Werk

Titel: Über Flächen, auf denen sich besondere Arten von Netzen geodätischer Linien ausbr...

Autor: Thomas, H.,

Ort: Berlin

Jahr: 1939

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0044|log34

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über Flächen, auf denen sich besondere Arten von Netzen geodätischer Linien ausbreiten lassen[1].

Von

Heinz Thomas in Darmstadt.

Fragestellung.

1. Es sei ein reelles — im Sinne der Differentialgeometrie — reguläres Flächenstück mit Innen- und Außenseite, das wir kurz Fläche nennen wollen, vorgegeben. Wir denken uns ein starres Modell dieser Fläche hergestellt und darüber „ideale" Fäden gespannt, d. h. unendlich dünne, undehnbare und gewichtslose Fäden, die ohne Zwang verbiegbar sind und ohne Reibung auf der Fläche gleiten, stets aber als Flächenkurven in der Fläche verbleiben. Das Modell der Fläche werde nun — wie später noch genauer ausgeführt werden soll — mit einem „Fadennetz" d. h. zwei Scharen solcher Fäden „dicht" überzogen, so daß sich die Fäden verschiedener Scharen „kreuzweise" und ohne Reibung übereinander lagern. Sämtliche Fäden des Netzes seien durch gleichgroße Tangentialkräfte an ihren beiden Enden über das starre Modell der Fläche gespannt. Dann übt jeder Faden in jedem Flächenpunkt, durch den er hindurchgeht, einen bestimmten Anteil „Druckkraft" senkrecht zur Fläche aus. Dieser Fadendruck hängt offenbar von der Krümmung der Fadenkurve ab. Das Hauptproblem unserer Untersuchungen besteht nun darin, Flächen mit der besonderen Eigenschaft zu ermitteln und darzustellen, daß in jedem Kreuzungspunkt zweier Fäden der beiden Scharen die Druckkraft, die der eine Faden auf die Fläche ausübt, entgegengesetzt gleich ist der Druckkraft, die von dem anderen Faden herrührt. Dann üben die beiden Fadenscharen insgesamt in keinem der überall beliebig dicht verteilten Kreuzungspunkte einen Druck auf die Fläche aus. Die starre Fläche als widerstandgebender Träger für die gespannten Fadenscharen ist jetzt zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts entbehrlich. Die beiden Scharen gespannter Fäden erzeugen für sich allein ein „Fadenmodell" der nämlichen Fläche.

2. Die gesuchte Fläche habe nun die Gleichung $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ und die Grundgrößen erster und zweiter Ordnung E, F, G; L, M, N. Dem Fadennetz

[1]) Diese Arbeit wurde von der Abteilung für Mathematik und Naturwissenschaften der Technischen Hochschule Darmstadt als Dissertation (D 87) angenommen. Die Problemstellung verdanke ich Herrn Prof. Graf, der auch die Arbeit durch viele wertvolle Ratschläge förderte. Berichterstatter waren Herr Prof. Graf und Herr Prof. Walther.

entspricht ein Kurvennetz der Fläche, bei dem zwei Kurven der gleichen Schar keinen Punkt und zwei Kurven verschiedener Scharen genau einen Schnittpunkt gemeinsam haben. Das bedeutet, daß die beiden Kurvenscharen der Fläche topologisch in zwei zueinander senkrechte Parallelenscharen eines ebenen Bereiches abbildbar sind; einem beliebig engmaschig wählbaren ebenen Quadratnetz entspricht dann auf der Fläche ein beliebig engmaschig erzwingbares Viereckssnetz.

Das Kurvennetz sei nun das Netz der Parameterkurven. Wir betrachten zunächst ein Netz aus zwei Scharen diskret aufeinanderfolgender Parameterkurven, dessen topologisches Bild in der (u, v)-Ebene ein Quadratnetz von der Maschenweite Δt ist. Wir ersetzen das Kurvennetz durch ein Sehnennetz. Wir realisieren auch dieses Sehnennetz durch gleichstark gespannte Fäden und fragen nach der Gleichgewichtsbedingung in den Kreuzungspunkten. Zum beliebigen Kreuzungspunkt P gibt es vier Nachbarkreuzungspunkte $P_1, \bar{P}_1, P_2, \bar{P}_2$ (vgl. Fig. 1).

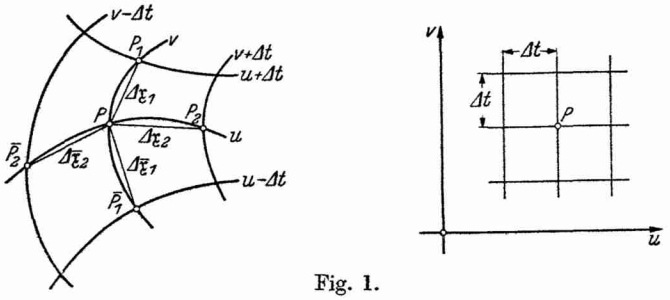

Fig. 1.

Sind $\Delta \mathfrak{x}_1$ und $\Delta \bar{\mathfrak{x}}_1$ die von P nach P_1 und $\bar{P}_1$ gehenden Sehnenvektoren, so ist:

$$\Delta \mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}(u + \Delta t, v) - \mathfrak{x}(u, v) = \Delta t \left(\mathfrak{x}_u + \frac{\Delta t}{2} \mathfrak{x}_{uu} + \Delta t^2 (\ldots)\right),$$

$$\Delta \bar{\mathfrak{x}}_1 = \mathfrak{x}(u - \Delta t, v) - \mathfrak{x}(u, v) = -\Delta t \left(\mathfrak{x}_u - \frac{\Delta t}{2} \mathfrak{x}_{uu} + \Delta t^2 (\ldots)\right);$$

$$\Delta s_1 = \sqrt{\Delta \mathfrak{x}_1^2} = \Delta t \left(\sqrt{E} + \Delta t \frac{\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_{uu}}{2\sqrt{E}} + \Delta t^2 (\ldots)\right),$$

$$\Delta \bar{s}_1 = \sqrt{\Delta \bar{\mathfrak{x}}_1^2} = \Delta t \left(\sqrt{E} - \Delta t \frac{\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_{uu}}{2\sqrt{E}} + \Delta t^2 (\ldots)\right).$$

Sind ferner $\mathfrak{e}_1$ und $\bar{\mathfrak{e}}_1$ zwei Einheitsvektoren in Richtung dieser Sehnenvektoren, so ist:

$$\mathfrak{e}_1 = \frac{\Delta \mathfrak{x}_1}{\Delta s_1} = \frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_{uu}}{E\sqrt{E}} \mathfrak{x}_u\right) + \Delta t^2 (\ldots),$$

$$\bar{\mathfrak{e}}_1 = \frac{\Delta \bar{\mathfrak{x}}_1}{\Delta \bar{s}_1} = -\frac{\mathfrak{x}_u}{\sqrt{E}} + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_{uu}}{E\sqrt{E}} \mathfrak{x}_u\right) + \Delta t^2 (\ldots).$$

Diese beiden Einheitsvektoren stellen zugleich zwei Fadenspannkräfte vom Betrage 1 dar, welche in Richtung der beiden Sehnen angreifen. Die Resultierende $\Delta \mathfrak{r}_1$ dieser beiden Fadenspannkräfte ist:

$$\Delta \mathfrak{r}_1 = \mathfrak{e}_1 + \bar{\mathfrak{e}}_1 = \Delta t\left(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} - \frac{\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_{uu}}{E\sqrt{E}}\,\mathfrak{x}_u\right) + \Delta t^2(\ldots).$$

Entsprechend erhalten wir für die Resultierende $\Delta \mathfrak{r}_2$ der beiden Fadenspannkräfte in Richtung der Sehnen der anderen durch P gehenden Kurve:

$$\Delta \mathfrak{r}_2 = \Delta t\left(\frac{\mathfrak{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_{vv}}{G\sqrt{G}}\,\mathfrak{x}_v\right) + \Delta t^2(\ldots).$$

Als Gleichgewichtsbedingung im Kreuzungspunkt P haben wir dann:

$$\Delta \mathfrak{r}_1 + \Delta \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{o},$$

d. h.

$$\Delta t\left(\frac{\mathfrak{x}_{uu}}{\sqrt{E}} + \frac{\mathfrak{x}_{vv}}{\sqrt{G}} - \frac{\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_{uu}}{E\sqrt{E}}\,\mathfrak{x}_u - \frac{\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_{vv}}{G\sqrt{G}}\,\mathfrak{x}_v + \Delta t\,(\ldots)\right) = \mathfrak{o}.$$

Diese Bedingung ist erfüllt, wenn die inneren Produkte mit drei nicht komplanaren Vektoren, etwa den Tangentenvektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ und dem Flächennormalenvektor $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v$ verschwinden, wenn also die drei folgenden Beziehungen gelten:

(a) $$\frac{\Delta t}{G\sqrt{G}}\left(\mathfrak{x}_v^2(\mathfrak{x}_{vv} \cdot \mathfrak{x}_u) - (\mathfrak{x}_u \cdot \mathfrak{x}_v)(\mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{x}_{vv})\right) + \Delta t^2(\ldots) = 0,$$

d. h.

$$\frac{\Delta t}{G\sqrt{G}}(FG_v - 2GF_v + GG_u) + \Delta t^2(\ldots) = 0;$$

und entsprechend:

$$\frac{\Delta t}{E\sqrt{E}}(FE_u - 2EF_u + EE_v) + \Delta t^2(\ldots) = 0;$$

(b) $$\Delta t\left(\frac{L}{E}\sqrt{E} + \frac{N}{G}\sqrt{G}\right) + \Delta t^2(\ldots) = 0.$$

Lassen wir nun die Maschenweite Δt des Netzes gegen Null gehen, so erhalten wir:

(a) $$FG_v - 2GF_v + GG_u = 0, \quad FE_u - 2EF_u + EE_v = 0;$$

d. h. die Parameterlinien u = konst. und v = konst. sind geodätische Linien, wie auch aus der Definition der geodätischen Linien als kürzesten Linien entsprechend der Problemstellung hervorgeht.

(b) $$\frac{L}{E}\sqrt{E} + \frac{N}{G}\sqrt{G} = 0.$$

Wir führen die Krümmungen $\frac{1}{R_1}$ bzw. $\frac{1}{R_2}$ und die Bogenlängen s_1 bzw. s_2 der Parameterkurven $u = t$, v = konst. bzw. u = konst., $v = t$ ein. Wegen

$$\frac{1}{R_1} = \frac{L}{E}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{N}{G} \text{ und } s_1' = \sqrt{E}, \quad s_2' = \sqrt{G}$$

lautet dann die letzte Bedingung:

$$\frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0 .$$

Die aufgeworfene Frage lautet daher in der Sprache der Differentialgeometrie:

B. Wir fragen nach denjenigen Flächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein infinitesimales Viereckснetz bilden mit der Eigenschaft, daß in jedem Kreuzungspunkt für die Krümmungen und Bogenlängen der beiden hindurchgehenden geodätischen Linien die Beziehung

$$\frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0$$

gilt.

Es ist also nach einer Fläche mit einem infinitesimalen Netz von geodätischen Linien gefragt, bei dem an die Krümmung der geodätischen Linien in einem Kreuzungspunkt und zugleich an die „*Maschenstruktur*" des Netzes eine Forderung gestellt ist. Das infinitesimale Netz, das als topologisches Bild eines ebenen geradlinigen Quadratnetzes mit „unendlich kleinen Seiten" erklärt ist, ist nämlich erst vollständig gekennzeichnet durch die beiden Scharen von Netzkurven *und* deren Anordnungsgesetz, das für jeden Flächenpunkt die Form der infinitesimalen Parallelogrammaschen bestimmt. Zwei „verschiedene" infinitesimale Netze auf einer Fläche können sich demnach nicht nur in der Verschiedenheit der zum Aufbau des Netzes verwendeten Kurven, sondern auch — bei Verwendung der gleichen Netzkurven — allein in der Anordnung der Netzkurven (Maschenform) unterscheiden.

Unser Ansatz führt weiterhin auf folgende, nicht unmittelbar mechanisch realisierbare Fragestellung:

A. Wir fragen nach denjenigen Flächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein infinitesimales Viereckснetz bilden mit der Eigenschaft, daß in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien entgegengesetzt gleiche Krümmung besitzen, also $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ *ist.*

Hier ist nach einer Fläche mit einem infinitesimalen Netz von geodätischen Linien gefragt, bei dem nur an die Krümmung der geodätischen Linien in einem Kreuzungspunkt, nicht aber an die „Maschenstruktur" des Netzes eine Forderung gestellt ist.

Diese beiden Fragen, von denen die letztere im Teil A, die erstere im Teil B der Arbeit behandelt werden soll, sind dann und nur dann miteinander identisch, falls in jedem Punkt unseres Netzes $s_1' = s_2'$ ist, d. h. falls unser geodätisches Netz aus infinitesimalen Rhomben besteht. In diesem Sonderfall, der im Teil C der Arbeit besprochen werden soll, haben wir also folgende Fragestellung:

C. Wir fragen nach denjenigen Flächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein infinitesimales Viereckshetz bilden, bei dem in jedem Kreuzungspunkt die beiden Bedingungen

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0 \quad \textit{und} \quad \frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0$$

erfüllt sind.

Bei allen drei Fragen können die gesuchten Netze von geodätischen Linien nur auf hyperbolisch gekrümmten Flächen vorhanden sein.

Im folgenden werden in der Hauptsache infinitesimale Parallelogrammnetze aus geodätischen Linien auf Dreh- und Schraubenflächen untersucht. Es werden hierbei nur „*dreh- bzw. schraubensymmetrische*" Kurvennetze betrachtet, bei denen die Kurven der beiden Scharen des Netzes durch Drehung bzw. Schraubung bezüglich der Achse auseinander hervorgehen. Sofern dabei die Netzstruktur („Maschenform") eine Rolle spielt (Teil B und Teil C), sollen außerdem nur „*reguläre*" Netze betrachtet werden, d. h. Netze, bei denen die Schar der Breitenkreise bzw. der Bahnschraubenlinien eine Diagonalkurvenschar des Netzes ist.

3. Die Frage nach „Fadenmodellen", die aus Netzen mit endlicher Maschenweite bestehen, wurde bereits von S. Finsterwalder in seiner Abhandlung „Mechanische Beziehungen bei der Flächendeformation" [2]) aufgeworfen. Netze mit kongruenten rhombischen Maschen, bei denen die Fäden an den Kreuzungspunkten miteinander verknotet sind, hat W. Schlink[3]) untersucht. In der vorliegenden Arbeit sollen dagegen *infinitesimale* Netze von *geodätischen* Linien ohne Verknotung in den Kreuzungspunkten untersucht werden.

Eine Frage, die einen gewissen Zusammenhang mit unseren Untersuchungen hat, ist die in der älteren Literatur des öfteren behandelte Frage nach dem Gleichgewicht eines aus einem biegsamen, unausdehnbaren Material hergestellten Stückes einer gegebenen Fläche, auf welche gegebene Kräfte wirken[4]). Während es sich bei diesem Problem wie bei dem Problem der Minimalflächen nur um die Eigenschaften von *homogenen* Flächenhäuten handelt, haben wir es bei unserem Problem mit Flächen zu tun, die *Netzstruktur* besitzen.

---

[2]) Jahresbericht der Deutschen Mathematikervereinigung, Band VI (1899), S. 45, insbesondere S. 68.

[3]) Über die Deformation von Häuten rhombischer Struktur, Dissertation München 1901.

[4]) Vgl. etwa P. Stäckel, Bemerkungen zur Geschichte der geodätischen Linien, Leipziger Berichte **45** (1893), S. 444, Anm. 58—60.

A. Flächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein infinitesimales Viereckesnetz bilden mit der Eigenschaft, daß in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien entgegengesetzt gleiche Krümmung besitzen, also $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ist.

I. Das Problem bei den Drehflächen.

Wir fragen, ob es Drehflächen gibt, auf denen zwei Scharen von ∞^1 geodätischen Linien ein „drehsymmetrisches“[5]) Viereckesnetz bilden mit der Eigenschaft, daß in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien entgegengesetzt gleiche Krümmung besitzen, also $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ist.

1. Auf einer beliebigen Fläche $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}(u, v)$ hat die beliebige Kurve $u = u(t)$, $v = v(t)$ die Normalkrümmung

$$\frac{1}{R} = \frac{L u'^2 + 2 M u' v' + N v'^2}{E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2}.$$

Ist die Kurve $u = u(t)$, $v = v(t)$ geodätische Linie der Fläche, so ist $\frac{1}{R}$ zugleich ihre (gewöhnliche) Krümmung. Zwei beliebige Kurven $u = u(t)$, $v = v(t)$ und $u_1 = u_1(t)$, $v_1 = v_1(t)$ der Fläche bilden einen Winkel α miteinander, für den man hat:

$$\sin\alpha = \frac{\sqrt{EG - F^2}\cdot(u' v_1' + u_1' v')}{\sqrt{E u'^2 + 2 F u' v' + G v'^2}\,\sqrt{E u_1'^2 + 2 F u_1' v_1' + G v_1'^2}}.$$

2. Die Gleichung einer beliebigen Drehfläche lautet in Zylinderkoordinaten (φ, r, z):

$$\begin{cases} \varphi = u \\ r = v \\ z = f(v) \end{cases} \qquad (0 \leqq u < 2\pi;\ v > 0);$$

$z = f(r)$ ist die Meridiankurve der Fläche; die Parameterlinien $u =$ konst. bzw. $v =$ konst. sind die Meridiane bzw. Parallelkreise. Die Grundgrößen der Drehfläche lauten:

$$E = v^2, \qquad F = 0, \quad G = 1 + f'^2(v);$$

$$L = \frac{v f'(v)}{\sqrt{1 + f'^2(v)}}, \quad M = 0, \quad N = \frac{f''(v)}{\sqrt{1 + f'^2(v)}}.$$

Nach 1. erhält man für die Normalkrümmung der beliebigen Kurve $u = u(t)$, $v = v(t)$ der Drehfläche:

$$\frac{1}{R} = \frac{v f' u'^2 + f'' v'^2}{\sqrt{1 + f'^2}\,(v^2 u'^2 + (1 + f'^2) v'^2)},$$

[5]) Vgl. S. 237.

und für den Winkel α zwischen dieser Kurve und einer Meridiankurve $u_1 = \text{konst.}$:

$$\sin^2\alpha = \frac{v^2 u'^2}{v^2 u'^2 + (1+f'^2)v'^2}.$$

Ist die Kurve $u = u(t)$, $v = v(t)$ geodätische Linie der Drehfläche, so gilt der Clairautsche Satz $v \cdot \sin\alpha = a = \text{konst.}$ (dabei ist $a < 0$ für $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, $a = 0$ für $\alpha = 0$ und $a > 0$ für $0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$); aus der letzten Gleichung erhalten wir dann

$$u'^2 = \frac{a^2(1+f'^2)}{v^2(v^2-a^2)}v'^2$$

als Differentialgleichung der geodätischen Linien und daher für den Ausdruck $\frac{1}{R}$, der dann die Krümmung der geodätischen Linien darstellt:

$$\frac{1}{R} = \frac{a^2 f'(1+f'^2) + v f''(v^2-a^2)}{v^3 \cdot \sqrt{(1+f'^2)^3}}.$$

3. Wir bestimmen nun die Drehflächen, für die $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ist. Die Konstanten $a = a_1$, $a = a_2$ kennzeichnen zwei geodätische Linien der Drehfläche und damit zugleich zwei Scharen von je ∞^1, durch Drehung auseinander hervorgehenden geodätischen Linien. Diese beiden Scharen bilden auf der Fläche ein Viereckesnetz. Die Krümmungen $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ der beiden durch einen beliebigen Kreuzungspunkt gehenden geodätischen Linien ergeben sich aus 2. gemäß ihren Konstanten a_1 und a_2. Die Bedingung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ führt dann zur Differentialgleichung:

$$\frac{f''}{f'(1+f'^2)} = \frac{a_1^2 + a_2^2}{v(a_1^2 + a_2^2 - 2v^2)},$$

die sich elementar integrieren läßt und für die Meridianfunktion $f = f(v)$ der gesuchten Drehfläche folgende Funktion liefert:

$$f = \pm\frac{C}{\sqrt{2-C^2}}\sqrt{v^2 - \frac{1}{2-C^2}(a_1^2 + a_2^2)},$$

wobei von der unwesentlichen additiven Integrationskonstanten, die nur eine Parallelverschiebung der Meridiankurve in Richtung der Drehachse andeutet, abgesehen wurde. Diese Gleichung stellt, für $f = z$ und für $v = r$ gesetzt, die Meridiankurve der gesuchten Drehfläche dar und kann in der folgenden Form geschrieben werden[6]):

$$\frac{r^2}{\frac{p^2}{2-C^2}} - \frac{z^2}{\frac{p^2 C^2}{(2-C^2)^2}} = 1,$$

[6]) Die Konstante C sei stets reell. Für komplexes C erhält man nur dann eine reelle Fläche, wenn C rein imaginär ist. Die so erhaltene Fläche ist jedoch in allen ihren Punkten elliptisch gekrümmt und kann daher kein Netz der verlangten Art tragen.

wobei zur Abkürzung $p^2 = a_1^2 + a_2^2$ gesetzt wurde. Die ermittelte Drehfläche ist also ein *einschaliges Drehhyperboloid.*

4. Wir untersuchen die *Formmannigfaltigkeit* der erhaltenen Drehhyperboloide. Die letzte Gleichung stellt die Meridiankurven von ∞^2 Drehhyperboloiden dar, die von den Konstanten C^2 und p^2 abhängen. Um die eine dieser Konstanten, welche die verschieden großen, aber zueinander ähnlichen Drehhyperboloide voneinander unterscheidet, als uninteressant aus der Meridiangleichung zu eliminieren, setzen wir die Halbachsenlänge der Meridianhyperbel $A = 1$, also $A^2 = \frac{p^2}{2 - C^2} = 1$; wir betrachten dann nur noch die ∞^1 verschieden geformten Meridianhyperbeln mit den Halbachsen $A = 1$, $B = \sqrt[+]{\frac{2}{p^2} - 1}$. Damit B reell wird, muß $2 \geqq p^2 \geqq 0$ sein. Für $p^2 = 2$ bzw. $p^2 = 0$ artet das Hyperboloid in eine Ebene bzw. einen Drehzylinder aus. Diese als Grenzfälle erhaltenen Flächen sind aber abwickelbar und scheiden daher nach Voraussetzung aus.

5. Wir fragen nach der *Mannigfaltigkeit der Netze* auf einem vorgegebenen Drehhyperboloid. Zu jedem der ∞^1 Drehhyperboloide mit den Halbachsen $A = 1$ und $B = \sqrt[+]{\frac{2}{p^2} - 1}$ gehören ∞^1 Netze von geodätischen Linien. Denn der Parameter der einen Schar (etwa a_2) kann bereichweise $(2 > a_2^2 \geqq 0)$ beliebig vorgegeben werden; damit ist dann der Parameter a_1 der anderen Schar des Netzes auf der vorgegebenen Fläche durch die Bedingung $a_1^2 + a_2^2 = p^2$ festgelegt.

6. *Geometrische Deutung* der durch die Gleichung $a_1^2 + a_2^2 = p^2$ verbundenen Konstanten p^2 und a_1^2, a_2^2, welche die Form des Drehhyperboloides und die auf ihm gelegenen Netze von geodätischen Linien kennzeichnen.

Wir betrachten im folgenden nur den im ersten Quadranten des (r, z)-Systems gelegenen „Halbast" der Meridianhyperbel und demgemäß auch nur den von ihr erzeugten, oberhalb des Kehlkreises gelegenen Teil des Drehhyperboloides. Die Konstante p^2 ändert sich nicht, wenn wir a_1 durch $-a_1$ oder a_2 durch $-a_2$ ersetzen, wenn wir also — wie man aus dem Clairautschen Satz $r \cdot \sin\alpha = a$ ersieht — eine oder beide Scharen des Netzes von geodätischen Linien an einer Meridianebene spiegeln. Auf einem — durch p^2 der Form nach — vorgegebenen Drehhyperboloid liegen also zugleich mit jedem der ∞^1, durch die Konstanten a_1, a_2 gekennzeichneten Netze drei weitere durch Spiegelungen an einer Meridianebene hervorgehende Netze; eines, das durch Spiegelung beider Scharen entsteht $(-a_1, -a_2)$, und zwei, die durch Spiegelung je einer Schar entstehen $(a_1, -a_2;\ -a_1, a_2)$. Die beiden letzten — selbst wieder durch Spiegelung beider Scharen auseinander hervorgehend — sind von dem ursprünglichen Netz wesentlich verschieden. Da mit dem ersten Netz alle drei durch Spiegelungen entstehenden Netze

mitgegeben sind, genügt es, nur eines der vier Netze zu betrachten. Wir nehmen daher im folgenden $a_1 \geqq 0$, $a_2 \geqq 0$ an, von dem Fall $a_1^2 = a_2^2$ abgesehen, der nur für $a_1 = -a_2$ sinnvoll ist.

Wir setzen $p^2 = 2\sin^2\beta$; wegen $\operatorname{cotg}\beta = \frac{B}{A} = \sqrt[+]{\frac{2}{p^2} - 1}$ ist dann β der Winkel zwischen der Asymptote des betrachteten Halbastes der Meridianhyperbel und der positiven Drehachse. Die Grenzfälle $\beta = 0^0$ und $\beta = 90^0$ scheiden aus. Auf Grund des Clairautschen Satzes $r \cdot \sin\alpha = a$ gibt es für den Verlauf der geodätischen Linien der durch die Konstante a_i $(i = 1, 2)$ gekennzeichneten Schar zwei Möglichkeiten:

α) $0 < a_i^2 < 1$ (bzw. $a_i^2 = 1$). Die geodätischen Linien der Schar laufen über die ganze Drehfläche hinweg und schneiden (bzw. berühren asymptotisch) den Kehlkreis $r = 1$; im Schnittpunkt (bzw. Berührpunkt) bilden sie mit dem Meridian den Winkel α_i, für den $\sin\alpha_i = a_i$ (bzw. $\sin\alpha_i = 1$) ist.

β) $1 < a_i^2 < 2$ (bzw. $a_i^2 = 1$). Die geodätischen Linien der Schar verlaufen oberhalb des Breitenkreises $r = a_i$ (bzw. des Kehlkreises $r = 1$) und berühren ihn (bzw. berühren ihn asymptotisch).

Nehmen wir nun $a_2^2 \geqq a_1^2$ an, so gelten wegen $p^2 \equiv 2\sin^2\beta = a_1^2 + a_2^2 < 2$ die Ungleichungen: $a_1^2 < 1$, $a_2^2 < 2$; wir haben dann zwei Fälle zu unterscheiden:

α) $a_1^2 < 1$, $a_2^2 < 1$ (bzw. $a_2^2 = 1$). Die geodätischen Linien der ersten und der zweiten Schar des Netzes verlaufen über die ganze Drehfläche und schneiden den Kehlkreis $r = 1$; im Schnittpunkt bilden sie mit dem Meridian die Winkel α_1 und α_2, für die $a_1 = \sin\alpha_1$, $a_2 = \sin\alpha_2$ ist (bzw. die geodätischen Linien der zweiten Schar berühren den Kehlkreis $r = 1$ asymptotisch). Die Gleichung $p^2 \equiv 2\sin^2\beta = a_1^2 + a_2^2$ kann jetzt folgendermaßen geschrieben werden:

$$(\alpha) \qquad \cos^2\beta = \tfrac{1}{2}(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2).$$

Wir haben $a_2^2 \geqq a_1^2$ angenommen. Es sei zunächst $a_2^2 = a_1^2$; wir setzen (vgl. oben) $a_2 = -a_1$. Dann ist $\beta = -\alpha_1 = \alpha_2$; beide Scharen des Netzes gehen durch Spiegelung an einer Meridianebene auseinander hervor. Es ist daher in jedem Punkt $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2}$. Da das Netz der Bedingung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ genügen muß, wird $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_2} = 0$, d. h. wir erhalten das Netz der geradlinigen Erzeugenden des Drehhyperboloides. Es sei nunmehr $a_2^2 > a_1^2$, also $\alpha_2 > \alpha_1$; dann ergeben sich für α_1, α_2 und β, die durch Gleichung (α) miteinander verknüpft sind, folgende Bereiche:

$$\text{für } 0^0 < \beta < 45^0: \quad 0^0 \leqq \alpha_1 < \beta < \alpha_2 \leqq \arcsin\sqrt{2\sin^2\beta},$$

$$\text{für } 45^0 \leqq \beta < 90^0: \quad \arccos\sqrt{2\cos^2\beta} \leqq \alpha_1 < \beta < \alpha_2 \leqq 90^0.$$

Diese Netze finden sich in der Tabelle A *links* von der Trennungslinie.

β) $a_1^2 < 1$, $a_2^2 > 1$ (bzw. $a_2^2 = 1$). Die geodätischen Linien der ersten Schar des Netzes verlaufen über die ganze Drehfläche und schneiden den Kehlkreis $r = 1$; im Schnittpunkt bilden sie mit dem Meridian den Winkel α_1, für den $a_1 = \sin \alpha_1$ ist. Die geodätischen Linien der zweiten Schar verlaufen oberhalb des Breitenkreises $r = a_2$ (bzw. des Kehlkreises $r = 1$) und berühren ihn (bzw. berühren ihn asymptotisch). Die Gleichung $p^2 \equiv 2 \sin^2 \beta = a_1^2 + a_2^2$ lautet jetzt:

$$(\beta) \qquad \cos^2 \beta = \tfrac{1}{2}(1 + \cos^2 \alpha_1 - a_2^2).$$

Für die Größen α_1, a_2 und β, die durch diese Gleichung (β) miteinander verknüpft sind, ergeben sich folgende Bereiche:

$$\beta \geqq 45^0; \quad 0^0 \leqq \alpha_1 \leqq \arccos \sqrt{2 \cos^2 \beta}; \quad 1 \leqq a_2 \leqq \sqrt{2} \sin \beta.$$

Diese Netze finden sich in der Tabelle A *rechts* von der Trennungslinie.

Stets bedeuten $\alpha_1 = 0^0$ die Meridiane und $\alpha_2 = 90^0$ geodätische Linien, die einen Breitenkreis $r = a_2 \geqq 1$ berühren. Für $a_2 = 1$ werden die unter α) und β) besprochenen Fälle miteinander identisch; die geodätischen Linien der zweiten Schar berühren den Kehlkreis $r = 1$ asymptotisch. Dementsprechend liegt in der Tabelle A in zwei Feldern, die längs der Trennungslinie zusammenstoßen, stets dasselbe Netz vor, einmal als Grenzfall der links behandelten Netze, das andere Mal als Grenzfall der rechts behandelten Netze.

7. Zusammenfassend können wir sagen:

Die einzige Drehfläche, auf der zwei Scharen von geodätischen Linien ein „drehsymmetrisches", infinitesimales Viereckesnetz bilden, bei dem in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien entgegengesetzt gleiche Krümmung besitzen, ist das Drehhyperboloid. Auf jedem der ∞^1 verschieden geformten, d. h. nicht zueinander ähnlichen Drehhyperboloide gibt es ∞^1 solche Netze, die zwei grundsätzlich verschiedene Formen aufweisen, vgl. Tabelle A mit Fig. 2 und 3[7]).

---

[7]) Man kann zeigen, daß nicht nur das einschalige Drehhyperboloid, sondern auch das allgemeine einschalige Hyperboloid und das hyperbolische Paraboloid (also alle hyperbolisch gekrümmten Flächen zweiter Ordnung) Netze von geodätischen Linien tragen, die der Bedingung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ genügen. — Man kann auch allgemeiner nach Flächen mit Netzen von geodätischen Linien fragen, die der Bedingung $\frac{1}{R_1} + \omega^2 \frac{1}{R_2} = 0$ genügen, wobei ω^2 eine Konstante ist. Man kann zeigen, daß die einzige Drehfläche mit einem Netz von geodätischen Linien, das dieser Bedingung $\frac{1}{R_1} + \omega^2 \frac{1}{R_2} = 0$ genügt, ebenfalls das Drehhyperboloid ist, und daß wieder sämtliche hyperbolisch gekrümmten Flächen zweiter Ordnung solche Netze tragen.

Tabelle A [8]).

β	$\alpha_1 = \beta$ $\quad > \alpha_1 >$ $\quad \alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 = \beta$ $\quad < \alpha_2 <$ $\quad \alpha_2 = X(\beta)$					
	Netz der Erzeugenden		1. Schar = Meridiane			
0^0	$\alpha_1 \to 0^0$, $\alpha_2 \to 0^0$ (Drehzylinder)					
5^0	$\alpha_1 = 5^0$ $\alpha_2 = 5^0$		$\alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 \approx 7^0$			
40^0	$\alpha_1 = 40^0$ $\alpha_2 = 40^0$		$\alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 \approx 65^0$			
45^0	$\alpha_1 = 45^0$ $\alpha_2 = 45^0$		$\alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 = 90^0$	$\alpha_1 = 0^0$, $a_2 = 1$		
50^0	$\alpha_1 = 50^0$ $\alpha_2 = 50^0$		$\alpha_1 \approx 25^0$ $\alpha_2 = 90^0$	$\alpha_1 \approx 25^0$ $a_2 = 1$		$\alpha_1 = 0^0$ $a_2 \approx 1{,}1$
85^0	$\alpha_1 = 85^0$ $\alpha_2 = 85^0$		$\alpha_1 \approx 83^0$ $\alpha_2 = 90^0$	$\alpha_1 \approx 83^0$ $a_2 = 1$		$\alpha_1 = 0^0$ $a_2 \approx 1{,}4$
90^0	$\alpha_1 \to 90^0$, $\alpha_2 \to 90^0$ (Ebene)			$\alpha_1 \to 90^0$ $a_2 = 1$ (Ebene)		$\alpha_1 = 0^0$ $a_2 \to \sqrt{2}$ (Ebene)
β	Netz der Erzeugenden		2. Schar berührt den Kehlkreis asymptotisch	2. Schar berührt den Kehlkreis asymptotisch		1. Schar = Meridiane
	$\alpha_1 = \beta$ $\alpha_2 = \beta$	$> \alpha_1 >$ $< \alpha_2 <$	$\alpha_1 = Y(\beta)$ $\alpha_2 = 90^0$	$\alpha_1 = Y(\beta)$ $a_2 = 1$	$> \alpha_1 >$ $< a_2 <$	$\alpha_1 = 0^0$ $a_2 = \sqrt{2}\sin\beta$

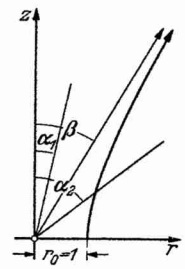

Fig. 2

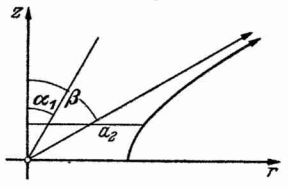

Fig. 3

Linker Teil. Die geodätischen Linien beider Scharen des Netzes verlaufen über das ganze Hyperboloid und schneiden den Kehlkreis $r_0 = 1$; im Schnittpunkt bilden sie mit dem Meridian die Winkel α_1 und α_2 (für $\alpha_2 = 90^0$ berühren die geodätischen Linien der zweiten Schar den Kehlkreis asymptotisch).

Es ist:

$$(\alpha) \qquad \cos^2\beta = \tfrac{1}{2}(\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2).$$

[8]) Die Werte für α_1 und α_2 sind nur auf ^{0}, die für a_2 auf eine Dezimale genau.

Rechter Teil. Die geodätischen Linien der ersten Schar verlaufen über das ganze Hyperboloid und schneiden den Kehlkreis $r = 1$; im Schnittpunkt bilden sie mit dem Meridian den Winkel α_1. Die geodätischen Linien der zweiten Schar verlaufen oberhalb des Breitenkreises $r = a_2$ und berühren ihn (für $a_2 = 1$ verlaufen sie oberhalb des Kehlkreises $r = 1$ und berühren ihn asymptotisch). Es ist:

$$(\beta) \qquad \cos^2\beta = \tfrac{1}{2}(1 + \cos^2\alpha_1 - a_2^2).$$

Es wurde zur Abkürzung gesetzt:

$$X(\beta) = \arcsin\sqrt{2\sin^2\beta}, \qquad Y(\beta) = \arccos\sqrt{2\cos^2\beta}.$$

II. Das Problem bei den Schraubenflächen.

Wir fragen, ob es Schraubenflächen gibt, auf denen zwei Scharen von ∞^1 geodätischen Linien ein „schraubensymmetrisches" Viereckesnetz bilden mit der Eigenschaft, daß in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien entgegengesetzt gleiche Krümmung besitzen, also $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ist.

1. Die Gleichung einer beliebigen Schraubenfläche lautet in Zylinderkoordinaten (φ, r, z):

$$\begin{cases} \varphi = u_1 \\ r = v_1 \\ z = f(v_1) + h u_1 \end{cases} \qquad (h \neq 0).$$

Hierbei ist $z = f(r)$ die Meridiankurve der Schraubenfläche und h ihre reduzierte Ganghöhe. Wir führen — im engen Anschluß an den im vorigen Kapitel für die Drehflächen eingeschlagenen Lösungsweg — auch auf den Schraubenflächen ein orthogonales Netz von Parameterkurven $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$ ein durch die Umformung:

$$u_1 = u + \omega(v), \quad v_1 = v$$

und erhalten für die Schraubenfläche die neue Parameterdarstellung:

$$\begin{cases} \varphi = u + \omega(v) \\ r = v \\ z = f(v) + (u + \omega(v))\, h \end{cases} \qquad (v > 0).$$

Die Parameterlinien $v = \text{konst.}$ bzw. $u = \text{konst.}$ sind jetzt die Schraubenlinien bzw. ihre orthogonalen Trajektorien. Die Gleichung $\varphi = \omega(r)$ stellt in Polarkoordinaten den Lotriß der orthogonalen Trajektorie $u = 0$ in eine

Ebene senkrecht zur Schraubungsachse dar. Die Grundgrößen der Schraubenfläche lauten wegen $F = 0$:

$$E = v^2 + h^2,$$

$$F = 0,$$

$$G = \frac{v^2 + h^2 + v^2 f'^2}{v^2 + h^2},$$

$$L = -\frac{v^2 f'}{\sqrt{v^2 + h^2 + v^2 f'^2}},$$

$$M = \frac{h\,(v^2 + h^2 + v^2 f'^2)}{(v^2 + h^2)\sqrt{v^2 + h^2 + v^2 f'^2}},$$

$$N = -\frac{v f''\,(v^2 + h^2)^2 + h^2 f'^3 v^2 + 2 h^2 f'\,(v^2 + h^2)}{(v^2 + h^2)^2 \sqrt{v^2 + h^2 + v^2 f'^2}}.$$

Längs einer geodätischen Linie der Schraubenfläche gilt nun die Gleichung (die als Verallgemeinerung des Clairautschen Satzes für Drehflächen anzusehen ist):

$$\sqrt[+]{v^2 + h^2} \cdot \sin\alpha = a = \text{konst.}$$

Hierin ist α der Winkel zwischen den zu den Schraubenlinien orthogonalen Trajektorien (u = konst.) und der geodätischen Linie, und es ist $a < 0$ für $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$, $a = 0$ für $\alpha = 0$ und $a > 0$ für $0 < \alpha \leqq \frac{\pi}{2}$. Danach erhält man entsprechend den Betrachtungen für Drehflächen in Kapitel I als Differentialgleichung der geodätischen Linien:

$$u'^2 = \frac{a^2\,(v^2 + h^2 + v^2 f'^2)}{(v^2 + h^2)^2\,(v^2 + h^2 - a^2)}\,v'^2,$$

und für die Krümmung $\frac{1}{R}$ der geodätischen Linien:

$$\frac{1}{R}(v^2 + h^2)^2 \sqrt{v^2 + h^2 + v^2 f'^2} = -a^2 v^2 f'$$
$$-\left(v f''\,(v^2 + h^2)^2 + h^2 v^2 f'^3 + 2 h^2 f'\,(v^2 + h^2)\right) \frac{v^2 + h^2 - a^2}{v^2 + h^2 + v^2 f'^2}$$
$$\pm 2 h a \sqrt{(v^2 + h^2 - a^2)\,(v^2 + h^2 + v^2 f'^2)}.$$

2. Wir bestimmen nun die allgemeinen Schraubenflächen, für die $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ist. Die Konstanten $a = a_1$, $a = a_2$ kennzeichnen zwei geodätische Linien der Schraubenfläche und damit zugleich zwei Scharen von je ∞^1, durch Verschraubung auseinander hervorgehenden geodätischen Linien. Diese beiden Scharen bilden auf der Fläche ein Viereckesnetz. Die Krümmungen $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ der beiden durch einen beliebigen Kreuzungspunkt

gehenden geodätischen Linien ergeben sich aus 1. gemäß ihren Konstanten a_1 und a_2. Die Bedingung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ führt dann zur Differentialgleichung:

$$v^2 f' (a_1^2 + a_2^2)(v^2 + h^2 + v^2 f'^2) + (v f''(v^2 + h^2)^2 + h^2 v^2 f'^3 + 2h^2 f'(v^2 + h^2))$$
$$\cdot (2(v^2 + h^2) - (a_1^2 + a_2^2))$$
$$\pm 2h \sqrt{(v^2 + h^2 + v^2 f'^2)^3} \cdot (a_1 \sqrt{v^2 + h^2 - a_1^2} + a_2 \sqrt{v^2 + h^2 - a_2^2}) = 0.$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Meridianfunktion $f = f(v)$ der gesuchten Schraubenfläche. Aus dem Existenzsatz für gewöhnliche Differentialgleichungen folgt, daß diese Gleichung bei vorgegebenen Anfangswerten stets eine und nur eine Lösung besitzt. Unter den unendlich vielen Schraubenflächen, die durch Verschraubung der Kurve $f = f(v)$ oder $z = f(r)$ um die z-Achse entstehen, und deren Meridiankurven denselben Anfangsbedingungen genügen, befindet sich also eine und nur eine, auf der zwei vorgegebene Scharen von geodätischen Linien — bei denen die einzelnen geodätischen Linien durch Verschraubung auseinander hervorgehen — ein Netz der verlangten Art bilden. Die Auflösung der Differentialgleichung ist in dem Spezialfall $a_1 = -a_2$ leicht durchführbar. Davon wird noch in anderem Zusammenhang (Teil C) die Rede sein.

B. Flächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein infinitesimales Viereckснetz bilden mit der Eigenschaft, daß in jedem Kreuzungspunkt für die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien die Beziehung

$$\frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0 \text{ gilt.}$$

III. Das Problem bei den Drehflächen.

Wir fragen, ob es Drehflächen gibt, auf denen zwei Scharen von ∞^1 geodätischen Linien ein „drehsymmetrisches", „reguläres"[9]) Viereckснetz bilden, bei dem in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien der Bedingung $\frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0$ genügen.

1. Wir hatten für die Krümmung $\frac{1}{R}$ der geodätischen Linien auf den Drehflächen in Kapitel I erhalten:

$$\frac{1}{R} = \frac{a^2 f'(1 + f'^2) + v f''(v^2 - a^2)}{v^3 \cdot \sqrt{(1 + f'^2)^3}}.$$

Ferner lautet die erste Grundform der Drehflächen:

$$s'^2 = v^2 u'^2 + (1 + f'^2) v'^2,$$

[9]) Vgl. S. 237.

und es wird s' für die geodätischen Linien, deren Differentialgleichung

$$u'^2 = \frac{a^2(1+f'^2)}{v^2(v^2-a^2)}v'^2$$

lautet:

$$s' = v\,v'\sqrt{\frac{1+f'^2}{v^2-a^2}}.$$

2. Wir bestimmen die Drehflächen, für die $\frac{1}{R_1}s_1' + \frac{1}{R_2}s_2' = 0$ ist. Die Konstanten $a = a_1$ und $a = a_2$ kennzeichnen wieder zwei Scharen von je ∞^1, durch Drehung auseinander hervorgehenden geodätischen Linien, die auf der Fläche ein Viereckssnetz bilden. Die Krümmungen $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ und die Bogenlängen s_1 und s_2 der beiden durch einen beliebigen Kreuzungspunkt gehenden geodätischen Linien ergeben sich aus 1. gemäß ihren Konstanten a_1 und a_2. Da beide Bogenlängen s_1 und s_2 Funktionen von r allein sind, ist die Schar der Breitenkreise r = konst. eine Diagonalkurvenschar des Netzes; das Netz ist also regulär. Die Bedingung $\frac{1}{R_1}s_1' + \frac{1}{R_2}s_2' = 0$ führt dann zur Differentialgleichung:

$$\frac{v\,f'\,f''}{f'^2(1+f'^2)} = 1 - \frac{v^2}{\sqrt{(v^2-a_1^2)(v^2-a_2^2)}}.$$

In dieser Gleichung ist die Wurzel stets mit positivem Vorzeichen zu nehmen. Denn unser Problem hat nur auf hyperbolisch gekrümmten Flächen einen Sinn. Es muß daher

$$K = \frac{LN-M^2}{EG-F^2} = \frac{v\,f'\,f''}{v^2(1+f'^2)^2},$$

also auch die rechte Seite der oben stehenden Differentialgleichung negativ sein, was nur bei positivem Vorzeichen der Wurzel möglich ist. Die Differentialgleichung läßt sich elementar integrieren und liefert für die Meridianfunktion $f = f(v)$:

$$f = \pm\int \frac{C^2\,v\,dv}{\sqrt{v^2(1-C^4) - \frac{1}{2}(a_1^2+a_2^2) + \sqrt{(v^2-a_1^2)(v^2-a_2^2)}}}\,^{10}),$$

wobei von der unwesentlichen additiven Integrationskonstanten abgesehen wurde. Diese Gleichung stellt, für $f = z$, $v = r$ gesetzt, die *Meridiankurve der gesuchten Drehfläche* dar.

3. Die Meridiankurve der gesuchten Drehfläche, die wir nunmehr untersuchen wollen, ist zur r-Achse spiegelbildlich; es genügt daher, ihren Verlauf

---

[10]) Die Konstante C sei stets reell. Für komplexes C erhält man nur dann eine reelle Kurve, wenn C rein imaginär ist. Die zugehörige Drehfläche trägt jedoch kein Netz von geodätischen Linien der verlangten Art.

im ersten Quadranten des rechtwinkligen Koordinatenkreuzes (z, r) zu betrachten. Diesen im ersten Quadranten gelegenen Teil der Meridiankurve

$$z = \int \frac{C^2 r\, dr}{\sqrt[+]{r^2(1-C^4) - \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2) + \sqrt[+]{(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2)}}}$$

wollen wir im folgenden kurz „*M-Kurve*" nennen.

a) Die Konstante C^2 genügt der Bedingung $C^4 < 2$.

Begründung: Da in der Gleichung der M-Kurve der Radikand der großen Wurzel stets $\geqq 0$ sein muß, ist:

$$\sqrt[+]{(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2)} \geqq r^2(C^4 - 1) + \tfrac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2).$$

Ist die rechte Seite gleich Null, so ist diese Bedingung stets erfüllt. Ist die rechte Seite negativ, so ist:

$$C^4 < 1 - \frac{a_1^2 + a_2^2}{2r^2}, \text{ d. h. } C^4 < 1.$$

Ist die rechte Seite positiv, so muß

$$C^4 r^2 (a_1^2 + a_2^2) + \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{4} < r^4 C^4 (2 - C^4), \text{ d. h. } 0 < C^4 < 2$$

sein. Wir scheiden die Grenzfläche $C^4 = 0$ und $C^4 = 2$ aus, da für $C^4 = 0$ $z \equiv 0$ und für $C^4 = 2$ der Nenner des Integranden in der Gleichung der M-Kurve imaginär wird. Ist aber $0 < C^4 < 2$, so ist der Nenner des Integranden stets reell, sofern nur r genügend groß wird, welche Werte auch a_1 und a_2 annehmen mögen.

b) Die M-Kurve hat eine stets reelle Asymptote, die mit der positiven Drehachse den Winkel β bildet, für den man hat:

$$\operatorname{cotg}\beta = \frac{dz}{dr}\Big|_{r=\infty} = \frac{C^2}{\sqrt[+]{2 - C^4}}, \text{ d. h. } C^2 = \sqrt[+]{2}\cos\beta.$$

Wir können daher jetzt für die Gleichung der M-Kurve schreiben:

$$z = \int \frac{2\cos\beta\, r\, dr}{\sqrt[+]{2r^2(1 - 2\cos^2\beta) - (a_1^2 + a_2^2) + 2\sqrt[-]{(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2)}}}.$$

Wegen $0 < C^4 < 2$ ist $0^0 < \beta < 90^0$.

c) Es ist $r^2 \geqq a_2^2$, wenn wir $a_2^2 > a_1^2$ annehmen, und $r^2 > a_2^2$, wenn $a_2^2 = a_1^2$ ist.

Begründung: Im Bereich $a_1^2 < r^2 < a_2^2$ ist die kleine Wurzel $\sqrt[+]{(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2)}$ imaginär. Ist $r^2 \leqq a_1^2$, so können wir setzen: $r^2 = \varepsilon^2 a_1^2$, wo $0 < \varepsilon^2 \leqq 1$ ist, und ferner $a_2^2 = \eta^2 a_1^2$, wo $\eta^2 \geqq 1$ ist. Dann lautet der Radikand A der großen Wurzel im Nenner des Integranden:

$$A = a_1^2\left(2\varepsilon^2 - 1 - \eta^2 - 4\varepsilon^2\cos^2\beta + 2\sqrt[+]{(1 - \varepsilon^2)(\eta^2 - \varepsilon^2)}\right).$$

Nun ist stets:

$$2\,\varepsilon^2 - 1 - \eta^2 - 4\,\varepsilon^2\cos^2\beta + 2\overset{+}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)(\eta^2-\varepsilon^2)}} < 0,$$

denn diese Ungleichung kann auf die folgende Form gebracht werden:

$$(\eta^2-1)^2 + 16\,\varepsilon^4\cos^4\beta + 8\,\varepsilon^2\cos^2\beta\,(1+\eta^2-2\,\varepsilon^2) > 0,$$

ist also wegen $\beta < 90^0$, $\varepsilon^2 > 0$ und $1 + \eta^2 - 2\,\varepsilon^2 \geqq 0$ stets erfüllt. Für $r^2 \leqq a_1^2$ ist also A stets negativ.

d) Die M-Kurve hat keine Tangenten senkrecht zur Drehachse, da nach Voraussetzung weder r noch $\cos\beta$ verschwinden können.

e) Für die Krümmung der M-Kurve erhält man:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{2\cos\beta}{\overset{+}{\sqrt{2\,r^2 - (a_1^2+a_2^2) + 2\overset{+}{\sqrt{(r^2-a_1^2)(r^2-a_2^2)}}}}} \cdot \left(1 - \frac{r^2}{\overset{-}{\sqrt{(r^2-a_1^2)(r^2-a_2^2)}}}\right).$$

f) Die M-Kurve hat keine Wendepunkte.

Begründung: In einem Wendepunkt ist $\frac{1}{\varrho} = 0$. Bei unserer Kurve kann $\frac{1}{\varrho}$ nur für

$$1 - \frac{r^2}{\overset{-}{\sqrt{(r^2-a_1^2)(r^2-a_2^2)}}}, \text{ d. h. für } r_W^2 = \frac{a_1^2\,a_2^2}{a_1^2+a_2^2}$$

verschwinden. Es ist jedoch $r_W^2 < a_2^2$; für r_W^2 wird daher z imaginär (vgl. c)).

g) Die M-Kurve hat keine Scheitel mit nicht zur Drehachse paralleler Tangente.

Begründung: In einem Scheitel ist $\left(\frac{1}{\varrho}\right)' = 0$. Bei der M-Kurve kann diese Beziehung auf die folgende Form gebracht werden:

$$\overset{+}{\sqrt{(r^2-a_1^2)(r^2-a_2^2)}} \cdot \left(\frac{2\,a_1^2\,a_2^2}{a_1^2+a_2^2} - r^2\right) = (r^2-a_1^2)(r^2-a_2^2) + \frac{1}{3}\frac{(a_1^2-a_2^2)^2}{a_1^2+a_2^2}\,r^2,$$

und könnte daher nur für $r^2 < \frac{2\,a_1^2\,a_2^2}{a_1^2+a_2^2}$ und für $r^2 = a_1^2 = a_2^2$ befriedigt werden, was aber den Forderungen $r^2 \geqq a_2^2$ (wenn $a_2^2 > a_1^2$ ist) bzw. $r^2 > a_2^2$ (wenn $a_2^2 = a_1^2$ ist) widerspricht (vgl. c)).

h) Wir fragen, ob die M-Kurve (im Endlichen) Spitzen hat. In einer Spitze ist $\varrho = 0$. Bei der M-Kurve kann dieser Fall nur eintreten für:

$$\alpha)\ 2\,r^2 - (a_1^2+a_2^2) + 2\overset{+}{\sqrt{(r^2-a_1^2)(r^2-a_2^2)}} = 0,$$

$$\beta)\ (r^2-a_1^2)(r^2-a_2^2) = 0.$$

Im Falle α) wird z imaginär. Im Falle β) ist $r^2 = a_1^2$ oder $r_2 = a_2^2$. Für $r^2 = a_1^2$ wird der Nenner des Integranden in der Gleichung der M-Kurve imaginär, für $r^2 = a_2^2$ lautet er $\overset{+}{\sqrt{a_2^2\,(1-4\cos^2\beta) - a_1^2}}$, bleibt also für

$$\cos^2\beta \leqq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)^{11})$$

[11]) Für $a_1^2 = a_2^2$ ist wegen $\beta < 90^0$ diese Beziehung nicht mehr erfüllbar.

reell. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, hat die M-Kurve für $r = a_2$ eine Spitze; diese ist dann der der Drehachse am nächsten gelegene Punkt der M-Kurve, da z für $r^2 \geqq a_2^2$ reell und für $r^2 < a_2^2$ imaginär wird. Für den Winkel δ zwischen der Spitzentangente und der z-Achse hat man:

$$\operatorname{cotg} \delta = \frac{2 a_2 \cos \beta}{\sqrt{a_2^2 (1 - 4 \cos^2 \beta) - a_1^2}}.$$

i) Bestimmung derjenigen Punkte der M-Kurve, die zur Drehachse parallele Tangenten haben.

In solchen Punkten ist $\frac{dz}{dr} = \infty$. Bei der M-Kurve kann diese Bedingung nur erfüllt werden für:

$$2 r^2 (1 - 2 \cos^2 \beta) - (a_1^2 + a_2^2) + 2 \sqrt{(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2)} \equiv A = 0,$$

d. h.

$$r^4 - r^2 \frac{a_1^2 + a_2^2}{2 \sin^2 \beta} - \frac{(a_2^2 - a_1^2)^2}{16 \sin^2 \beta \cos^2 \beta} \equiv B = 0.$$

Diese Gleichung hat eine negative und eine positive Wurzel in r^2. Für die negative Wurzel wird r imaginär; die positive Wurzel lautet:

$$r_0^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2}{4 \sin^2 \beta} + \sqrt{\frac{(a_1^2 + a_2^2)^2}{16 \sin^4 \beta} + \frac{(a_2^2 - a_1^2)^2}{16 \sin^2 \beta \cos^2 \beta}}.$$

Es muß aber r_0^2 die Gleichung $A = 0$ erfüllen, wenn in ihr die Wurzel mit positivem Vorzeichen genommen wird. Es muß also sein:

$$r_0^2 (1 - 2 \cos^2 \beta) - \tfrac{1}{2} (a_1^2 + a_2^2) \leqq 0,$$

d. h.

$$\cos^2 \beta \geqq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}\right).$$

Wenn diese Beziehung erfüllt ist, hat die M-Kurve für $r = r_0$ einen Punkt mit zur Drehachse paralleler Tangente. Dieser ist dann der der Drehachse am nächsten gelegene Punkt der M-Kurve. Denn für große Werte von r^2 wird B positiv, für kleine Werte von r^2 negativ. Da B nur eine positive Wurzel r_0^2 in r^2 hat, muß B im Intervall von 0 bis r_0^2 negativ sein. Ist aber B negativ, so ist auch der Radikand A negativ und z imaginär. Für $r^2 \geqq r_0^2$ ist dagegen z stets reell, da $B \geqq 0$ und damit auch $A \geqq 0$ ist, und da $r_0^2 \geqq a_2^2$ ist, wie eine kleine Nebenrechnung zeigt.

4. Die M-Kurve weist auf Grund der Betrachtungen des vorangehenden Abschnittes 3 *zwei verschiedene Formen* auf:

α) Ist $\cos^2 \beta \geqq \frac{1}{4} \left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)$, so hat die M-Kurve für $r = r_0$ einen Punkt mit zur Drehachse paralleler Tangente, aber keine Spitzen. Sie erstreckt sich von dem Punkt mit zur Drehachse paralleler Tangente aus ins Unendliche, sich der Asymptote nähernd (s. Fig. 4).

β) Ist $\cos^2\beta \leqq \frac{1}{4}\left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)$, so hat die M-Kurve für $r = a_2$ eine Spitze, aber keine Punkte mit zur Drehachse paralleler Tangente. Sie erstreckt sich von der Spitze aus ins Unendliche, sich der Asymptote nähernd (siehe Fig. 5).

Für

$$\cos^2\beta = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}\right)$$

wird $r_0 = a_2$; die Spitzentangente wird zur Drehachse parallel.

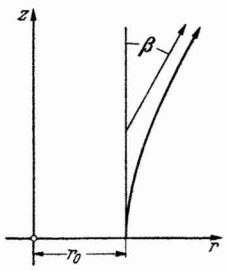

Fig. 4.

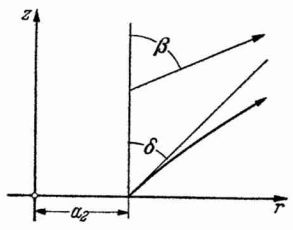

Fig. 5.

Im Falle α) ist der Breitenkreis $r = r_0$ der Kehlkreis der zugehörigen Drehfläche; wir sprechen kurz von „*Flächen mit Kehlkreis*". Ein Modell einer solchen Fläche zeigt Fig. 6[12]).

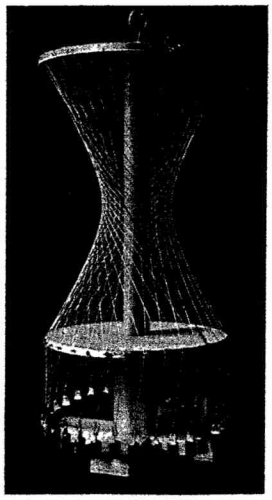

Fig. 6.

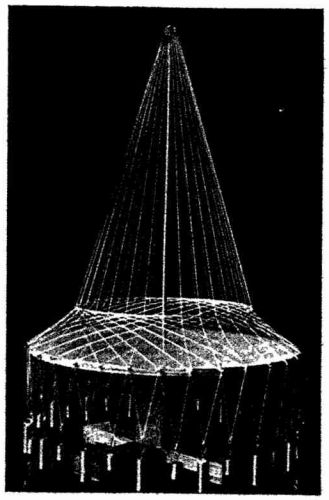

Fig. 7.

Im Falle β) ist der Breitenkreis $r = a_2$ Rückkehrkreis der zugehörigen Drehfläche; wir sprechen kurz von „*Flächen mit Rückkehrkreis*". Ein Modell einer solchen Fläche zeigt Fig. 7.

[12]) Durch Drehung der M-Kurve um die Drehachse entsteht nur derjenige Teil der dargestellten Drehfläche, der auf der nämlichen Seite des Kehlkreises gelegen ist.

5. Die Gleichung der M-Kurve enthält nur die Quadrate der Konstanten a_1 und a_2, welche die beiden Scharen von geodätischen Linien kennzeichnen. Es liegen daher auf jeder der erhaltenen Flächen zugleich mit einem Netz (a_1, a_2) drei weitere Netze $(-a_1, -a_2;\ -a_1, a_2;\ a_1, -a_2)$, die durch Spiegelungen der einzelnen Scharen an einer Meridianebene aus ihm hervorgehen[13]). Es genügt daher, nur eines dieser Netze zu betrachten; wir nehmen demgemäß im folgenden $a_1 \geqq 0$, $a_2 \geqq 0$ an, von dem Falle $a_1^2 = a_2^2$ abgesehen, der nur für $a_1 = -a_2$ sinnvoll ist. Die Netze $(-a_1, a_2;\ a_1, -a_2)$, die durch Spiegelung nur einer Schar aus dem ursprünglichen Netz hervorgehen und von diesem wesentlich verschieden sind, genügen also derselben Bedingung $\frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0$ wie das ursprüngliche Netz. Da die gespiegelten Kurven in entsprechenden Punkten dieselben Krümmungen $\frac{1}{R_1}$ und $\frac{1}{R_2}$ besitzen wie die Ausgangskurven, so weisen auch die Netze $(-a_1, a_2;\ a_1, -a_2)$ dieselbe „Netzstruktur" auf wie das Netz (a_1, a_2).

Man kann allgemeiner zeigen, daß auf einer Drehfläche aus jedem beliebigen drehsymmetrischen Kurvennetz durch Spiegelung nur einer Schar an einer Meridianebene ein Kurvennetz mit derselben „Netzstruktur" hervorgeht, sofern nur das Netz regulär ist. Die Struktur eines Netzes ist gegeben, wenn für jeden Flächenpunkt das Verhältnis $s_1' : s_2'$ festgelegt ist, wobei s_1 und s_2 die Bogenlängen der beiden durch den Flächenpunkt gehenden Kurven sind. Ist nun das Netz regulär, so ist die Schar der Breitenkreise r = konst. eine Diagonalkurvenschar des Netzes; die Bogenlängen s_1 und s_2 sind dann Funktionen von r allein. Wird nun eine Kurvenschar an einer Meridianebene gespiegelt, so bleibt ihre Bogenlänge als Funktion von r und damit auch das Verhältnis $s_1' : s_2'$, d. h. die Netzstruktur unverändert. Das neue Netz ist daher ebenfalls regulär.

6. Wir untersuchen die Formmannigfaltigkeit der „*Flächen mit Kehlkreis*" und die Mannigfaltigkeit der auf ihnen gelegenen Netze von geodätischen Linien. Die „Flächen mit Kehlkreis" hängen von den Konstanten β, a_1^2 und a_2^2 ab, welche die Form der Flächen und die auf ihnen gelegenen Netze kennzeichnen. Um eine dieser Konstanten, welche die verschieden großen, aber zueinander ähnlichen Flächen unterscheidet, als uninteressant zu eliminieren, setzen wir für den Kehlkreisradius $r_0 = 1$. Da nach 3 c) die Beziehungen gelten: $r^2 \geqq a_2^2$ (wenn $a_2^2 > a_1^2$ ist) bzw. $r^2 > a_2^2$ (wenn $a_2^2 = a_1^2$ ist), so ist wegen $r_0 = 1$ jetzt: $a_1^2 < 1$, $a_2^2 < 1$ (bzw. $a_2^2 = 1$). Aus dem Clairautschen Satz $r \cdot \sin \alpha_i = a_i (i = 1, 2)$ folgt dann, daß die geodätischen Linien der ersten und der zweiten Schar des Netzes über die ganze Fläche verlaufen und den Kehlkreis $r_0 = 1$ schneiden, und daß sie im Schnittpunkt mit dem Meridian

[13]) Vgl. S. 240.

die Winkel α_1 und α_2 bilden, für die $a_1 = \sin\alpha_1$, $a_2 = \sin\alpha_2$ ist (bzw. daß die geodätischen Linien der zweiten Schar den Kehlkreis berühren). Aus der Gleichung $A = 0$ (vgl. 3 i)) ergibt sich für $r_0 = 1$, $a_1 = \sin\alpha_1$, $a_2 = \sin\alpha_2$ die Beziehung:

$$(\alpha) \qquad \cos\beta = \tfrac{1}{2}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2).$$

Ferner erhält man für die Krümmung $\frac{1}{\varrho_0}$ der M-Kurve, gemessen im Kehlkreis $r_0 = 1$:

$$(\alpha) \qquad \frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2} - 1.$$

Es bestimmen β und $1/\varrho_0$ die ∞^2 wesentlich voneinander verschiedenen, d. h. nicht zueinander ähnlichen „Flächen mit Kehlkreis", von denen jede gemäß den beiden Gleichungen (α) gerade *ein* Netz trägt. Wir haben $a_2^2 \geqq a_1^2$ angenommen. Es sei zunächst $a_2^2 = a_1^2$, d. h. $a_2 = -a_1$; dann ist $\beta = -\alpha_1 = \alpha_2$. Beide Scharen des Netzes gehen durch Spiegelung an einer Meridianebene auseinander hervor, also ist $\frac{1}{R_1} s_1' = \frac{1}{R_2} s_2'$. Da außerdem das Netz der Bedingung $\frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0$ genügt, kann es nur aus zwei Scharen von Geraden bestehen. In diesem (und nur in diesem) Falle ist die Fläche ein einschaliges Drehhyperboloid. Es sei nunmehr $a_2^2 > a_1^2$, also $\alpha_2 > \alpha_1$. Dann ergeben sich für die Konstanten α_1, α_2, β und $1/\varrho_0$, die durch die Gleichungen (α) miteinander verknüpft sind, folgende Bereiche:

$$\text{für } 0^0 < \beta < 60^0\text{: } 0^0 \leqq \alpha_1 < \beta < \alpha_2 \leqq \arccos(2\cos\beta - 1),$$

$$\operatorname{tg}^2\beta < \frac{1}{\varrho_0} \leqq \frac{2(1-\cos\beta)}{2\cos\beta - 1},$$

$$\text{für } 60^0 \leqq \beta < 90^0\text{: } \arccos(2\cos\beta) \leqq \alpha_1 < \beta < \alpha_2 \leqq 90^0,$$

$$\operatorname{tg}^2\beta < \frac{1}{\varrho_0} \leqq \infty.$$

Stets bedeuten $\alpha_1 = 0^0$ die Meridiane und $\alpha_2 = 90^0$ geodätische Linien, die den Kehlkreis berühren. In der Tafel B finden sich die „*Flächen mit Kehlkreis*" *links* von der Trennungslinie.

7. Wir untersuchen die Formmannigfaltigkeit der „*Flächen mit Rückkehrkreis*" und die Mannigfaltigkeit der auf ihnen gelegenen Netze. Die „Flächen mit Rückkehrkreis" hängen von den Konstanten β, a_1^2 und a_2^2 ab, welche die Form der Flächen und die auf ihnen gelegenen Netze kennzeichnen. Um wieder eine dieser Konstanten, welche die verschieden großen, aber zueinander ähnlichen Flächen unterscheidet, als uninteressant zu eliminieren, setzen wir für den Radius des Rückkehrkreises $a_2 = 1$. Dann ist $a_1 < 1$ (vgl. 3 h)). Aus dem Clairautschen Satz $r\sin\alpha_i = a_i$ $(i = 1, 2)$ folgt dann: Die geodätischen Linien der ersten Schar des Netzes laufen über die ganze Drehfläche

hinweg und schneiden den Rückkehrkreis $a_2 = 1$; im Schnittpunkt bilden sie mit dem Meridian den Winkel α_1, für den $\sin \alpha_1 = a_1$ ist. Die geodätischen Linien der zweiten Schar berühren den Rückkehrkreis. Aus der Gleichung für den Winkel δ zwischen der Spitzentangente der M-Kurve und der Drehachse folgt dann:

(β) $$\cos \beta = \tfrac{1}{2} \cos \alpha_1 \cos \delta.$$

Es bestimmen β und δ die ∞^2 wesentlich voneinander verschiedenen, d. h. nicht zueinander ähnlichen „Flächen mit Rückkehrkreis", von denen jede gemäß Gleichung (β) gerade *ein* Netz trägt. Für die Konstanten α_1, β, δ, die durch die Gleichung (β) verknüpft sind, ergeben sich folgende Bereiche:

$$60^0 \leqq \beta < 90^0, \quad 0^0 \leqq \alpha_1 \leqq \arccos (2 \cos \beta),$$
$$0^0 \leqq \delta \leqq \arccos (2 \cos \beta).$$

Es bedeuten wieder $\alpha_1 = 0^0$ die Meridiane und es bedeutet $\delta = 0^0$, daß die Spitzentangente achsenparallel wird. In der Tabelle B finden sich die *„Flächen mit Rückkehrkreis" rechts* von der Trennungslinie.

8. Für $r_0 = a_2 = 1$ werden die unter $\alpha)$ und $\beta)$ besprochenen Fälle miteinander identisch. Dann ist $\alpha_2 = 90^0$ und $\delta = 0^0$; Kehlkreis und Rückkehrkreis fallen zusammen und werden von den geodätischen Linien der zweiten Schar berührt. Dementsprechend liegt in der Tabelle B in zwei Feldern, die längs der Trennungslinie zusammenstoßen, stets dasselbe Netz vor, einmal als Grenzfall der links behandelten Netze, das andere Mal als Grenzfall der rechts behandelten Netze.

9. Zusammenfassend können wir sagen:

Es gibt ∞^2 formverschiedene, d. h. nicht zueinander ähnliche Drehflächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein „drehsymmetrisches", „reguläres" Viereckesnetz bilden, das der Bedingung $\frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0$ genügt. Jede dieser ∞^2 Drehflächen trägt gerade ein Netz — wenn man von Spiegelungen an einer Meridianebene absieht. Die Meridiankurven der ∞^2 Drehflächen und die auf ihnen gelegenen Netze von geodätischen Linien weisen zwei grundsätzlich verschiedene Gestalten auf, vgl. Tabelle B mit Fig. 8 und 9.

Linker Teil: *Flächen mit Kehlkreis* (vgl. Fig. 6). Die geodätischen Linien beider Scharen des Netzes verlaufen über die ganze Drehfläche und schneiden den Kehlkreis $r_0 = 1$; im Schnittpunkt bilden sie mit dem Meridian die Winkel α_1 und α_2 (für $\alpha_2 = 90^0$ berühren die geodätischen Linien der zweiten Schar den Kehlkreis). Es ist:

(α) $$\cos \beta = \tfrac{1}{2} (\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2),$$
$$\frac{1}{\varrho_0} = \frac{1}{\cos \alpha_1 \cos \alpha_2} - 1;$$

$\frac{1}{\varrho_0}$ ist die Krümmung der Meridiankurve, im Kehlkreis gemessen.

Tabelle B.

β	$1/\varrho_0 = \operatorname{tg}^2\beta$ $\alpha_1 = \beta$ $\alpha_2 = \beta$	$< 1\ \varrho_0 <$ $> \alpha_1 >$ $< \alpha_2 <$	$1/\varrho_0 = X(\beta)$ $\alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 = Y(\beta)$			
	Netz der Erzeugenden eines Drehhyperboloides		1. Schar = Meridiane			
0^0	$1/\varrho_0 \to 0$ $\alpha_1 \to 0^0,\ \alpha_2 \to 0^0$ (Drehzylinder)					
5^0	$1/\varrho_0 \approx 0{,}01$ $\alpha_1 = 5^0$ $\alpha_2 = 5^0$		$1/\varrho_0 \approx 0{,}01$ $\alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 \approx 7^0$			
55^0	$1/\varrho_0 \approx 2{,}04$ $\alpha_1 = 55^0$ $\alpha_2 = 55^0$		$1/\varrho_0 \approx 5{,}80$ $\alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 \approx 82^0$			
60^0	$1/\varrho_0 \approx 3{,}0$ $\alpha_1 = 60^0$ $\alpha_2 = 60^0$		$1/\varrho_0 = \infty$ $\alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 = 90^0$	$\delta = 0^0$ $\alpha_1 = 0^0,\ \alpha_2 = 90^0$		
65^0	$1/\varrho_0 \approx 4{,}6$ $\alpha_1 = 65^0$ $\alpha_2 = 65^0$		$1/\varrho_0 = \infty$ $\alpha_1 \approx 32^0$ $\alpha_2 = 90^0$	$\delta = 0^0$ $\alpha_1 \approx 32^0$ $\alpha_2 = 90^0$		$\delta \approx 32^0$ $\alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 = 90^0$
85^0	$1/\varrho_0 \approx 130$ $\alpha_1 = 85^0$ $\alpha_2 = 85^0$		$1/\varrho_0 = \infty$ $\alpha_1 \approx 80^0$ $\alpha_2 = 90^0$	$\delta = 0^0$ $\alpha_1 \approx 80^0$ $\alpha_2 = 90^0$		$\delta \approx 80^0$ $\alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 = 90^0$
90^0	$1/\varrho_0 \to \infty$ $\alpha_1 \to 90^0,\ \alpha_2 \to 90^0$ (Ebene)			$\delta = 0^0$ $\alpha_1 \to 90^0$ $\alpha_2 = 90^0$	(Ebene)	$\delta \to 90^0$ $\alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 = 90^0$
β	Netz der Erzeugenden		2. Schar berührt den Kehlkreis	2. Schar berührt den Kehlkreis		1. Schar = Meridiane
	$1/\varrho_0 = \operatorname{tg}^2\beta$ $\alpha_1 = \beta$ $\alpha_2 = \beta$	$< 1/\varrho_0 <$ $> \alpha_1 >$ $< \alpha_2 <$	$1/\varrho_0 = \infty$ $\alpha_1 = Z(\beta)$ $\alpha_2 = 90^0$	$\delta = 0^0$ $\alpha_1 = Z(\beta)$ $\alpha_2 = 90^0$	$< \delta <$ $> \alpha_1 >$ $= \alpha_2 =$	$\delta = Z(\beta)$ $\alpha_1 = 0^0$ $\alpha_2 = 90^0$

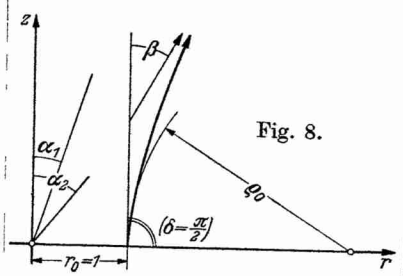

Fig. 8.

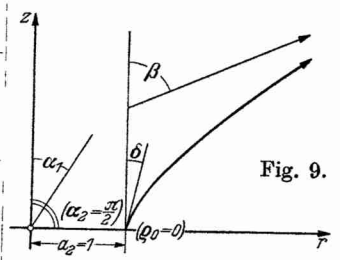

Fig. 9.

Rechter Teil: *Flächen mit Rückkehrkreis* (vgl. Fig. 7). Die geodätischen Linien der ersten Schar des Netzes laufen über die ganze Drehfläche hinweg und schneiden den Rückkehrkreis $a_2 = 1$; im Schnittpunkt bilden sie mit

dem Meridian den Winkel α_1. Die geodätischen Linien der zweiten Schar berühren den Rückkehrkreis. Es ist:

$$(\beta) \qquad \cos\beta = \frac{1}{2}\cos\alpha_1 \cos\delta.$$

Es ist δ der Winkel zwischen Spitzentangente der Meridiankurve und Drehachse. (Für $\delta = 0^0$ wird der Rückkehrkreis zum Kehlkreis.)

Es wurde zur Abkürzung gesetzt:

$$X(\beta) = \frac{2(1-\cos\beta)}{2\cos\beta - 1}, \quad Y(\beta) = \text{arc cos}\,(2\cos\beta - 1),$$

$$Z(\beta) = \text{arc cos}\,(2\cos\beta).$$

IV. Das Problem bei den Schraubenflächen.

Wir fragen, ob es Schraubenflächen gibt, auf denen zwei Scharen von ∞^1 geodätischen Linien ein „schraubensymmetrisches", „reguläres" Vierecksnetz bilden mit der Eigenschaft, daß in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien der Bedingung

$$\frac{1}{R_1}s_1' + \frac{1}{R_2}s_2' = 0$$

genügen.

Fig. 10.

1. Wir hatten für die Krümmung $\frac{1}{R}$ der geodätischen Linien auf den Schraubenflächen in Kap. II erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R}(v^2+h^2)^2\sqrt{v^2+h^2+v^2f'^2} &= -a^2v^2f' \\ &\quad -(vf''(v^2+h^2)^2 + h^2v^2f'^3 \\ &\qquad + 2h^2f'(v^2+h^2))\frac{v^2+h^2-a^2}{v^2+h^2+v^2f'^2} \\ &\quad \pm 2ha\sqrt{(v^2+h^2-a^2)(v^2+h^2+v^2f'^2)}.\end{aligned}$$

Ferner lautet die erste Grundform der Schraubenflächen für die geodätischen Linien:

$$s'^2 = v'^2\frac{v^2+h^2+v^2f'^2}{v^2+h^2-a^2}.$$

2. Die Schraubenflächen, für die $\frac{1}{R_1}s_1' + \frac{1}{R_2}s_2' = 0$ ist[14]), genügen dann der folgenden Differentialgleichung, wenn die beiden Scharen von ∞^1 durch

[14]) Ein Modell einer solchen Fläche zeigt Fig. 10.

Verschraubung auseinander hervorgehenden geodätischen Linien wieder durch die Konstanten a_1 und a_2 gekennzeichnet werden:

$$v f''(v^2+h^2)^2 = f'^3(v^4-h^2v^2)+f'(v^4-h^2v^2-2h^4)$$
$$-v^2f'(v^2+h^2+v^2f'^2)(v^2+h^2)\frac{1}{(v^2+h^2-a_1^2)(v^2+h^2-a_2^2)}$$
$$\pm\frac{2h}{a_1-a_2}\sqrt{(v^2+h^2+v^2f'^2)^3}\cdot(\sqrt{v^2+h^2-a_1^2}-\sqrt{v^2+h^2-a_2^2}).$$

Wie in Kapitel II schließt man aus dieser Differentialgleichung, daß unter den unendlich vielen Schraubenflächen, die durch Verschraubung der Meridiankurve $f = f(v)$ d. h. $z = f(r)$ um die z-Achse entstehen, und deren Meridiankurven denselben Anfangsbedingungen genügen, sich eine und nur eine befindet, auf der zwei vorgegebene Scharen von geodätischen Linien ein schraubensymmetrisches, reguläres Netz der verlangten Art bilden. Die Differentialgleichung ist wiederum in dem Spezialfall $a_1 = -a_2$ einfach lösbar. Davon wird im Teil C die Rede sein.

C. Flächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein infinitesimales Viereckснetz bilden, bei dem in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien den beiden Bedingungen $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0$ und $\frac{1}{R_1}s_1'+\frac{1}{R_2}s_2'=0$ genügen.

V. Das Problem bei den Drehflächen.

Wir fragen, ob es Drehflächen gibt, auf denen zwei Scharen von ∞^1 geodätischen Linien ein „drehsymmetrisches", „reguläres" Viereckснetz bilden, bei dem in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien den beiden Bedingungen $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0$ und $\frac{1}{R_1}s_1'+\frac{1}{R_2}s_2'=0$ genügen.

Aus diesen beiden Bedingungen folgt $s_1' = s_2'$, d. h. das Netz besteht aus infinitesimalen Rhomben. Wir haben in Kapitel I gezeigt, daß die Drehfläche, die der Bedingung $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0$ genügt, das Drehhyperboloid ist. Da ferner die erste Grundform der Drehflächen für die beiden Scharen von geodätischen Linien $s_i'^2 = v^2v'^2\frac{1+f'^2}{v^2-a_i^2}$ (für $i = 1,2$) lautet, führt die weitere Bedingung $s_1' = s_2'$ zur Gleichung $a_1 = -a_2$, die auf einem vorgegebenen Drehhyperboloid ein zu einer Meridianebene spiegelbildliches Netz von geodätischen Linien kennzeichnet. Dieses Netz ist aber wegen $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=0$ das Netz der Erzeugenden.

Wir haben somit den Satz:

Das einzige „drehsymmetrische", „reguläre" Netz aus zwei Scharen von ∞^1 *geodätischen Linien auf einer Drehfläche, das den beiden Bedingungen* $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ *und* $\frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0$ *genügt, ist das aus infinitesimalen Rhomben bestehende Netz der Erzeugenden des Drehhyperboloides.*

VI. Das Problem bei den Schraubenflächen.

Wir fragen, ob es Schraubenflächen gibt, auf denen zwei Scharen von ∞^1 geodätischen Linien ein „schraubensymmetrisches", „reguläres" Vierecksnetz bilden, bei dem in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien den beiden Bedingungen $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ und $\frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0$, somit auch der Bedingung $s_1' = s_2'$ genügen.

1. Für die Schraubenflächen, die den Bedingungen $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ bzw. $\frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0$ genügen, haben wir in Kapitel II und IV zwei Differentialgleichungen erhalten. Sollen beide Beziehungen zugleich erfüllt sein, so ist wegen $s_{1,2}'^2 = v'^2 \frac{v^2 + h^2 + v^2 f'^2}{v^2 + h^2 - a_{1,2}^2}$ und $s_1' = s_2'$ auch $a_1 = -a_2 = a$. In diesem Spezialfall sind die beiden erwähnten Differentialgleichungen identisch und können auf die folgende Form gebracht werden:

$$f'' = \left(\frac{v^2 - 2h^2}{v(v^2 + h^2)} - \frac{v}{v^2 + h^2 - a^2}\right) f' + \left(\frac{v^3 - h^2 v}{(v^2 + h^2)^2} - \frac{v^3}{(v^2 + h^2)(v^2 + h^2 - a^2)}\right) f'^3.$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung läßt sich auf eine Bernoullische Differentialgleichung zurückführen und liefert für die Meridianfunktion $f = f(v)$:

$$f = \pm \int \frac{1}{v} \sqrt[+]{\frac{(v^2 + h^2)^3}{c\,v^4 + (c\,h^2 - c\,a^2 - h^2 - a^2)\,v^2 - h^4}}\, dv^{15}),$$

wobei von der unwesentlichen additiven Integrationskonstanten abgesehen wurde. Diese Gleichung stellt, für $f = z$, $v = r$ gesetzt, *die Meridiankurve der gesuchten Schraubenfläche* dar.

2. Die Meridiankurve der gesuchten Schraubenfläche, die wir nunmehr untersuchen wollen, ist zur r-Achse spiegelbildlich; es genügt daher, ihren Verlauf im ersten Quadranten des rechtwinkligen Koordinatenkreuzes (r, z) zu betrachten. Diesen im ersten Quadranten gelegenen Teil der Meridiankurve

$$z = \int \frac{1}{r} \sqrt[+]{\frac{(r^2 + h^2)^3}{c\,r^4 + (c\,h^2 - c\,a^2 - h^2 - a^2)\,r^2 - h^4}}\, dr$$

wollen wir im folgenden kurz „*M-Kurve*" nennen.

[15]) Die Konstante c sei stets reell. Für komplexes c erhält man keine reelle Kurve.

a) Die Konstante c kann nur positive Werte annehmen, und es ist $r^2 > a^2 - h^2$. Begründung: Der Nenner A des Radikanden, der auf die Form gebracht werden kann:

$$A \equiv cr^2 (r^2 + h^2 - a^2) - (h^2 + a^2) r^2 - h^4$$

muß $\geqq 0$ sein. Es ist also zunächst der Fall $c = 0$ unmöglich. Ist ferner c positiv, so wird auch A stets positiv, sofern nur r^2 genügend große Werte annimmt, jedenfalls aber $r^2 > a^2 - h^2$ ist. Ist dagegen c negativ, so kann A nur für $r^2 + h^2 - a^2 < 0$ positiv werden; dann gibt es aber auf der zugehörigen Fläche keine geodätischen Linien, wie man aus ihrer Gleichung (vgl. Kapitel II) ersieht. Von diesem Fall $c < 0$ sehen wir daher ab.

b) Die M-Kurve hat eine stets reelle Asymptote; bildet sie mit der Schraubungsachse den Winkel β, so ist:

$$\operatorname{cotg} \beta = \frac{dz}{dr}\Big|_{r=\infty} = \frac{1}{\pm\sqrt{c}} .$$

c) Die M-Kurve hat keinen Punkt mit zur Schraubungsachse senkrechter Tangente.

d) Die M-Kurve hat *einen* Punkt $r = r_0$ mit zur Schraubungsachse paralleler Tangente. Begründung: In solchen Punkten ist $\frac{dz}{dr} = \infty$. Diese Bedingung kann nur erfüllt werden für:

$$cr^4 + (ch^2 - ca^2 - h^2 - a^2) r^2 - h^4 \equiv A = 0.$$

Diese Gleichung hat eine negative und eine positive Wurzel in r^2. Für erstere wird r imaginär. Letztere lautet:

$$r_0^2 = \frac{-ch^2 + ca^2 + h^2 + a^2 + \overset{+}{\sqrt{c^2 (h^2 - a^2)^2 + 2c (h^4 + a^4) + (h^2 + a^2)^2}}}{2c} .$$

Dieser Punkt $r = r_0$ der M-Kurve hat eine achsenparallele Tangente und ist zugleich der der Schraubungsachse am nächsten gelegene Punkt. Denn für große Werte von r^2 wird A positiv, und für genügend kleine Werte von r^2 wird A negativ. Da A nur *eine* positive Wurzel r_0^2 in r^2 hat, muß A im Intervall von 0 bis zu dieser Wurzel r_0^2 negativ sein. Ist aber A negativ, so wird in der Gleichung der M-Kurve der Radikand negativ. Im Intervall von r_0^2 bis $+\infty$ ist dann A positiv und die M-Kurve stets reell.

e) Für die Krümmung der M-Kurve erhält man:

$$\frac{1}{\varrho} = r \overset{+}{\sqrt{r^2 + h^2}} \frac{(2ch^2 + ca^2 + h^2 + a^2) r^4 + (2ch^4 - 2ch^2 a^2 - 2h^2 a^2) r^2 - h^6}{\{(c+1) r^6 + (ch^2 - ca^2 + 2h^2 - a^2) r^4 + 2h^4 r^2 + h^6\}^{3/2}} .$$

f) Die M-Kurve hat keine Wendepunkte. Begründung: Da in einem Wendepunkt $\frac{1}{\varrho} = 0$ ist, kann die M-Kurve Wendepunkte nur für

$$r^4 (2ch^2 + ca^2 + h^2 + a^2) + r^2 (2ch^4 - 2ch^2 a^2 - 2h^2 a^2) - h^6 = 0$$

haben. Diese Gleichung hat eine positive und eine negative Wurzel in r^2. Die negative Wurzel scheidet aus, die positive kann auf die Form gebracht werden:

$$r^2 = \frac{c a^2 - c h^2 + a^2 + \overset{+}{\sqrt{c^2 (h^2 - a^2)^2 + 2c (h^4 + a^4) + (h^2 + a^2)^2 - (c+1) h^2 a^2}}}{2c + c\frac{a^2}{h^2} + 1 + \frac{a_2}{h^2}}.$$

Da wir aber für den der Schraubungsachse am nächsten gelegenen Punkt der M-Kurve

$$r_0^2 = \frac{-c h^2 + c a^2 + h^2 + a^2 + \overset{+}{\sqrt{c^2 (h^2 - a^2)^2 + 2 c (h^4 + a^4) + (h^2 + a^2)^2}}}{2 c}$$

erhalten haben, so entsprechen wegen $r^2 < r_0^2$ den angegebenen Werten von r^2 keine reellen Punkte der M-Kurve.

g) Die M-Kurve hat keine Rückkehrpunkte. Begründung: In einem Rückkehrpunkt ist $\varrho = 0$. Dieser Fall kann nur eintreten für:

$$(c + 1) r^6 + (c h^2 - c a^2 + 2 h^2 - a^2) r^4 + 2 h^4 r^2 + h^6 = 0,$$

d. h.

$$r^4 (r^2 + h^2 - a^2) + \frac{h^2}{c+1} r^4 + \frac{2 h^4}{c+1} r^2 + \frac{h^6}{c+1} = 0.$$

Da nach a) stets $r^2 + h^2 - a^2 > 0$ ist, kann diese Gleichung durch keinen reellen Wert von r befriedigt werden.

Aus diesen Betrachtungen folgt, daß die *M-Kurve die in Fig. 11 angedeutete Form hat*[16]).

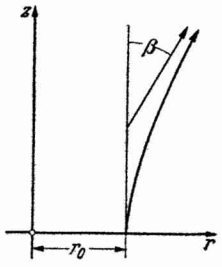

Fig. 11.

3. Wir untersuchen die Formmannigfaltigkeit der erhaltenen Schraubenflächen und die Mannigfaltigkeit der auf ihnen gelegenen Netze von geodätischen Linien. Die Meridiankurve unserer Schraubenfläche hängt bei vorgegebener Ganghöhe h von den Konstanten $c = \operatorname{tg}^2 \beta$ und a^2 ab. Die Konstante a^2 kennzeichnet zugleich das Netz der geodätischen Linien. Wir wollen wieder nur diejenigen Schraubenflächen betrachten, deren Form verschieden ist, die also nicht zueinander ähnlich sind. Hierzu setzen wir für den Abstand r_0 der Kehlschraubenlinie von der Schraubungsachse im folgenden $r_0 = 1$. Die unter 2 d) angegebene Gleichung $A = 0$ liefert für $r_0 = 1$ eine Bedingungsgleichung zwischen $\operatorname{tg}^2 \beta$ und a^2, welche lautet:

$$(*) \qquad \operatorname{tg}^2 \beta (1 + h^2 - a^2) = h^4 + h^2 + a^2.$$

[16]) Sie ist nur dann der Halbast einer Hyperbel, wenn die Schraubenfläche in eine Drehfläche ($h = 0$) ausartet.

Es gibt also bei vorgegebener Ganghöhe h stets ∞^1 formverschiedene Schraubenflächen, deren Form durch den Asymptotenwinkel β gekennzeichnet ist. Auf jeder dieser Flächen gibt es gerade ein Netz von geodätischen Linien, das durch die Konstante a^2 gekennzeichnet ist. Auf einer solchen Schraubenfläche, welche wegen $r^2 > a^2 - h^2$ (vgl. 2a) und $r_0 = 1$ nur für $1 + h^2 > a^2$ reell vorhanden ist, gilt längs einer geodätischen Linie die Gleichung:

$$\sqrt[+]{r^2 + h^2} \cdot \sin \alpha = a.$$

Da ferner die beiden Scharen von geodätischen Linien durch die Konstanten $a_1 = a$ und $a_2 = -a$ gekennzeichnet sind, so sind die orthogonalen Trajektorien der Schraubenlinien die Winkelhalbierenden der beiden Scharen. Ferner ist:

$$a_1 = \sqrt[+]{1 + h^2} \cdot \sin \alpha_0, \quad a_2 = \sqrt[+]{1 + h^2} \cdot \sin (-\alpha_0),$$

wenn α_0 und $-\alpha_0$ die Winkel sind, die die geodätischen Linien der beiden Scharen in den Punkten der Kehlschraubenlinie $r = 1$ mit den orthogonalen Trajektorien der Schraubenlinien bilden. Die Gleichung (*) kann dann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$(\alpha) \qquad \cos^2 \beta = \frac{1}{1 + h^2} \cos^2 \alpha_0 .$$

Es ist daher: $h^2 \leqq \operatorname{tg}^2 \beta \leqq \infty$.

4. Wir betrachten die *Grenzfälle* $\operatorname{tg}^2 \beta = h^2$ und $\operatorname{tg}^2 \beta = \infty$.

Im Falle $\operatorname{tg}^2 \beta = h^2$ wird $a = 0$; beide Scharen von geodätischen Linien fallen mit den zu den Schraubenlinien orthogonalen Trajektorien, die ja auch geodätische Linien sind, zusammen. In diesem Falle ($c = h^2$, $a = 0$) läßt sich das Integral in der Gleichung der Meridiankurve auswerten; man erhält:

$$z = \frac{1}{h} \sqrt{r^2 - 1} + h \operatorname{arc\,tg} \sqrt{r^2 - 1} .$$

Man kann zeigen, daß auf der zugehörigen Schraubenfläche die orthogonalen Trajektorien der Schraubenlinien Gerade sind, die zur Achse windschief sind. *Die — nicht abwickelbare — Fläche wird also erzeugt durch Verschraubung einer zur Schraubungsachse windschiefen Geraden; dabei beschreiben alle Punkte der Geraden Schraubenlinien, die auf ihr senkrecht stehen.*

Im Falle $\operatorname{tg}^2 \beta = \infty$ wird $c = \infty$ und daher $f \equiv 0$. Wir haben die *gemeine Wendelfläche*, also eine Minimalfläche. Wegen $f \equiv 0$ gilt hier die Gleichung (α) nicht mehr. Man sieht jedoch, daß die beiden Forderungen $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ und $\frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0$ für $a_1 = -a_2$ *stets* erfüllt sind. Im Gegensatz zu den vorher betrachteten Schraubenflächen trägt also die gemeine Wendelfläche nicht nur *ein* Netz, sondern ∞^1 Netze von geodätischen Linien, deren Winkelhalbierenden die zu den Schraubenlinien orthogonalen Trajektorien sind.

Zusammenfassend können wir sagen:

Es gibt ∞^1 formverschiedene, d. h. nicht zueinander ähnliche Schraubenflächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein „schraubensymmetrisches", „reguläres" Viereckssnetz bilden, das den beiden Bedingungen $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ *und* $\frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0$ *genügt, mithin aus infinitesimalen Rhomben besteht. Jede dieser ∞^1 Schraubenflächen, deren Meridiankurven die in obenstehender Figur angedeutete Gestalt haben, trägt ein Netz, dessen Winkelhalbierende die orthogonalen Trajektorien der Schraubenlinien sind. Als Spezialfälle erhalten wir eine — nicht abwickelbare — Schraubenfläche, die durch Verschraubung einer zur Achse windschiefen Geraden entsteht, wobei die Bahnschraubenlinien auf den Geraden senkrecht stehen, und beide Scharen des Netzes mit der Geradenschar zusammenfallen; ferner die gemeine Wendelfläche, also eine Minimalfläche, die im Gegensatz zu allen anderen Schraubenflächen ∞^1 Netze der verlangten Art trägt.*

VII. Das Problem bei den Minimalflächen.

Unter den Flächen, die den Bedingungen $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ und $\frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0$ genügen, befindet sich — wie im letzten Kapitel gezeigt wurde — eine Minimalfläche, die gemeine Wendelfläche. Es liegt daher nahe zu fragen, ob es noch andere Minimalflächen gibt, die diesen beiden Bedingungen genügen.

Wir wollen zunächst nach Minimalflächen fragen, die nur die erste der beiden angegebenen Bedingungen erfüllen. Wir bestimmen also diejenigen Minimalflächen, auf denen zwei Scharen von geodätischen Linien ein infinitesimales Viereckssnetz bilden, bei dem in jedem Kreuzungspunkt die beiden hindurchgehenden geodätischen Linien entgegengesetzt gleiche Krümmung besitzen, also $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ ist.

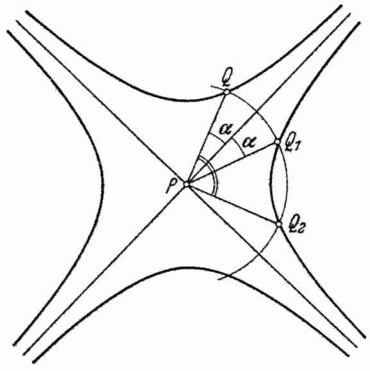

Fig. 12.

1. Auf einer beliebigen Fläche ist die Krümmung einer geodätischen Linie gleich ihrer Normalkrümmung. Ist Q ein Punkt der Indikatrix in einem beliebigen Flächenpunkt P, so ist $\frac{1}{\sqrt{\overline{PQ}}}$ die Normalkrümmung einer in Richtung $\overline{PQ}$ verlaufenden Flächenkurve. Für jede Minimalfläche besteht die Indikatrix aus zwei kongruenten gleichseitigen Hyperbeln. Sollen daher

gemäß unserer Fragestellung zwei geodätische Linien in einem Punkt einer Minimalfläche entgegengesetzt gleiche Krümmung besitzen, so müssen ihre Normalkrümmungen entgegengesetzt gleich sein, d. h. (vgl. Fig. 12) die geodätischen Linien müssen entweder aufeinander senkrecht stehen oder mit einer Asymptotenrichtung gleiche Winkel bilden[17]).

Der *erste* Fall ist unmöglich. Nach einem Satz von Liouville[18]) sind Flächen mit zwei Scharen von geodätischen Linien, die sich unter konstantem Winkel schneiden, abwickelbar. Dieser Fall führt daher auf abwickelbare Minimalflächen, d. h. auf die Ebene und scheidet daher aus.

Im *zweiten* Fall sind die Asymptotenlinien die Winkelhalbierenden der beiden Scharen von geodätischen Linien oder auch ihrer orthogonalen Trajektorien, d. h. zweier Scharen von geodätischen Parallelen. Es kann aber allgemein die erste Grundform einer beliebigen Fläche, auf der zwei beliebige Scharen geodätischer Parallelen als Parameterlinien $u_1 = \text{konst.}$, $v_1 = \text{konst.}$ gewählt sind, auf die Form $s'^2 = \frac{1}{\sin^2\omega}(u_1'^2 + v_1'^2 + 2\,u_1' v_1' \cos\omega)$ gebracht werden[19]); die beiden Scharen geodätischer Parallelen bilden wegen $E_1 = G_1 = \frac{1}{\sin^2\omega}$ stets ein infinitesimales Rhombennetz, wobei ω der Winkel zwischen den Netzkurven ist. Wenn nun außerdem bei unserer gesuchten Minimalfläche die Asymptotenlinien die Winkelhalbierenden der geodätischen Parallelen sein sollen, so müssen sie die Diagonalkurven des infinitesimalen Rhombennetzes dieser Scharen von geodätischen Parallelen sein. Wir wollen nun für die gesuchte Minimalfläche als neue Parameterkurven $u = \text{konst.}$, $v = \text{konst.}$ die Asymptotenlinien einführen gemäß $\bar{U}(u) = \frac{1}{2}(u_1 + v_1)$, $\bar{V}(v) = \frac{1}{2}(u_1 - v_1)$. Als neue Grundgrößen ergeben sich dann: $E = \frac{\bar{U}'^2}{\sin^2\frac{\omega}{2}}$, $F = 0$, $G = \frac{\bar{V}'^2}{\cos^2\frac{\omega}{2}}$, $L = 0$, $N = 0$. Da sich auf den Minimalflächen die Asymptotenlinien stets in der Form eines infinitesimalen Quadratnetzes anordnen lassen[20]), können wir über $\bar{U}(u)$ und $\bar{V}(v)$ so verfügen, daß $E = G$ und damit $= \bar{U}'^2 + \bar{V}'^2$ wird. Schreiben wir noch zur Abkürzung $\bar{U}'^2(u) = U(u)$ und $\bar{V}'^2(v) = V(v)$, so lauten jetzt die Grundgrößen[21]):

$$E = G = U(u) + V(v), \quad F = L = N = 0.$$

---

[17]) Vgl. S. Finsterwalder, a. a. O., S. 68.

[18]) Vgl. Darboux, Théorie des surfaces, Band II, S. 437.

[19]) Vgl. Darboux, Théorie des surfaces, Band II, S. 434.

[20]) D. h. die Asymptotenlinien bilden ein Isothermennetz, vgl. Scheffers, Theorie der Flächen, Satz 132, S. 317.

[21]) Vgl. auch Darboux, Théorie des surfaces, Band III, S. 16.

2. Damit es nun überhaupt eine Fläche mit diesen Grundgrößen gibt, müssen die Grundgleichungen erfüllt sein. In unserem Falle lauten die Codazzi-Mainardischen Gleichungen $\frac{\partial M}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial M}{\partial v} = 0$, d. h. $M = h =$ konst. und das Gaußsche Theorema egregium $U'' + V'' - \frac{U'^2 + V'^2}{U + V} = 2h^2$. Eine hier weggelassene Zwischenrechnung zeigt, daß aus der letzten Gleichung notwendig folgt, daß eine der Funktionen $U(u)$ oder $V(v)$ konstant, also etwa $V(v) = 0$ ist. Da aber dann die Grundgrößen $E = G = U(u)$, $F = L = N = 0$, $M = h$ nur Funktionen *eines* Parameters sind, muß die gesuchte Minimalfläche eine Dreh- oder Schraubenfläche sein. Zu ihrer genaueren Bestimmung setzen wir noch $U(u)\, u'^2 = u_0'^2$, $v'^2 = v_0'^2$; dann wird $U(u) = U_0(u_0)$, und die Grundgrößen lauten:

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = U_0(u_0),$$
$$L = 0, \quad M = \frac{h}{\sqrt{U_0(u_0)}}, \quad N = 0.$$

Für diese Grundgrößen lautet das Theorema egregium:

$$2\, U_0\, U_0'' - U_0'^2 = 4h^2, \quad \text{d. h.} \quad U_0(u_0) = c^2 (u_0 + C)^2 + \frac{h^2}{c^2},$$

wo c und C die Integrationskonstanten sind. Die Fläche mit diesen Grundgrößen hat die Gleichung:

$$\begin{cases} \varphi = c\, v_0 \\ r = u_0 + C \\ z = \frac{h\, v_0}{c} \end{cases}$$

und ist die *gemeine Wendelfläche.*

3. Wir fassen das Ergebnis dieses Kapitels in dem folgenden Satz zusammen: Die einzige Minimalfläche, die ein Netz von geodätischen Linien trägt, das der Bedingung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ genügt, ist die Wendelfläche, und zwar sind die Asymptotenlinien (Schraubenlinien und geradlinige Erzeugende) die Winkelhalbierenden der beiden Scharen von Netzkurven.

Im vorangehenden Kapitel haben wir den folgenden Satz bewiesen: Die Wendelfläche trägt ∞^1 Netze von geodätischen Linien, die der Bedingung $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ genügen, und deren Winkelhalbierende die Asymptotenlinien (Schraubenlinien und geradlinige Erzeugende) sind. Außerdem genügen diese Netze — als reguläre Netze — auch der Bedingung $\frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0$, bestehen also aus infinitesimalen Rhomben[22]).

---

[22]) Vgl. hierzu: A. Voss, Über diejenigen Flächen, welche durch zwei Scharen von Kurven konstanter geodätischer Krümmung in infinitesimale Rhomben zerlegt werden. Sitzungsberichte d. Bayr. Akademie **36** (1906), S. 247.

Diese beiden Ergebnisse liefern die folgenden Sätze:

a) *Die einzige Minimalfläche, auf der zwei Scharen von geodätischen Linien ein Viereckesnetz bilden, das den beiden Bedingungen* $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ *und* $\frac{1}{R_1} s_1' + \frac{1}{R_2} s_2' = 0$ *genügt (also aus infinitesimalen Rhomben besteht), ist die Wendelschraubenfläche; es gibt auf ihr* ∞^1 *solche Netze, deren Winkelhalbierenden die Schraubenlinien und die geradlinigen Erzeugenden sind, die also schraubensymmetrisch und regulär sind.*

b) *Diese Wendelfläche ist aber auch die einzige Minimalfläche, auf der zwei Scharen von geodätischen Linien Netze bilden, die nur der Bedingung* $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 0$ *genügen; diese Netze ergeben sich als dieselben schraubensymmetrischen Netze wie vorher unter* a), *jedoch brauchen sie nicht mehr notwendig regulär zu sein.*

(Eingegangen am 23. Dezember 1937.)