§ 2.

Totale Idealsysteme, Endlichartigkeit.

Genau wie wir in jeder Halbgruppe das System der s- und v-Ideale konstruiert haben, können wir auch, wenn ein System von endlichen r-Idealen gegeben ist, totale Idealsysteme konstruieren, deren endliche Ideale mit den r-Idealen übereinstimmen. Wir bezeichnen dazu mit $\mathfrak{e}$ stets Mengen aus endlich vielen Elementen von $\mathfrak{G}$. Ist dann $\mathfrak{a}$ eine beliebige Untermenge von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$, so setzen wir

$$\mathfrak{a}_{r_s} = \bigcup_{\mathfrak{e} \subseteq \mathfrak{a}} \mathfrak{e}_r, \quad \mathfrak{a}_{r_v} = \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{e}_r} \mathfrak{e}_r.$$

Nach dieser Definition ist z. B. für beliebige Untermengen $\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}^{-1} \neq 0$ stets

$$\mathfrak{a}_{s_s} = \mathfrak{a}_s, \quad \mathfrak{a}_{d_s} = \mathfrak{a}_d.$$

Wir können also sagen, daß das totale s_s- bzw. d_s-System identisch mit dem totalen s- bzw. d-System ist. Ebenso ist das totale v_v-System identisch mit dem v-System.

An neuen Idealsystemen erhalten wir das s_v-, d_v- und v_s-System, von denen vor allem das letzte für uns wichtig ist. Wir nennen das v_s-System kürzer das *t-System* [15]).

Von dem r_a-System waren bisher nur die endlichen Ideale definiert. Wir bilden daher das $(r_a)_s$-System und nennen dieses kürzer das *totale r_a-System* [16]).

Alle r_s-Systeme, speziell also das s-, s_a-, d-, d_a- und t-System haben folgende Eigenschaft:

Enthält das aus $\mathfrak{a}$ erzeugte r_s-Ideal ein Element a, so gibt es endlich viele Elemente $a_1, \ldots, a_n$ in $\mathfrak{a}$, so daß a schon in dem aus $a_1, \ldots, a_n$ erzeugten r_s-Ideal liegt.

Wir wollen die r_s-Systeme wegen dieser Eigenschaft als *endlichartig* bezeichnen. Umgekehrt ist auch jedes endlichartige Idealsystem ein r_s-System.

Wenden wir uns zunächst zur Untersuchung beliebiger endlichartiger Idealsysteme, so stoßen wir vor allem auf drei Sätze, die diese Idealsysteme vor den übrigen auszeichnen.

Satz 3. *Ist ein Ideal $\mathfrak{a}$ eines endlichartigen Idealsystems umkehrbar, so ist $\mathfrak{a}$ endlich* [17]).

Denn aus $1 \in \mathfrak{a}\mathfrak{a}^{-1}$ folgt die Existenz von endlich vielen Elementen $a_1, \ldots, a_n$ aus $\mathfrak{a}$ mit $1 \in (a_1, \ldots, a_n)\,\mathfrak{a}^{-1}$, also $\mathfrak{a} \subseteq (a_1, \ldots, a_n)$, d. h. $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

---

[15]) Die t-Ideale finden sich schon in Arnold [1].

[16]) Unsere Definition stimmt für die d_a-Ideale mit der in Krull [5] gegebenen überein.

[17]) Vgl. Krull [2].

Ebenso ist natürlich dann auch $\mathfrak{a}^{-1}$ endlich. Ist daher eine Halbgruppe Multiplikationshalbgruppe bezüglich eines endlichartigen Idealsystems, so bilden die endlichen Ideale sogar eine Gruppe, wir sagen hierfür: es gilt der *Gruppensatz*[18]). Dagegen gibt es v-Multiplikationshalbgruppen, in denen der v-Gruppensatz nicht gilt, wie ein Beispiel auf S. 551 zeigt.

Satz 4. *Zu jedem Ideal* $\mathfrak{a} \subset 1$ *eines endlichartigen Idealsystems gibt es ein Primideal* $\mathfrak{p}$ *mit* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \subset 1$.

(Ein Ideal $\mathfrak{p}$ heißt bekanntlich *Primideal*, wenn aus $a \notin \mathfrak{p}$, $b \notin \mathfrak{p}$ stets $ab \notin \mathfrak{p}$ folgt.)

Der Beweis dieses Satzes läßt sich wörtlich aus dem Beweis des entsprechenden Satzes für d-Ideale in Integritätsbereichen entnehmen. Wegen der Endlichartigkeit kann nämlich durch Wohlordnung ein maximales Ideal $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \subset 1$ konstruiert werden; dieses muß dann nach bekannter Schlußweise prim sein (vgl. Krull [1]).

Aus einem etwas weiter als Satz 4 gehenden Satze aus Krull [1] oder auch direkt aus Satz 4 durch Übergang zu einer Quotientenhalbgruppe (vgl. § 3) folgt für die minimalen Primideale $\mathfrak{p}$ (das sind diejenigen, die kein Primideal $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}$ enthalten):

Ein minimales s-Primideal ist auch minimales Primideal für jedes endlichartige Idealsystem.

Schließlich ergibt der Beweis des folgenden bekannten Satzes über d-Ideale[19]) unmittelbar für beliebige r-Idealsysteme:

Satz 5. *Es ist genau dann jedes r_s-Ideal endlich, wenn es unter beliebig vielen r-Idealen* $\mathfrak{a}$, *die alle zwischen zwei festen Hauptidealen a, b liegen,* $a \subseteq \mathfrak{a} \subseteq b$, *stets ein maximales gibt (r-Maximalbedingung).*

Während in die Definition der Begriffe: Vollständigkeit, Gruppensatz, Halbgruppensatz und Abgeschlossenheit stets nur die *endlichen* Ideale eingehen, wollen wir jetzt die entsprechenden Definitionen für ein totales Idealsystem, also unter Berücksichtigung *aller* Ideale, aufstellen.

Definition 4. $\mathfrak{g}$ sei eine Halbgruppe, und es sei das totale r-Idealsystem in $\mathfrak{g}$ definiert.

1. $\mathfrak{g}$ heißt *total r-vollständig*, wenn jedes r-Ideal Hauptideal ist.
2. In $\mathfrak{g}$ gilt der *totale r-Gruppensatz*, wenn alle r-Ideale eine Gruppe bilden.
3. In $\mathfrak{g}$ gilt der *totale r-Halbgruppensatz*, wenn alle r-Ideale eine Halbgruppe bilden.
4. $\mathfrak{g}$ heißt *total r-abgeschlossen*, wenn für jedes r-Ideal $\mathfrak{c}$ gilt: $\mathfrak{c} : \mathfrak{c} = 1$.

---

18) In Prüfer [1]: Eigenschaft **B**.

19) Vgl. etwa van der Waerden [2].

Satz 6. *$\mathfrak{g}$ ist genau dann total r-abgeschlossen, wenn jedes von $\mathfrak{g}$ „fast abhängige" Element ganz ist, d. h. jedes $a \in \mathfrak{G}$, für das ein $c \in \mathfrak{G}$ existiert, so daß ca^n ganz ist für alle $n = 1, 2, \ldots$.*

Die Voraussetzung über a besagt nämlich nichts anderes, als $(a, a^2, \ldots)^{-1} \neq 0$. Ist daher $\mathfrak{g}$ total r-abgeschlossen, so folgt aus

$$a\,(a, a^2, \ldots)_r \subseteq (a, a^2, \ldots)_r$$

sofort $a \in \mathfrak{g}$. Umgekehrt folgt aus der Existenz eines r-Ideals $\mathfrak{c}$ mit $a\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c}$ sukzessive

$$a^2\,\mathfrak{c} \subseteq a\,\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c},$$

$$a^3\,\mathfrak{c} \subseteq a\,\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c},$$

also auch

$$(a, a^2, \ldots)_r\,\mathfrak{c} \subseteq \mathfrak{c},$$

$$(a, a^2, \ldots)_r\,\mathfrak{c}\mathfrak{c}^{-1} \subseteq 1,$$

und wegen $\mathfrak{c}\mathfrak{c}^{-1} \neq 0$ somit

$$(a, a^2, \ldots)^{-1} \neq 0.$$

Hierdurch ist gezeigt, daß die Definition der totalen r-Abgeschlossenheit in Wahrheit unabhängig vom Idealsystem ist, was man auch direkt sehen kann. Wir sprechen daher einfach von der *totalen Abgeschlossenheit* einer Halbgruppe.

Über den totalen v-Gruppensatz gilt der bekannte van der Waerden-Artin-Krullsche Satz [20]:

In $\mathfrak{g}$ gilt genau dann der totale v-Gruppensatz, wenn $\mathfrak{g}$ total abgeschlossen ist.

Dieser Satz läßt sich mit derselben Formel wie Satz 1 beweisen.

Mit Satz 3 und Satz 6 folgt hieraus sofort:

Satz 7. *In $\mathfrak{g}$ gilt genau dann der totale t-Gruppensatz, wenn $\mathfrak{g}$ total abgeschlossen ist und der v-Maximalbedingung genügt.*

Wie für d-Ideale, so gilt auch für jedes endlichartige Idealsystem, daß der totale Gruppensatz gleichwertig mit dem sogenannten Z. P. I. [21] ist.

Z. P. I. Jedes ganze Ideal läßt sich eindeutig als Produkt von Primidealen darstellen.

Ebenso ist die totale Vollständigkeit für ein endlichartiges Idealsystem gleichwertig mit dem

Z. P. H. [22]. Jedes ganze Ideal läßt sich eindeutig als Produkt von Primhauptidealen darstellen.

Über den Z. P. I. gilt für jedes endlichartige Idealsystem [19]:

---

[20]) Vgl. van der Waerden [2], § 103, Krull [6].

[21]) Zerlegungssatz in Primideale, vgl. etwa Krull [4], S. 4.

[22]) Zerlegungssatz in Primhauptideale, vgl. Hasse [1].

Satz 8. *In* $\mathfrak{g}$ *gilt der totale Gruppensatz genau dann, wenn* $\mathfrak{g}$
1. *total abgeschlossen ist,*
2. *der v-Maximalbedingung genügt,*
3. *jedes Primideal minimal ist.*

Daß die drei Bedingungen notwendig sind, ist trivial; sind sie aber erfüllt, so folgt für jedes Ideal $\mathfrak{a}$ des Systems aus $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1} \subset 1$ die Existenz eines Primideals: $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1} \subseteq \mathfrak{p} \subset 1$. $\mathfrak{p}$ ist als minimales Primideal t-Ideal, wegen der v-Maximalbedingung also sogar v-Ideal, so daß $(\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1})_v \subseteq \mathfrak{p} \subset 1$ entsteht, was der totalen Abgeschlossenheit widerspricht. Somit ist für jedes Ideal $\mathfrak{a}\,\mathfrak{a}^{-1} = 1$.

Die Verallgemeinerung eines Kriteriums für die totale d-Vollständigkeit[23]) liefert für beliebiges endlichartiges Idealsystem den

Satz 9. $\mathfrak{g}$ *ist genau dann total vollständig, wenn jedem ganzen Element a eine nichtnegative ganze rationale Zahl $|a|$ so zugeordnet werden kann, daß die folgende Bedingung erfüllt ist:*

Ist $b \notin (a)$, so enthält (a, b) ein Element c mit $|c| < |a|$.

Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist leicht zu sehen, denn ist $a = p_1\, p_2 \ldots p_n$ die Primelementzerlegung von a, so setzen wir $|a| = n$. Die Bedingung ist aber auch hinreichend, denn es sei $\mathfrak{a}$ ein beliebiges ganzes Ideal und a ein Element von $\mathfrak{a}$ mit kleinstmöglichem $|a|$. Wäre dann $(a) \subset \mathfrak{a}$, so gäbe es ein $b \in \mathfrak{a}$ mit $b \notin (a)$, also ein $c \in (a, b) \subseteq \mathfrak{a}$ mit $|c| < |a|$. Demnach ist $(a) = \mathfrak{a}$.

Wir wollen die Ergebnisse dieser Untersuchung der totalen Idealsysteme wieder graphisch zusammenstellen.

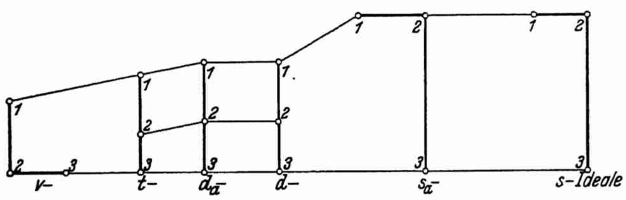

Fig. 2.

Dabei bedeutet:
1. $\mathfrak{g}$ ist total vollständig,
2. in $\mathfrak{g}$ gilt der totale Gruppensatz,
3. $\mathfrak{g}$ ist total abgeschlossen.

---

[23]) Vgl. Hasse [1], Krull [4], S. 38. Die total t-vollständigen Halbgruppen sind genau die Halbgruppen mit Z. P. E. (Zerlegungssatz in Primelemente: Jedes ganze Element läßt sich eindeutig als Produkt von Primelementen darstellen). Satz 9 und Beweis ist einfacher als die bisherigen Beweise, da nur die totale Vollständigkeit gezeigt zu wreden braucht.