Werk

Titel: Über stützbare Flächen und ihre Entwicklung nach Kugelfunktionen

Autor: Gericke, H.,

Ort: Berlin

Jahr: 1940

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0046|log13

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über stützbare Flächen und ihre Entwicklung nach Kugelfunktionen.

Von

H. Gericke, Freiburg i. Br.

Eine Reihe von Eigenschaften ebener stützbarer Kurven, die mit der Fourier-Entwicklung der Stützfunktion zusammenhängen, sind von Hurwitz [1]), Geppert [2]), Görtler [3]), Kubota [4]) u. A. auf stützbare Flächen im Raume (und im R_n) und die Entwicklung ihrer Stützfunktion nach Kugelfunktionen übertragen worden. Hier sollen einige weitere derartige Eigenschaften angegeben werden, und zwar handelt es sich hauptsächlich um eine von Görtler [5]) angegebene Kennzeichnung der Basisbereiche durch eine Extremaleigenschaft und um die Frage, die in der Ebene zu den Su-Ovalen führte, nämlich die Kennzeichnung derjenigen Flächen, deren Trägheitsachsen beim Übergang zu einer Parallelfläche ungeändert bleiben, durch das Verschwinden gewisser Koeffizienten in der Entwicklung der Stützfunktion nach Kugelfunktionen.

1. Benutzte Formeln. Der Einheitsvektor der Normalen einer stützbaren Fläche sei

$$\xi = (\sin\vartheta\cos\varphi,\ \sin\vartheta\sin\varphi,\ \cos\vartheta);$$

also ϑ der Polabstand, φ die geographische Länge des sphärischen Bildes. Für die Entwicklung der Stützfunktion $h(\vartheta, \varphi)$ nach Kugelfunktionen wird je nach Zweckmäßigkeit eine der folgenden Formen benutzt:

$$\text{(I)} \qquad h(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm}\cos m\varphi + b_{nm}\sin m\varphi)\cdot P_n^m(\cos\vartheta)$$

oder zusammengefaßt zu

$$\text{(Ia)} \qquad h(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} (a_{nm}C_n^m + b_{nm}S_n^m),$$

$$\text{(II)} \qquad h(\vartheta, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X_n.$$

---

[1]) Ann. Ecole norm. (3) **19** (1902), S. 357.
[2]) Math. Zeitschr. **42** (1937), S. 248.
[3]) Deutsche Mathematik, 3. Jahrg. (1938), S. 197.
[4]) Tôh. Sci. Rep. **14** (1925), S. 85 und 399.
[5]) Deutsche Mathematik, 2. Jahrg. (1937), S. 456.

Definition und Normierung der P_n^m s. Jahnke-Emde [6]); die X_n seien so normiert, daß

$$(1) \qquad \int X_m X_n \, d\omega = \begin{cases} 1 & \text{für } m = n, \\ 0 & \text{für } m \neq n \end{cases}$$

ist. $d\omega$ bedeutet das Flächenelement der Einheitskugel, das Integral ist hier stets über die ganze Einheitskugel zu erstrecken. Bekanntlich genügen X_n, P_n^m, C_n^m, S_n^m der Differentialgleichung

$$(2) \qquad \Delta X_n = -n(n+1) \cdot X_n.$$

Δ ist der zweite Beltramische Differentiator bezüglich der ersten Grundform des sphärischen Bildes.

Ferner benutzen wir die Orthogonalitätsrelationen, von denen noch die folgenden notiert seien

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\int (C_n^m)^2 \, d\omega = \int (S_n^m)^2 \, d\omega = \frac{2\pi}{2n+1} \cdot \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \qquad \text{für } m \neq 0, \\ &\int (C_n^0)^2 \, d\omega = \frac{4\pi}{2n+1}. \end{aligned}$$

Den Vektor $\mathfrak{x}$ vom Nullpunkt zum Flächenpunkt berechnet man folgendermaßen: Man bezeichne (*nur* an dieser Stelle!) durch die Indizes 1, 2 die Ableitungen nach ϑ, φ und setze

$$\xi_i \xi_k = c_{ik}, \quad c_{ik} c^{km} = \delta_i^m.$$

Nach Definition der Stützfunktion ist

$$\mathfrak{x}\xi = h, \quad \mathfrak{x}\xi_i = h_i.$$

Man setze

$$\mathfrak{x} = A\xi + B^i \xi_i$$

und bestimme A und B^i durch Multiplikation mit ξ und $\xi_i c^{ik}$; man erhält

$$(4) \qquad \mathfrak{x} = h\xi + \nabla(h, \xi),$$

wobei ∇ der erste Beltramische Differentiator ist.

Die Oberfläche ist bekanntlich

$$O = \tfrac{1}{2} \int (R_1 + R_2) \, h \, d\omega.$$

R_1, R_2 sind die Hauptkrümmungsradien. Es ist

$$R_1 + R_2 = \Delta h + 2h,$$

also nach (1) und (2)

$$(5) \qquad O = \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{n(n+1)}{2}\right) a_n^2.$$

---

[6]) Funktionentafeln, 2. Aufl., S. 176.

2. Aus (5) bzw. entsprechenden Gleichungen für die Darstellung I und für die gemischte Oberfläche läßt sich leicht ableiten:

a) Zwischen der Oberfläche $O(h)$ und der Oberfläche $O(m)$ des Vektorbereichs

$$m(\vartheta, \varphi) = h(\vartheta, \varphi) + h(\pi - \vartheta, \varphi + \pi) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} X_{2n}$$

besteht die Ungleichung

$$O(m) \geqq 4\, O(h);$$

das Gleichheitszeichen gilt nur für Mittelpunktskörper [s. W. Süß [7])]; diese sind durch $a_{2n+1} = 0$ gekennzeichnet [s. z. B. Görtler [3])].

b) a_{nm}, b_{nm} in I, a_n in II sind bis auf Zahlenfaktoren die gemischten Oberflächen der Fläche (h) mit den Flächen der Stützfunktionen C_n^m, S_n^m bzw. X_n.

3. Entsprechend dem ebenen Falle [s. Görtler [5])] sind die Basisbereiche $h_n = X_n$ durch folgende Extremaleigenschaft gekennzeichnet:

a) Die gemischte Oberfläche zweier verschiedener Flächen $(h_m), (h_n)$ verschwindet.

b) Unter den stützbaren Flächen (h), deren gemischte Oberfläche mit $(h_0), \ldots, (h_{m-1})$ verschwindet, liefert h_m das Minimum des Verhältnisses

$$v = \frac{O(h)}{\int h^2\, d\omega}.$$

Beweis. Damit die gemischte Oberfläche von h und $h_0, \ldots, h_{m-1}$ verschwindet, muß h die Form haben

$$h = \sum_{n=m}^{\infty} a_n X_n.$$

Wegen (5) und $\int h^2\, d\omega = \Sigma a_n^2$ ist

$$v(h) = 1 - \frac{\Sigma\, n(n+1)\, a_n^2}{2\, \Sigma\, a_n^2} \qquad \text{(zu summieren von } n = m \text{ bis } \infty),$$

$$v(h_m) = 1 - \tfrac{1}{2}\, m(m+1),$$

also

$$v(h_m) - v(h) = \frac{1}{2\, \Sigma\, a_n^2}\, \Sigma\, [n(n+1) - m(m+1)]\, a_n^2 \geqq 0$$

und nur dann gleich Null, wenn $a_n = 0$ ist für $n > m$, w. z. b. w.

4. Die Koeffizienten a_{10}, a_{11}, b_{11} bestimmen den *Krümmungsschwerpunkt.* Das läßt sich so nachrechnen: Der Vektor zum Krümmungsschwerpunkt ist, wenn K die Gaußsche Krümmung, do das Oberflächenelement der Fläche ist,

$$\mathfrak{s} = \frac{\int \mathfrak{x} K\, do}{\int K\, do} = \frac{1}{4\pi} \int \mathfrak{x}\, d\omega = \frac{1}{4\pi} \int [h + \nabla(h, \xi)]\, d\omega.$$

---

[7]) Math. Annalen **101** (1929), S. 256, Fußnote 7a.

Nach der Greenschen Formel ist

$$\int \nabla(h, \xi)\, d\omega = -\int h\, \Delta\, \xi\, d\omega.$$

Nun sind die Komponenten von ξ gerade

(6) $$C_1^1,\ S_1^1,\ C_1^0,$$

also ist nach (2)

$$\Delta\, \xi = -2\, \xi,$$

somit

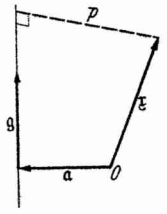
$$\mathfrak{s} = \frac{3}{4\pi} \int h\, \xi\, d\omega.$$

Mittels (Ia), (6) und (3) erhält man

$$s_1 = a_{11}, \quad s_2 = b_{11}, \quad s_3 = a_{10}.$$

5. Wir denken die Fläche mit Masse belegt, deren Dichte in jedem Punkte gleich der Gaußschen Krümmung ist, und untersuchen das *Trägheitsmoment* bezüglich der Geraden, die durch die Gleichung

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{a} + t\mathfrak{g}$$



gegeben ist; dabei sei $\mathfrak{a}\mathfrak{g} = 0$, $\mathfrak{g}^2 = 1$. Der Abstand des Punktes $\mathfrak{x}$ von dieser Geraden ist

$$p = |(\mathfrak{x} - \mathfrak{a}) \times \mathfrak{g}|,$$

also ist das Trägheitsmoment

$$T = \int p^2 K\, do = \int p^2\, d\omega = \int (\mathfrak{x}^2 - (\mathfrak{x}\mathfrak{g})^2 + \mathfrak{a}^2 - 2\,\mathfrak{x}\mathfrak{a})\, d\omega.$$

Als Nullpunkt sei der Krümmungsschwerpunkt gewählt; dann ist

$$\int (\mathfrak{x}\mathfrak{a})\, d\omega = \mathfrak{a} \int \mathfrak{x}\, d\omega = 0,$$

also

$$T = \int [\mathfrak{x}^2 - (\mathfrak{x}\mathfrak{g})^2]\, d\omega + 4\,\pi\,\mathfrak{a}^2.$$

Daraus liest man ab: Unter allen Achsen einer festen Richtung $\mathfrak{g}$ liefert die durch den Krümmungsschwerpunkt gehende das kleinste Trägheitsmoment T_0. Hat die Achse den Abstand r vom Krümmungsschwerpunkt, so addiert sich zu T_0 die Oberfläche der Kugel vom Radius r.

6. Der Krümmungsschwerpunkt sei Nullpunkt. Diejenigen durch ihn gehenden Achsen, für die das Trägheitsmoment einen Extremwert annimmt, heißen Trägheitsachsen. *Wir fragen nach solchen Flächen, für die die Trägheitsachsen beim Übergang zu beliebigen Parallelflächen ungeändert bleiben.*

Um die Trägheitsachsen zu finden, haben wir die Komponenten von $\mathfrak{g}: g_1, g_2, g_3$ so zu bestimmen, daß

$$\int \sum_{i,k} (x_i g_i)(x_k g_k)\, d\omega$$

einen Extremwert annimmt unter der Nebenbedingung

$$\sum_i g_i g_i - 1 = 0.$$

Setzen wir zur Abkürzung $\int x_i x_k \, d\omega = B_{ik}$, so erhalten wir zur Bestimmung der g_i die Gleichungen

$$\begin{aligned} (B_{11} + t)\, g_1 + B_{12}\, g_2 + B_{13}\, g_3 &= 0, \\ B_{21}\, g_1 + (B_{22} + t)\, g_2 + B_{23}\, g_3 &= 0, \\ B_{31}\, g_1 + B_{32}\, g_2 + (B_{33} + t)\, g_3 &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Damit dies Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung hat, muß t so bestimmt werden, daß

$$\| B_{ik} + t\, \delta_{ik} \| = 0$$

wird. Es gibt im allgemeinen drei Lösungen dieser Gleichung und somit drei Trägheitsachsen.

Wir wollen das Koordinatensystem so drehen, daß

$$B_{12} = B_{23} = B_{31} = 0$$

wird; dann ist wegen der Symmetrie auch $B_{21} = B_{32} = B_{13} = 0$. Daß das möglich ist, kann man etwa so sehen: Die Gleichung für t ist vom dritten Grade, hat somit mindestens eine reelle Wurzel. Also gibt es mindestens eine reelle Trägheitsachse. Wir wählen sie als x_3-Achse. Zu ihr möge $t = t_1$ gehören. Dann erfüllen die Werte

$$t = t_1, \quad g_1 = g_2 = 0, \quad g_3 = 1$$

die Gleichungen (7), und daraus folgt $B_{13} = B_{23} = 0$. Um noch B_{12} zu Null zu machen, drehe man um die x_3-Achse:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \cos\psi \cdot x_1 - \sin\psi \cdot x_2, \\ \bar{x}_2 &= \sin\psi \cdot x_1 + \cos\psi \cdot x_2. \end{aligned}$$

Dann wird

$$\bar{B}_{12} = \tfrac{1}{2} \sin 2\psi\, (B_{11} - B_{22}) + \cos 2\psi \cdot B_{12}$$

und man hat nur ψ aus der Gleichung

$$\operatorname{ctg} 2\psi = \frac{B_{22} - B_{11}}{2 \cdot B_{12}}$$

zu bestimmen.

In diesem Koordinatensystem wird aus (7)

$$\begin{aligned} (B_{11} + t)\, g_1 &= 0, \\ (B_{22} + t)\, g_2 &= 0, \\ (B_{33} + t)\, g_3 &= 0. \end{aligned}$$

Die drei Lösungen sind $t_i = -B_{ii}$, die Trägheitsachsen sind die Koordinatenachsen. Ausnahmefälle treten ein, wenn $B_{11} = B_{22}$ oder $B_{11} = B_{22} = B_{33}$ ist. Im ersten Falle ist jede Gerade der $x_1 x_2$-Ebene durch O Trägheitsachse, im zweiten Falle überhaupt jede Gerade durch O. Der erste Fall tritt z. B. bei Drehflächen, der zweite bei der Kugel ein.

Wir haben nun das Verhalten von B_{12}, B_{13}, B_{23} beim Übergang zu Parallelflächen zu untersuchen. Die Parallelfläche $\mathfrak{y}$ habe die Stützfunktion $k = h + r$, $r = \text{const}$; es sei $C_{ik} = \int y_i y_k \, d\omega$. Ich nehme das Ergebnis der Rechnung vorweg: Es ist

$$C_{12} - B_{12} = \frac{64}{5} \pi \cdot r \cdot b_{22},$$
$$C_{13} - B_{13} = \frac{32}{5} \pi \cdot r \cdot a_{21},$$
$$C_{23} - B_{23} = \frac{32}{5} \pi \cdot r \cdot b_{21}.$$

Ist also $a_{21} = b_{21} = b_{22} = 0$, so sind wieder die Koordinatenachsen Trägheitsachsen, ist $a_{21} = b_{21} = 0$, $b_{22} \neq 0$, so bleibt die x_3-Achse Trägheitsachse, während die beiden anderen Trägheitsachsen gegen die ursprünglichen gedreht sind.

Es bleibt die Berechnung der $C_{ik} - B_{ik}$ durchzuführen.

$$\begin{aligned} C_{ik} - B_{ik} &= \int [(x_i + r\,\xi_i)(x_k + r\,\xi_k) - x_i x_k] \, d\omega \\ &= r^2 \int \xi_i \xi_k \, d\omega + r \int (x_i \xi_k + x_k \xi_i) \, d\omega. \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned} \xi_1 \xi_2 &= \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta \sin 2\varphi = \frac{1}{6} S_2^2, \\ \xi_1 \xi_3 &= \sin\vartheta \cos\vartheta \cos\varphi = \frac{1}{3} C_2^1, \\ \xi_2 \xi_3 &= \sin\vartheta \cos\vartheta \sin\varphi = \frac{1}{3} S_2^1. \end{aligned} \tag{8}$$

Zunächst folgt hieraus und aus

$$\int S_2^2 \, d\omega = \int S_2^2 \, C_0^0 \, d\omega = 0$$

und entsprechenden Gleichungen das Verschwinden des Faktors von r^2.

In den Faktor von r tragen wir x_i aus (4) ein und erhalten

$$x_i \xi_k + x_k \xi_i = 2\,h\,\xi_i \xi_k + \nabla(h, \xi_i \xi_k).$$

Nach der Greenschen Formel und weil nach (8) die $\xi_i \xi_k$ Kugelfunktionen zweiter Ordnung sind, ist

$$\int \nabla(h, \xi_i \xi_k) \, d\omega = -\int h \, \Delta(\xi_i \xi_k) \, d\omega = 6 \int h \, \xi_i \xi_k \, d\omega,$$

also

$$\int (x_i\,\xi_k + x_k\,\xi_i)\,d\omega = 8\int h\,\xi_i\,\xi_k\,d\omega.$$

Einsetzen von (8) und (Ia) ergibt die behaupteten Gleichungen.

Bemerkung. Daß der Koeffizient b_{22} eine Rolle spielt, a_{22} aber nicht, hängt damit zusammen, daß $B_{12} = \int x_1\,x_2\,d\omega$ sowohl bei Spiegelung an der $x_1 x_3$-Ebene wie an der $x_2 x_3$-Ebene sein Vorzeichen ändert. Das gleiche gilt für C_{12}. Also gilt, wenn die zur gespiegelten Fläche gehörigen Größen durch Überstreichen bezeichnet werden, in beiden Fällen

$$\overline{C}_{12} - \overline{B}_{12} = -(C_{12} - B_{12}). \tag{9}$$

Andererseits ist die Stützfunktion der gespiegelten Fläche

$$\overline{h}(\vartheta, \varphi) = \Sigma\,(\overline{a}_{nm}\cos m\,\varphi + \overline{b}_{nm}\sin m\,\varphi)\,P_n^m = h(\vartheta, -\varphi) \text{ bzw. } h(\vartheta, \pi - \varphi).$$

In beiden Fällen erhält man

$$\overline{a}_{22} = a_{22}, \quad \overline{b}_{22} = -b_{22}.$$

Gerade die zweite dieser Beziehungen ist mit (9) im Einklang.

Geometrisch läßt sich das noch so deuten: Sei $a_{21} = b_{21} = 0$, also die x_3-Achse Trägheitsachse, die beim Übergang zur Parallelfläche ungeändert bleibt. Dann ist der Winkel, um den die beiden anderen Achsen der Parallelfläche gegenüber denen der Ausgangsfläche gedreht sind, gegeben durch $\operatorname{ctg} 2\,\psi = \frac{C_{11} - C_{12}}{2\,C_{12}}$. Bei den beiden genannten Spiegelungen ändert ψ sein Vorzeichen, wie es ja auch sein muß.

(Eingegangen am 20. Juli 1939.)