Werk

Titel: Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen für das C-Verfahren

Autor: Kloosterman, H. D.,

Ort: Berlin

Jahr: 1940

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0046|log51

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen für das C-Verfahren.

Von

H. D. Kloosterman in Leiden.

Im 45. Band dieser Zeitschrift[1]) hat Meyer-König Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen bewiesen. Es soll hier gezeigt werden, daß die von Meyer-König gegebenen Beweise, soweit es sich um das C_k-Verfahren handelt, sehr erheblich vereinfacht werden können. Die Beweise ergeben sich nämlich unmittelbar aus der einfachen Formel, die in § 1 als Hilfssatz formuliert worden ist. Weil es sehr wenig Mühe macht, beweise ich gleich einige allgemeinere Sätze (§ 2).

Bezeichnungen. Es seien ϑ, ϑ_1 und ϑ_2 positive Zahlen, m eine natürliche Zahl und

$$0 < \vartheta_1 < \vartheta_2 < \vartheta; \quad -m < \lambda \leqq 1. \tag{1}$$

Es seien n_ν und n'_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ wachsende Folgen von natürlichen Zahlen, welche den Bedingungen

$$n_\nu < n'_\nu < n_{\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2}$$

und

$$n'_\nu - n_\nu \geqq \vartheta\, n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3}$$

genügen.

Die nach wachsender Größe geordnete Folge der ganzen Zahlen n, für die

$$n_\nu \leqq n \leqq n'_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist, werde mit k_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ bezeichnet. Weiter sei u_ν bzw. v_ν bzw. w_ν die nach wachsender Größe geordnete Folge der ganzen Zahlen n, für die

$$n_\nu \leqq n \leqq n_\nu + \vartheta_2\, n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}} \quad \text{bzw.} \quad n_\nu + \vartheta_1\, n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}} \leqq n \leqq n_\nu + \vartheta_2\, n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}}$$

$$\text{bzw.} \quad n_\nu + \vartheta_1\, n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}} \leqq n \leqq n'_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

ist.

Es sei weiter

$$a_1 + a_2 + \ldots \tag{4}$$

---

[1]) Limitierungsumkehrsätze mit Lückenbedingungen. I. Math. Zeitschr. **45** (1939), S. 447—478.

eine unendliche Reihe und

$$S_n = S_n^{(0)} = a_1 + a_2 + \ldots + a_n,$$
$$S_n^{(m)} = S_1^{(m-1)} + S_2^{(m-1)} + \ldots + S_n^{(m-1)} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Die Reihe (4) ist C_m-summierbar mit C_m-Summe 0, falls

$$\lim_{n \to \infty} n^{-m} S_n^{(m)} = 0.$$

Die r-te Differenz ($r = 1, 2, \ldots$) einer Zahlenfolge t_k ($k = 1, 2, \ldots$) sei durch

$$\Delta_h^r t_k = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} t_{k+(r-\nu)h}$$

definiert, falls h eine positive ganze Zahl ist und durch

$$\Delta_{-h}^r t_k = \sum_{\nu=0}^{r} (-1)^\nu \binom{r}{\nu} t_{k-\nu h},$$

falls $-h$ eine negative ganze Zahl ist.

§ 1.

Ein Hilfssatz.

Hilfssatz. *Falls h und n positive ganze Zahlen sind, so ist*

$$(5) \quad h^m S_n^{(0)} = \Delta_h^m S_n^{(m)} - \sum_{\nu=n+1}^{n+h} (n+h+1-\nu) \sum_{\mu=0}^{m-1} h^{m-\mu-1} \Delta_h^\mu S_\nu^{(\mu-1)},$$

und falls $n > mh$ ist:

$$(6) \quad h^m S_n^{(0)} = \Delta_{-h}^m S_n^{(m)} + \sum_{\nu=n-h+1}^{n} (\nu-n+h-1) \sum_{\mu=0}^{m-1} h^{m-\mu-1} \Delta_{-h}^\mu S_\nu^{(\mu-1)},$$

wo die Differenzen sich auf den unteren Index von S beziehen, und $\Delta_h^0 S_\nu^{(-1)}$ und $\Delta_{-h}^0 S_\nu^{(-1)}$ als a_ν zu definieren sind.

Beweis. Es werde vollständige Induktion nach m angewandt. Falls $m = 1$ ist, lautet die Formel (5):

$$(7) \qquad h S_n^{(0)} = S_{n+h}^{(1)} - S_n^{(1)} - \sum_{\nu=n+1}^{n+h} (n+h+1-\nu) a_\nu.$$

Dies kann sofort durch Ausschreiben verifiziert werden. Man nehme weiter an, daß die Formel (5) für ein bestimmtes $m \geqq 1$ bereits bewiesen sei. Falls man dann in der Formel (5) n durch x ersetzt, und über x summiert von $n+1$ bis $n+h$, so kommt:

$$h^m \Delta_h^1 S_n^{(1)} = \Delta_h^m (S_{n+1}^{(m)} + S_{n+2}^{(m)} + \ldots + S_{n+h}^{(m)}) +$$
$$- \sum_{\nu=n+1}^{n+h} (n+h+1-\nu) \sum_{\mu=1}^{m} h^{m-\mu} \Delta_h^{(\mu-1)} (S_{\nu+1}^{(\mu-2)} + S_{\nu+2}^{(\mu-2)} + \ldots + S_{\nu+h}^{(\mu-2)})$$

oder

$$(8)\quad h^m \Delta_h^1 S_n^{(1)} = \Delta_h^{m+1} S_n^{(m+1)} - \sum_{\nu=n+1}^{n+h} (n+h+1-\nu) \sum_{\mu=1}^{m} h^{m-\mu} \Delta_h^\mu S_\nu^{(\mu-1)}.$$

Nach (7) ist aber

$$\Delta_h S_n^{(1)} = h S_n^{(0)} + \sum_{\nu=n+1}^{n+h} (n+h+1-\nu) \Delta_h^0 S_\nu^{(-1)}.$$

Falls man dies in (8) einsetzt, so kommt:

$$h^{m+1} S_n^{(0)} = \Delta_h^{m+1} S_n^{(m+1)} - \sum_{\nu=n+1}^{n+h} (n+h+1-\nu) \sum_{\mu=0}^{m} h^{m-\mu} \Delta^\mu S_\nu^{(\mu-1)}.$$

Damit ist die vollständige Induktion ausgeführt.

Die Formel (6) kann in derselben Weise bewiesen werden.

§ 2.

Die Hauptsätze.

Satz 1. *Die Glieder der Reihe* (4) *seien reell und es sei*

$$a_n > -M n^{-\lambda} \quad \text{für } n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo M eine von n unabhängige positive Konstante ist. Falls n die Folge der Zahlen k_ν durchläuft, sei weiter

$$(9)\qquad \lim n^{-m} S_n^{(m)} = 0.$$

Falls dann n die Folge u_ν durchläuft, so ist

$$(10)\qquad \limsup n^{-m\frac{1-\lambda}{m+1}} S_n^{(0)} \leqq 0,$$

und falls n die Folge w_ν durchläuft, so ist

$$(11)\qquad \liminf n^{-m\frac{1-\lambda}{m+1}} S_n^{(0)} \geqq 0.$$

Vorbemerkung. Falls n die Folge v_ν durchläuft, so ist also

$$\lim n^{-m\frac{1-\lambda}{m+1}} S_n^{(0)} = 0.$$

Beweis. Es seien n und h natürliche Zahlen, welche für irgendein ν den Ungleichungen

$$(12)\qquad n_\nu \leqq n < n + mh \leqq n'_\nu$$

und

$$(13)\qquad n + mh \leqq 2n$$

genügen. Man wende die Formel (5) an. Für

$$n + 1 \leqq \nu \leqq n + mh \leqq 2n$$

ist wegen (1):

$$\Delta_h^0 S_\nu^{(-1)} = a_\nu > -M \nu^{-\lambda} \geqq -M \beta n^{-\lambda},$$

wo

$$\beta = \mathrm{Max}\,(1, 2^{-\lambda}).$$

Falls $m \geqq 2$ ist, und $n + 1 \leqq \nu \leqq n + (m-1)h$, so ist demnach:

$$\Delta_h^1 S_\nu^{(0)} = S_{n+h}^{(0)} - S_n^{(0)} = a_{\nu+1} + a_{\nu+2} + \ldots + a_{\nu+h} > -M\beta h n^{-\lambda}.$$

Ist noch $m \geqq 3$ und $n + 1 \leqq \nu \leqq n + (m-2)h$, so folgt weiter

$$\Delta_h^2 S_\nu^{(1)} = \Delta_h (S_{\nu+1}^{(0)} + S_{\nu+2}^{(0)} + \ldots + S_{\nu+h}^{(0)}) > -M\beta h^2 n^{-\lambda}.$$

Im allgemeinen ist für $n + 1 \leqq \nu \leqq n + h$:

$$\Delta_h^\mu S_\nu^{(\mu-1)} > -M\beta h^\mu n^{-\lambda} \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, m-1). \tag{14}$$

Es sei nun ε eine genügend kleine positive Zahl. Nach (9) ist dann für genügend großes n aus der Folge k_ν:

$$|S_n^{(m)}| < \varepsilon n^m. \tag{15}$$

Die Formel (5) liefert nun wegen (14) und (15):

$$h^m S_n^{(0)} < 2^m \varepsilon (n + mh)^m + \sum_{\nu=n+1}^{n-h} (n + h - 1 - \nu) \sum_{\mu=0}^{m-1} h^{m-\mu-1} M\beta h^\mu n^{-\lambda}$$

oder auch:

$$S_n^{(0)} < 4^m \varepsilon n^m h^{-m} + M m \beta h n^{-\lambda}. \tag{16}$$

Man wähle nun:

$$h = 1 + \left[\varepsilon^{\frac{1}{m+1}} n^{\frac{m+\lambda}{m+1}}\right].$$

Diese Wahl von h ist erlaubt. Denn für genügend großes n und genügend kleines ε ist (13) sicher erfüllt. Aber auch (12) gilt, wenn n der Folge u_ν angehört. Denn dann ist

$$\begin{aligned}
n + mh &\leqq n + m\left(1 + \varepsilon^{\frac{1}{m+1}} n^{\frac{m+\lambda}{m+1}}\right) \\
&\leqq n_\nu + \vartheta_2 n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}} + m + m\varepsilon^{\frac{1}{m+1}}\left(n_\nu + \vartheta_2 n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}}\right)^{\frac{m+\lambda}{m-1}} \\
&\leqq n_\nu + n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}}\left(\vartheta_2 + m n_\nu^{-\frac{m+\lambda}{m+1}} + m\varepsilon^{\frac{1}{m+1}}\left(1 + \vartheta_2 n_\nu^{-\frac{1-\lambda}{m-1}}\right)^{\frac{m+\lambda}{m+1}}\right) \\
&\leqq n_\nu + n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}}\left(\vartheta_2 + m n_\nu^{-\frac{m+\lambda}{m+1}} + m\varepsilon^{\frac{1}{m+1}}(1 + \vartheta_2)\right) \\
&\leqq n_\nu + \vartheta n_\nu^{\frac{m+\lambda}{m+1}} \leqq n'_\nu
\end{aligned}$$

[wegen (3)].

Falls $h \geqq 2$ ist, folgt nun weiter aus (16):

$$S_n^{(0)} < (4^m + 2Mm\beta)\,\varepsilon^{\frac{1}{m+1}} n^{m\frac{1-\lambda}{m+1}}$$

und damit die Behauptung (10).

Die Behauptung (11) folgt in derselben Weise, wenn man die Formel (6) statt (5) benutzt.

In derselben Weise kann gezeigt werden:

Satz 2. *Die Glieder der Reihe* (4) *seien reell und es sei*

$$a_n < M n^{-\lambda} \quad \text{für} \quad n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo M eine von n unabhängige positive Konstante ist. Falls n die Folge der Zahlen k_ν durchläuft, sei weiter

$$\lim n^{-m} S_n^{(m)} = 0.$$

Falls dann n die Folge w_ν durchläuft, so ist

$$\limsup n^{-m\frac{1-\lambda}{m+1}} S_n^{(0)} \leqq 0,$$

und falls n die Folge u_ν durchläuft, so ist

$$\liminf n^{-m\frac{1-\lambda}{m+1}} S_n^{(0)} \geqq 0.$$

Die Sätze 1 und 2 ergeben zusammen:

Satz 3. *Die Glieder der Reihe* (4) *seien reell und es sei*

$$|a_n| < M n^{-\lambda} \quad \text{für} \quad n_\nu + 1 \leqq n \leqq n'_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo M eine von n unabhängige positive Konstante ist. Falls dann n die Folge k_ν durchläuft und

$$\lim n^{-m} S_n^{(m)} = 0$$

ist, so ist auch

$$\lim n^{-m\frac{1-\lambda}{m+1}} S_n^{(0)} = 0.$$

Dieser Satz gilt offenbar auch noch, wenn die Glieder der Reihe (4) nicht reell sind. Man braucht dann nur die Reihe der Realteile und der Imaginärteile getrennt zu betrachten.

Für $\lambda = 1$ erhält man die obenerwähnten, von Meyer-König bewiesenen Sätze.

(Eingegangen am 29. Oktober 1939.)