Werk

Titel: III. Allgemeine Eigenschaften der Kreiskurven II. Ordnung

Ort: Berlin

Jahr: 1938

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0043|log97

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Gleichung sechsten Grades für D, die mit (36) alle Wurzeln gemein haben muß. Eine letzte Anwendung von (36) gibt also:

$$I = I(I_2, I_3, I_3),$$

w. z. z. w.

III. Allgemeine Eigenschaften der Kreiskurven zweiter Ordnung.

21. Untersuchen wir die auf die spirische Gestalt reduzierte Kreiskurve, so sind offenbar solche Eigenschaften der spirischen Linie, welche sich in invarianter Weise ausdrücken lassen auch allgemeine Eigenschaften einer jeden Kreiskurve.

Auf diese Weise wollen wir zuerst allgemeine Sätze über die gegenseitige Lage der Brennpunkte und der Inversionskreise einer Kreiskurve bestimmen. Die Brennpunkte genügen den Gleichungen $b = 0$, $\bar{b} = 0$, die aber im Falle der spirischen Linie in eine einzige zusammenfallen:

$$AC u^4 + (AF + C^2 - 4D^2) u^2 + FC = 0.$$

Die vier Wurzeln dieser Gleichung sind alle reell bzw. rein imaginär, wenn $AF > 0$, oder paarweise reell und rein imaginär, wenn $AF < 0$ ist. Man bekommt alle 16 Brennpunkte der Kreiskurve, wenn wir $\xi + i\eta = u_k$, $\xi - i\eta = u_l$ setzen und daraus ξ und η berechnen:

$$\xi = \frac{u_l + u_k}{2}, \quad \eta = i\frac{u_l - u_k}{2}.$$

Man bestätigt leicht, daß sie zu je vieren auf den Inversionskreisen liegen. Die reellen Brennpunkte folgen daraus, wenn wir zu u_k jeweils $u_l = \bar{u}_k$ nehmen. Nun sahen wir oben, daß die spirische Linie folgende Inversionskreise:

$$i(u - \bar{u}) = 0, \quad u + \bar{u} = 0, \qquad Au\bar{u} - \sqrt{AF} = 0, \quad Au\bar{u} + \sqrt{AF} = 0$$

besitzt. Sind die Koeffizienten in der Gleichung der spirischen Linie reell, so entscheidet über die Realität dieser Kreise die Größe AF. Dabei wird ein Kreis als reell aufgefaßt, wenn in $\alpha u\bar{u} + \beta u + \bar{\beta}\bar{u} + \gamma = 0$ α, γ reell, β und $\bar{\beta}$ aber konjugiert komplex sind. Wir erhalten so folgende bereits bekannte[17]) Einteilung der Kreiskurven II. Ordnung:

A. Bei den Kreiskurven mit einem Paar reeller und einem Paar komplexer Inversionskreise liegen die reellen Brennpunkte paarweise auf beiden reellen Inversionskreisen.

B. Bei den Kreiskurven mit vier reellen Inversionskreisen liegen die reellen Brennpunkte auf demselben Inversionskreise und

C. die komplexen Kreiskurven.

22. Die letzte Einteilung wollen wir dadurch vervollständigen, daß wir sie mit Hilfe der Werte der Invarianten I_2, I_3, I_4, g_2, g_3 ausdrücken. Zu

[17]) Darboux, S. 30.

diesem Zweck berechnen wir uns aus (33) und (34) das Produkt $16\,AFC^2$. Es ist, wenn wir mit φ die linke Seite der kanonisierenden Gleichung:

$$16\,D^6 - 8\,I_2\,D^4 + I_4\,D^2 - I_3^2 = 0$$

bezeichnen:

$$(46)\qquad 16\,AFC^2 = -\,48\,D^4 + 16\,I_2\,D^2 + 4\,I_2^2 - 4\,I_4 = 12\,g_2 - \varphi',$$

wo φ' die erste Ableitung von φ nach D^2 bedeutet.

Ist die Diskriminante $g_2^3 - 27\,g_3^2$ von φ negativ, so besitzt die Gleichung $\varphi = 0$ eine positive und zwei konjugiert komplexe Wurzeln. Ist g_2 negativ, so ist nach (46) für die positive Wurzel von $\varphi = 0$ das Produkt $16\,AFC^2$ negativ. Wenn wir also das Vorzeichen von D geeignet wählen, so ist AF negativ, und C^2 positiv, das ist aber der Fall A. der obigen Einteilung (siehe Fig. 1).

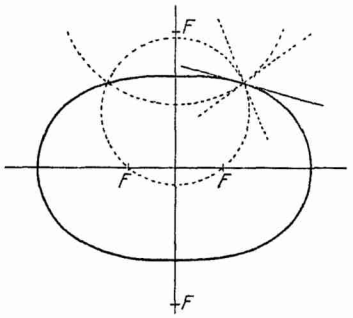

Fig. 1.

Ist g_2 positiv aber $g_2^3 - 27\,g_3^2 < 0$, so berechnen wir uns die Werte von D^2, für welche $12\,g_2 - \varphi' = 0$ wird. Wir finden für $6\,D^2$ bzw. die reellen Werte:

$$(47)\qquad I_2 - 2\sqrt{3\,g_2}, \qquad I_2 + 2\sqrt{3\,g_2}.$$

Für diese beiden Werte von D^2 berechnen wir uns die entsprechenden Werte der Funktion φ:

$$\tfrac{4}{9}\sqrt{3}\,(3\sqrt{3}\,g_3 - g_2\sqrt{g_2}), \qquad \tfrac{4}{9}\sqrt{3}\,(3\sqrt{3}\,g_3 + g_2\sqrt{g_2}),$$

wo alle Wurzelzeichen positiv genommen sind. Das Produkt dieser beiden Werte ist vom numerischen Faktor abgesehen $27\,g_3^2 - g_2^3$ also im eben behandelten Falle positiv. Im Intervalle (47) kann also φ nur eine gerade Zahl von Wurzeln besitzen, die aber Null sein muß, da $\varphi = 0$ nur eine reelle Wurzel besitzt. Nun ist $12\,g_2 - \varphi'$ im Intervall (47) positiv, außerhalb aber negativ, es ist also wiederum $16\,AFC^2$ für die positive Wurzel von $\varphi = 0$ negativ und somit auch $AF < 0$.

Nun wollen wir noch den Fall $g_2^3 - 27\,g_3^2 > 0$ erledigen. Die Gleichung $\varphi = 0$ besitzt alsdann drei reelle Wurzeln, die nur für $I_2 > 0$, $I_4 > 0$ alle positiv sind. In allen anderen Fällen haben wir zwei negative und eine positive Wurzel. In jedem Falle liegen aber alle diese Wurzeln im Intervall (47), da die Werte von φ, φ', φ'' im rechten Endpunkte positiv, im linken dagegen abwechselnd negativ und positiv sind. Die Funktion φ ist also rechts von $I_2 + 2\sqrt{3\,g_2}$ dauern positiv, links von $I_2 - 2\sqrt{3\,g_2}$ aber dauernd negativ. Das Produkt AFC^2 ist positiv und somit AF, C^2 von denselben Vorzeichen

wie $AF + C^2 = I_2 - 2D^2$. Nun besitzt $3(I_2 - 2D^2)$ in den Endpunkten des Intervalles bzw. die Werte:

$$2I_2 + 2\sqrt{3g_2}, \qquad 2I_2 - 2\sqrt{3g_2},$$

deren Produkt $3I_4$ ist. Sind nun I_2, I_4 beide positiv, dann ist auch $I_2 - 2D^2$ im ganzen Intervall positiv und somit auch AF und C^2, das ist aber der Fall B. der obigen Einteilung (s. Fig. 2).

Ist I_2 oder I_4 oder beides negativ, so können wir ebenso leicht zeigen, daß die entsprechende Kreiskurve komplex ist. Ist in der Tat I_4 negativ und I_2 positiv, so schneidet, wenn wir für den Augenblick $D^2 = x$ und $y = I_2 - 2x$ setzen, die Gerade $y = I_2 - 2x$ die x-Achse unterhalb der positiven Wurzel von $\varphi = 0$, da für $2D^2 = I_2$ die Funktion φ gleich $\frac{1}{2} I_2 I_4 - I_3^2$ und also negativ ist. Für die positive Wurzel von $\varphi = 0$ ist also $AF + C^2$ und somit C^2 negativ, während für die negative Wurzel von $\varphi = 0$ D^2 negativ und AF, C^2 positiv sind.

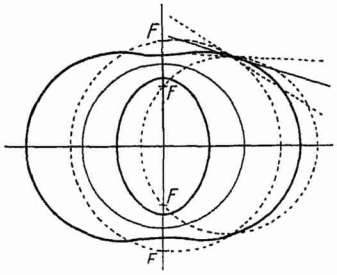

Fig. 2.

Im Falle $I_4 > 0$, $I_2 < 0$ schneidet die Gerade $y = I_2 - 2x$ die x-Achse außerhalb des Intervalles (47), in dessen Endpunkten $I_2 - 2D^2$ negativ ist. Wir erkennen so, daß für $D^2 > 0$ dagegen AF, $C^2 < 0$ ist und für $D^2 < 0$ ebenso AF, $C^2 < 0$ ist. Im letzten Falle ist die entsprechende Kreiskurve rein imaginär.

Ist endlich $I_2 < 0$, $I_4 < 0$, so schneidet die Gerade $y = I_2 - 2x$ die x-Achse im Intervall (47), doch da $x_0 = \frac{1}{2} I_2$ negativ ist unterhalb der positiven Wurzel von $\varphi = 0$, so daß wiederum nur komplexe oder rein imaginäre Fälle möglich sind.

Wir können nunmehr folgende endgültige Einteilung der Kreiskurven II. Ordnung aufstellen:

A. *Die Kreiskurven mit* $g_2^3 - 27 g_3^2 < 0$ *besitzen zwei reelle und zwei komplexe Inversionskreise und die reellen Brennpunkte liegen paarweise auf den beiden reellen Inversionskreisen.*

B. *Die Kreiskurven mit* $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$ *und* $I_2 > 0$, $I_4 > 0$, *besitzen vier reelle Inversionskreise und die reellen Brennpunkte liegen auf einem Inversionskreise.*

C. *Die Kreiskurven mit* $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$ *und* $I_2 < 0$ *oder* $I_4 < 0$ *oder* I_2, $I_4 < 0$ *sind komplex.*

23. Es könnte vorkommen, da auch im Falle C. die Invarianten I_2, I_3, I_4 reelle Größen sind, daß nur die auf die spirische Gestalt reduzierte Kreiskurve komplexe Koeffizienten erhält. Nun ist leicht einzusehen, daß dies nicht der Fall ist. Nehmen wir in der Tat eine reelle Kreiskurve mit $g_2^3 - 27 g_3^2 > 0$,

so liegen wegen der letzten Ungleichung die vier reellen Brennpunkte auf einem Kreise. Wir bilden nun durch eine lineare Transformation diesen Kreis derart auf die reelle x-Achse ab, daß die Brennpunkte symmetrisch zur y-Achse zu liegen kommen. Die Koeffizienten in der Gleichung der transformierten Kreiskurve bleiben dabei reell bzw. in vorgeschriebener Art konjugiert komplex. Die Brennpunktgleichung besitzt vier reelle Wurzeln und wegen der Symmetrie zur y-Achse nur gerade Potenzen der Unbekannten. Die Koeffizienten der neuen Gleichung genügen also nach (16) folgenden Bedingungen:

$$(48)\qquad \begin{aligned} 2DB - C\overline{B} - AE &= 0, & 2D\overline{E} - \overline{C}E - F\overline{B} &= 0,\\ 2D\overline{B} - \overline{C}B - A\overline{E} &= 0, & 2DE - C\overline{E} - FB &= 0. \end{aligned}$$

Eliminieren wir aus diesen Gleichungen E, $\overline{E}$, so bekommen wir für B, $\overline{B}$ folgende Bedingungen:

$$\begin{aligned} (4D^2 + C\overline{C} - AF)\,\overline{B} - 4D\overline{C}B &= 0,\\ -4DC\overline{B} + (4D^2 + C\overline{C} - AF)\,B &= 0. \end{aligned}$$

Ist $(4D^2 + C\overline{C} - AF)^2 - 16D^2 C\overline{C} \neq 0$, so folgt $B = \overline{B} = 0$, dann auch $E = \overline{E} = 0$, also die spirische Gestalt. Dann folgt aber aus (33) und (35), da die Koeffizienten reell sind, $I_2 > 0$, $I_4 > 0$.

Die Bedingung $(4D^2 + C\overline{C} - AF)^2 - 16D^2 C\overline{C} = 0$ hat zur Folge. wenn $D \neq 0$ ist, daß die Kreiskurve noch einen dritten Doppelpunkt hat, Ist aber $D = 0$, so ist auch $AF - C\overline{C} = 0$ und nach (48) $AE + C\overline{B} = 0$, $A\overline{E} + \overline{C}B = 0$. Dies sind aber kanonisierende Bedingungen einer auf eine neue Art reduzierten Kreiskurve, die wir als ein Gegenstück der spirischen Linie auffassen können. Das Bemerkenswerte dieser Reduktion ist, daß sie sich gleichzeitig auf alle drei Kovarianten f, h, k auswirkt. Die reduzierte Gleichung ist aber nur im Falle $g_2^3 - 27\,g_3^2 < 0$ reell, so daß jedenfalls der Fall C. wiederum auf komplexe Kreiskurven führt.

24. Man definiert z. B. die spirische Linie in mannigfacher Weise als den geometrischen Ort jener Punkte, für welche die Entfernungen von festen Punkten lineare oder quadratische Relationen erfüllen. Diese Definitionen sind aber in unserer Theorie unbrauchbar, da ja die Entfernung zweier Punkte keine Invariante der linearen Transformation ist. Wir wollen daher eine solche Definition der spirischen Linie aufstellen, welche nur invariante Größen enthält und also für eine beliebige Kreiskurve gilt.

Wir nehmen, um diese Rechnungen möglichst einfach durchzuführen, den Fall einer spirischen Linie mit vier reellen Brennpunkten, die auf der x-Achse liegen sollen. Wir bezeichnen diese Punkte mit $\pm e_1$, $\pm e_2$, wobei also

$$e_1^2 + e_2^2 = \frac{4D^2 - AF - C^2}{AC}, \quad e_1^2 e_2^2 = \frac{F}{A}$$

ist. Durch einen gegebenen Punkt u der spirischen Linie legen wir zwei Kreise bzw. durch die Punkte $-e_1$, e_1 und $-e_2$, e_2. Diese beiden Kreise sollen (s. Fig. 3) nun mit der x-Achse die Winkel ε_1 und ε_2 bilden. Die Gleichungen dieser beiden Kreise sind dann:

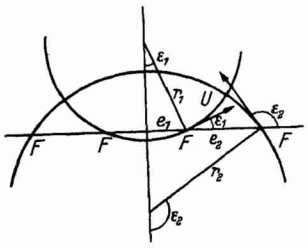

Fig. 3.

$$u\bar{u} + ie_k \operatorname{cotg} \varepsilon_k (u - \bar{u}) - e_k^2 = 0,$$
$$k = 1, 2.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber leicht

$$i(u - \bar{u}) = \frac{e_1^2 - e_2^2}{e_1 \operatorname{cotg} \varepsilon_1 - e_2 \operatorname{cotg} \varepsilon_2},$$

$$u\bar{u} = e_1 e_2 \frac{e_2 \operatorname{cotg} \varepsilon_1 - e_1 \operatorname{cotg} \varepsilon_2}{e_1 \operatorname{cotg} \varepsilon_1 - e_2 \operatorname{cotg} \varepsilon_2}$$

Setzen wir diese Werte in die Gleichung der Kreiskurve $f = 0$, so finden wir nach einigen Umformungen:

$$\operatorname{cotg}^2 \varepsilon_1 + \operatorname{cotg}^2 \varepsilon_2 - 2p \operatorname{cotg} \varepsilon_1 \operatorname{cotg} \varepsilon_2 = p^2 - 1, \tag{49}$$

wo

$$p = \frac{2D - C}{\sqrt{A F}}$$

ist und sich in bestimmter Weise durch Invarianten der Kreiskurve ausdrücken läßt. Multiplizieren wir die Gleichung (49) mit $\sin^2 \varepsilon_1 \sin^2 \varepsilon_2$, so erhalten wir endlich:

$$\cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 + p \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 = \pm 1. \tag{50}$$

Man bekommt zwei Formen der gleichen Art, wenn man die vier Brennpunkte auf andere Weise zu Paaren kombiniert und durch die Punkte eines Paares wie oben Kreise legt.

Da diese Relationen offenbar invariant sind, so haben wir also, wenn wir komplexe Winkel und komplexe Punkte (vgl. Fig. 1 und 2) zulassen, für die allgemeine Kreiskurve folgende Definition:

Legt man durch vier Punkte eines gegebenen Kreises zwei veränderliche Kreise K_1, K_2, welche mit dem gegebenen solche Winkel ε_1, ε_2 bilden, daß eine Relation der Form:

$$\cos \varepsilon_1 \cos \varepsilon_2 + p \sin \varepsilon_1 \sin \varepsilon_2 = 1$$

erfüllt ist, so liegen die Schnittpunkte der Kreise K_1, K_2 auf einer Kreiskurve II. Ordnung.

25. Diese Kreispaare besitzen noch eine andere wichtige Eigenschaft, die schon von Darboux angegeben wurde[18]): *Die Tangente an die Kreiskurve im gegebenen Punkte ist eine Symmetrale des Winkels, gebildet von den Tangenten an die beiden Kreise im betrachteten Punkte.*

---

[18]) Darboux, S. 56.