Werk

Titel: Über die Teilbarkeitsbedingungen bei den gewöhnlichen Differentialpolynomen

Autor: Rádl, F.,

Ort: Berlin

Jahr: 1939

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0045|log55

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über die Teilbarkeitsbedingungen bei den gewöhnlichen Differentialpolynomen.

Von

Franz Rádl in Prag.

§ 1.

Einleitung.

Der Verfasser definierte schon früher[1] [2]) die Teilbarkeit des gewöhnlichen Differentialpolynoms a von der m-ten Ordnung durch das gewöhnliche Differentialpolynom b von der n-ten Ordnung $(m > n)$

$$\begin{aligned} a &= a(y) = y^m + a_1 y^{m-1} + \ldots + a_m y, \\ b &= b(y) = y^n + b_1 y^{n-1} + \ldots + b_n y, \end{aligned} \tag{1}$$

wo allgemeine Exponenten die Ordnung der Ableitung angeben. Wenn wir die Polynome a, b gleich Null setzen, so entstehen gewöhnliche lineare Differentialgleichungen a, b. Auch alle übrigen Voraussetzungen sollen wie früher gelten.

Die rechts- und linksseitige Division des Polynoms a durch das Polynom b definierte der Verfasser durch die Beziehungen

$$a = pb + r, \quad a = bq + s \tag{2}$$

[3]) und erörterte die Bedeutung des Dividenden a, des Divisors b, der Quotienten p, q, der Reste r, s und der nichtkommutativen Produkte pb, bq.

Zu den gegebenen Polynomen a, b bildete der Verfasser durch wechselseitige Transformation[4]) eine Auffolge und Abfolge von Polynomenpaaren; wenn auch die beiderseitige Folge der adjungierten Polynome hinzugefügt wird, so erhielt er das Schema

$$\begin{aligned} &a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)} \to \ldots \to a^{(-1)}, b^{(-1)} \to a, b \to a^{(1)}, b^{(1)} \to \ldots \to a^{(\mu)}, b^{(\mu)} \\ &a'^{(\nu)}, b'^{(\nu)} \leftarrow \ldots \leftarrow a'^{(1)}, b'^{(1)} \leftarrow a', b' \leftarrow a'^{(-1)}, b'^{(-1)} \leftarrow \ldots \leftarrow a'^{(-\mu)}, b'^{(-\mu)}, \end{aligned} \tag{3}$$

---

[1]) Rádl, Über die verallgemeinerte Division der Differentialpolynome, Math. Zeitschr. **31** (1930), S. 441—456.

[2]) Rádl, Über das verallgemeinerte gemeinsame Maß von zwei Differentialpolynomen, Math. Zeitschr. **40** (1935), S. 375—386.

[3]) Abh. sub [1]), Formel (4), (5).

[4]) Abh. sub [1]), § 3.

auf Grund dessen er *die rechtsseitige μ-indizierte* und *die linksseitige ν-indizierte Teilbarkeit des Polynoms a durch das Polynom b* definierte [5]). Auf Grund dieser Teilbarkeitsdefinition entwickelte der Verfasser gewisse Beziehungen und Theoreme.

Diese Arbeit ist dem eigentlichen Kern des Problems gewidmet, welcher in der Untersuchung der *Teilbarkeitsbedingungen* (Teilbarkeitskriterien) für die Polynome a, b besteht. Mit anderen Worten, wir haben das Gesetz anzugeben, nach welchem die Koeffizienten dieser Polynome a, b gebildet sind, wenn a durch b im allgemeinen Sinne teilbar werden soll.

Die Untersuchung der Teilbarkeit ist beim Polynom zweiter Ordnung ($m = 2$, $n = 1$) sehr einfach und ist darum vorausgesandt. Es folgt dann die allgemeine Theorie der Reste, auf welche das allgemeine Problem zurückgeführt werden kann. Als Beispiel für diese Theorie ist der besondere Fall $m = 3$, $n = 1$ und in einer anderen Abhandlung der besondere Fall $m = 3$, $n = 2$ erörtert. Ähnliche Untersuchungen für die nächst höheren Ordnungen des Polynomenpaares a, b machen dann keine wesentliche Schwierigkeit mehr. Wegen der Weitläufigkeit der Deduktionen geht das Interesse für den allgemeinen Fall m, n verloren.

§ 2.

Äquivalente und normale Polynomenpaare.

Wenn das Polynom a durch das Polynom b rechtsseitig μ-indiziert teilbar (oder nicht teilbar) ist, so gilt dasselbe von den Polynomen

$$\frac{a(\lambda y)}{\lambda}, \qquad \frac{b(\lambda y)}{\lambda}, \tag{4}$$

wo λ eine beliebige (m-mal differenzierbare) Funktion von x ist. Denn wenn wir die Substitution $y \mid \lambda y$ in die erste Beziehung (2) einführen, so sehen wir sofort ein, daß die Koeffizienten der rechtsseitigen Reste

$$r(y), \qquad \frac{r(\lambda y)}{\lambda}$$

zugleich verschwinden oder zugleich nicht verschwinden; die höchsten Koeffizienten r_0 beider Reste sind identisch. Dasselbe gilt bei der linksseitigen Division, wie wir uns überzeugen, wenn wir die zweite Beziehung (2) für das adjungierte Polynom a' so schreiben, daß wir die Polynome b, q, s gegen adjungierte Polynome b', q', s' vertauschen und das Produkt bq in der umgekehrten Reihenfolge der Faktoren $q'b'$ schreiben, so daß dann die rechtsseitige Division des Polynoms a' durch das Polynom b' entsteht. Der höchste Koeffizient s_0 des Restes s bleibt dabei unverändert.

---

[5]) Abh. sub[1]), § 8 und 9.

Wir sagen, daß *das Polynomenpaar a, b mit dem Polynomenpaar* (4) *äquivalent ist.*

Durch wechselseitige Transformation entstehen aus den Polynomen (4) die Polynome

$$\text{(a)} \qquad \frac{a^{(1)}(\lambda y)}{\lambda}, \qquad \frac{b^{(1)}(\lambda y)}{\lambda}$$

und durch Übergang zu den adjungierten Polynomen bekommen wir aus (4)

$$\text{(b)} \qquad \lambda a'\left(\frac{y}{\lambda}\right), \qquad \lambda b'\left(\frac{y}{\lambda}\right);$$

es folgt daraus, wenn wir zum Polynomenpaare (4) das Schema (3) bilden, daß alle Polynomenpaare der ersten Zeile nach dem Gesetze (a), die der zweiten Zeile nach dem Gesetze (b) in äquivalente Polynomenpaare sich verändern. Wenn daher im Schema (3) irgendein Polynomenpaar durch ein äquivalentes ersetzt wird, so haben alle Polynomenpaare des Schemas diese Eigenschaft.

Wenn im Schema (3) beim Polynomenpaar $a^{(\mu)}, b^{(\mu)}$ die Koeffizienten des Restes $r^{(\mu)}$ identisch verschwinden, so ist das Polynom a rechtsseitig μ-indiziert teilbar durch das Polynom b. Aber dieselbe Eigenschaft haben nach dem Vorhergehenden auch die Polynome (4).

Wenn bei den Polynomen $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ der Rest $s^{(-\nu)}$ identisch verschwindet, so ist entsprechend das Polynom a linksseitig ν-indiziert teilbar durch das Polynom b und diese Eigenschaft besitzen auch die Polynome (4).

Im folgenden wird es zweckmäßig sein, hauptsächlich solche Polynome a, b zu untersuchen, bei welchen in der Formel (1) die zweithöchsten Koeffizienten a_1, b_1 gleich sind. Ein solches Polynomenpaar ist mit (1) äquivalent, weil wir bei den Polynomen (4) die Funktion λ berechnen können, welche die Koeffizienten a_1, b_1 gleich macht; wir bekommen

$$\lambda = e^{\frac{1}{m-n}\int (b_1 - a_1)\, dx}.$$

Wir sagen, daß *ein Polynomenpaar a, b, bei welchem die zweithöchsten Koeffizienten gleich sind, normal ist.*

Wenn im Schema (3) *ein Polynomenpaar normal ist, so haben alle Polynomenpaare des Schemas diese Eigenschaft.*

Denn wenn z. B. die Polynome a, b in normaler Gestalt sind, so besitzen zunächst diese Eigenschaft offenbar auch die adjungierten Polynome a', b'.

Unabhängige Lösungen der Gleichungen $a, a^{(1)}$ seien bezüglich $\alpha_i, \alpha_i^{(1)}$. Dann hat der zweithöchste Koeffizient a_1 des Polynoms a den Wert[6])

$$a_1 = -\frac{d}{dx}\log|\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m| = -\frac{d}{dx}\log|\alpha_i|;$$

[6]) Schlesinger, Handb. d. Differentialgleichungen, Bd. I, S. 30.

in diesem Ausdruck befindet sich die Wrónskische Determinante, von welcher hier wie im folgenden nur die erste Zeile (oder nur das allgemeine Element α_i) ausgeschrieben ist.

Zwischen den Determinanten $|\alpha_i|$, $|\alpha_i^{(1)}|$ hat der Verfasser die Beziehung bekommen[7])

$$|\alpha_i^{(1)}| = R\,|\alpha_i|,$$

wo R die Resultante der Polynome a, b bedeutet. Der zweithöchste Koeffizient $a_1^{(1)}$ des Polynoms $a^{(1)}$ ist deswegen

$$a_1^{(1)} = -\frac{d}{dx}\log|\alpha_i^{(1)}| = -\frac{d}{dx}\log(R\,|\alpha_i|) = a_1 - \frac{d}{dx}\log R;$$

ähnlich gilt für den zweithöchsten Koeffizienten $b_1^{(1)}$ des Polynoms $b^{(1)}$, wenn $\beta_i, \beta_i^{(1)}$ unabhängige Lösungen bezüglich der Gleichungen $b, b^{(1)}$ sind,

$$b_1^{(1)} = -\frac{d}{dx}\log|\beta_i^{(1)}| = -\frac{d}{dx}\log(R\,|\beta_i|) = b_1 - \frac{d}{dx}\log R.$$

Aus den beiden letzten Beziehungen erkennen wir, daß aus der Gleichheit von a_1, b_1 auch die Gleichheit von $a_1^{(1)}, b_1^{(1)}$ folgt. Dadurch ist die ganze Behauptung bewiesen.

§ 3.

Bedingung der linksseitigen Teilbarkeit für das Polynom zweiter Ordnung.

Wenn im Schema (3) das normale Polynomenpaar $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ bezüglich zweiter und erster Ordnung die Gestalt

$$a^{(-\nu)} = y'' - \frac{\beta'}{\beta}y', \qquad b^{(-\nu)} = y' - \frac{\beta'}{\beta}y$$

hat, wo β eine beliebige (bis zur gewissen Ordnung differenzierbare) Funktion von x ist, so ist das Polynom $a^{(-\nu)}$ durch das Polynom $b^{(-\nu)}$ linksseitig 0-indiziert teilbar, weil der linksseitige Rest $s^{(-\nu)}$ verschwindet. Umgekehrt hat jedes Polynomenpaar bezüglich zweiter und erster Ordnung, welches diese Eigenschaft hat und normal ist, die obige Gestalt. Die allgemeine Lösung $\bar{y}$ der Gleichung $a^{(-\nu)}$ lautet, wenn C_1, C_2 Integrationkonstanten sind,

$$\bar{y} = C_1\int\beta\,dx + C_2.$$

Wenn wir die Bezeichnung

$$A_\nu = |\beta\beta'\beta''\ldots\beta^\nu|, \quad A_{-1} = 1 \tag{5}$$

einführen, so können wir das Theorem aussprechen:

---

[7]) Abh. sub[1]), S. 448.

Wenn das Polynomenpaar a, b von der zweiten bzw. ersten Ordnung die Gestalt hat

$$a = a(y) = y'' - \frac{d}{dx}\log\frac{A_\nu}{A_{\nu-1}}y' + \frac{d^2}{dx^2}\log A_{\nu-1}\,y,$$

(6)

$$b = b(y) = y' - \frac{d}{dx}\log\frac{A_\nu}{A_{\nu-1}}y,$$

so ist das Polynom a durch das Polynom b linksseitig ν-indiziert teilbar. Die allgemeine Lösung der Gleichung a kann mit Hilfe der Lösung der Gleichung $a^{(-\nu)}$ durch die Formel ausgedrückt werden

$$y = \frac{1}{A_{\nu-1}}|\bar{y}\,\beta\,\beta'\ldots\beta^{\nu-1}|. \tag{7}$$

Das Polynomenpaar (6) ist normal und stimmt für $\nu = 0$ mit dem obigen Polynomenpaare $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ für $\nu = 0$ überein.

In der Formel (7) können wir die Ableitungen $\bar{y}'', \bar{y}''', \ldots, \bar{y}^\nu$ mit Hilfe der Gleichung $a^{(-\nu)}$ durch die Werte $\bar{y}, \bar{y}'$ ausdrücken, so daß diese Formel dann die Gestalt

$$y = .\,\bar{y} + .\,\bar{y}'$$

hat, wenn die Punkte gewisse Funktionen von x bedeuten.

Umgekehrt, wenn das Polynom a zweiter Ordnung durch das Polynom b erster Ordnung linksseitig ν-indiziert teilbar ist, so ist das Polynomenpaar a, b, wenn es auf die normale Gestalt zurückgeführt wird, durch die Ausdrücke (6) gegeben.

Zum Beweis des Theorems setzen wir in (1) für $m = 2$, $n = 1$, außerdem $a_1 = b_1$, so daß die Beziehungen (2) die Gestalt haben

$$y^{(1)\prime} + (r)\,y, \quad y^{(1)} = y' + a_1 y; \qquad Y' + a_1 Y + (s)y, \quad Y = y',$$

wo wir die Reste (r), (s) mit den Klammern versehen, um sie von den allgemeinen Resten r, s in (2) zu unterscheiden.

Wenn wir einerseits den Wert $y^{(1)}$, andererseits den Wert Y eliminieren, so erhalten wir durch Vergleichung

$$(s) - (r) = a_1', \quad (s) = a_2,$$

so daß wir die Koeffizienten der Polynome a, b mit Hilfe der Reste ausdrücken und schreiben können:

$$a = y'' + y'\int[(s) - (r)]\,dx + (s)y, \quad b = y' + y\int[(s) - (r)]\,dx. \tag{8}$$

Wir setzen voraus, daß beim Polynomenpaare $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ wie anfangs der Rest $(s)^{(-\nu)}$ verschwindet. Unter dieser Voraussetzung hat der Verfasser schon früher[8]) die Formeln entwickelt

$$(9) \quad (r) = \frac{A_{\nu+1} A_{\nu-1}}{A_\nu^2} = \frac{d^2}{dx^2} \log A_\nu, \qquad (s) = (r)^{(-1)} = \frac{d^2}{dx^2} \log A_{\nu-1}.$$

Wenn wir diese Werte in die Beziehungen (8) einsetzen, so bekommen wir in der Tat für das Polynomenpaar a, b die Ausdrücke (6).

Um die Richtigkeit der Formel (7) zu beweisen, erwägen wir, daß die Lösung y der Gleichung a mit der Lösung $y^{(1)}$ der Gleichung $a^{(1)}$ durch die Beziehung

$$y^{(1)} = b(y) = y' - \frac{d}{dx} \log \frac{A_\nu}{A_{\nu-1}} \cdot y$$

zusammenhängt. Wenn wir für y den Wert (7) und für $y^{(1)}$ die Formel (7), in welcher der Index ν auf den Index $\nu + 1$ erhöht wird, einsetzen, so erhalten wir die neue Beziehung

$$|\bar{y}\, \beta\, \beta' \ldots \beta^\nu| \cdot A_{\nu-1} = A'_\nu |\bar{y}\, \beta\, \beta' \ldots \beta^{\nu-1}| - A_\nu |\bar{y}\, \beta\, \beta' \ldots \beta^{\nu-1}|',$$

welche nach dem bekannten Determinantensatze[9]) richtig ist. Wenn wir, um die Gleichheit beider Seiten zu bekommen, auf einer Seite das Vorzeichen verändern müssen, so spielt das keine Rolle, weil wir in der Formel (7) wegen der willkürlichen Integrationskonstanten C_1, C_2 den Wert y durch $-y$ ersetzen können.

Wir haben dadurch bewiesen, daß die Formel (7), wenn sie für den Index ν richtig ist, auch für den Index $\nu + 1$ die Richtigkeit behält; weil sie für den Index 0 gilt, hat sie allgemeine Gültigkeit.

Wir werden das Theorem durch ein *Beispiel* erläutern. Den Index ν und die Funktion β können wir beliebig wählen; wenn wir

$$\nu = 2, \qquad \beta = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

setzen, so gibt die Formel (5)

$$A_0 = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad A_1 = -e^{-x^2}, \quad A_2 = -2e^{-\frac{3}{2}x^2};$$

für $\nu = 0, 1, 2$ erhalten wir die Polynome (6)

$$\left.\begin{aligned} a^{(-2)} &= y'' + xy' \\ b^{(-2)} &= y' + xy \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} a^{(-1)} &= y'' + xy' - y \\ b^{(-1)} &= y' + xy \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} a &= y'' + xy' - 2y \\ b &= y' + xy \end{aligned}\right\}$$

und wir können uns durch unmittelbare Berechnung überzeugen, daß das Polynomenpaar $a^{(-2)}, b^{(-2)}$ durch wechselseitige Transformation das Polynomenpaar $a^{(-1)}, b^{(-1)}$, und dieses das Polynomenpaar a, b gibt.

---

[8]) Abh. sub[1]), Formel (26), (23).

[9]) Fricke, Algebra, Bd. 1, S. 68, Formel (7).

Die Formel (7) liefert als Lösungen der Gleichungen $a^{(-2)}, a^{(-1)}, a$ bezüglich

$$\overline{y} = C_1 D + C_2, \quad D = \int e^{-\frac{x^2}{2}} dx; \qquad y = x(C_1 D + C_2) + C_1 e^{-\frac{x^2}{2}};$$

$$y = (1 + x^2)(C_1 D + C_2) + C_1 x e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

§ 4.

Bedingung der rechtsseitigen Teilbarkeit für das Polynom zweiter Ordnung.

Die Polynome, welche zu den Polynomen (6) adjungiert sind, bilden im Schema (3) das Polynomenpaar a', b'. Die Polynomenpaare, welche durch wechselseitige Transformation entstehen, sind dann $a'^{(1)}, b'^{(1)}; \ldots; a'^{(\nu)}, b'^{(\nu)}$; bei dem letzten Polynomenpaar verschwindet der Rest $r'^{(\nu)}$, so daß das Polynom a' durch das Polynom b' rechtsseitig ν-indiziert teilbar ist.

Im Schema (3) können wir beide Zeilen gegeneinander vertauschen, wobei wir auch die Reihenfolge der Polynomenpaare umkehren müssen, damit die Richtung der Pfeile unverändert bleibe. Deswegen können wir die Polynome a', b' mit a, b und die Polynomenpaare $a'^{(1)}, b'^{(1)}; \ldots; a'^{(\nu)}, b'^{(\nu)}$ mit $a^{(1)}, b^{(1)}; \ldots; a^{(\mu)}, b^{(\mu)}$ bezeichnen, wenn wir auch den Index ν gegen μ vertauschen.

Die Polynome a, b haben dann die Gestalt

$$(10) \qquad \begin{aligned} a = a(y) &= y'' + \frac{d}{dx}\log\frac{A_\mu}{A_{\mu-1}} \cdot y' + \frac{d^2}{dx^2}\log A_\mu\, y, \\ b = b(y) &= y' + \frac{d}{dx}\log\frac{A_\mu}{A_{\mu-1}}\, y \end{aligned}$$

und wir können behaupten:

Wenn das normale Polynomenpaar a, b die Gestalt (10) hat, so ist das Polynom a durch das Polynom b rechtsseitig μ-indiziert teilbar.

Wir könnten auch unter der Voraussetzung, daß der Rest $(r)^{(\mu)}$ verschwindet, die Formeln für (s), (r) berechnen und durch Einsetzen in (8) selbständig die Formeln (10) bestimmen. Aber eine ähnliche Formel wie (7) existiert hier nicht; um die Lösung der Gleichung a in (10) am einfachsten zu bekommen, berechnen wir die Lösung der Gleichung a in (6) mit Hilfe der Formel (7) und mit Hilfe der adjungierten Gleichung bestimmen wir die Lösung der Gleichung a in (10).

Deshalb ist es überflüssig, selbständig die rechtsseitige Teilbarkeit zu untersuchen. Für die zweite Ordnung des Polynoms a gilt übrigens, daß die adjungierten Polynome a, a' durch Substitution $y|\lambda y$ zusammenhängen.

§ 5.

Theorie der Reste des allgemeinen Polynoms.

Um die bisherigen Resultate auf Polynome höherer Ordnung zu verallgemeinern, haben wir zuerst die Theorie der Reste des allgemeinen Polynoms a in (1) zu entwickeln.

Das allgemeine Polynom $a(y)$ drücken wir durch das System aus, welches rechtsseitige Division durch einen Divisor erster Ordnung definiert

$$(11) \qquad a(y) = y_1^{m-1} + p_1 y_1^{m-2} + \ldots + p_{m-1} y_1 + r(y), \qquad y_1 = y' + b_1 y$$

und ähnlich durch ein anderes System, durch welches linksseitige Division allgemein mit einem anderen Divisor definiert wird

$$(12) \qquad a(y) = Y' + c_1 Y + (s) y, \qquad Y = y^{m-1} + q_1 y^{m-2} + \ldots + q_{m-1} y.$$

Den Quotienten $p(y_1)$ in (11) können wir von neuem linksseitig durch den Divisor des Systems (12) dividieren, so daß wir bekommen

$$a(y) = Y' + c_1 Y + (rs) y_1 + (r) y, \qquad Y = y_1^{m-2} + t_1 y_1^{m-3} + \ldots + t_{m-2} y_1,$$
$$y_1 = y' + b_1 y;$$

ähnlich dividieren wir den Quotienten $q(y)$ in (12) durch den Divisor des Systems (11), wobei wir die Reste zweiter Ordnung (rs), (sr) einführen:

$$a(y) = Y' + c_1 Y + (s) y, \qquad Y = y_1^{m-2} + t_1 y_1^{m-3} + \ldots + t_{m-2} y_1 + (sr) y,$$
$$y_1 = y' + b_1 y.$$

In der ersten Beziehung eliminieren wir den Wert Y und außerdem im Gliede $(rs) y_1$ den Wert y_1, so daß

$$a(y) = (y_1' + c_1 y_1) \times (y_1^{m-2} + \ldots + t_{m-2} y_1) + (rs) y' + [b_1 (rs) + (r)] y,$$
$$y_1 = y' + b_1 y,$$

wo wir die Elimination von Y durch ein nichtkommutatives Produkt angedeutet haben. Wenn wir ähnlich in der zweiten Beziehung den Wert Y eliminieren, so entsteht

$$a(y) = (y_1' + c_1 y_1) \times (y_1^{m-2} + \ldots + t_{m-2} y_1) + (sr) y' + [(sr)' + c_1 (sr) + (s)] y,$$
$$y_1 = y' + b_1 y.$$

Die Koeffizienten dieser beiden Beziehungen müssen identisch sein. Wir haben schon im voraus die Quotienten von $t(y_1)$ in beiden früheren Beziehungen als gleich vorausgesetzt, was durch die jetzigen Beziehungen begründet ist.

Durch Vergleich der Koeffizienten von y' bei den letzten Beziehungen entsteht die Formel

$$(13) \qquad (rs) = (sr),$$

durch Vergleich der Koeffizienten von y die Formel

$$(14) \qquad (r) - (s) = \frac{1}{\mu\, \nu}\,[\mu\, \nu\, (r\, s)]',$$

in welcher die Buchstaben μ, ν die Lösungen der Polynome bezüglich $y' + by$, $y' - cy$ bedeuten. Wir haben so die Grundformeln (13), (14) für die folgende Untersuchung bekommen.

Aus den Systemen (11), (12) folgt[10])

$$(15) \qquad (r) = \frac{a\,(\mu)}{\mu}, \qquad (s) = \frac{a'\,(\nu)}{\nu}, \qquad (s\, r) = \frac{q\,(\mu)}{\mu},$$

so daß die Formel (14) die Gestalt der Lagrangeschen Beziehung[11]) annimmt

$$\nu a\,(\mu) - \mu a'\,(\nu) = [\nu q\,(\mu)]'.$$

Aus dem Vorhergehenden ist die Bedeutung der Reste zweiter Ordnung (r^2), (s^2), der Reste dritter Ordnung (r^3), (s^3) klar; allgemein ist der Rest $i + j$-ter Ordnung

$$(r^i\, s^j), \qquad 1 \leqq i + j \leqq m,$$

eine Funktion von x, welche entsteht, wenn wir das Polynom a rechtsseitig wie in (11), den so entstehenden Quotienten wieder rechtsseitig usw., im ganzen i-mal dividieren; den so entstehenden Quotienten dividieren wir linksseitig wie in (12), und zwar j-mal wie früher hintereinander. Der Divisor soll bei den einzelnen Divisionen allgemein verschieden sein.

Der Quotient $t\,(y)$ entsteht, wenn wir das Polynom a rechtsseitig, dann den so entstehenden Quotienten linksseitig dividieren, wobei beide Divisoren von erster Ordnung und (allgemein) verschieden sind. Wenn wir die Folge beider Divisionen umkehren, so bleibt der resultierende Quotient $t\,(y)$ unverändert.

Diese Eigenschaft und die Formel (13) verallgemeinert folgendes Theorem:

Der Rest $(r^i s^j)$ und der zu ihm gehörende Quotient bleiben invariant gegenüber allen Permutationen der Buchstaben r, s.

Diese Behauptung gilt der Formel (13) gemäß für die Reste zweiter Ordnung. Wenn wir aus ihrer Gültigkeit für die Ordnung $i + j$ auch auf die Gültigkeit für die Ordnung $i + j + 1$ schließen können, so gilt das Theorem allgemein.

Wir setzen darum voraus, daß die Beziehung

$$(16) \qquad (r^i\, s^j) = (\overline{r^i\, s^j})$$

---

[10]) Abh. sub[1]), Formel (21), (22).

[11]) Diese Beziehung ist allgemeiner als die Beziehung in der Abh. sub[1]), Formel (24).

gilt, wo der Strich auf der rechten Seite bedeutet, daß alle $\frac{(i+j)!}{i!\,j!}$ Permutationen der Buchstaben r, s zulässig sind; wir setzen auch voraus, daß die entsprechenden Quotienten gleich sind.

Ein Rest $i+j+1$-ter Ordnung entsteht, wenn wir von neuem z. B. die rechtsseitige Division (bei der linksseitigen Division ist der Schluß ähnlich) durchführen. Wir haben dann die Gültigkeit der Beziehung

$$(r^i s^j r) = (\overline{r^{i+1} s^j})$$

und die Gleichheit der entsprechenden Quotienten zu beweisen.

Die Reste $(\overline{r^{i+1} s^j})$ verteilen wir in zwei Teile; die Reste des ersten Teiles sollen mit dem Buchstaben r, diejenigen des zweiten Teiles mit dem Buchstaben s enden; beide Teile haben dann bezüglich die Gestalt

$$(\overline{r^i s^j} r), \qquad (\overline{r^{i+1}, s^{j-1}} s).$$

Wir werden die Beziehungen

$$(r^i s^j r) = (\overline{r^i s^j} r), \qquad (r^{i+1}, s^j) = (\overline{r^{i+1} s^{j-1}} s)$$

beweisen, wenn wir am Ende der beiden Seiten bei der ersten Beziehung den Buchstaben r, bei der zweiten Beziehung den Buchstaben s auslassen; denn beide Beziehungen sind dann der Voraussetzung (16) nach gültig und die entsprechenden Quotienten sind gleich. Dasselbe gilt darum auch, wenn wir die Buchstaben bezüglich r, s nicht auslassen.

Daß die linken Seiten der beiden Beziehungen und die entsprechenden Quotienten gleich sind, erkennen wir, wenn wir anfangs den Buchstaben r auslassen. Deswegen sind auch die rechten Seiten gleich und die entsprechenden Quotienten sind identisch, wodurch das Theorem bewiesen ist.

Wir können jetzt leicht die Beziehung (14) verallgemeinern. Wir führen beim Polynom a nacheinander die Divisionen durch, wie sie der Rest $(r^i s^j)$ andeutet. Der entsprechende Quotient ist von der $m-i-j$-ten Ordnung. Wenn wir auf ihn die Beziehung (14) anwenden, so erhalten wir

$$(17)\quad (r^i s^j r) - (r^i s^{j+1}) = \frac{1}{\mu\,\nu}[\mu\,\nu\,(r^{i+1} s^{j+1})]', \quad 0 \leqq i+j \leqq m-1;$$

das erste Glied der linken Seite schreiben wir absichtlich nicht in der Gestalt $(r^{i+1} s^j)$, damit der Zusammenhang mit (14) besser hervortrete.

§ 6.

Bedingung der linksseitigen Teilbarkeit für das Polynomenpaar bezüglich dritter und erster Ordnung.

Auf Grund der Untersuchungen des vorhergehenden Paragraphen können wir ein ähnliches Theorem beweisen wie im § 3.

Wenn im Schema (3) das normale Polynomenpaar $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ bezüglich dritter und erster Ordnung die Gestalt hat

$$a^{(-\nu)} = y''' - \frac{\beta'}{\beta} y'', \qquad b^{(-\nu)} = y' - \frac{\beta'}{\beta} y, \tag{18}$$

so ist das Polynom $a^{(-\nu)}$ durch das Polynom $b^{(-\nu)}$ linksseitig ν-indiziert teilbar, weil der linksseitige Rest $(s)^{(-\nu)}$ verschwindet. Die allgemeine Lösung $\bar{y}$ der Gleichung $a^{(-\nu)}$ lautet, wenn C_1, C_2, C_3 Integrationskonstanten sind,

$$\bar{y} = C_1 \iint \beta \, dx^2 + C_2 x + C_3.$$

Wir führen die Bezeichnungen

$$A_\nu = |\beta \, \beta'' \ldots \beta^{2\nu}|, \quad B_\nu = |\beta \, \beta'' \ldots \beta^{2(\nu-1)} \beta^{2(\nu+1)}|, \quad A_{-1} = B_{-1} = 1 \tag{19}$$

ein und sprechen das Theorem aus:

Wenn die Polynome a, b von der dritten bzw. ersten Ordnung die Gestalt haben

$$\begin{aligned} a = a(y) &= y^{(1)''} + 2\frac{d^2}{dx^2} \log A_\nu \, y^{(1)} + \left(\frac{B_\nu}{A_\nu}\right)' y, \qquad y^{(1)} = b(y), \\ b = b(y) &= y' - \frac{d}{dx} \log \frac{A_\nu}{A_{\nu-1}} \cdot y, \end{aligned} \tag{20}$$

so ist das Polynom a durch das Polynom b linksseitig ν-indiziert teilbar. Die allgemeine Lösung der Gleichung a kann mit Hilfe der Lösung der Gleichung $a^{(-\nu)}$ durch die Formel ausgedrückt werden

$$y = \frac{1}{A_{\nu-1}} |\bar{y} \, \beta \, \beta'' \ldots \beta^{2(\nu-1)}|. \tag{21}$$

Das Polynomenpaar (20) ist normal. Wegen der Übersicht wird das Polynom a in (20) in der Gestalt des Produktes von zwei nichtkommutativen Faktoren bis auf einen Rest ausgedrückt; man könnte auch schreiben:

$$a(y) = \left(y'' + 2\frac{d^2}{dx^2} \log A_\nu \cdot y\right) \times \left(y' - \frac{d}{dx} \log \frac{A_\nu}{A_{\nu-1}} \cdot y\right) + \left(\frac{B_\nu}{A_\nu}\right)' \cdot y.$$

Zum Beweis des Theorems schreiben wir die rechtsseitige Division des Polynomenpaares a, b bezüglich von der m-ten und 1-ten Ordnung in der Gestalt (11); der Quotient dieser Division ist $p\,(y_1)$ oder kurz p. Dann können wir die linksseitige Division des Polynomenpaares $a^{(1)}, b^{(1)}$ in der Gestalt ausschreiben [12])

$$a^{(1)} = a^{(1)}(y^{(1)}) = Y' + b_1^{(1)} Y + (s)^{(1)} y^{(1)}, \quad Y = (y^{(1)})^{m-1} + \ldots + p_{m-1} y^{(1)},$$

so daß der Quotient wieder p ist; wir erhalten die Beziehung

$$(s)^{(1)} = (r)^{(0)}, \tag{22}$$

[12]) Abh. sub[1]), Formel (13).

in welcher zum Rest $(s)^{(1)}$ der Divisor $b^{(1)}$, zum Rest $(r)^{(0)}$ der Divisor b gehört. Deshalb gilt auch

$$(s)^{(2)} = (r)^{(1)},$$

wo zu den Resten $(s)^{(2)}$, $(r)^{(1)}$ bezüglich die Divisoren $b^{(2)}, b^{(1)}$ gehören.

Die Polynome $a^{(2)}, a^{(1)}$ haben denselben Quotienten, wenn er gerade so wie der gemeinschaftliche Quotient p der Polynome $a, a^{(1)}$ gebildet wird. Bei diesem Quotienten $p^{(1)}$ führen wir die linksseitige Division mit dem Divisor $b^{(1)}$ durch, so daß die Reste bezüglich $(s^2)^{(2)}$, $(rs)^{(1)}$ entstehen, welche ersichtlich identisch sind. Dem § 5 und der Beziehung (22) nach gilt

$$(s^2)^{(2)} = (rs)^{(1)} = (sr)^{(1)} = (r^2)^{(0)},$$

wo zu diesen Resten bezüglich die Divisoren $b^{(2)}, b^{(1)}$; $b^{(1)}, b^{(1)}$; $b^{(1)}\, b^{(1)}$; $b^{(0)}, b^{(1)}$ gehören.

Geradeso begründen wir die Beziehungen

$$(s^3)^{(3)} = (rs^2)^{(2)} = (srs)^{(2)} = (r^2 s)^{(1)} = (sr^2)^{(1)} = (r^3)^{(0)};$$

zu diesen Resten gehören bezüglich die Divisoren $b^{(3)}, b^{(2)}, b^{(1)}$; $b^{(2)}, b^{(2)}, b^{(1)}$; $b^{(2)}, b^{(2)}, b^{(1)}$; $b^{(1)}, b^{(2)}, b^{(1)}$; $b^{(1)}, b^{(1)}, b^{(2)}$; $b^{(0)}, b^{(1)}, b^{(2)}$.

Wir drücken jetzt das Polynomenpaar a, b von der dritten bzw. ersten Ordnung in der Gestalt der doppelten rechtsseitigen Division

$$(23)\quad a = a\,(y) = y_1' - b_1^{(1)}\, y_1 + (r^2)\, y^{(1)} + (r)\, y, \qquad y_1 = y^{(1)\prime} + b_1^{(1)}\, y^{(1)},$$
$$y^{(1)} = y' + b_1 y$$

und ähnlich in der Gestalt der doppelten linksseitigen Division

$$(24)\quad a = a(y) = Y' + b_1 Y + (s)\, y, \qquad Y = y_1' + b_1^{(-1)}\, y_1 + (s^2)\, y,$$
$$y_1 = y' - b_1^{(-1)}\, y$$

aus; die Werte $b_1^{(1)}, b_1^{(-1)}$ bedeuten die Koeffizienten bezüglich der Polynome $b^{(1)}, b^{(-1)}$. Die Divisoren der beiden Beziehungen sind durch die Reste (r), (r^2), (s), (s^2) vorgeschrieben; die Quotienten $y_1' - b_1^{(1)}\, y_1$, $y' - b_1^{(-1)}\, y$ sind so gewählt, daß das Polynomenpaar a, b wie in (20) normal sei.

Wenn wir das Polynomenpaar $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ in der Gestalt (24) ausschreiben und wenn wir dabei voraussetzen, daß *beide Reste* $(s)^{(-\nu)}$, $(s^2)^{(-\nu)}$ *verschwinden*,

$$(25)\qquad (s)^{(-\nu)} = 0, \qquad (s^2)^{(-\nu)} = 0,$$

so erhalten wir

$$a^{(-\nu)} = Y' + b_1^{(-\nu)}\, Y, \qquad Y = y_1', \qquad y_1 = y',$$

weil das Polynom $b^{(-\nu-1)}$ nicht mehr existiert und weil deswegen sein Koeffizient $b_1^{(-\nu-1)}$ gleich Null ist. Diese Gestalt stimmt mit (18) überein, wenn wir die Lösung des Polynoms $b^{(-\nu)}$ mit β bezeichnen; die Beziehungen (18) genügen dem Gesetz (20) für $\nu = 0$.

Zur linksseitigen 0-indizierten Teilbarkeit des Polynoms $a^{(-\nu)}$ durch das Polynom $b^{(-\nu)}$ genügt einfach das Verschwinden des Restes $(s)^{(-\nu)}$; um einfache Formeln (20) zu bekommen, müssen wir die ganze Bedingung (25) voraussetzen und nur unter dieser Bedingung ist das vorgelegte Theorem umkehrbar wie im § 3.

Durch Elimination von y_1 in der Beziehung (23) erhalten wir

(26) $a(y) = y^{(1)\prime} + [b_1^{(1)\prime} - (b_1^{(1)})^2 + (r^2)]\, y^{(1)} + (r)\, y, \quad y^{(1)} = y' + b_1 y;$

wenn wir unter der Voraussetzung (25) die Werte (r), (r^2), $b_1^{(1)}$ berechnen und in die Beziehung (26) einsetzen und wenn wir die Übereinstimmung mit den Formeln (20) bekommen, so wird das Theorem bewiesen sein.

§ 7.

Zurückführung der vorhergehenden Untersuchung auf die Richtigkeit einer Beziehung.

Zum Beweis der Formeln (20) wenden wir die Beziehung (14) auf das Polynomenpaar $a^{(1)}, b^{(1)}$ an. Wir bekommen, weil das Produkt $\mu \cdot \nu$ gleich Eins ist,

$$(r)^{(1)} - (s)^{(1)} = [(rs)^{(1)}]';$$

die Reste $(s)^{(1)}$, $(rs)^{(1)}$ können wir nach dem vorhergehenden Paragraphen durch die Reste $(r)^{(0)}$, $(r^2)^{(0)}$ ersetzen, so daß die Beziehung lautet:

$$(r)^{(1)} - (r)^{(0)} = [(r^2)^{(0)}]'. \tag{c}$$

Jetzt wenden wir die Beziehung (17) auf das Polynomenpaar a, b an und zwar für $i = 1$, $j = 0$; der Wert μ bedeutet hier die Lösung $\beta^{(1)}$ des Polynoms $b^{(1)}$, der Wert ν die Lösung $\frac{1}{\beta}$ des zu b adjungierten Polynoms b'. Die Beziehung lautet

$$(r^2)^{(0)} - (rs)^{(0)} = \frac{1}{R}[R\,(r^2 s)^{(0)}]'$$

oder, wenn wir die Reste $(rs)^{(0)}$, $(r^2 s)^{(0)}$ durch die Reste $(r^2)^{(-1)}$, $(r^3)^{(-1)}$ ersetzen,

$$(r^2)^{(0)} - (r^2)^{(-1)} = \frac{1}{R}[R\,(r^3)^{(-1)}]'. \tag{d}$$

Wir haben so zwei Hauptbeziehungen (c), (d) für den Beweis der Formeln (20) bekommen. Jetzt berechnen wir für das Polynomenpaar (18) die Reste $(r)^{(-\nu)}, (rs)^{(-\nu)}$, zu welchen nach dem § 6 die Divisoren bezüglich $b^{(-\nu)}; b^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$ gehören. Der Rest $(rs)^{(-\nu)}$ ist nach § 6 dem Reste $(r^2)^{(-\nu-1)}$ gleich; dieser Rest hat deswegen einen Sinn, obgleich er den Index eines nichtexistierenden Polynomenpaares $a^{(-\nu-1)}, b^{(-\nu-1)}$ hat. Wir bekommen zuerst

$$(r)^{(-\nu)} = R^{(-\nu)} = \frac{a^{(-\nu)}(\beta)}{\beta} = \frac{A_1}{A_0^3}.$$

Wenn wir das Polynomenpaar (18) in der Gestalt der linksseitigen Division anschreiben, so erhalten wir den Rest $(s)^{(-\nu)}$ und den Quotienten y''. Nach der ersten Formel (15) ergibt sich hieraus

$$(r^2)^{(-\nu-1)} = (r\,s)^{(-\nu)} = (s\,r)^{(-\nu)} = \frac{\beta''}{\beta} = \frac{A_0''}{A_0}.$$

Wir behaupten, daß für das Polynomenpaar a, b die Formeln gelten

$$(27)\ (r) = R = \frac{A_{\nu+1}A_{\nu-1}}{A_\nu^2},\quad (r^2)^{(-1)} = \frac{A_\nu''}{A_\nu} - 2\frac{A_\nu'}{A_\nu}\frac{A_{\nu-1}'}{A_{\nu-1}} + \frac{A_\nu''}{A_\nu},\quad \beta^{(\nu)} = \frac{A_\nu}{A_{\nu-1}},$$

wo der Rest $(r^2)^{(-1)}$ dem Reste (rs) gleich ist und wo $\beta^{(\nu)}$ die Lösung des Polynoms b bedeutet.

Für $\nu = 0$ erhalten wir die obigen Formeln für das Polynomenpaar $a^{(-\nu)}, b^{(-\nu)}$; wenn wir beweisen, daß wir aus der Richtigkeit der Formeln (27) für den Index ν auch auf ihre Gültigkeit für den Index $\nu + 1$ schließen können, so werden diese Formeln allgemein bewiesen sein. Wenn wir die Werte (27) in die Beziehung (26) einsetzen, so erhalten wir Übereinstimmung mit (20), so daß damit auch das vorgelegte Theorem bewiesen sein wird.

Zur Durchführung dieses Verfahrens werden wir die Beziehungen (c), (d) benützen. Dazu müssen wir zuerst den Wert des Restes $(r^3)^{(-1)}$ in (d) berechnen und zu dieser Berechnung den Wert $\beta^{(\nu+1)}$ bestimmen.

Wenn wir die Richtigkeit der Formeln (27) für den Index ν voraussetzen, so schließen wir zuerst

$$\beta^{(\nu+1)} = a\,(\beta^{(\nu)}) = R\,\beta^{(\nu)} = \frac{A_{\nu+1}}{A_\nu},$$

wodurch das Gesetz (27) für $\beta^{(\nu)}$ bei dem um eine Einheit erhöhten Index $\nu + 1$ bewiesen ist. Wir führen beim Polynomenpaar a, b die rechtsseitige Division zweimal hintereinander durch, wie es die Beziehung (23) ausdrückt; wir bekommen den Rest $(r^2)^{(-1)}$ und den Quotienten $y_1' - b_1^{(1)} y_1$. Dieses Polynom dividieren wir linksseitig durch den Divisor b, wir erhalten den Rest $(r^2 s)$, welcher dem Reste $(r^3)^{(-1)}$ gleich ist. Um den Wert dieses Restes zu berechnen, haben wir nach der zweiten Formel (15) in das adjungierte Polynom $-y_1' - b_1^{(1)} y_1$ für y_1 den Wert $\frac{1}{\beta^{(\nu)}}$ einzusetzen und dann mit $\frac{1}{\beta^{(\nu)}}$ zu dividieren, so daß

$$(r^3)^{(-1)} = \frac{d}{dx}\log(\beta^{(\nu)}\beta^{(\nu+1)}) = \frac{d}{dx}\log\frac{A_{\nu+1}}{A_\nu}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck, dann die vorausgesetzten Werte für $(r^2)^{(-1)}$ und R in (d) einsetzen, so erhalten wir nach einfacher Rechnung den Wert für den Rest $(r^2)^{(0)}$, welcher mit (27) übereinstimmt, wenn wir den Index ν auf $\nu + 1$ erhöhen.

Jetzt setzen wir in die Beziehung (c) diesen Wert für $(r^2)^{(0)}$, dann den vorausgesetzten Wert für $(r)^{(0)}$ aus (27) und endlich denjenigen Wert für $(r)^{(1)}$ ein, wie wir ihn nach dem Gesetz (27) für den Index $\nu+1$ erwarten. Wenn beide Seiten der Beziehung (c) gleich sein werden, so sind alle Formeln (27) allgemein gültig und damit wird das vorgelegte Theorem bewiesen sein.

Wir setzen für die Reste $(r)^{(1)}$, (r) die Werte

$$(r)^{(1)} = \left(\frac{B_{\nu+1}}{A_{\nu+1}}\right)', \quad (r) = \left(\frac{B_\nu}{A_\nu}\right)',$$

welche wir nach dem schon sub [9]) benützten Determinantensatz aus (27) bekommen. Wenn wir dann beide Seiten der Beziehung (c) integrieren, so haben wir die Richtigkeit der Beziehung zu beweisen

$$A_\nu B_{\nu+1} - A_{\nu+1} B_\nu = A_\nu A''_{\nu+1} - 2 A'_\nu A'_{\nu+1} + A''_\nu A_{\nu+1}. \tag{28}$$

Als Anmerkung sei noch hervorgehoben, daß wir den Beziehungen (c), (d) noch eine anfügen können. Wenn wir die Beziehung (17) auf das Polynomenpaar $a^{(-1)}$ $b^{(-1)}$ und zwar für $i=2$, $j=0$ anwenden, so bekommen wir nach Ersetzung der entsprechenden Reste

$$(r^3)^{(-1)} - (r^3)^{(-2)} = \frac{1}{R R_{-1}} [R R_{-1} (r^4)^{(-2)}]', \tag{e}$$

wo der Rest $(r^4)^{(-2)}$ gleich Eins ist. Aber wir können ohne diese Beziehung auskommen.

§ 8.

Beweis der resultierenden Beziehung.

Die Beziehung (28) kann vereinfacht werden. Die erste Ableitung A'_ν der Determinante A_ν erhalten wir, wenn wir die Elemente der letzten Zeile von A_ν einmal differenzieren, die zweite Ableitung A''_ν drückt die Formel

$$A''_\nu = A^{(1)}_\nu + A^{(2)}_\nu$$

aus; die Determinanten $A^{(1)}_\nu$, $A^{(2)}_\nu$ entstehen, wenn in der Determinante A_ν die Elemente der beiden letzten Zeilen einmal, bzw. die Elemente der letzten Zeile zweimal differenziert werden.

Die zweite Ableitung A'' einer beliebigen m-reihigen Determinante besteht aus der Summe der Determinanten von zwei Arten. Die erste Art ist gleich der Summe S_1 von m Determinanten, welche wir aus A erhalten, wenn wir die Elemente einer Spalte zweimal differenzieren. Die zweite Art besteht aus der Summe S_2 von $\binom{m}{2}$ Determinanten, welche den Koeffizient 2 haben und in welchen immer die Elemente von zwei Spalten einmal differenziert werden.

Aber wir können die zweite Ableitung A'' auch so bekommen, daß wi dieselben Veränderungen in den Zeilen (anstatt in den Spalten) durchführen so daß A'' wieder der Summe von zwei Summen $\overline{S}_1, \overline{S}_2$ gleich ist. Offenbar sind die ersten Arten $S_1, \overline{S}_1$ einander gleich, so daß dasselbe von den zweiten Arten $S_2, \overline{S}_2$ gilt

$$A'' = S_1 + S_2 = \overline{S}_1 + \overline{S}_2, \quad S_1 = \overline{S}_1, \quad S_2 = \overline{S}_2.$$

Bei der Determinante A_ν'' sind die Summen $S_1, \overline{S}_2$ bezüglich gleich $B, 2A_\nu^{(1)}$, so daß die Formeln gelten

$$A_\nu'' = B_\nu + 2A_\nu^{(1)} = A_\nu^{(1)} + A_\nu^{(2)}, \quad B_\nu = A_\nu^{(2)} - A_\nu^{(1)}.$$

Wenn wir die Werte für A_ν'', B_ν in die Beziehung (28) einsetzen, so ergibt sich hieraus die Beziehung

$$A_{\nu+1}A_\nu^{(2)} - A'_{\nu+1}A'_\nu + A_{\nu+1}^{(1)}A_\nu = 0, \tag{29}$$

auf deren Richtigkeit der Beweis des vorgelegten Theorems zurückgeführt wird.

Dieser Beweis beruht auf folgendem Determinantensatze:

Es sei eine m-reihige Determinante A und ihr n-reihiger Minor B

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1m} \\ \dots \\ a_{m1} \dots a_{mm} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix}, \quad m > n,$$

gegeben. Wir bilden zur Determinante A alle Minoren $\frac{\partial A}{\partial a_{im}}$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, welche wir mit A_{im} bezeichnen; dann zur Determinante B als Basis bilden wir alle einfach geänderten Determinanten B_{im}, indem wir die m-te Spalte von A und die in A_{im} fehlende Zeile von A zu der Determinante B beifügen.

Wir behaupten, daß der Satz gilt

$$\sum_{i=n+1}^{m} A_{im} B_{im} = A \cdot B, \tag{30}$$

wo links die Glieder der Summe abwechselnde Vorzeichen haben.

Die Anzahl der Glieder auf der rechten Seite der Beziehung (30) ist $m - n$; man kann die Summe ebensogut von $i = 1$ bis m erstrecken, weil die hinzukommenden Determinanten $B_{1m}, B_{2m}, \dots, B_{nm}$ verschwinden. Wenn wir im allgemeinen Gliede $A_{im} \cdot B_{im}$ der Summe die Elemente der letzten Zeile in der Determinante B_{im} mit A_{im} multiplizieren, so kann man die so entstehende Summe in der Gestalt eines Gliedes schreiben

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{1m} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & a_{nm} \\ \sum_i a_{i1}A_{im} & \dots & \sum_i a_{in}A_{im} & \sum_i a_{im}A_{im} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n}\, a_{1m} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{nn}\, a_{nm} \\ 0 \dots 0 \quad A \end{vmatrix},$$

woraus die Richtigkeit der Beziehung (30) folgt.

Wenn in der Determinante A die m-te Spalte der $n+1$-ten gleich ist, so verschwindet A und die Minoren B_{im} verändern sich in gewisse Minoren $B_{im}^{)}$; die Beziehung (30) lautet dann

$$\sum_{i=n+1}^{m} A_{im} B_{im}^{)} = 0. \tag{31}$$

Für unseren Zweck brauchen wir diese Beziehung nur für $n = m - 3$; dann hat die Summe nur drei Glieder

$$A_{m-2,\,n} \cdot B_{m-2,\,m}^{)} + A_{m-1,\,m} B_{m-1,\,m}^{)} + A_{m\,m} B_{m\,m}^{)} = 0.$$

Wenn wir die Determinante A der Determinante $A_{\nu+2}$ gleichsetzen, so ist diese Beziehung mit (29) identisch, so daß die Formeln (27) und dadurch die Gestalt (20) für das Polynomenpaar a, b bewiesen sind.

§ 9.

Schlußbemerkungen. Ein Beispiel.

Wir haben noch die Formel (21) zu begründen, aber der Beweis ist wörtlich derselbe wie der Beweis der Formel (7) im § 3.

Ähnlich wie im § 4 könnten wir voraussetzen, daß beim Polynomenpaar $a^{(\mu)}, b^{(\mu)}$ die durch die Beziehung (23) definierten Reste $(r)^{(\mu)}$, $(r^2)^{(\mu)}$ verschwinden und wir könnten aus dieser Bedingung die Reste (s), (s^2) des Polynomenpaares a, b berechnen und in (24) einsetzen. Wir würden so das Polynom a bekommen, welches durch das Polynom b rechtsseitig μ-indiziert teilbar ist.

Aber die Formel für die Lösung der Gleichung a ähnlich wie in (21) existiert nicht und wir müssen zur Lösung der Gleichung a die adjungierten Polynome $a^{)}, b^{)}$ berechnen, so daß das Polynom $a^{)}$ durch das Polynom $b^{)}$ linksseitig μ-indiziert teilbar ist. Die ganze Schlußweise ist dieselbe wie im § 4.

Um durch ein einfaches *Beispiel* die ganze Untersuchung darzustellen, wählen wir für β denselben Wert wie im § 3, so daß nach Formel (19) gilt

$$A_0 = \beta = e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad A_1 = 2\,x\,e^{-x^2}, \quad A_2 = 16\,x^3\,e^{-\frac{3}{2}x^2}.$$

Für $\nu = 0$ erhalten wir für die Polynome $a^{(-1)}, b^{(-1)}$ und für die Lösung $\bar{y}$ der Gleichung $a^{(-1)}$

$$a^{(-1)} = y''' + x\,y', \quad b^{(-1)} = y' + x\,y, \quad \bar{y} = C_1 H + C_2 x + C_3,$$

$$H = \iint e^{-\frac{x^2}{2}}\,d\,x^2;$$

für $\nu = 1$ entstehen die Polynome

$$a = y^{(1)''} - \left(\frac{2}{x^2} + 4\right) y^{(1)} + 4\,x\,y, \quad b = y^{(1)} = y' + \left(x - \frac{1}{x}\right) y$$

und die Formel (21) gibt für die Lösung y der Gleichung a, wenn wir die Integrationskonstanten C_1, C_2, C_3 bezüglich gleich 1, 0, 0 setzen,

$$y = \bar{y} - x\bar{y} = H' + xH.$$

Damit wir diese Lösung in das Polynom a bequem einsetzen können, berechnen wir auch den Wert $y^{(1)}$ nach der Formel (21) für $\nu = 2$

$$y^{(1)} = e^{-\frac{x^2}{2}}\left(4 + \frac{2}{x^2}\right) + H'\left(4x - \frac{2}{x^3}\right) + 2H;$$

wenn wir die Werte y, $y^{(1)}$ in den Ausdruck für das Polynom a einsetzen, so bekommen wir Null.

(Eingegangen am 15. Februar 1939.)