Werk

Titel: Zur Zahlengeometrie in den total reellen kubischen Körpern

Autor: Bullig, G.,

Ort: Berlin

Jahr: 1939

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0045|log71

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Zur Zahlengeometrie in den total reellen kubischen Körpern.

Von

G. Bullig in Hamburg.

§ 1.

Einleitung. Erklärung der Grundbegriffe.

In den total reellen kubischen Körpern läßt sich ein Verfahren definieren, welches — ähnlich wie das Kettenbruchverfahren in den reellen quadratischen Körpern — ein System von Grundeinheiten zu berechnen gestattet[1]): In einem beliebig vorgegebenen dreigliedrigen Modul $\mathfrak{R}$ von Vektoren, deren Koordinaten ~~bzw.~~ den reellen kubischen Körpern K_1, K_2, K_3 angehören, wird die Teilmenge $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}}$ aller *Minima* definiert; das sind solche Vektoren $\mathfrak{m} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, für welche die Ungleichungen $|\xi_i| < |\mu_i|$ $(i = 1, 2, 3)$ in von $(0, 0, 0)$ verschiedenen Modulelementen $\mathfrak{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ unlösbar sind. Die Elemente $\mathfrak{m}$ von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}+}$ — d. i. die Menge aller Minima mit positiver dritter Koordinate —, werden in Zusammenhang gebracht, indem zu jedem solchen $\mathfrak{m}$ zwei Nachfolger $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2$ bestimmt werden, die wiederum Elemente von $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}+}$ sind. Fügt man zu $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}+}$ alle Paare $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1)$, $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2)$ hinzu, so entsteht ein Streckenkomplex $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}+}$, dessen topologische Eigenschaften u. a. die Bestimmung eines Systems von Grundeinheiten der Ordnung von $\mathfrak{R}$ ermöglichen (vgl. *H*, Satz 21).

Im folgenden wird die Kenntnis der Theorie von *H* vorausgesetzt; an einigen Stellen wird auf die in Frage kommenden Sätze von *H* verwiesen.

Die Nachfolger lassen sich zahlengeometrisch definieren, wenn man die Elemente von $\mathfrak{R}$ in bekannter Weise auf die Punkte eines Gitters im dreidimensionalen Cartesischen Raum abbildet. In dieser Definition sind die Achsen des Koordinatensystems nicht gleichberechtigt. Es entsteht daher die Frage, welche Paare von Nachfolgern und welchen Streckenkomplex wir erhalten, wenn wir die Achsen permutieren. Es stellt sich heraus, daß diese Streckenkomplexe unabhängig von der zahlengeometrischen Definition (bis aufs Vorzeichen ihrer Elemente) topologisch bestimmt werden können, sofern die Struktur von $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}+}$ bekannt ist. Dies soll im folgenden bewiesen werden.

Vorerst wird der wichtige Satz bewiesen, daß der Streckenkomplex $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}+}$ unter Erfüllung einer Zusatzbedingung in die Ebene eingebettet werden kann.

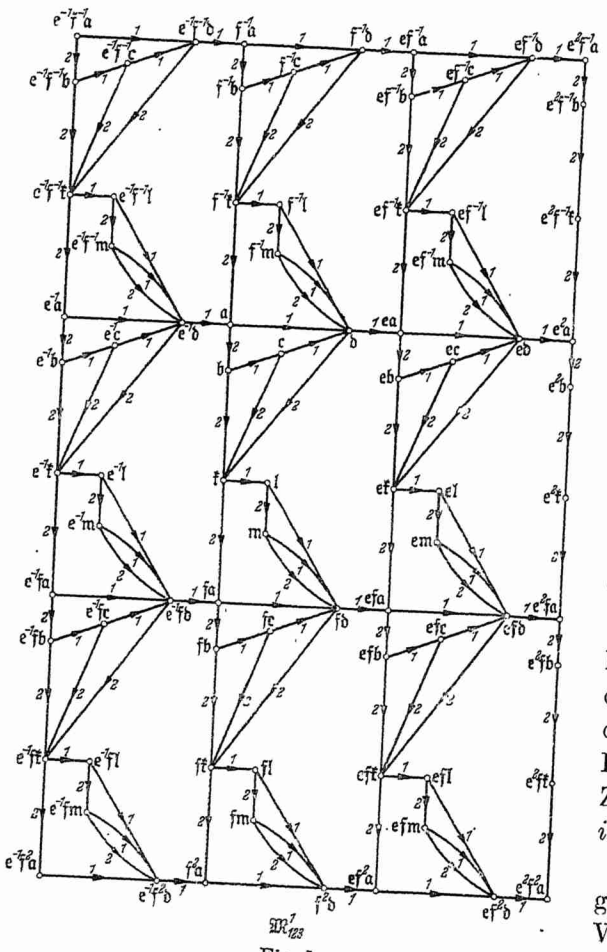
[1]) Vgl. hierzu: G. Bullig, Ein periodisches Verfahren usw., Abhandl. a. d. Mathem. Sem. Hamburg, Bd. 12, Heft 3/4; im folgenden bezeichnet mit *H*.

Dieser Satz wird für die Ableitung des ebengenannten topologischen Satzes verwendet; außerdem ist ein Graph des $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}+}$ für die praktische Durchführung dieser topologischen Konstruktionen von Wert.

Sei i eine beliebige der Zahlen 1, 2, 3. Sei $\mathfrak{m}$ ein beliebig vorgegebenes Minimum. Mit $\mathfrak{r}_i(\mathfrak{m}) = (\varrho_{i1}(\mathfrak{m}), \varrho_{i2}(\mathfrak{m}), \varrho_{i3}(\mathfrak{m}))$ bezeichnen wir denjenigen Gitterpunkt, der von allen im Quader

$$x_i > 0, \quad |x_k| < |\mu_k|, \quad |x_l| < |\mu_l|$$

liegenden Gitterpunkten die kleinste Distanz von der $x_k x_l$-Ebene hat. Hierbei sind k, l unter den Zahlen 1, 2, 3 die von i verschiedenen.



$\mathfrak{M}^1_{123}$

Fig. 1.

Sei (i, l) eines der Paare (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2), (3, 1), (1, 3). Mit $\mathfrak{s}_{il}(\mathfrak{m})$ bezeichnen wir denjenigen Gitterpunkt, der von allen im Quader

$$Q_{il}(\mathfrak{m}): \; |x_i| < \varrho_{ii}(\mathfrak{m}), \quad |x_k| < |\mu_k|, \quad x_l > 0$$

liegenden Gitterpunkten die kleinste Distanz von der $x_i x_k$-Ebene hat. Hierbei ist k unter den Zahlen 1, 2, 3 die von i, l verschiedene.

$\mathfrak{r}_i(\mathfrak{m})$ ist durch Vorgabe von i, $\mathfrak{s}_{il}(\mathfrak{m})$ durch Vorgabe von (i, l) eindeutig bestimmt; beide Gitterpunkte sind Minima.

Sei i, k, l durch Permutation aus 1, 2, 3 hervorgegangen. Wir nennen $(\mathfrak{s}_{il}(\mathfrak{m}), \mathfrak{s}_{kl}(\mathfrak{m}))$ das zum Tripel (i, k, l) gehörige Nachfolgerpaar von $\mathfrak{m}$, und zwar $\mathfrak{s}_{il}(\mathfrak{m})$ den 1-Nachfolger, $\mathfrak{s}_{kl}(\mathfrak{m})$ den 2-Nachfolger. Für $i = 1$, $k = 2$, $l = 3$ ergibt sich das in H definierte Nachfolgerpaar. Insgesamt haben wir zu einem Minimum 6 Nachfolgerpaare, von denen je zwei mit gleichem Index l durch Vertauschung ihrer Elemente auseinander hervorgehen.

Der Streckenkomplex $\mathfrak{M}^1_{ikl}$ bestehe aus Eckpunkten, die eineindeutig den Minima $\mathfrak{m}$ mit positiver l-ter Koordinate zugeordnet sind, ferner aus Strecken $(\mathfrak{m}, s_{il}(\mathfrak{m}))$, $(\mathfrak{m}, s_{kl}(\mathfrak{m}))$, die die geometrische Konstruktion des zum Tripel (i, k, l) gehörigen 1- bzw. 2-Nachfolgers von $\mathfrak{m}$ symbolisieren. Jedem Übergang $\mathfrak{m} \to s_{rl}(\mathfrak{m})$ $(r = i, k)$ entspricht genau eine Strecke des $\mathfrak{M}^1_{ikl}$. $\mathfrak{m}$ heißt Anfangspunkt, $s_{rl}(\mathfrak{m})$ Endpunkt der Strecke $(\mathfrak{m}, s_{rl}(\mathfrak{m}))$. Auf diese Weise sind 6 verschiedene Streckenkomplexe definiert, von denen je zwei, deren Indextripel im dritten Element übereinstimmen, durch Vertauschung der Elemente aller Nachfolgerpaare auseinander hervorgehen.

In den Fig. 1 bis 3 sind Teilgraphen solcher Streckenkomplexe, und zwar der Komplexe $\mathfrak{M}^1_{123}$, $\mathfrak{M}^1_{312}$, $\mathfrak{M}^1_{231}$ gegeben; ihre Eckpunkte stellen Minima des Moduls mit der Basis (1,1,1), $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$, $(\vartheta_1^2, \vartheta_2^2, \vartheta_3^2)$ dar, wo ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 die Wurzeln der Gleichung $\vartheta^3 - 7\,\vartheta + 2 = 0$ sind, $\vartheta_1 = -2{,}7785$, $\vartheta_2 = +2{,}4893$, $\vartheta_3 = +0{,}2892$. Jede Strecke $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ ist mit einem nach dem Endpunkt $\mathfrak{n}$ weisenden Pfeil versehen. Die beigefügte Ziffer gibt an, mit welchem seiner Nachfolger der Punkt $\mathfrak{m}$ durch $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ verbunden wird. Die Vektoren $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ sind Grundeinheiten der Ordnung von $\mathfrak{R}$. Die Konstruktion dieser Graphen in der Ebene erfolgte durch Aneinanderlegen von Fundamentalbereichen, wie noch erörtert werden wird.

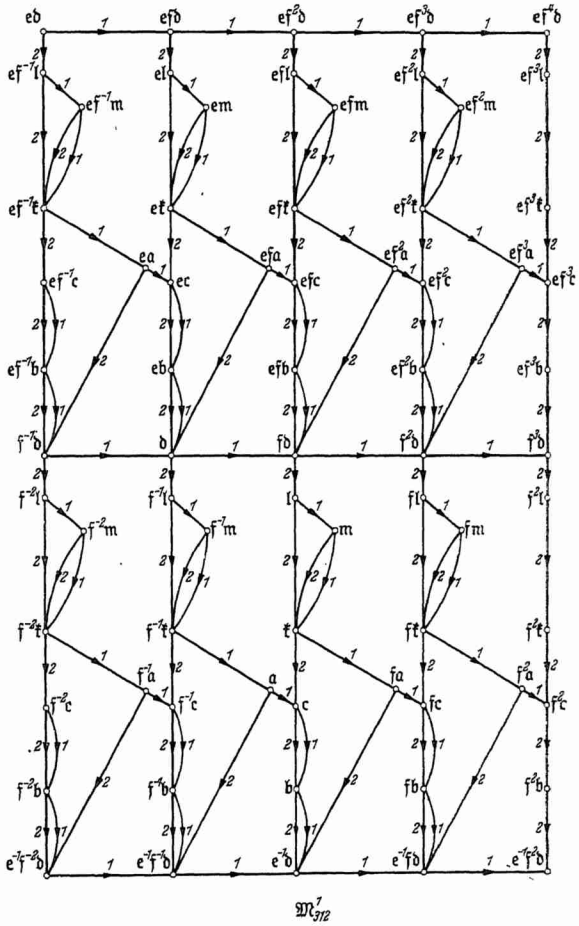


Fig. 2.

Die in den Figuren gleichbezeichneten Eckpunkte entsprechen Minima, die bis aufs Vorzeichen miteinander übereinstimmen. Ein Minimum des Komplexes $\mathfrak{M}^1_{123}$, dessen 3. Koordinate also positiv, dessen 2. Koordinate aber z. B. negativ ist, kann in $\mathfrak{M}^1_{312}$ nicht enthalten sein. In $\mathfrak{M}^1_{312}$ ist aber $-\mathfrak{m}$ enthalten.

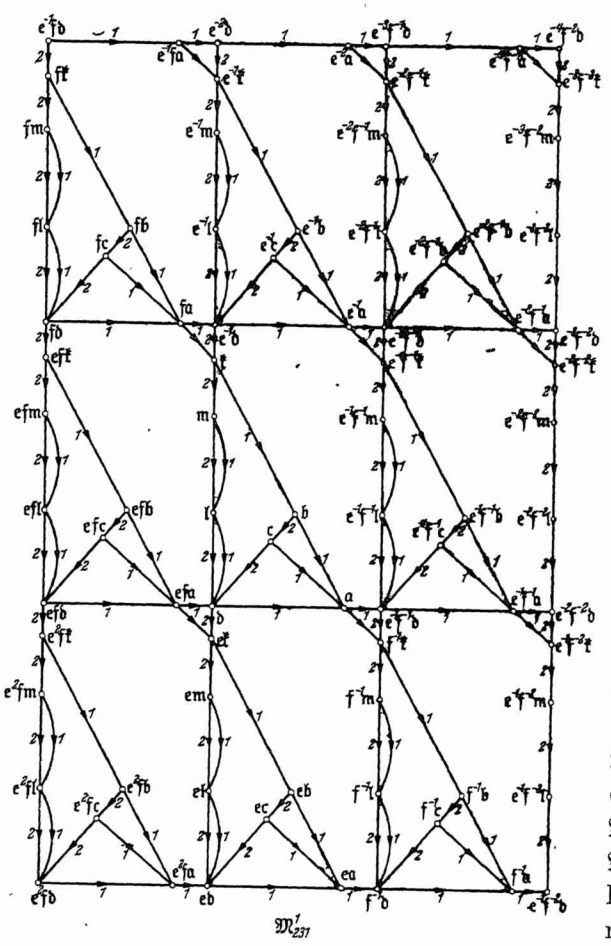


Fig. 3.

Wende ich auf die Indizes eines $\mathfrak{M}^1_{ikl}$ eine Permutation P an („permutiere ich $\mathfrak{M}^1_{ikl}$"), so wird $\mathfrak{M}^1_{ikl}$ abgebildet auf einen Komplex $\mathfrak{M}^1_{i_1 k_1 l_1} = P\mathfrak{M}^1_{ikl}$. Wenn wir zeigen, daß der Komplex $P\mathfrak{M}^1_{123}$ aus $\mathfrak{M}^1_{123}$ topologisch ermittelt werden kann, so ist die gleiche topologische Konstruktion offenbar auf einen beliebigen der Streckenkomplexe $\mathfrak{M}^1_{ikl}$ anwendbar und liefert den Streckenkomplex $P\mathfrak{M}_{ikl}$. Es genügt somit zu beweisen, daß die Komplexe $\mathfrak{M}^1_{213}$ und $\mathfrak{M}^1_{312}$ topologisch aus $\mathfrak{M}^1_{123}$ bestimmt werden können; denn die Permutationen (1, 2), (1,2,3) erzeugen die symmetrische Gruppe S_3.

Die topologische Bestimmung von $\mathfrak{M}^1_{213}$ aus $\mathfrak{M}^1_{123}$ ist uns schon bekannt; sie beruht auf Vertauschung der Elemente aller Nachfolgerpaare im Komplex $\mathfrak{M}^1_{123}$.

Ehe wir aber an die Konstruktion von $\mathfrak{M}^1_{312}$ gehen können, sind eine Reihe von Vorbereitungen notwendig.

Wir wollen dazu in die Bezeichnungsweise von H übergehen. Wir schreiben also $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}^+}$ für $\mathfrak{M}^1_{123}$, $Q_1(\mathfrak{m})$ für $Q_{13}(\mathfrak{m})$, $Q_2(\mathfrak{m})$ für $Q_{23}(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{s}_{13}(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{s}_{23}(\mathfrak{m})$.

Der 2-Nachfolger von $\mathfrak{m}_1$ wird mit $\mathfrak{m}_{12}$, allgemein der i_k-Nachfolger eines Elementes $\mathfrak{m}_{i_1 \dots i_{k-1}}$ mit $\mathfrak{m}_{i_1 \dots i_k}$ bezeichnet. Die Gesamtheit der Gitterpunkte, die mit einem Minimum $\mathfrak{m}_{i_1 \dots i_k}$ gleich sind, heißt $\mathfrak{K}(\mathfrak{m})$, die Folge $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_{11}, \dots \mathfrak{K}_1(\mathfrak{m})$, die Folge $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_{22}, \dots \mathfrak{K}_2(\mathfrak{m})$ (*H*, S. 384).

Das in der Folge $\mathfrak{K}_r(\mathfrak{m})$ ($r = 1, 2$) einem Element $\mathfrak{l}$ vorangehende Element heiße ${}_r\mathfrak{l}$. Diese Bezeichnung hat nur dann einen Sinn, wenn die Kette $\mathfrak{K}_r(\mathfrak{m})$ vorgegeben ist. Es kann nämlich mehrere Ketten geben, die dasselbe Element $\mathfrak{l}$ enthalten. Im folgenden ergibt sich meist von selbst, welche Kette gerade gemeint ist, so daß sie nicht in jedem Fall genannt zu werden braucht.

Erweitern wir den Komplex $\mathfrak{K}(\mathfrak{m})$, indem wir jede Strecke hinzufügen, die ein Element von $\mathfrak{K}(\mathfrak{m})$ mit einem seiner Nachfolger verbindet, so erhalten wir den Streckenkomplex $\mathfrak{K}^1(\mathfrak{m})$. Durch eine entsprechende Erweiterung erhalten wir $\mathfrak{K}_1^1(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{K}_2^1(\mathfrak{m})$ aus $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{m})$, $\mathfrak{K}_2(\mathfrak{m})$.

Nach *H*, Satz 9 haben die Folgen $\mathfrak{K}_2(\mathfrak{m}_1)$, $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{m}_2)$ mindestens ein Element gemein; das erste Element, das die eine Folge mit der anderen gemein hat, ist identisch mit dem ersten Element, das die zweite mit der ersten gemein hat; dieses Element heißt $\mathfrak{m}_0$; danach gibt es in $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{K}+}$ geschlossene Teilkomplexe, die aus den Elementen

(1) $\mathfrak{m}, (\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1), \mathfrak{m}_1, (\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_{12}), \mathfrak{m}_{12}, (\mathfrak{m}_{12}, \mathfrak{m}_{122}), \dots, ({}_2\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0)$
$(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2), \mathfrak{m}_2, (\mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_{21}), \mathfrak{m}_{21}, (\mathfrak{m}_{21}, \mathfrak{m}_{211}), \dots, ({}_1\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0), \mathfrak{m}_0$

bestehen, und zwar zu jedem Element $\mathfrak{m}$ einen solchen Komplex. Die Fälle

a) $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2 \neq \mathfrak{m}_0$, b) $\mathfrak{m}_1 \neq \mathfrak{m}_0 \quad \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_0$,

c) $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_0 \quad \mathfrak{m}_2 \neq \mathfrak{m}_0$, d) $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_0$

sind, wie Fig. 1 zeigt, alle möglich. Wir können danach 4 Typen von Komplexen (1) unterscheiden, von denen je ein Beispiel durch einen Graphen in Fig. 4 a bis d dargestellt wird.

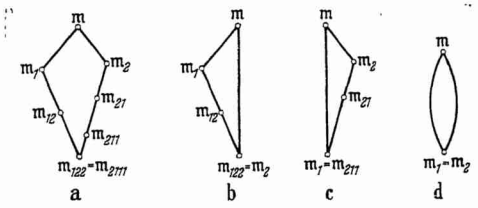


Fig. 4.

Definition. Der durch (1) definierte Komplex heiße der zu $\mathfrak{m}$ gehörige Elementarkomplex, $\mathfrak{m}$ sein Hauptpunkt, $\mathfrak{m}_0$ sein Gegenpunkt.

1. Satz. *Der Streckenkomplex $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{K}+}$ kann so in die Ebene gelegt werden, daß seine Eckpunkte, seine Strecken und die von seinen Elementarkomplexen begrenzten Gebiete die Ebene lückenlos und einfach überdecken.*

Fig. 1 bis 3 sind Beispiele solcher Abbildungen in die Ebene.

„Einen Streckenkomplex in die Ebene legen" heißt im folgenden: Eine Abbildung angeben, die jedem Eckpunkt P des Komplexes eineindeutig einen Punkt P^* der Euklidischen Ebene E zuordnet, jeder Strecke (P_1, P_2) des Komplexes einen offenen Jordanbogen in E, der die Punkte P_1^*, P_2^* als Begrenzungspunkte besitzt. Dabei darf kein Jordanbogen (P_1^*, P_2^*) den Bildpunkt P^* eines Eckpunktes enthalten, noch einen Punkt mit dem Bild einer von (P_1, P_2) verschiedenen Strecke gemein haben.

Hierzu ist folgendes zu bemerken: Betrachten wir zwei Strecken $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1)$, $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2)$ des $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}+}$ mit $\mathfrak{m}_1 = \mathfrak{m}_2$ (wie in H, Einleitung) als gleich, so läßt sich der Komplex vermutlich sogar geradlinig in die Ebene legen: Für das Bild einer Strecke (P_1, P_2) kann *stets* die offene Verbindungsstrecke der Punkte P_1^*, P_2^* genommen werden. Nun stellt sich aber bei dem Studium der permutierten Komplexe heraus, daß die Elementarkomplexe vom Typus der Fig. 4d gegenüber den anderen keine Sonderrolle spielen. Ferner ist bei Zulassung von Jordanbögen die Konstruktion eines Graphen eine viel einfachere.

§ 2.

Kombinatorische Vorbereitungen für die Konstruktion des Graphen.

Wir betrachten jetzt Teilkomplexe von allgemeinerem Typ als die Elementarkomplexe. $\mathfrak{g}$ gehöre zu $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{a})$. $\mathfrak{g}, \mathfrak{p}$ seien $\neq \mathfrak{a}$. Die Folgen $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{p})$ sollen ein Element gemein haben. Sei $\mathfrak{l}$ in beiden Folgen das erste Element dieser Eigenschaft. (Dieses existiert wegen H, Hilfssatz 6.) Die Mengen $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{a}) - \mathfrak{R}_1(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{a}) - \mathfrak{R}_2(\mathfrak{p}) - \mathfrak{a}$, $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{g}) - \mathfrak{R}_2(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{p}) - \mathfrak{R}_1(\mathfrak{l}) + \mathfrak{l}$ sollen paarweise elementefremd sein. Dann gibt es einen geschlossenen Komplex, der aus den Elementen der Mengen $\mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{a}) - \mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{a}) - \mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{p}) - \mathfrak{a}$, $\mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{g}) - \mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{l})$, $\mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{p}) - \mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{l}) + \mathfrak{l}$, also aus den Elementen

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\mathfrak{a},\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1),\ \mathfrak{a}_1,\ \ldots,\ ({}_1\mathfrak{g}, \mathfrak{g}),\ \mathfrak{g},\ (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_2),\ \mathfrak{g}_2,\ \ldots,\ ({}_2\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) \\ &(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_2),\ \mathfrak{a}_2,\ \ldots,\ ({}_2\mathfrak{p}, \mathfrak{p}),\ \mathfrak{p},\ (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1),\ \mathfrak{p}_1,\ \ldots,\ ({}_1\mathfrak{l}, \mathfrak{l}),\ \mathfrak{l} \end{aligned}$$

besteht. Der so definierte Komplex heiße $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$, $\mathfrak{a}$ der *Hauptpunkt* des $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$. Seine Eckpunkte sind paarweise verschieden. Wir nennen die Elemente

$$(3_1) \qquad \mathfrak{a},\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_1),\ \mathfrak{a}_1,\ \ldots,\ ({}_1\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \qquad (\mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{a}) - \mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{g}))$$

die *erste Seite* des $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$, die Elemente

$$(3_2) \qquad \mathfrak{a},\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{a}_2),\ \mathfrak{a}_2,\ \ldots,\ ({}_2\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) \qquad (\mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{a}) - \mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{p}))$$

die *zweite*,

$$(3_3) \qquad \mathfrak{g},\ (\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_2),\ \mathfrak{g}_2,\ \ldots,\ ({}_2\mathfrak{l}, \mathfrak{l}) \text{ und } \mathfrak{l} \text{ im Falle } \mathfrak{l} \neq \mathfrak{g} \quad (\mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{g}) - \mathfrak{R}_2^1(\mathfrak{l}) + \mathfrak{l}),$$

die *dritte*,

$$(3_4) \qquad \mathfrak{p},\ (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1),\ \mathfrak{p}_1,\ \ldots,\ ({}_1\mathfrak{p}, \mathfrak{p}) \text{ und } \mathfrak{l} \text{ im Falle } \mathfrak{l} \neq \mathfrak{p} \quad (\mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{p}) - \mathfrak{R}_1^1(\mathfrak{l}) + \mathfrak{l})$$

die *vierte*. Ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{l}$, so besteht die 3. Seite nur aus einem Eckpunkt, ist $\mathfrak{p} = \mathfrak{l}$, so gilt das gleiche für die 4. Seite. Ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{p} = \mathfrak{l}$, so bestehen 3. und 4. Seite aus demselben Eckpunkt.

In Fig. 5 a bis d sind Beispiele von Graphen geeigneter $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ wiedergegeben. Im Falle a) ist $\mathfrak{l} \neq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{l} \neq \mathfrak{p}$, im Falle b) $\mathfrak{l} \neq \mathfrak{g}$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{p}$, im Falle c) $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{l} \neq \mathfrak{p}$, im Falle d) $\mathfrak{l} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{p}$. Diese Fälle entsprechen den in Fig. 4 dargestellten. Jeder Elementarkomplex ist ja ein $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$, in welchem $\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_2$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{m}_0$ gilt.

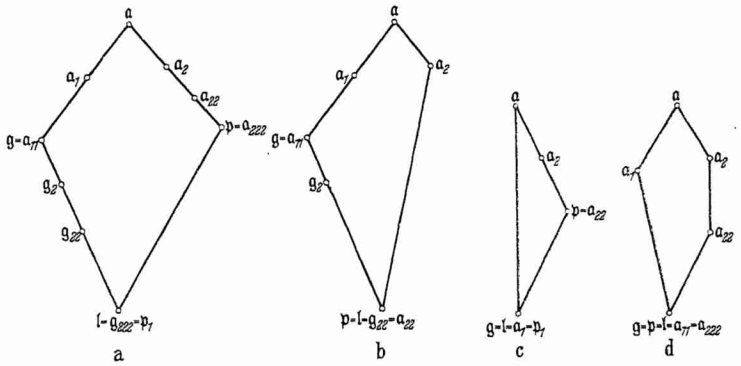


Fig. 5.

(A) Auch die Strecken des $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ sind paarweise verschieden.

Beweis. Jeder seiner Eckpunkte (mit Ausnahme von $\mathfrak{a}$) ist in Z Anfangspunkt höchstens *einer* Strecke; und $\mathfrak{a}_1$ ist $\neq \mathfrak{a}_2$ nach Voraussetzung.

(B) Die Eckpunkte der 1. und 2. Seite des $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ gehören zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{a})$, aber nicht zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ oder $\mathfrak{R}(\mathfrak{p})$. (Die entsprechende Behauptung gilt für die Strecken.)

Beweis. Ein Element $\mathfrak{m}$ der 1. Seite (insbesondere $\mathfrak{m} = \mathfrak{a}$) gehört $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ nicht an. Denn wir haben $\mathfrak{m} \neq \mathfrak{g}$ und $\mathfrak{R}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{m})$, die dritte Koordinate aller Elemente von $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ ist also nach *H*, Hilfssatz 7 größer als die von $\mathfrak{m}$.

$\mathfrak{a}$ gehört auch $\mathfrak{R}(\mathfrak{p})$ nicht an, denn es gilt $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}$ und $\mathfrak{R}(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{a})$. Sei $\mathfrak{a}_1 \neq \mathfrak{g}$, also Element der 1. Seite. Wäre $\mathfrak{a}_1$ Element von $\mathfrak{R}(\mathfrak{p})$, so müßte es nach *H*, Satz 18 Element der 4. Seite des Z sein, im Widerspruch dazu, daß die Eckpunkte von $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ paarweise verschieden sind. Also gehört $\mathfrak{a}_1$ nicht zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{p})$. Den gleichen Schluß wenden wir nun auf alle eventuellen weiteren Elemente der 1. Seite an.

Der Beweis für die Elemente der 2. Seite verläuft entsprechend.

Die Menge aller Elemente von $\mathfrak{R}(\mathfrak{a})$, die weder zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ noch zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{p})$ gehören, nennen wir im folgenden $\mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$; die Menge aller Elemente von $\mathfrak{R}^1(\mathfrak{a})$, die weder zu $\mathfrak{R}^1(\mathfrak{g})$ noch zu $\mathfrak{R}^1(\mathfrak{p})$ gehören, heiße $\mathfrak{E}^1(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$.

(C) $\mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ enthält nur endlich viele Elemente.

Beweis. Die Elemente von $\mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ seien mit $\mathfrak{d} = (\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ bezeichnet. $\mathfrak{a}$ ist wegen $\mathfrak{g} \neq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{a}$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{g}) \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{a})$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{a})$ ein $\mathfrak{d}$ (Benutzung von *H*, Hilfssatz 6).

Nach *H*, Satz 15 liegen alle von $\mathfrak{a}$ verschiedenen Elemente $\mathfrak{d}$ in den endlich vielen Quadern

$$(4) \qquad Q_1(\mathfrak{a}),\ Q_1(\mathfrak{a}_1),\ \ldots,\ Q_1({}_1\mathfrak{g});\quad Q_2(\mathfrak{a}),\ Q_2(\mathfrak{a}_2),\ Q_2(\mathfrak{a}_{22}),\ \ldots,\ Q_2({}_2\mathfrak{p}).$$

Sei $\mathfrak{r}_k(\mathfrak{m}) = (\varrho_{k1}(\mathfrak{m}),\ \varrho_{k2}(\mathfrak{m}),\ \varrho_{k3}(\mathfrak{m}))$ (vgl. S. 512). Sei $\mathfrak{g} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$.

Aus $0 < \varrho_{11}({}_1\mathfrak{g}) \leqq \varrho_{11}(\mathfrak{g})$ (*H*, Hilfssatz 7) folgt, daß der Quader

$$|x_1| < \varrho_{11}({}_1\mathfrak{g}), \quad |x_2| < |\gamma_2|, \quad x_3 > 0$$

in $Q_1(\mathfrak{g})$ enthalten ist.

Ebenso folgt für $\mathfrak{p} = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, daß der Quader

$$|x_1| < |\pi_1|, \quad |x_2| < \varrho_{22}({}_2\mathfrak{p}), \quad x_3 > 0$$

in $Q_2(\mathfrak{p})$ enthalten ist.

Da alle $\mathfrak{d}$ in (4) liegen, folgen aus *H*, Hilfssatz 7 die Ungleichungen

$$|\delta_1| < \varrho_{11}({}_1\mathfrak{g}), \quad |\delta_2| < \varrho_{22}({}_2\mathfrak{p}).$$

Mit Rücksicht auf *H*, Hilfssatz 9 gilt also

$$|\delta_1| > |\pi_1|, \quad |\delta_2| > |\gamma_2|.$$

Insgesamt haben wir

$$|\pi_1| < |\delta_1| < \varrho_{11}({}_1\mathfrak{g}), \quad |\gamma_2| < |\delta_2| < \varrho_{22}({}_2\mathfrak{p}), \quad \delta_3 > 0.$$

Die $\mathfrak{d}$ liegen also in einem Bereich, dessen Projektion auf die x_1x_2-Achse endlich ist. Gäbe es unendlich viele $\mathfrak{d}$, so hätten ihre Projektionen einen Häufungspunkt; es wären also unter ihnen zwei, $\mathfrak{d}' = (\delta_1', \delta_2', \delta_3')$ und $\mathfrak{d}'' = (\delta_1'', \delta_2'', \delta_3'')$, mit

$$|\delta_1'' - \delta_1'| < |\pi_1|, \qquad |\delta_2'' - \delta_2'| < |\gamma_2|.$$

Wir denken uns die zwei so geordnet, daß $\delta_3'' > \delta_3'$ ist. Für die Differenz $\mathfrak{d}'' - \mathfrak{d}'$ gälten dann die Ungleichungen

$$|\delta_1'' - \delta_1'| < |\pi_1| < |\delta_1''|, \qquad |\delta_2'' - \delta_2'| < |\gamma_2| < |\delta_2''|, \qquad 0 < \delta_3'' - \delta_3' < \delta_3'';$$

das ist aber unmöglich, da $\mathfrak{d}''$ Minimum ist. Damit ist (C) bewiesen.

Wir nehmen jetzt irgendein Element $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{a}$ der 1. oder 2. Seite des $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ (sofern vorhanden). Von den Strecken $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}_1')$, $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}_2')$ ist nur eine in $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ enthalten. Liegt $\mathfrak{a}'$ auf der 1. Seite, so ist es die Strecke $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}_1')$, liegt $\mathfrak{a}'$ auf der 2. Seite, die Strecke $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}_2')$. Sei etwa die Strecke

$(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'_k)$ in $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ *nicht* enthalten. Wir bilden die Folge $\mathfrak{R}_k(\mathfrak{a}')$ bis zu dem ersten von $\mathfrak{a}'$ verschiedenen Eckpunkt $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$, der mit einem Eckpunkt von $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ gleich ist. Dieser Eckpunkt existiert wegen (B), (C), *H*, Satz 18. Es gilt:

(D) Existiert ein Element $\mathfrak{a}'$, das mit $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ derselben Seite des $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ angehört, so existiert auch ein $\mathfrak{a}'$, das diese Eigenschaft *nicht* hat.

Beweis. Sei $\mathfrak{a}'$ ein Element, welches auf der gleichen Seite liegt wie $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$. Wir bestimmen in $\mathfrak{R}_k(\mathfrak{a}')$ das erste Element $\mathfrak{q}^{**}$, welches der 3. oder 4. Seite angehört. $\mathfrak{q}^{**}$ existiert wegen (B), (C), *H*, Satz 18. In $\mathfrak{R}_k(\mathfrak{a}')$ gibt es ein $\mathfrak{q}^{**}$ voraufgehendes Element, welches mit $\mathfrak{a}'$ auf der gleichen Seite liegt, nämlich $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$. Sei $\mathfrak{q}^*$ unter den $\mathfrak{q}^{**}$ voraufgehenden Elementen der $\mathfrak{R}_k(\mathfrak{a}')$ das *letzte* mit dieser Eigenschaft. Dann gilt $\mathfrak{q}(\mathfrak{q}^*) = \mathfrak{q}^{**}$, womit (D) bewiesen ist. Es folgt

Die Teilung (Zerlegung) des $Z(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$.

$\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ mögen nicht auf der gleichen Seite des Z liegen. Wir erweitern Z durch Hinzufügen der Elemente der Menge $\mathfrak{R}_k^1(\mathfrak{a}') - \mathfrak{R}_k^1(\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')) - \mathfrak{a}'$, also der Elemente

$$W(\mathfrak{a}'): \quad (\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'_k),\ \mathfrak{a}'_k,\ (\mathfrak{a}'_k, \mathfrak{a}'_{kk}),\ \ldots,\ ({}_k\mathfrak{q}(\mathfrak{a}'), \mathfrak{q}(\mathfrak{a}')).$$

Der aus den Elementen von Z und W bestehende Komplex heiße Φ_1.

(E) Die Elemente des Φ_1 sind paarweise verschieden.

Beweis. Daß die Eckpunkte von W paarweise verschieden sind, folgt aus *H*, Hilfssatz 6. $(\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'_k)$ ist in Z nicht enthalten, wie oben schon bemerkt wurde. Ist bereits $\mathfrak{a}'_k = \mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$, so sind wir fertig. Ist $\mathfrak{a}'_k \neq \mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$, so ist $\mathfrak{a}'_k$ nach Konstruktion in Z nicht enthalten, also auch nicht $(\mathfrak{a}'_k, \mathfrak{a}'_{kk})$. So können wir weiterschließen.

Aus der Konstruktion von Φ_1 und aus (E) folgt nun, daß Φ_1 zwei Komplexe Z_1, Z_2 vom Typus des Z enthält derart, daß jedes Element von Φ_1 in wenigstens einem der Z_i $(i = 1, 2)$ enthalten ist. Um das zu zeigen, dedefinieren wir im Falle

$k = 1$: α) wenn $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ auf der 1. Seite des Z liegt,

$$\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{q}(\mathfrak{a}'), \quad \mathfrak{p}^1 = \mathfrak{a}',$$
$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}', \quad \mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p};$$

β) wenn $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ auf der 3. Seite des Z liegt,

$$\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}, \quad \mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \quad \mathfrak{p}^1 = \mathfrak{a}',$$
$$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}', \quad \mathfrak{g}^2 = \mathfrak{q}(\mathfrak{a}'), \quad \mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p};$$

γ) wenn $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ auf der 4. Seite des Z liegt, ebenso wie im Fall β).

Ferner definieren wir im Falle

$k = 2$: α) wenn $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ auf der 2. Seite des Z liegt,

$\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{p}^1 = \mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$,

$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{p}$;

β) wenn $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ auf der 4. Seite des Z liegt,

$\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{p}^1 = \mathfrak{p}$,

$\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{a}'$, $\mathfrak{g}^2 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}^2 = \mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$;

γ) wenn $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ auf der 3. Seite des Z liegt, ebenso wie im Fall β).

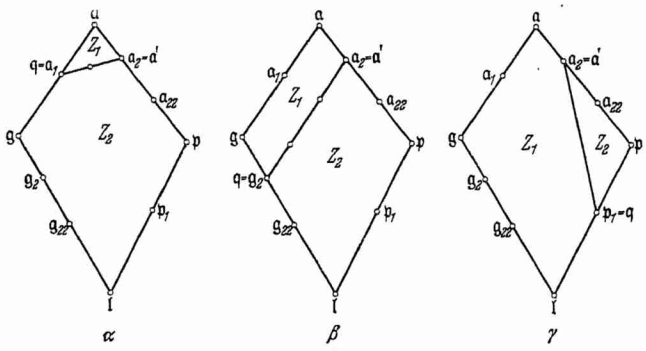


Fig. 6.

In Fig. 6 sind Graphen des Φ_1 gezeichnet, und zwar für jeden der unter $k = 1$ angeführten Fälle. Die Elemente $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{l}$ wurden hierbei als untereinander verschieden angenommen. Den folgenden Überlegungen (bis S. 523) liegt die gleiche Annahme zugrunde; sie sind jedoch auf alle (S. 516) zugelassenen Fälle übertragbar und gewinnen dabei noch erheblich an Einfachheit.

Es ist leicht nachzuprüfen, daß $(\mathfrak{a}^i, \mathfrak{g}^i, \mathfrak{p}^i)$ $(i = 1, 2)$ in jedem der 6 Fälle die entsprechenden Bedingungen erfüllen, die S. 516 $(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$ auferlegt wurden: Es gilt $\mathfrak{g}^i$, $\mathfrak{p}^i \neq \mathfrak{a}^i$. Die Folgen $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{g}^i)$, $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{p}^i)$ haben ein Element, $\mathfrak{l}_i$, gemein. Die Mengen $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{a}^i) - \mathfrak{R}_1(\mathfrak{g}^i)$, $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{a}^i) - \mathfrak{R}_2(\mathfrak{p}^i) - \mathfrak{a}^i$, $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{g}^i) - \mathfrak{R}_2(\mathfrak{l}^i)$, $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{p}^i) - \mathfrak{R}_1(\mathfrak{l}^i) + \mathfrak{l}^i$ sind nach (E) paarweise elementefremd. Damit definiert jedes Tripel $(\mathfrak{a}^i, \mathfrak{g}^i, \mathfrak{p}^i)$ einen Komplex $Z(\mathfrak{a}^i, \mathfrak{g}^i, \mathfrak{p}^i) = Z_i$. Es gilt

(F) Alle Elemente von Z_1, Z_2 sind in Φ_1 enthalten. Jedes Element von Φ_1 gehört mindestens einem der Z_1, Z_2 an.

(G) Ein beliebiges Element der 1. oder 2. Seite des Z gehört entweder zur 1. oder 2. Seite des Z_1 oder zur 1. oder 2. Seite des Z_2.

(H) W gehört der 1. oder 2. Seite des Z_2 an.

In Fig. 6 trägt jedes von einem Z_i begrenzte Gebiet dessen Namen. Wir wollen im folgenden sagen, Z sei in die Komplexe Z_1, Z_2 *zerlegt*. $\mathfrak{a}'$ *vermittelt* die Zerlegung. Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Element $\mathfrak{a}'$ eine Zerlegung vermittele, ist, daß $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ nicht auf der gleichen Seite des Z liegen.

(I) Ist Z unzerlegbar, so ist Z Elementarkomplex.

Beweis. Enthält die 1. oder 2. Seite des Z ein von $\mathfrak{a}$ verschiedenes Element $\mathfrak{m}$, so ist Z zerlegbar. Das ist klar, wenn $\mathfrak{m}$ und $\mathfrak{q}(\mathfrak{m})$ nicht auf der gleichen Seite liegen. Im anderen Falle existiert nach (D) ein von $\mathfrak{a}$ verschiedenes Element $\mathfrak{n}$ der 1. oder 2. Seite, welches mit $\mathfrak{q}(\mathfrak{n})$ *nicht* auf der gleichen Seite liegt. Setzen wir $\mathfrak{a}' = \mathfrak{n}$, so wird durch dieses Element eine Teilung des Z vermittelt. Im Falle der Unzerlegbarkeit von Z folgt also, daß seine 1. und 2. Seite nur den Eckpunkt $\mathfrak{a}$ enthalten. Somit gilt $\mathfrak{a}_1 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{a}_2 = \mathfrak{p}$, Z ist Elementarkomplex.

Sei Φ_1' die Menge aller Elemente, die zu Φ_1, aber nicht zur 3. oder 4. Seite des Z gehören.

(K) Die Eckpunkte von Φ_1' gehören zu $\mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$. (Die entsprechende Behauptung gilt für die Strecken von Φ_1'.)

Beweis. $\mathfrak{a}'$ gehört wegen (B) zu $\mathfrak{E}(\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{p})$. $\mathfrak{a}_k'$ gehört jedenfalls zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{a})$. Sei $\mathfrak{a}_k' \neq \mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$. Wäre es Element von $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ oder $\mathfrak{R}(\mathfrak{p})$, so müßte es nach H, Satz 18 mit einem der Elemente der 3. oder 4. Seite des Z identisch sein, also $\mathfrak{a}_k' = \mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$ (Widerspruch). Den gleichen Schluß können wir sukzessiv auf alle Eckpunkte von W anwenden.

Wir schreiben $\mathfrak{E}(\mathfrak{a}^1, \mathfrak{g}^1, \mathfrak{p}^1) = \mathfrak{E}_1$, $\quad \mathfrak{E}(\mathfrak{a}^2, \mathfrak{g}^2, \mathfrak{p}^2) = \mathfrak{E}_2$.

(L) $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{E}_2$ ist leer.

Beweis (nur für $k = 1$): Wir haben $\mathfrak{E}_2 \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{a}^2) = \mathfrak{R}(\mathfrak{p}^1)$; $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{R}(\mathfrak{p}^1)$ ist leer, woraus die Behauptung folgt.

(M) $\mathfrak{E}_1 \subseteq \mathfrak{E}$.

Beweis: Im Falle α) haben wir $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{g}^1)$, also $\mathfrak{R}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{g}^1)$, sonst $\mathfrak{R}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{g}^1)$, also

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{g}^1).$$

Wir haben stets $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{p}^1)$, also

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{p}^1).$$

Somit gilt: $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{R}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{E}_1 \cap \mathfrak{R}(\mathfrak{p})$ sind leer. Das gibt mit $\mathfrak{E}_1 \subseteq \mathfrak{R}(\mathfrak{a})$ die Behauptung.

(N) $\mathfrak{E}_2 \subseteq \mathfrak{E}$.

Beweis (für $k = 1$): Im Falle α) gilt $\mathfrak{R}(\mathfrak{g}^2) = \mathfrak{R}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{R}(\mathfrak{p}^2) = \mathfrak{R}(\mathfrak{p})$, so daß (N) schon bewiesen ist.

Im Falle β), γ) gilt $\mathfrak{R}(\mathfrak{p}^2) = \mathfrak{R}(\mathfrak{p})$, also

$$\mathfrak{E}_2 \cap \mathfrak{R}(\mathfrak{p}) \text{ ist leer.} \tag{5}$$

Es braucht nur noch gezeigt zu werden, daß $\mathfrak{E}_2 \cap \mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ leer ist. $\mathfrak{a}^2$ gehört zu $\mathfrak{E}_2$, aber nach (B) nicht zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$. Gäbe es überhaupt ein Element von $\mathfrak{E}_2$, das zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ gehört, so gäbe es also eine abbrechende Folge

$$\mathfrak{a}^2, \mathfrak{a}_{k_1}^2, \mathfrak{a}_{k_1 k_2}^2, \ldots, \mathfrak{n},$$

in der alle dem Element $\mathfrak{n}$ vorangehenden Elemente zu $\mathfrak{E}_2$, nicht zu $\mathfrak{K}(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{n}$ aber zu $\mathfrak{E}_2$ *und* $\mathfrak{K}(\mathfrak{g})$ gehörte. Wegen (5) gehört keines der dem Element $\mathfrak{n}$ vorangehenden Elemente zu $\mathfrak{K}(\mathfrak{p})$. Alle diese Elemente gehören also zu $\mathfrak{E}$. Folglich muß nach *H*, Satz 18, $\mathfrak{n}$

im Falle β) mit einem der Elemente

$$\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{g}_{2\,2},\ \ldots,\ {}_2\mathfrak{g}^2,$$

im Falle γ) mit einem Element der Menge

$$\mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_2,\ \mathfrak{g}_{2\,2},\ \ldots,\ {}_2\mathfrak{l}$$

identisch sein.

Fall β). In der Menge

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}_1,\ \ldots,\ {}_1\mathfrak{g},\ \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_2,\ \ldots,\ {}_2\mathfrak{g}^2 \tag{6}$$

muß ein erstes Element $\mathfrak{m}$ existieren, welches zu $\mathfrak{K}(\mathfrak{a}^2)$ gehört, denn $\mathfrak{n}$ ist in (6) enthalten. $\mathfrak{n}$ ist jedenfalls Element von $\mathfrak{K}(\mathfrak{m})$. Da $\mathfrak{a}$ $\mathfrak{K}(\mathfrak{a}^2)$ nicht angehört, muß $\mathfrak{m}$ nach *H*, Satz 17 einer der Ketten $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{a}^2)$, $\mathfrak{K}_2(\mathfrak{a}^2)$ angehören.

Die Kette $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{a}^2)$ läßt sich in die Mengen

$$\mathfrak{a}^2,\ \mathfrak{a}_1^2,\ \mathfrak{a}_{11}^2,\ \ldots,\ {}_1\mathfrak{g}^2, \tag{7}$$

$$\mathfrak{g}^2,\ \mathfrak{g}_1^2,\ \mathfrak{g}_{11}^2,\ \ldots \tag{8}$$

zerlegen. Die Elemente (7) und (6) sind nach (E) paarweise verschieden. Den Elementen (8) kann $\mathfrak{m}$ nicht angehören, da aus $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{g}^2)$ ($\mathfrak{n} \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{m})$) auch $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{g}^2)$ folgte.

Die Kette $\mathfrak{K}_2(\mathfrak{a}^2)$ läßt sich in die Mengen

$$\mathfrak{a}^2,\ \mathfrak{a}_2^2,\ \ldots,\ {}_2\mathfrak{p}^2, \tag{7'}$$

$$\mathfrak{p}^2,\ \mathfrak{p}_2^2,\ \mathfrak{p}_{2\,2}^2,\ \ldots \tag{8'}$$

zerlegen. Die Elemente von (7') und (6) sind nach (E) paarweise verschieden. Den Elementen (8') kann $\mathfrak{m}$ nicht angehören, da dann $\mathfrak{n} \subset \mathfrak{K}(\mathfrak{p}^2)$ folgte.

Der Fall γ) ist ganz entsprechend zu erledigen. Die Ketten $\mathfrak{K}_1(\mathfrak{a}^2)$, $\mathfrak{K}_2(\mathfrak{a}^2)$ werden ähnlich aufgeteilt wie unter Fall β). Der Menge (6) entspricht die Menge

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}_1,\ \ldots,\ {}_1\mathfrak{g},\ \mathfrak{g},\ \mathfrak{g}_2,\ \ldots,\ {}_2\mathfrak{l}.$$

(O) $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$.

Beweis (für $k = 1$). Die Menge $\mathfrak{E}$ enthält nach (K) bestimmt die Eckpunkte von Φ_1'. Enthält sie keine weiteren, so schließen wir folgendermaßen: Die Eckpunkte von Φ_1' sind nach (G), (H) in der Menge der Eckpunkte der 1. und 2. Seiten von Z_1 und Z_2 enthalten. Wegen (B), angewendet auf $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2$, gilt also $\mathfrak{E} \subseteq \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$.

Enthält $\mathfrak{E}$ noch andere Eckpunkte als Φ_1', so sei $\mathfrak{m}$ ein solches Element. Es gibt dann eine abbrechende Folge von Nachfolgern

$$\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}_{k_1},\ \mathfrak{a}_{k_1\,k_2},\ \ldots,\ \mathfrak{m}. \tag{9}$$

In dieser Folge sei

(10) $\mathfrak{n}$ das letzte Element, welches Φ_1^1 angehört.

Dieses existiert, da $\mathfrak{a}$ zu Φ_1', $\mathfrak{m}$ nicht zu Φ_1' gehört.

1. Liegt $\mathfrak{n}$ auf der 1. oder 2. Seite des Z_1, so ist $\mathfrak{m}$ Element von $\mathfrak{E}_1$.

$\mathfrak{n}$ gehört nach (B) zu $\mathfrak{E}_1$. Wäre $\mathfrak{m}$ nicht Element von $\mathfrak{E}_1$, so müßte unter den auf $\mathfrak{n}$ folgenden Elementen der Folge (9) bis $\mathfrak{m}$ einschließlich nach H, Satz 18 ein Element existieren, das der 3. oder 4. Seite von Z_1 angehört. Das führt zu einem Widerspruch, denn im Falle

α) gehören die Eckpunkte der 3., 4. Seite von Z_1 zu Φ_1' (Widerspruch mit (10));

β) gehören die Eckpunkte der 4. Seite von Z_1 zu Φ_1' (Widerspruch mit (10)),
die Eckpunkte der 3. Seite von Z_1 zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ (Widerspruch mit $\mathfrak{m} \varepsilon \mathfrak{E}$);

γ) gehören die Eckpunkte der 4. Seite zu Φ_1' oder $\mathfrak{R}(\mathfrak{p})$ (Widerspruch mit (10) bzw. $\mathfrak{m} \varepsilon \mathfrak{E}$),
die Eckpunkte der 3. Seite zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$ (Widerspruch mit $\mathfrak{m} \varepsilon \mathfrak{E}$).

2. Liegt $\mathfrak{n}$ auf der 1. oder 2. Seite von Z_2, so ist $\mathfrak{m}$ Element von $\mathfrak{E}_2$.

Der Beweis verläuft entsprechend dem unter 1. gegebenen. Es gehören im Falle

α), β) die Eckpunkte der 3. Seite von Z_2 zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{g})$,
der 4. Seite von Z_2 zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{p})$;

γ) die Eckpunkte der 3. und 4. Seite von Z_2 zu $\mathfrak{R}(\mathfrak{p})$.

Aus (L) bis (O) folgt

(P) Die Mengen $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ sind elementefremd und es gilt $\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$.

Man zeigt auf Grund von (P) mühelos, daß auch für die durch die Strecken $(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ mit $\mathfrak{m} \varepsilon \mathfrak{E}_1$ bzw. $\mathfrak{E}_2$ zu $\mathfrak{E}_1^1 = \mathfrak{E}^1(\mathfrak{a}^1, \mathfrak{g}^1, \mathfrak{p}^1)$ bzw. $\mathfrak{E}_2^1 = \mathfrak{E}^1(\mathfrak{a}^2, \mathfrak{g}^2, \mathfrak{p}^2)$ erweiterten Komplexe $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$ die Aussagen

(L') $\mathfrak{E}_1^1$, $\mathfrak{E}_2^1$ sind elementefremd.

(P') $\mathfrak{E}^1 = \mathfrak{E}_1^1 + \mathfrak{E}_2^1$

gelten.

Wir werden nun ebenso, wie wir aus Z mit Hilfe von W zwei Komplexe Z_1, Z_2 erhalten haben, diese Komplexe, wenn möglich, weiter zerlegen. Wir schreiben $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}^0$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^0$, $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}^0$, $Z = Z_0$, $Z_1 = Z_{01}$, $Z_2 = Z_{02}$, $W = W_0$ usw. Wir definieren eine Folge $\mathfrak{F}_n$ von Mengen durch eine Induktionsvorschrift:

$$\mathfrak{F}_0 = \{Z_0\}, \quad \mathfrak{F}_1 = \{Z_{01}, Z_{02}\}.$$

Enthält $\mathfrak{F}_n$ die Komplexe

$$Z_{i_1 \dots i_k} = Z(\mathfrak{a}^{i_1 \cdots i_k}, \mathfrak{g}^{i_1 \cdots i_k}, \mathfrak{p}^{i_1 \cdots i_k}),$$

und ist unter diesen irgendeiner, $Z_{l_1 \dots l_m}$, der einer Teilung fähig ist, so wählen wir in ihm ein Element der 1. bzw. 2. Seite, $\mathfrak{a}' = \mathfrak{a}^{l_1 \cdots l_m 2}$, welches eine Zerlegung vermittelt, und bestimmen die Kette $\mathfrak{K}_h(\mathfrak{a}')$ ($h = 2$ bzw. 1) bis zu dem ersten Element $\mathfrak{q}(\mathfrak{a}')$, welches mit einem Eckpunkt von $Z_{l_1 \dots l_m}$ identisch ist. Mit Hilfe des Weges

$$W_{l_1 \dots l_m}: \qquad (\mathfrak{a}', \mathfrak{a}'_h), \mathfrak{a}'_h, (\mathfrak{a}'_h, \mathfrak{a}'_{hh}), \dots, ({}_h\mathfrak{q}, \mathfrak{q})$$

zerlegen wir jetzt $Z_{l_1 \dots l_m}$ in zwei Komplexe so, wie wir es oben mit Z getan haben. Der Komplex mit dem Hauptpunkt $\mathfrak{a}^{l_1 \cdots l_m}$ erhält die Bezeichnung $Z_{l_1 \dots l_m 1}$, der mit dem Hauptpunkt $\mathfrak{a}^{l_1 \cdots l_m 2}$ die Bezeichnung $Z_{l_1 \dots l_m 2}$. Indem wir den Komplex $Z_{l_1 \dots l_m}$ aus $\mathfrak{F}_n$ entfernen und dafür die beiden Komplexe $Z_{l_1 \dots l_m 1}$, $Z_{l_1 \dots l_m 2}$ hinzufügen, erhalten wir die Menge $\mathfrak{F}_{n+1}$.

Die Konstruktion einer $\mathfrak{F}_{n+1}$ ist auf mannigfache Art durchführbar. Erstens können mehrere in $\mathfrak{F}_n$ enthaltene Komplexe teilungsfähig sein, ferner können in jedem solchen Komplex mehrere Elemente existieren, die für die Wahl von $\mathfrak{a}'$ in Frage kommen. Wir setzen aber fest, daß an der einmal getroffenen Wahl nichts mehr geändert werden darf, so daß die Folge $\mathfrak{F}_n$ dann eindeutig definiert ist.

Wir werden unten beweisen, daß die Folge $\mathfrak{F}_n$ abbrechen muß, weil in einem bestimmten $\mathfrak{F}_{n_0}$ kein teilungsfähiger Komplex mehr enthalten ist. Es ist von Wichtigkeit, daß diese Endmenge für jede Folge $\mathfrak{F}_n$ dieselbe ist, gleich, welche Komplexe und welches Element $\mathfrak{a}'$ wir bei jeder einzelnen Teilung verwenden.

Wir definieren neben $\mathfrak{F}_n$ eine Folge Φ_n von Mengen, welche aus *Eckpunkten* und *Strecken* bestehen. Die Menge Φ_n enthält dieselben Elemente, welche die Komplexe der Menge $\mathfrak{F}_n$ insgesamt enthalten, aber, wie sich herausstellen wird, jedes nur einmal, während in den Komplexen von $\mathfrak{F}_1$ z. B. die Elemente von W_0 insgesamt zweimal vorkommen. Die Konstruktion der Φ_n bildet den kombinatorischen Inhalt der geometrischen Konstruktion des Graphen in der Ebene, so daß die Eigenschaft der Φ_n, kein Element zweimal zu enthalten, der Forderung entspricht, daß jedes Element des abzubildenden Streckenkomplexes nur ein Bild in der Ebene hat.

Φ_0 besteht aus den Elementen von Z_0. Ist Φ_n ($n \geqq 0$) gegeben, so entstehe Φ_{n+1}, indem wir die Elemente des Weges $W_{l_1 \dots l_m}$ zu Φ_n hinzufügen. Hierbei ist $W_{l_1 \dots l_m}$ jener Weg, der zur Konstruktion von $\mathfrak{F}_{n+1}$ verwendet wurde. Kommt ein Element dieses Weges in Φ_n bereits t-mal vor, so ist es in Φ_{n+1} $(t+1)$-fach zu zählen.

Wir schreiben im folgenden $\mathfrak{E}^1(\mathfrak{a}^{i_1 \dots i_k}, \mathfrak{g}^{i_1 \dots i_k}, \mathfrak{p}^{i_1 \dots i_k}) = \mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_k}$.

Sei Φ'_n die Menge aller Elemente, die der 1. und 2. Seite der Komplexe von $\mathfrak{F}_n$ angehören (t-mal vorkommende t-mal gezählt).

(Q) Die Elemente von Φ'_n gehören sämtlich zu $\mathfrak{E}^1_0$.

Beweis. Liegt das Element $\mathfrak{s}$ von Φ'_n etwa in $Z_{i_1 \dots i_k}$ von $\mathfrak{F}_n$, so gilt wegen (B) $\mathfrak{s} \subset \mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_k}$. Aus (P') folgt nun

$$\mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_k} \subset \mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_{k-1}} \subset \dots \subset \mathfrak{E}^1_0,$$

so daß (Q) bewiesen ist.

(R) Jedes Element von Φ'_n hat die Vielfachheit 1.

Beweis. Man zeigt leicht, daß es in $\mathfrak{F}_n$ keine zwei Komplexe $Z_{i_1 \dots i_k}$, $Z_{g_1 \dots g_h}$ mit $h \geqq k$ gibt, für welche $(i_1 \dots i_k)$ und $(g_1 \dots g_k)$ elementweise gleich wären.

Sei nun $\mathfrak{s}$ Eckpunkt oder Strecke von Φ'_n, $\mathfrak{s}$ gehöre der 1. oder 2. Seite des $Z_{i_1 \dots i_k}$ in $\mathfrak{F}_n$ an. Gäbe es in $\mathfrak{F}_n$ einen Komplex $Z_{l_1 \dots l_m}$, dessen Indexfolge $(l_1 \dots l_m)$ von $(i_1 \dots i_k)$ verschieden ist, und dessen 1. oder 2. Seite ebenfalls $\mathfrak{s}$ enthielte, so könnten wir folgendermaßen schließen: $\mathfrak{s}$ gehört wegen (B) zu $\mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_k}$ und $\mathfrak{E}^1_{l_1 \dots l_m}$. Nach der anfangs gemachten Bemerkung gibt es in beiden Indexmengen eine verschiedene p-te Ziffer. Sei p die kleinste Zahl mit $i_p \neq l_p$. Wegen (P') gilt dann

$$\mathfrak{s} \subset \mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_k} \subset \dots \subset \mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_{p-1} i_p},$$

$$\mathfrak{s} \subset \mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_{p-1} l_p \dots l_m} \subset \dots \subset \mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_{p-1} l_p},$$

$\mathfrak{s}$ gehört also zu $\mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_{p-1} 1}$ und $\mathfrak{E}^1_{i_1 \dots i_{p-1} 2}$, was wegen ($L'$) nicht möglich ist.

Aus (Q) und (R) folgt, daß insbesondere die Hauptpunkte der in $\mathfrak{F}_n$ enthaltenen Komplexe sämtlich untereinander verschieden sind und $\mathfrak{E}^1_0$ angehören. Da $\mathfrak{E}^1_0$ nach (C) nur endlich viele Eckpunkte enthält, andererseits $\mathfrak{F}_n$ aus $(n+1)$ Komplexen $Z_{i_1 \dots i_k}$ besteht, muß es ein $\mathfrak{F}_{n_0}$ geben, welches keinen teilungsfähigen Komplex mehr enthält, also nach (I) nur Elementarkomplexe. Es gilt

(S) $\mathfrak{F}_{n_0}$ besteht genau aus allen Elementarkomplexen, deren Hauptpunkte $\mathfrak{E}^1_0$ angehören.

Wir beweisen nämlich:

Zu jedem Eckpunkt $\mathfrak{s}$ von $\mathfrak{E}^1_0$ gibt es einen Index n_1 derart, daß $\mathfrak{s}$ jedem Φ'_n mit $n \geqq n_1$ angehört.

Wenn es überhaupt ein Φ'_{n_1} gibt, dem $\mathfrak{s}$ angehört, so folgt alles weitere aus (G).

Ist $\mathfrak{s}$ Eckpunkt von $\mathfrak{E}^1_0$, so gehört er nach (P') entweder $\mathfrak{E}^1_{0\,1}$ oder $\mathfrak{E}^1_{0\,2}$ an, sagen wir $\mathfrak{E}^1_{0\,i_1}$. Liegt $\mathfrak{s}$ nicht auf der 1. oder 2. Seite des $Z_{0\,i_1}$, so ist $Z_{0\,i_1}$

nach (I) zerlegbar. Da $\mathfrak{F}_{n_0}$ nur unzerlegbare Komplexe enthält, muß es einen maximalen Index $n^1 > 1$ geben, für welchen $Z_{0\,i_1}$ in $\mathfrak{F}_{n^1}$ enthalten ist. Nach (P') gehört nun $\mathfrak{s}$ entweder zu $\mathfrak{E}^1_{0\,i_1\,1}$ oder $\mathfrak{E}^1_{0\,i_1\,2}$, sagen wir zu $\mathfrak{E}^1_{0\,i_1\,i_2}$. Liegt $\mathfrak{s}$ nicht auf der 1. oder 2. Seite des $Z_{0\,i_1\,i_2}$, so ist $Z_{0\,i_1\,i_2}$ zerlegbar. Es muß wiederum ein maximaler Index $n^2 > n^1$ existieren, für welchen $Z_{0\,i_1\,i_2}$ in $\mathfrak{F}_{n^2}$ liegt; so schließen wir weiter. Da nur endlich viele $\mathfrak{F}_n$ existieren, muß wegen $1 < n^1 < n^2 < \ldots$ einmal der Fall eintreten, wo $\mathfrak{s}$ auf der 1. oder 2. Seite eines $Z_{i_1 \ldots i_k}$ liegt. Damit ist (S) bewiesen.

Die Menge Ψ_0 bestehe aus den Elementen der 3. und 4. Seite des Z_0. Dann gilt:

(T) Φ_n entsteht durch Hinzufügen der Elemente Ψ_0 zu Φ'_n.

Beweis: Für $n = 0$ gilt die Behauptung. Sie gelte für ein $n \geqq 0$. Die Menge Φ'_{n+1} ist wegen (G), (H) die um $W_{l_1 \ldots l_m}$ vermehrte Menge Φ'_n. Daraus folgt die Behauptung für $(n+1)$.

(U) Φ_{n_0} enthält die Elemente von Ψ_0 und die Elemente von $\mathfrak{E}^1_0$, jedes mit der Vielfachheit 1.

Beweis. Die Elemente von Φ'_{n_0} haben die Vielfachheit 1 nach (R), die Elemente von Ψ_0 sind paarweise verschieden nach den Voraussetzungen über Z. Φ'_{n_0} besteht wegen (S) aus den Elementen von $\mathfrak{E}^1_0$. Ψ_0 und $\mathfrak{E}^1_0$ sind elementefremd. Also folgt mit (Q), (T) die Behauptung.

§ 3.

Die Konstruktion des Graphen.

Wir legen zunächst einen Fundamentalbereich von $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}^+}$ in die Ebene. Nach *H*, Satz 21, 22 (vgl. auch Einleitung, S. 375) existiert in $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}^+}$ ein Element $\mathfrak{t}$ mit der Eigenschaft: $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{t})$, $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{t})$ haben bis auf $\mathfrak{t}$ kein Element gemein. Ist $\mathfrak{e}\mathfrak{t}$ das erste in $\mathfrak{R}_1(\mathfrak{t})$ enthaltene Element, das aus $\mathfrak{t}$ durch Multiplikation mit einer Einheit $\mathfrak{e}$ hervorgeht, $\mathfrak{f}\mathfrak{y}$ das erste Element von $\mathfrak{R}_2(\mathfrak{t})$, welches aus einem Element $\mathfrak{y}$ der Menge

$$\mathfrak{t},\ \mathfrak{t}_1,\ \ldots,\ _1(\mathfrak{e}\mathfrak{t})$$

durch Multiplikation mit einer Einheit $\mathfrak{f}$ hervorgeht, so bilden $\mathfrak{e}, \mathfrak{f}$ ein System von Grundeinheiten der Ordnung von $\mathfrak{R}$ und die Menge $\mathfrak{E}^1(\mathfrak{t}, \mathfrak{e}\mathfrak{t}, \mathfrak{f}\mathfrak{y})$ bildet einen Fundamentalbereich des $\mathfrak{M}^1_{\mathfrak{R}^+}$.

Um zu den gewohnten Bezeichnungen überzugehen, schreiben wir auch $\mathfrak{t} = \mathfrak{a}$, $\mathfrak{e}\mathfrak{t} = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{f}\mathfrak{y} = \mathfrak{p}$, $\mathfrak{l} = \mathfrak{e}\mathfrak{f}\mathfrak{y}$. Bildelemente werden im Text mit einem * versehen.

Wir legen ein Rechteck in die Ebene, dessen Eckpunkte die Bilder von $\mathfrak{a}, \mathfrak{g}, \mathfrak{l}, \mathfrak{p}$ (in dieser Reihenfolge) darstellen sollen. Die Eckpunkte der 1. Seite

des Z (a, g, p) tragen wir, mit a_1 beginnend, auf der Seite a* g* des Rechtecks ein, die Eckpunkte der 2. Seite des Z (a, g, p) mit a_2 beginnend, auf der Seite a* p* des Rechtecks. Der durch $\overrightarrow{a^* g^*} = \overrightarrow{t^* (et)^*}$ in der Ebene gegebene Vektor werde v_e benannt, der durch $\overrightarrow{\eta^* (f\eta)^*}$ gegebene Vektor v_f. Die noch nicht eingetragenen Eckpunkte des Z (a, g, p), welche jedenfalls alle einem bereits eingetragenen Eckpunkt äquivalent sind, ordnen wir auf den übrigen Seiten des Rechtecks so an, daß das Bild eines ex aus dem von x durch Addition von v_e hervorgeht, entsprechend das Bild eines fx durch Addition von v_f, das Bild eines efx durch Addition von $v_e + v_f$ (vgl. Fig. 7). Den Strecken (m, n) des Z werden die offenen Verbindungsstrecken der Bilder von m, n zugeordnet.

Die Elemente des Z nennen wir Φ_0. Wir teilen das von dem Rechteck begrenzte Gebiet G sukzessiv durch die Bilder der Wege $W_{l_1 \dots l_m}$ (§ 2) auf.

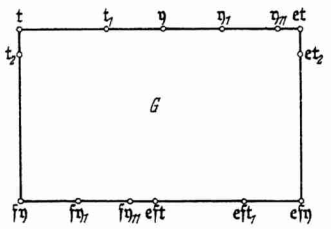


Fig. 7.

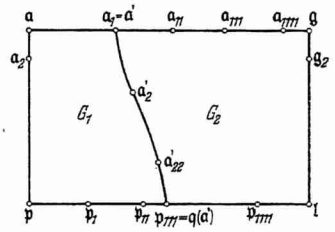


Fig. 8.

Der Weg W_0, der eine Teilung von $Z = Z_0$ vermittelt, kann durch einen das Element (a')* mit dem Element q* verbindenden offenen Jordanbogen dargestellt werden, der ganz in G liegt. Die Eckpunkte von W_0 werden der Reihe nach auf dem Jordanbogen abgetragen (Fig. 8), als erstes Element von a' aus das Element a'_k, danach a'_{kk} usw. In Fig. 8 ist $k = 2$. Die Strecken des W_0 werden auf die die Paare (a')*, $(a'_k)^*$, $(a'_k)^*$, $(a'_{kk})^*$ usw. verbindenden offenen Teilbögen abgebildet. Der von Z_0^* begrenzte abgeschlossene Bereich $\overline{G}$ wird dann zerlegt in das von Z_1^* begrenzte Gebiet G_1, das von Z_2^* begrenzte Gebiet G_2 und die Elemente von Φ_1^*. Die Gebiete G_1, G_2 werden also von den Bildelementen von $\mathfrak{F}_1$ begrenzt. Da die Begrenzungen von G_1, G_2 Jordanbögen sind, können diese Gebiete in der gleichen Weise, wie eben G, weiter zerlegt werden usf. Ist $\mathfrak{F}_n$ die durch die entsprechenden kombinatorischen Teilungen hervorgegangene Komplexmenge, so gilt: Der von Z_0^* begrenzte abgeschlossene Bereich $\overline{G}$ wird zerlegt in die Gebiete, welche die Bilder der Komplexe von $\mathfrak{F}_n$ begrenzen, und die Elemente von Φ_n^*. Nach § 2 ist nach n_0 Schritten keine Teilung mehr möglich. Wir haben alsdann einen Graphen $\Phi_{n_0}^*$ vor uns, in welchem nach (U) jedes Element des Φ_{n_0} genau ein Bild besitzt. Das von Z_0^*

begrenzte abgeschlossene Gebiet wird nach (S), (U) und Konstruktion des Graphen einfach bedeckt von dem Graphen des Φ_{n_0} und von den Gebieten, welche von den Bildern der Elementarkomplexe mit einem Element von $\mathfrak{E}_0^1$ als Hauptpunkt begrenzt werden. Um nun für den ganzen $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}+}^1$ einen Graphen der im Satz 1 erwähnten Eigenschaften zu erhalten, haben wir nur den Graphen des $\mathfrak{E}_0^1$ (Teilgraphen des Φ_{n_0}) als Fundamentalbereich um die Vektoren $a\mathfrak{v}_\mathfrak{e} + b\mathfrak{v}_\mathfrak{f}$ zu verschieben ($a, b = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Ist nun $\mathfrak{f}$ ein beliebiges Element des $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}}^1+$ und $\mathfrak{f} = \mathfrak{e}^a\mathfrak{f}^b\mathfrak{p}$, wo $\mathfrak{p}$ zu $\mathfrak{E}_0^1$ gehört, so weisen wir $\mathfrak{f}$ dasjenige Element der erweiterten Graphen als Bild zu, das aus dem Bild von $\mathfrak{p}$ vermöge Addition mit dem Vektor $a\mathfrak{v}_\mathfrak{e} + b\mathfrak{v}_\mathfrak{f}$ hervorgeht[2]). Wegen der oben hergeleiteten Eigenschaften des Φ_{n_0} erhalten wir damit für $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}}^1+$ einen Graphen der gewünschten Art.

§ 4.

Komplexpermutationen.

Wegen Satz 1 gehört jede in $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}}^1+$ enthaltene Strecke genau zwei Elementarkomplexen an.

Wir werden davon in diesem Paragraphen häufig Gebrauch machen.

Seien ε_{ik} diejenigen der Zahlen ± 1, für welche $\varepsilon_{ik}\varrho_{ik}(\mathfrak{m}) > 0$.

Bezeichnen wir den zu $\mathfrak{m}$ in $\mathfrak{M}_{\mathfrak{R}}^1+$ gehörigen Elementarkomplex mit $E(\mathfrak{m})$, so gilt

2. Satz. $\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$ *ist der Hauptpunkt desjenigen Elementarkomplexes, der mit* $E(\mathfrak{m})$ *die Strecke* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1)$ *gemein hat.*

$\varepsilon_{23}\mathfrak{r}_2(\mathfrak{m})$ *ist der Hauptpunkt desjenigen Elementarkomplexes, der mit* $E(\mathfrak{m})$ *die Strecke* $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2)$ *gemein hat.*

$\mathfrak{r}_3(\mathfrak{m})$ *ist der Gegenpunkt* $\mathfrak{m}_0$ *von* $E(\mathfrak{m})$.

Beweis. Die dritte Behauptung wurde schon in H, Satz 9 bewiesen.

Die zweite Behauptung geht aus der ersten durch Permutation der Indizes 1, 2 hervor.

Zum Beweise der ersten Behauptung genügt es nach der eingangs gemachten Bemerkung zu beweisen, daß $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1)$ in $E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ enthalten ist.

Wir setzen

$$\mathfrak{m} = (\mu_1, \mu_2, \mu_3),\ (\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3),\ (\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0 = (\tau_1, \tau_2, \tau_3).$$

Das Minimum $\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ liegt nach Definition im Quader

$$|x_1| < |\varrho_{11}|, \quad x_2 > 0, \quad |x_3| < |\varrho_{13}|.$$

Es gilt

$$|\mu_2| < |\sigma_2|. \tag{11}$$

[2]) Unter $\mathfrak{e}^a\mathfrak{f}^b(\mathfrak{m}, \mathfrak{n})$ wird $(\mathfrak{e}^a\mathfrak{f}^b\mathfrak{m}, \mathfrak{e}^a\mathfrak{f}^b\mathfrak{n})$ verstanden.

Andernfalls wären die Ungleichungen

$$|\sigma_1| < \varrho_{11}, \quad |\sigma_2| \leqq |\mu_2|, \quad |\sigma_3| < |\varrho_{13}| < \mu_3$$

erfüllt, d. h. $Q_1(\mathfrak{m})$ enthielte einen niedrigeren Gitterpunkt als $\mathfrak{m}$ (Widerspruch).

Aus einer ähnlichen Überlegung (vgl. *H*, Hilfssatz 4) folgt

(12) $$|\mu_1| < \varrho_{11},$$

endlich nach Definition von $\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$

(13) $$|\mu_2| > |\varrho_{12}|.$$

Aus *H*, Hilfssatz 8 entnehmen wir, daß die Folge

(14) $$(\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_2, \ (\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_{21}, \ (\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_{211}, \ \ldots$$

das Element $(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0$ enthält und daß alle eventuellen, dem Element $(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0$ in dieser Folge vorangehenden Elemente $\mathfrak{l}$ in dem Bereich

(15) $$|x_1| < \varrho_{11}, \quad |\varrho_{12}| < |x_2| < |\sigma_2|, \quad x_3 > 0$$

liegen, daß ferner

(16) $$\mathfrak{r}_1(\mathfrak{l}) = \pm\, \mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$$

gilt und $(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0$ selbst der niedrigste Gitterpunkt im Quader

(17) $$|x_1| < \varrho_{11}, \quad |x_2| < |\varrho_{12}|, \quad x_3 > 0$$

ist. Die Aussagen (15), (17) werden wir nicht vollständig verwenden; diese Ungleichungen sollen auch zur besseren Veranschaulichung der Lage der fraglichen Gitterpunkte dienen.

Sei von den Elementen

$$\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})), \quad (\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_2, \quad (\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_{21}, \quad \ldots, \quad (\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0$$

$\mathfrak{z} = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)$ das letzte, für welches

(18) $$|\zeta_2| > |\mu_2|$$

ist, $\mathfrak{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ das darauffolgende. $\mathfrak{z}$ existiert, denn es gilt wegen (11), (13), (17)

$$|\sigma_2| > |\mu_2| > |\tau_2|.$$

$\mathfrak{x}$ existiert wegen $|\mu_2| > |\tau_2|$.

$\mathfrak{x}$ ist wegen (16), (17) der niedrigste Gitterpunkt in

$$|x_1| < |\varrho_{11}|, \quad |x_2| < |\zeta_2|, \quad x_3 > 0.$$

Auch $\mathfrak{m}$ liegt wegen (12), (18) in diesem Quader. Wäre $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{m}$ verschieden, so gälte also $\xi_3 < \mu_3$. Ferner gälte $|\xi_2| < |\mu_2|$ nach Definition von $\mathfrak{x}$. Da $\mathfrak{x}$ in (15) oder (17) liegt, hätten wir also mit Rücksicht auf (18)

$$|\xi_1| < |\varrho_{11}|, \quad |\xi_2| < |\mu_2|, \quad 0 < \xi_3 < \mu_3,$$

im Widerspruch zur Definition von $\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$. Also ist $\mathfrak{x} = \mathfrak{m}$.

$\mathfrak{m}$ ist daher mit einem der Elemente

$$(19) \qquad (\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_2,\ (\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_{21},\ \ldots,\ (\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0$$

identisch; da aber $(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0$ in (17) liegt, folgt mit Rücksicht auf (13) $\mathfrak{m} \neq (\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_0$. Somit ist auch $\mathfrak{m}_1$ Element der Menge (19), d. h. die Strecke $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1)$ ist in $E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ enthalten.

3. Satz. $\mathfrak{s}_{32}(\mathfrak{m})$, *der 1-Nachfolger im Komplex* $\mathfrak{M}^1_{312}$, *ist*

im Falle $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_0$ *identisch mit* $\mathfrak{r}_2(\mathfrak{m})$,

im Falle $\mathfrak{m}_2 \neq \mathfrak{m}_0$ *(bis aufs Vorzeichen) das vorletzte der Elemente*

$$\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_{21}, \mathfrak{m}_{211}, \ldots, \mathfrak{m}_0.$$

$\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m})$, *der 2-Nachfolger im Komplex* $\mathfrak{M}^1_{312}$, *ist (bis aufs Vorzeichen) der Hauptpunkt desjenigen Elementarkreises, der mit* $E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ *eine Strecke mit* $\mathfrak{m}$ *als Endpunkt gemein hat.*

Mit Hilfe von Satz 3 und Satz 2 kann der Komplex $\mathfrak{M}^1_{321}$ leicht aus $\mathfrak{M}^1_{123}$ ermittelt werden. Die gleiche Abbildung auf $\mathfrak{M}^1_{321}$ angewendet, ergibt den Komplex $\mathfrak{M}^1_{231}$. Die nochmalige Anwendung führt zum Ausgangskomplex $\mathfrak{M}^1_{123}$ zurück.

Beweis des Satzes 3. Zunächst der Beweis der Aussage über $\mathfrak{s}_{32}(\mathfrak{m}) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

I. $\mathfrak{m}_2 \neq \mathfrak{m}_0$. Das vorletzte der Elemente $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_{21}, \ldots, \mathfrak{m}_0$ heiße $\mathfrak{t} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$. Aus H, Hilfssatz 8 folgt: $\mathfrak{m}_0 = \mathfrak{r}_3(\mathfrak{m})$ hat von allen Gitterpunkten des Bereiches

$$|x_1| < |\mu_1|, \quad |x_2| < |\tau_2|, \quad x_3 > 0$$

die kleinste Distanz von der x_1x_2-Ebene. In dem Quader

$$|x_1| < |\mu_1|, \quad |x_2| < |\tau_2|, \quad |x_3| < \varrho_{33}$$

liegt also kein von Null verschiedener Gitterpunkt. Da nun $\mathfrak{s}_{32}(\mathfrak{m})$ nach Definition unter den Gitterpunkten des Bereiches

$$|x_1| < |\mu_1|, \quad x_2 > 0, \quad |x_3| < \varrho_{33}$$

die kleinste Distanz von der x_1x_3-Ebene hat und nach H, Hilfssatz 8 $\mathfrak{t}$ oder $-\mathfrak{t}$ in diesem Bereich liegt, folgt $\mathfrak{s}_{32}(\mathfrak{m}) = \pm\mathfrak{t}(\mathfrak{m})$.

II. $\mathfrak{m}_2 = \mathfrak{m}_0$. Dann liegt im Quader

$$|x_1| < |\mu_1|, \quad |x_2| < \varrho_{22}, \quad |x_3| < \varrho_{33}$$

kein von Null verschiedener Gitterpunkt. Da nun $\mathfrak{r}_2(\mathfrak{m})$ in

$$|x_1| < |\mu_1|, \quad x_2 > 0, \quad |x_3| < |\mu_3| < \varrho_{33}$$

liegt, folgt $\mathfrak{s}_{32}(\mathfrak{m}) = \mathfrak{r}_2(\mathfrak{m})$.

Es folgt der Beweis der Aussage über $\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m})$. Ist $\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m})$ (bis aufs Vorzeichen) durch die Angaben des Satzes 3 eindeutig bestimmt?

$E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ enthält nach Satz 2 die Strecke $(\mathfrak{m}, \mathfrak{m}_1)$. Da $\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$ von $\mathfrak{m}$ verschieden ist, enthält $E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ auch eine Strecke mit $\mathfrak{m}$ als *Endpunkt*, und zwar genau eine. Somit ist $\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m})$ eindeutig bestimmt.

Sei ε diejenige der Zahlen ± 1, für welche $\varepsilon\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m})$ eine positive dritte Koordinate hat. Wir brauchen dann nur noch zu zeigen, daß $E(\varepsilon\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}))$ mit $E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ eine Strecke $(\mathfrak{n}, \mathfrak{m})$ gemein hat.

Der im Quader

$$|x_1| < \varrho_{11}, \quad x_2 > 0, \quad |x_3| < \mu_3$$

der x_1x_2-Ebene nächstgelegene Gitterpunkt ist $\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

Insbesondere haben wir also

$$|\sigma_1| < \varrho_{11}, \quad |\sigma_3| < \mu_3. \tag{20}$$

Der Quader $|x_1| < \varrho_{11}$, $|x_2| < |\mu_2|$, $|x_3| < \mu_3$ ist (abgesehen vom Nullpunkt) gitterpunktfrei, und zwar nach Definition von $\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$. Also gilt

$$|\mu_2| < |\sigma_2|. \tag{21}$$

Nach Definition von $\mathfrak{f}_{12}(\mathfrak{m})$ ist sogar

(22) der Quader $|x_1| < \varrho_{11}$, $|x_2| < |\sigma_2|$, $|x_3| < \mu_3$ (abgesehen vom Nullpunkt) gitterpunktfrei.

Wir notieren ferner die trivialen Ungleichungen

$$|\varrho_{12}| < \sigma_2; \quad |\mu_1| < \varrho_{11}; \quad |\varrho_{13}| < \mu_3. \tag{23}$$

Die erste folgt aus der Definiton von $\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$ unter Berücksichtigung von (21), die zweite und dritte aus der Definition von $\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})$ allein.

Sei $|\sigma_3| < |\varrho_{13}|$; aus (22) und (23. 3) folgt, daß der Quader

$$|x_1| < \varrho_{11}, \quad |x_2| < \sigma_2, \quad |x_3| < |\varrho_{13}|$$

bis auf den Nullpunkt keinen Gitterpunkt enthält. Mit Rücksicht auf (20. 1) und unsere Voraussetzung folgt also

$$\mathfrak{r}_2(\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m})) = \mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}).$$

Aus (21), (22), (23. 2) folgt

$$(\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_2 = \mathfrak{m}.$$

Nach Satz 2 haben $E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ und $E(\varepsilon\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}))$ die Strecke $(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}), (\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))_2) = (\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}), \mathfrak{m})$ gemein; damit sind wir im Falle $|\sigma_3| < |\varrho_{13}|$ fertig.

Sei $|\sigma_3| > |\varrho_{13}|$. Es folgt aus (20. 2) und (22), daß der Quader

$$|x_1| < \varrho_{11}, \quad |x_2| < |\sigma_2|, \quad |x_3| < |\sigma_3|$$

bis auf den Nullpunkt keinen Gitterpunkt enthält. Wegen (23. 1) und unserer Voraussetzung folgt also

$$\mathfrak{r}_1(\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m})) = \mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}).$$

Aus (22) folgt

$$(\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}))_1 = \mathfrak{m};$$

$E(\varepsilon_{13}\mathfrak{r}_1(\mathfrak{m}))$ und $E(\varepsilon\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}))$ haben nach Satz 2 die Strecke $(\varepsilon\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}), (\varepsilon\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}))_1) = (\varepsilon\mathfrak{s}_{12}(\mathfrak{m}), \mathfrak{m})$ gemein.

(Eingegangen am 11. Dezember 1938.)