$

so daß der Meridian m der Drehfläche in Zylinderkoordinaten parametrisch lautet

$$(128)\qquad \begin{cases} r = sh\,\psi \\ z = \int_0^{\psi} ch^2\psi\, d\psi, \end{cases}$$

und sie selbst die Gleichung hat

$$(129)\qquad \boxed{z = \int_0^r \sqrt{1+r^2}\, dr.}$$

Die Meridiankurve m wurde wieder (Fig. 4) durch graphische Integration der Differentialgleichung

$$(130)\qquad dz = \sqrt{1+r^2}\, dr$$

nach der Isoklinenmethode mittels der gleichseitigen Hilfshyperbel h gewonnen. Sie ergäbe sich auch als Orthogonaltrajektorie einer z-parallelen Translationsschar von hyperbolischen Sinuslinien.

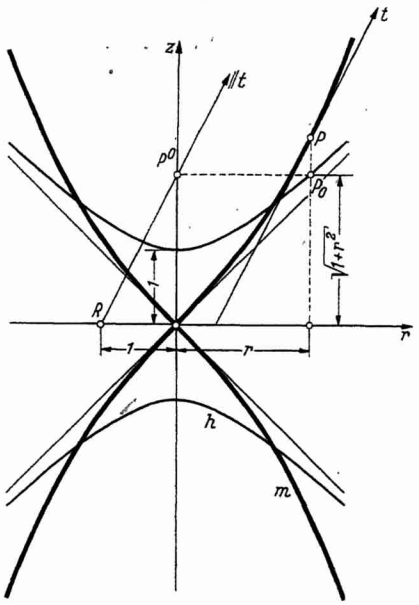

Fig. 4. Drehfläche konst. positiver Relativkrümmung $K = +1$.

$$z = \int_0^r \sqrt{1+r^2}\, dr.$$

Die Asymptotenkurven, u- und v-Linien der Darstellung (125), sind zu den komplexen Schraublinien (124) im isotropen Raume schiebungskongruent. Sie hüllen den nullteiligen Einheitskreis der Symmetrieebene $z = 0$ ein, der Rückkehr-

kreis der Fläche ist, und ihre komplexen Grundrisse haben die Radien dieses imaginären Kreises als Durchmesser. Der Ursprung O ist ein konischer Knoten der Fläche.

Diese Drehfläche ist auch deswegen bemerkenswert, weil sie *Biegungsfläche des reellen Drehparaboloids*[25]) ist.

50. Man kann leicht zeigen, daß mit unseren drei Grundtypen, abgesehen vom Trivialfalle der Kugel, alle reellen Arten von Drehflächen konstanter Relativkrümmung $K \neq 0$ des isotropen Raumes erschöpft sind.

In der Tat ist ja nach Ziffer **30** für die Drehfläche des Meridians

(131) $$z = f(r)$$

die Relativkrümmung

(132) $$K = \frac{f' \cdot f''}{r}.$$

Ist K konstant, so wird der Meridian

(133) $$z = f(r) = \int \sqrt{Kr^2 + A}\, dr,$$

wobei A eine willkürliche Integrationskonstante bedeutet, die ebenso wie K noch normiert werden kann. Je nach den verschiedenen Vorzeichenmöglichkeiten ergeben sich dann wegen $K \neq 0$ genau die drei oben durch *direkte Erzeugung* gewonnenen (reellen) Haupttypen, dazu noch als vierter Typus für $A = 0$, $K = +1$ das Kugelpaar

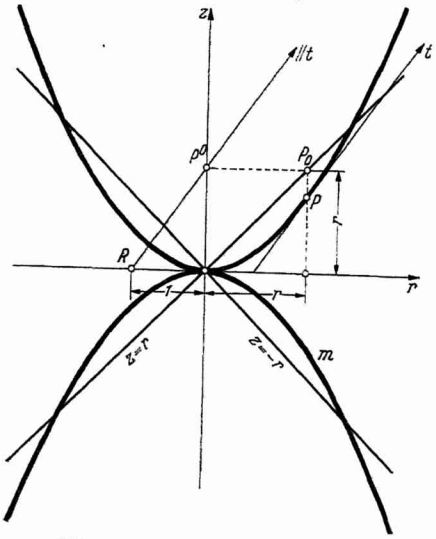

Fig. 5. Die isotropen Kugeln
$z = \pm \frac{r^2}{2}$
als Drehflächen konst. positiver Relativkrümmung $K = +1$.

(134) $$\boxed{z = \int_0^r \sqrt{r^2}\, dr = \pm \frac{r^2}{2}}$$

als *dritte Möglichkeit einer Drehfläche positiv-konstanter Relativkrümmung* $K = +1$, das wir (Fig. 5) als Übergangsfall von unserem zweiten zum dritten Typus analog den bisherigen Figuren durch die beiden Meridianparabeln dargestellt haben.

51. Wir verzichten auf eine ebenso ausführliche Aufzählung der möglichen Schraubflächen konstanter Relativkrümmung und begnügen uns mit einem Beispiel, nämlich einer Schraubfläche der Relativkrüm-

mung $K = -1$, deren reelle Asymptotenlinien nach Ziffer **45** Schraublinien des isotropen Raumes sein werden. Sie mögen im Anschlusse an die Ziffer **41** schiebungskongruent sein zu den beiden Schraublinien der Torsionen ± 1:

$$\text{(135)} \qquad \mathfrak{U}\begin{cases} x_r = a\cos u \\ y_r = a\sin u \\ z_r = +a^2 u \end{cases} \qquad \mathfrak{B}\begin{cases} x_l = b\cos v \\ y_l = b\sin v \\ z_l = -b^2 v, \end{cases}$$

so daß durch Schiebung der Kurven aneinander nach (103) folgende Fläche entsteht:

$$\text{(136)} \qquad \begin{cases} x = a\cos u + b\cos v \\ y = a\sin u + b\sin v \\ z = (a^2 u - b^2 v) - ab\sin(u - v), \end{cases}$$

von der man sich leicht überzeugen kann, daß sie wirklich eine Schraubfläche ist. Man hat nämlich

$$\text{(137)} \qquad x^2 + y^2 = r^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cdot\cos(v - u),$$

d. h. r bleibt konstant, wenn $v - u = w$ konstant gehalten wird. Führen wir also statt v die neue Variable

$$\text{(138)} \qquad w = v - u$$

ein, so lautet die Fläche

$$\text{(139)} \qquad \begin{cases} x = (a + b\cos w)\cos u - b\sin w\cdot\sin u \\ y = (a + b\cos w)\sin u + b\sin w\cdot\cos u \\ z = (ab\sin w - b^2 w) + (a^2 - b^2)u. \end{cases}$$

Das ist aber in der Tat eine Schraubfläche. Sie entsteht, wenn die Kurve

$$\text{(140)} \qquad \begin{cases} X = a + b\cos w \\ Y = b\sin w \\ Z = ab\sin w - b^2 w, \end{cases}$$

d. i. die zur Schraublinie $\mathfrak{B}$ (135) durch Linksschiebung kongruente Flächenkurve $u = 0$ um die z-Achse verschraubt wird.

Der Parameter p dieser Schraubung ist dabei

$$\text{(141)} \qquad p = a^2 - b^2,$$

also [in Übertragung des Müllerschen Resultats[22]) auf den isotropen Raum] gleich der Summe der Parameter der beiden Schraublinien $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{B}$ (135), durch deren Clifford-che Schiebung die Fläche erzeugt wurde.

Asymptotenlinien der Fläche (136) sind die zu den Schraublinien (135) schiebungskongruenten u- und v-Linien. *Ihre Grundrisse bilden zwei Drehscharen von Kreisen*, deren Mitten die zur Schraubachse konzentrischen

Kreise der Radien b und a erfüllen, während ihre eigenen Radien umgekehrt a und b sind. *Diese Kreisscharen entstehen auch, wenn man irgend zwei der Kreise aus den beiden Scharen aneinander verschiebt.* Den Hüllkreisen entsprechen auf der Fläche zwei von den Asymptotenlinien umhüllte Bahnschraublinien R_1 und R_2, die auf ihr *Rückkehrkanten* sind, nämlich:

$$(142)\qquad R_1\begin{cases} x = (a+b)\cos t \\ y = (a+b)\sin t \\ z = (a^2-b^2)\,t \end{cases} \qquad R_2\begin{cases} x = (a-b)\cos t \\ y = (a-b)\sin t \\ z = (a^2-b^2)\,t. \end{cases}$$

Man stellt, ähnlich dem Vorgange in Ziffer **50**, unschwer fest, daß die *Meridiankurven der Schraubflächen konstanter Relativkrümmung* K Gleichungen der Form haben:

$$(143)\qquad z = \int \sqrt{Kr^4 + Ar^2 - p^2}\cdot\frac{dr}{r},$$

wobei p der Parameter der Schraubung und A eine willkürliche Konstante ist.

VII. Die Regelflächen konstanter Relativkrümmung.

52. Man erhält alle Regelflächen der konstanten Relativkrümmung $K < 0$, wenn man einen gemäß Ziffer **37** gewählten Schmiegstrahl einer Kurve der festen Torsion $+\sqrt{-K}$ oder $-\sqrt{-K}$ längs der Kurve verschiebt, oder umgekehrt (immer in den richtigen Sinnen) die Kurve längs des Schmiegstrahls verschiebt. Das Ergebnis dieser Cliffordschen Schiebungen des isotropen Raumes sind *parabolische Netzflächen*[30]).

Um etwa zu einer Regelfläche der festen Relativkrümmung $K = -1$ zu gelangen, wählen wir, der Ziffer **41** folgend, die Kurve $\mathfrak{U}$ in der allgemeinen Form (104), während $\mathfrak{V}$ geradlinig, etwa gleich die y-Achse sein soll. Wir setzen also

$$(144)\qquad \mathfrak{U}\begin{cases} x_r = -u \\ y_r = U' \\ z_r = 2U - uU' \end{cases} \qquad \mathfrak{V}\begin{cases} x_l = 0 \\ y_l = v \\ z_l = 0. \end{cases}$$

Die daraus entstehende Regelfläche wird nach (103) lauten:

$$(145)\qquad \begin{cases} x = -u \\ y = U' + v \\ z = 2U - uU' - uv. \end{cases}$$

---

[30]) In der Behandlung als *uneigentliche geradlinige Affinsphären* treten diese Flächen bei J. Radon, Zur Affingeometrie der Regelflächen, Ber. Verh. sächs. Ges. Wiss. Leipzig **70** (1918), S. 147—155; insbes. § 2, auf. Vgl. W. Blaschke-K. Reidemeister[18]), S. 221 und E. Salkowski, Affine Differentialgeometrie, S. 185—186. Berlin-Leipzig 1934.

Schreiben wir hier für $2\,U(u) = 2\,U(-x)$ kürzer $f(x)$, so haben wir eine Fläche der Form

$$\boxed{z = xy + f(x)} \tag{146}$$

gewonnen, aus der sich durch Bewegungen des isotropen Raumes alle anderen *Regelflächen der Relativkrümmung* $K = -1$ ergeben, deren krumme Asymptotenlinien [die u-Linien in (145)] positive Torsion $\tau = +1$ haben. Jene mit negativer Torsion der krummen Asymptotenlinien erhielte man daraus durch Spiegelung an einer Ebene.

Offenbar läßt sich jede parabolische Netzfläche als eine solche Schiebfläche in einem geeigneten isotropen Raum auffassen. Bemerkenswert ist dabei, daß ihre krummen Asymptotenlinien in diesem Raume als untereinander *kongruent* angesehen werden können, da sie durch Cliffordsche Schiebungen zusammenhängen.

53. Von Interesse ist insbesondere der Fall, wo die zweite Schiebschar gleichfalls aus Geraden besteht. Es sind dies die sogenannten Cliffordschen *Flächen des isotropen Raumes*. Man erhält sie für quadratisches $U(u)$ bzw. $f(x)$, etwa für $f(x) = mx^2$ in der Form:

$$z = xy + mx^2. \tag{147}$$

Alle diese Cliffordschen Flächen sind hyperbolische Paraboloide mit vollisotroper Durchmesserrichtung. Sie entstehen durch Cliffordsche links- bzw. rechtsseitige Schiebungen ihrer geradlinigen Erzeugenden aneinander. Umgekehrt ist jedes hyperbolische Paraboloid mit vollisotroper Durchmesserrichtung auf diese Art erzeugbar und darum eine Cliffordsche Fläche des isotropen Raumes.

Jede Cliffordsche Fläche gestattet eine zweigliedrige Gruppe von Grenzbewegungen in sich, nämlich jene, welche von den beiden Schiebungen ihrer Konstruktion erzeugt wird.

(Eingegangen am 16. Oktober 1941.)