Werk

Titel: § 4. Aufstellung und Lösung der charakteristischen Gleichung

Ort: Berlin

Jahr: 1938

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0043|log79

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

§ 4.

Aufstellung und Lösung der charakteristischen Gleichung.

Durch die Transformation

$$u = a_1 + \lambda U, \quad v = a_2 + \lambda V, \tag{4.1}$$

wobei λ reell sein soll, gehen die Gleichungen (2. 5) über in:

$$\left\{\begin{aligned} \lambda \ddot{U} + 2i\alpha\lambda\dot{U} - \alpha^2(a_1 + \lambda U) &= -m_2 \frac{a_1 - a_2 + \lambda(U - V)}{|a_1 - a_2 + \lambda(U - V)|^3} \\ &\quad - (m_1 + m_3)\frac{a_1 + \lambda U}{|a_1 + \lambda U|^3} - m\frac{a_2 + \lambda V}{|a_2 + \lambda V|^3}, \\ \lambda \ddot{V} + 2i\alpha\lambda\dot{V} - \alpha^2(a_2 + \lambda V) &= -m_1 \frac{a_2 - a_1 + \lambda(V - U)}{|a_2 - a_1 + \lambda(V - U)|^3} \\ &\quad - (m_2 + m_3)\frac{a_2 + \lambda V}{|a_2 + \lambda V|^3} - m_1\frac{a_1 + \lambda U}{|a_1 + \lambda U|^3}. \end{aligned}\right. \tag{4.2}$$

Nun ist, da ja a_1, a_2 und λ reell sind:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + \lambda U}{|a_1 + \lambda U|^3} &= \frac{a_1}{|a_1|^3}\left(1 + \lambda\frac{U}{a_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1 + \lambda\frac{\overline{U}}{a_1}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{a_1}{|a_1|^3}\left(1 - \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{U}{a_1} + \ldots\right)\cdot\left(1 - \frac{3\lambda}{2}\cdot\frac{\overline{U}}{a_1} + \ldots\right) \\ &= \frac{a_1}{|a_1|^3}\cdot\left(1 - \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{U + 3\overline{U}}{a_1} + \ldots\right). \end{aligned}$$

Dabei sind die durch Punkte angedeuteten Glieder von höherer als erster Ordnung in λ. Analog wird:

$$\frac{a_2 + \lambda V}{|a_2 + \lambda V|^3} = \frac{a_2}{|a_2|^3}\cdot\left(1 - \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{V + 3\overline{V}}{a_2} + \ldots\right)$$

und wegen $|a_1 - a_2| = 1$:

$$\frac{a_1 - a_2 + \lambda(U - V)}{|a_1 - a_2 + \lambda(U - V)|^3} = (a_1 - a_2)\cdot\left(1 - \frac{\lambda}{2}\cdot\frac{U - V + 3\cdot(\overline{U} - \overline{V})}{a_1 - a_2} + \ldots\right).$$

Außerdem ist dabei: $a_1 - a_2 = -1$.

Entwickeln wir die rechten Seiten der Gleichungen (4. 2) unter Benutzung dieser Ergebnisse nach Potenzen von λ, so fallen die Glieder ohne λ wegen (2. 8) heraus und nach Wegheben eines Faktors λ erhalten wir schließlich das System:

$$\left\{\begin{aligned} \ddot{U} + 2i\alpha\dot{U} - \alpha^2 U &= \frac{m_2}{2}(U - V) + \frac{3m_2}{2}(\overline{U} - \overline{V}) + \frac{m_1 + m_3}{2}\cdot\frac{U}{|a_1|^3} \\ &\quad + \frac{3(m_1 + m_3)}{2}\cdot\frac{\overline{U}}{|a_1|^3} + \frac{m_2}{2}\cdot\frac{V}{|a_2|^3} + \frac{3m_2}{2}\cdot\frac{\overline{V}}{|a_2|^3} + \ldots \\ \ddot{V} + 2i\alpha\dot{V} - \alpha^2 V &= \frac{m_1}{2}(V - U) + \frac{3m_1}{2}(\overline{V} - \overline{U}) + \frac{m_2 + m_3}{2}\cdot\frac{V}{|a_2|^3} \\ &\quad + \frac{3(m_2 + m_3)}{2}\frac{\overline{V}}{|a_2|^3} + \frac{m_1}{2}\cdot\frac{U}{|a_1|^3} + \frac{3m_1}{2}\cdot\frac{\overline{U}}{|a_1|^3} + \ldots. \end{aligned}\right. \tag{4.3}$$

Die durch Punkte angedeuteten Glieder besitzen dabei λ als Faktor. Nun werden die Gleichungen in Real- und Imaginärteil zerlegt, wobei

$$U = U_1 + i\,U_2, \qquad V = V_1 + i\,V_2. \tag{4. 4}$$

Dann ergibt sich das System:

$$\left\{\begin{aligned}
&\ddot{U}_1 - 2\,\alpha\,\dot{U}_2 - \alpha^2\,U_1 = 2\,m_2\,(U_1 - V_1)\\
&\qquad\qquad + 2\,(m_1 + m_3)\,\frac{U_1}{|a_1|^3} + 2\,m_2\,\frac{V_1}{|a_2|^3} + \ldots\\
&\ddot{U}_2 + 2\,\alpha\,\dot{U}_1 - \alpha^2 U_2 = m_2\,(V_2 - U_2)\\
&\qquad\qquad - (m_1 + m_3)\,\frac{U_2}{|a_1|^3} - m_2\,\frac{V_2}{|a_2|^3} + \ldots\\
&\ddot{V}_1 - 2\,\alpha\,\dot{V}_2 - \alpha^2 V_1 = 2\,m_1\,(V_1 - U_1)\\
&\qquad\qquad + 2\,(m_2 + m_3)\,\frac{V_1}{|a_2|^3} + 2\,m_1\,\frac{U_1}{|a_1|^3} + \ldots\\
&\ddot{V}_2 - 2\,\alpha\,\dot{V}_1 - \alpha^2 V_2 = m_1\,(U_2 - V_2)\\
&\qquad\qquad - (m_2 + m_3)\,\frac{V_2}{|a_2|^3} - m_1\,\frac{U_2}{|a_1|^3} + \ldots.
\end{aligned}\right. \tag{4. 5}$$

In diesen Gleichungen werden die Ausdrücke $\frac{m_1 + m_3}{|a_1|^3}$ und $\frac{m_2 + m_3}{|a_2|^3}$ mit Hilfe der Gleichungen (2. 8) beseitigt und weiterhin die Abkürzungen (3. 1) eingeführt. Speziell für $\lambda = 0$ erhält man dann nach leichten Umformungen das lineare, homogene System:

$$\left\{\begin{aligned}
&\ddot{U}_1 + U_1\,(-3\,\alpha^2 - 2\,M_2) - 2\,\alpha\,\dot{U}_2 + 2\,\frac{a_1}{a_2}\,M_2 V_1 = 0,\\
&2\,\alpha\,\dot{U}_1 + \ddot{U}_2 + M_2 U_2 - \frac{a_1}{a_2}\,M_2 V_2 = 0,\\
&2\,\frac{a_2}{a_1}\,M_1 U_1 + \ddot{V}_1 + V_1\,(-3\,\alpha^2 - 2\,M_1) - 2\,\alpha\,\dot{V}_2 = 0,\\
&-\frac{a_2}{a_1}\,M_1 U_2 + 2\,\alpha\,\dot{V}_1 + \ddot{V}_2 + M_2 V_2 = 0.
\end{aligned}\right. \tag{4. 6}$$

Der Lösungsansatz

$$U_1 = A\cdot e^{\varrho t}, \quad U_2 = B\cdot e^{\varrho t}, \quad V_1 = C\cdot e^{\varrho t}, \quad V_2 = D\cdot e^{\varrho t} \tag{4. 7}$$

liefert die charakteristische Gleichung dieses Systems:

$$\begin{vmatrix}
\varrho^2 - 3\,\alpha^2 - 2\,M_2, & -2\,\alpha\,\varrho & 2\,\frac{a_1}{a_2}\,M_2, & 0\\
2\,\alpha\,\varrho, & \varrho^2 + M_2, & 0 & -\frac{a_1}{a_2}\,M_2\\
2\,\frac{a_2}{a_1}\,M_1, & 0, & \varrho^2 - 3\,\alpha^2 - 2\,M_1, & -2\,\alpha\,\varrho\\
0, & -\frac{a_2}{a_1}\,M_1, & 2\,\alpha\,\varrho, & \varrho^2 + M_1
\end{vmatrix} = 0. \tag{4. 8}$$

In dieser Determinante wird die mit $\frac{a_2}{a_1}$ multiplizierte dritte Spalte zur ersten und ebenso die mit $\frac{a_2}{a_1}$ multiplizierte vierte Spalte zur zweiten addiert. Dann ergibt sich:

$$\begin{vmatrix} \varrho^2 - 3\alpha^2, & -2\alpha\varrho, & 2\frac{a_1}{a_2}M_2, & 0 \\ 2\alpha\varrho, & \varrho^2, & 0, & -\frac{a_1}{a_2}M_2 \\ (\varrho^2 - 3\alpha^2)\cdot\frac{a_2}{a_1}, & -2\alpha\varrho\cdot\frac{a_2}{a_1}, & \varrho^2 - 3\alpha^2 - 2M_1, & -2\alpha\varrho \\ 2\alpha\varrho\cdot\frac{a_2}{a_1}, & \varrho^2\cdot\frac{a_2}{a_1}, & 2\alpha\varrho, & \varrho^2 + M_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nun wird noch die mit $-\frac{a_2}{a_1}$ multiplizierte erste Zeile zur dritten und ebenso die mit $-\frac{a_2}{a_1}$ multiplizierte zweite Zeile zur vierten addiert. Dann kommen links unten vier Nullen, so daß die Determinante in zwei Faktoren zerfällt, und zwar unter Benutzung der Abkürzung (3. 2) in

$$\begin{vmatrix} \varrho^2 - 3\alpha^2, & -2\alpha\varrho \\ 2\alpha\varrho, & \varrho^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \varrho^2 - 3\alpha^2 - 2q, & -2\alpha\varrho \\ 2\alpha\varrho, & \varrho^2 + q \end{vmatrix} = 0$$

oder ausgerechnet in:

$$[\varrho^4 + \alpha^2\varrho^2]\cdot[\varrho^4 + \varrho^2(\alpha^2 - q) - q(3\alpha^2 + 2q)] = 0. \tag{4. 9}$$

Der erste Faktor hat die vier Wurzeln

$$\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = 0, \quad \varrho_3 = i\alpha, \quad \varrho_4 = -i\alpha. \tag{4. 10}$$

Die beiden aus dem zweiten Faktor entspringenden Wurzeln für ϱ^2 müssen entgegengesetzte Vorzeichen haben, da ihr Produkt $-q\cdot(3\alpha^2 + 2q) < 0$. Denn nach (3. 3) ist ja: $q > 0$. Wir setzen

$$\varrho_{5,6}^2 = \sigma^2, \quad \varrho_{7,8}^2 = -\tau^2 \qquad \text{mit } \sigma > 0, \quad \tau > 0.$$

Aus (4. 9) schließen wir dann:

$$\sigma^2\cdot\tau^2 = q(3\alpha^2 + 2q), \quad \sigma^2 - \tau^2 = -\alpha^2 + q. \tag{4. 11}$$

Die Lösungen der charakteristischen Gleichung werden also:

$$\begin{aligned} &\varrho_1 = 0, \quad \varrho_2 = 0, \quad \varrho_3 = i\alpha, \quad \varrho_4 = -i\alpha, \\ &\varrho_5 = \sigma, \quad \varrho_6 = -\sigma, \quad \varrho_7 = i\tau, \quad \varrho_8 = -i\tau \quad (\text{mit } \sigma > 0,\ \tau > 0). \end{aligned} \tag{4. 12}$$

Außerdem ergibt sich durch Auflösen von (4. 9):

$$-\tau^2 = \frac{q - \alpha^2 - \sqrt{\alpha^4 + 10\alpha^2 q + 9q^2}}{2} = \frac{q - \alpha^2 - \sqrt{(\alpha^2 + 3q)^2 + 4\alpha^2 q}}{2}$$

$$= \frac{q - \alpha^2 - (\alpha^2 + 3q) - 2\varepsilon}{2} \qquad \text{mit } \varepsilon > 0,$$

$$\tau^2 = q + \alpha^2 + \varepsilon. \tag{4. 13}$$