Werk

Label: Chapter

Ort: Berlin

Jahr: 1938

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0043|log43

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

§ 12. Orthologe Dreiecke 406
§ 13. Relationen zwischen Grundkreisbögen 406
§ 14. Winkelgegenpunkte 407
§ 15. Berührende Parabeln. Wallacegeraden 408
§ 16. Die Spitzentangenten 410
§ 17. Das Spitzenziel. Inversion der Koppelkurve 412
§ 18. Isogonalinvariante Gebietseinteilung 413
§ 19. Gegenstellung und Gegenspiegelbild 415
§ 20. Isogonalinvarianz der Koppelkurve 417
§ 21. Beschränkung dreispitziger Koppelkurven auf Gebiete 419
§ 22. Engere Gebietseinschränkungen 421
§ 23. Rationale dreispitzige Koppelkurven 423
§ 24. Ein Nomogramm 426

Zweiter Teil:

Spezielle Koppelkurven-Büschel.

§ 25. Grundbüschel 428
§ 26. Durch Grundbüschel hervorgerufene Involutionen 429
§ 27. Feuerbachbüschel 433
§ 28. Projektivitäten zwischen Involutionen 436
§ 29. Die gleichseitige dreispitzige Koppelkurve 440
§ 30. Minimalgeraden als Teile von Koppelkurven 443

Sätze über allgemeine Koppelkurven oder Sätze über Büschel, in die nicht notwendigerweise eine dreispitzige Koppelkurve eingebettet ist, enthalten: §§ 13, 14, 15, 20, 21, 25, 26, 27, 30.

Erster Teil:

Koppelkurven mit drei Spitzen.

§ 1.

Bezeichnungen.

An einem *Gelenkviereck* bezeichnen wir mit f_1 die ruhend zu denkende Seite, den sogenannten *Steg*. Die Endpunkte F_2, F_3 des Steges sind die fixierten Drehpunkte der *Arme* m_2 und m_3. Der bewegliche Endpunkt B_2 des Armes m_2 ist mit dem Ende B_3 des Armes m_3 durch die Viereckseite b_1 verbunden, die *Koppel* heißt. (Fig. 1. Wenn in den Figuren Punkte als ruhende oder ortsveränderliche Gelenke gekennzeichnet werden sollen, deuten wir das so an, wie hier bei F_2 bzw. B_2.) Schließlich errichten wir über der Koppel als Basis ein Dreieck mit den Seiten b_2, b_3.

Dieses starre, jedoch in seiner Ebene bewegliche Dreieck ist das *Koppeldreieck*. Seine Eckpunkte und Innenwinkel mögen mit $\{B_i\}$ bzw. $\{\beta_i\}$ bezeichnet werden.

Bei dieser Gelegenheit setzen wir ein für allemal fest, daß i zyklisch gleich 1, 2, 3 sei, wohingegen die Klammer $\{\}$ besagen will, daß man dem Index i sämtliche drei Werte nebeneinander erteile. Die Buchstaben $f_1, m_2, \ldots$ stehen je nachdem für die *Stäbe* (= Strecken) des Getriebes, für deren Längen oder auch für die Verlängerungen der Strecken zu Geraden.

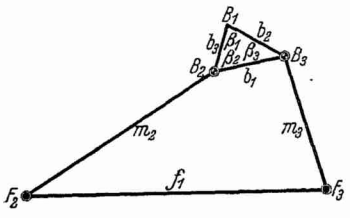

Fig. 1. Koppelgetriebe [4]). Bezeichnungen.

Der Punkt B_1, der *beschreibende Punkt*, erzeugt während der Bewegung des Gelenkvierecks und Koppeldreiecks, welche zusammen man ein *Koppelgetriebe* nennt, eine *Koppelkurve*, für die wir in der Regel Γ schreiben. Wird die Koppelkurve Γ von einem *nicht ausgearteten Koppelgetriebe* erzeugt, d. h. von einem, dessen sämtliche Stablängen endlich und > 0 sind, so sind alle drei Koppelgetriebe, die Γ erzeugen [5]), nicht ausgeartet. Ich betrachte nur derartige Getriebe. Trotzdem kann das Koppeldreieck ausarten, wenn nämlich der beschreibende Punkt B_1 ein von B_2, B_3 verschiedener Punkt der Geraden b_1 wird. In diesem Fall erzeugt B_1 eine sogenannte *Wattsche Kurve*.

§ 2.

Einleitende Aufgabe.

Wir greifen eine Stellung $\mathfrak{S}$ eines Koppelgetriebes heraus und alle von $\mathfrak{S}$ hinreichend wenig verschiedenen Stellungen. Die zugehörigen Lagen von B_1 bilden einen Teilbogen Γ^* der durch B_1 erzeugten Koppelkurve Γ (oder zwei Teilbögen, falls $\mathfrak{S}$ eine Verzweigungslage ist). Soll in der Stellung $\mathfrak{S}$ der beschreibende Punkt sich in einer Spitze S von Γ^* befinden, so ist es notwendig, daß S der *Momentanpol* sei für die Bewegung des Koppelgetriebes von der Stellung $\mathfrak{S}$ aus. Dann schneiden sich die Geraden der Arme m_2, m_3 in S oder, anders gesagt, die Geraden m_2 und b_3, sowie m_3 und b_2 fallen zusammen. Diese Inzidenzen

[4]) Fig. 1 bis 3, 6 bis 10, 12, 17, 21, 22 liegt dieselbe Annahme zugrunde.

[5]) Was die allgemein bekannten Eigenschaften der Koppelkurve, sowie die Grundtatsachen der kinematischen Geometrie anlangt, verweisen wir ein für allemal auf die Lehrbücher [z. B. Reinhold Müller, Einführung in die theoretische Kinematik, Berlin 1932].

sind auch hinreichend dafür, daß S eine Spitze von Γ^* sei[6]), wofern Γ nicht eine Wattsche Kurve ist.

Wir versuchen nun, die Getriebeabmessungen so zu wählen, *daß Γ drei reelle Teilbögen $\{\Gamma_i^*\}$ mit je einer von den drei Spitzen $\{S_i\}$ besitzt.* Dabei mag es uns vorderhand nicht kümmern, ob der von Γ_i^* verschiedene Teil der Kurve Γ etwa noch einmal durch S_i hindurchgeht, was insbesondere dann eintreten könnte, wenn zwei von den Punkten $\{S_i\}$ übereinstimmten.

Es sollen also mindestens drei paarweise verschiedene Stellungen $\{\mathfrak{S}_i\}$ des Koppelgetriebes existieren, in denen die Geraden der Arme und der Seiten des Koppeldreiecks zur Deckung kommen. Um Folgerungen aus dieser Bedingung zu ziehen, wird zweckmäßigerweise die *umgekehrte Bewegung* ins Auge gefaßt. Jetzt (und in §§ 3, 4, 5; auch sonst noch bisweilen) werde das Koppeldreieck als ruhend angesehen und demgemäß im Gelenkviereck die Rollen von Steg und Koppel vertauscht. Das ändert nichts daran, daß in den Stellungen $\{\mathfrak{S}_i\}$ die Gerade m_2 auf die Gerade b_3 fallen muß und m_3 auf b_2. Nun entferne man den Stab f_1 für einen Augenblick. Dann kann m_2 durch Drehung um den Punkt B_2 auf zweierlei Art zur Inzidenz mit der Geraden b_2 gebracht werden. Hierbei gelangt der Punkt F_2 einmal nach F_2', das andere Mal nach F_2''. Der Mittelpunkt von F_2' und F_2'' ist B_2. Ebenso klappen wir F_3 in zweierlei Weise auf die Gerade b_2 und erhalten derart für F_3 die Lagen F_3' und F_3'', deren Mitte B_3 ist (Fig. 2). Sind etwa F_2' und F_3' gleichzeitige Lagen von F_2 bzw. F_3 bei der umgekehrten Bewegung, so ist die Strecke $F_2'F_3' = f_1$, und umgekehrt. Die Existenz der drei Stellungen $\{\mathfrak{S}_i\}$ ist demnach gleichbedeutend damit, daß drei von den vier Strecken $F_2'F_3'$, $F_2'F_3''$, $F_2''F_3'$, $F_2''F_3''$ die Länge f_1 haben.

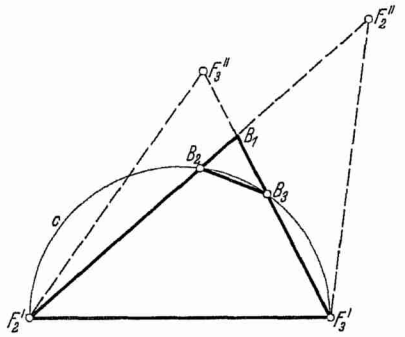

Fig. 2. Spitzenerzeugende Stellungen eines Koppelgetriebes (umgekehrte Bewegung).

Weil alle Stablängen positiv vorausgesetzt wurden, ist $B_1F_2' \neq B_1F_2''$ und $B_1F_3' \neq B_1F_3''$. Folglich haben die Spitzen verschiedene Abstandspaare von F_2, F_3. Mithin sind *die Spitzen $\{S_i\}$ paarweise verschieden.*

[6]) Über mögliche Besonderheiten der Spitze: Reinhold Müller, Beiträge zur Theorie des ebenen Gelenkvierecks, Zeitschr. Math. u. Phys. **42** (1897), S. 247—271 (bes. S. 269—271); W. Meyer zur Capellen, Der Momentanpol als Burmesterscher Punkt, Monatshefte Math. u. Phys. **41** (1934), S. 285—299.

Es wird sich auch zeigen (§ 20), daß die Punkte $\{S_i\}$ nicht bloß Spitzen auf Teilbögen der Koppelkurve Γ sind, sondern auch auf der ganzen Kurve Γ keine höhere Vielfachheit besitzen.

§ 3.

Die Hauptstellung.

Überzeugen wir uns zunächst davon, daß nicht alle vier Strecken $F_2'F_3'$, ... gleich groß sein können. In diesem Fall wäre nämlich $F_2'F_3'F_2''F_3''$ ein Rhombus. Die Mittelpunkte der Punktepaare F_2', F_2'' und F_3', F_3'' fielen also in die Mitte des Rhombus. Infolgedessen wäre $B_2 = B_3$, das heißt die Koppellänge $b_1 = 0$, was ausgeschlossen wurde. Es gibt *also höchstens drei Getriebestellungen* $\{\mathfrak{S}_i\}$, *für die der beschreibende Punkt* B_1 *in der Spitze eines Teilbogens von* Γ *liegt.* Daß tatsächlich drei solche Stellungen möglich sind, wird § 5 lehren. Wir nehmen dies hier vorweg und folgern aus der Unmöglichkeit einer vierten spitzenerzeugenden Stellung, daß eine der drei Stellungen $\{\mathfrak{S}_i\}$ ausgezeichnet ist.

Werden die Bezeichnungen so gewählt, daß $F_2''F_3'' \neq f_1$ ist, so sind F_2', F_3' die Enden des Stabes f_1 in einer Getriebestellung, etwa in der Stellung $\mathfrak{S}_1$. Ausgehend von $\mathfrak{S}_1$ erhält man einerseits durch Umwenden (Drehen um 180°) des Armes m_2 eine weitere von den Stellungen $\{\mathfrak{S}_i\}$, sagen wir $\mathfrak{S}_2$, andererseits durch Umwendung von m_3 die Stellung $\mathfrak{S}_3$. Denn weder durch Umwenden von m_2, noch durch alleiniges Umwenden von m_3 entsteht die Stellung $\mathfrak{U}$, in der die Enden der Arme in F_2'', F_3'' liegen, und nach Ausscheiden von $\mathfrak{U}$ aus den vier Armstellungen, die für die Erzeugung einer Spitze überhaupt in Betracht kommen, bleiben ja die drei zulässigen Stellungen $\{\mathfrak{S}_i\}$ übrig.

Geht man hingegen von der Stellung $\mathfrak{S}_2$ aus und wendet auch hier einmal den einen, ein andermal den zweiten Arm um, so entsteht nur in einem der beiden Fälle eine solche Lage der Arme, daß der Stab f_1 sich einbauen läßt. Ebenso verhält sich $\mathfrak{S}_3$. Insofern also unterscheiden sich $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ von $\mathfrak{S}_1$, welche ich die *Hauptstellung* des Koppelgetriebes nenne.

§ 4.

Eine Gruppe.

Der Begriff der Hauptstellung spielt im folgenden eine große Rolle. Deshalb will ich noch einmal darlegen, in welcher Hinsicht die Hauptstellung $\mathfrak{S}_1$ von $\mathfrak{S}_2$ und $\mathfrak{S}_3$ abweicht, indem ich, was vielleicht auch an sich interessant ist, aus dem unterschiedlichen Verhalten der $\{\mathfrak{S}_i\}$ einen gruppentheoretischen Kern herausschäle.

Bezeichnen μ_2 und μ_3 das Umwenden von m_2 bzw. m_3 und wird unter dem Produkt von Umwendungsoperationen ihr Aufeinanderfolgen

verstanden, so erzeugen μ_2 und μ_3 offensichtlich eine Gruppe. Deren Einheitselement $\mu_2^3 = \mu_3^2$ ist das Belassen der Arme in ihrer Lage. (Weil $\mu_2 \mu_3 = \mu_3^{-1} \mu_2$ ist, handelt es sich um die *Vierergruppe*.)

Ausgehend von $\mathfrak{S}_1$ erhält man die „unmögliche Lage" $\mathfrak{U}$ durch Umwenden beider Arme: $\mu_2 \mu_3 \mathfrak{S}_1 = \mathfrak{U}$. Nehmen wir aber $\mathfrak{S}_2$ als Ausgangslage, üben also auf $\mathfrak{S}_2$ die Gruppenelemente aus, so läuft dies, da $\mathfrak{S}_2 = \mu_2 \mathfrak{S}_1$ ist, darauf hinaus, daß die (rechtsseitig) mit μ_2 multiplizierten Elemente auf $\mathfrak{S}_1$ angewendet werden. Die Multiplikation aller Gruppenelemente mit einem von der Einheit verschiedenen Element ist eine Permutation, die kein Element unverändert läßt. Folglich entsteht $\mathfrak{U}$ nicht durch Umwenden beider Arme aus $\mathfrak{S}_2$, sondern schon durch Umlegen eines Armes. Gleiches gilt für $\mathfrak{S}_3$.

§ 5.

Kennzeichnung der Hauptstellung.

Mit der eingehenden Untersuchung des Koppelgetriebes, das eine dreispitzige Koppelkurve erzeugt, beginnen wir in seiner Hauptstellung $\mathfrak{S}_1$ (Fig. 2). Umwenden des Armes m_2 um den Punkt B_2, wobei das andere Ende dieses Armes von F_2' nach F_2'' gelangt, führt aus der Hauptstellung, wie wir wissen, wieder zu einer für die umgekehrte Bewegung zulässigen Lage $\mathfrak{S}_2$ der Arme, das heißt, es muß die Strecke $F_2' F_3' = F_2'' F_3'$ sein. Mithin liegt F_3' auf der in B_2 errichteten Normalen zu m_2. Analog befindet sich F_2' auf der Geraden $\perp m_3$ durch B_3. Beides ergibt den

Kreislagensatz. *In der Hauptstellung $\mathfrak{S}_1$ des Getriebes ist das Gelenkviereck einem Kreis c eingeschrieben, dessen Durchmesser der Steg f_1 ist, während die Geraden m_2 und b_3, m_3 und b_2 zusammenfallen.*

Wir beweisen nun, daß das Auftreten einer Kreislage im wesentlichen auch genügt, um drei Spitzen in der Koppelkurve zustande kommen zu lassen.

Befindet sich nämlich ein Koppelgetriebe in der eben beschriebenen Stellung $\mathfrak{S}_1$, so ist es klar, daß aus $\mathfrak{S}_1$ durch Umwenden je eines Armes wieder zulässige Armstellungen für die umgekehrte Bewegung hervorgehen: Die Existenz einer Kreislage ist auch hinreichend für das Bestehen der drei verschiedenen Stellungen $\{\mathfrak{S}_i\}$, die wir in § 2 eingeführt haben. Wenn b_1 in der Hauptstellung $\mathfrak{S}_1$ nicht Durchmesser des Kreises c wird, ist das Dreieck $\{B_i\}$ endlich und nicht ausgeartet, die erzeugte Koppelkurve Γ ist keine Wattsche Kurve und demgemäß (§ 2) liegt in jeder Stellung $\mathfrak{S}_i$ der beschreibende Punkt B_1 in der Spitze eines Teilbogens von Γ.

Der Fall, daß b_1 in der Kreislage ein Durchmesser von c ist, kann rasch erledigt werden. Wäre b_1 ein von f_1 verschiedener Durchmesser, so würde $b_2 \parallel b_3$, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung, daß alle Stab-

längen endliche positive Zahlen sind. Diese schließt hingegen nicht aus, daß b_1 mit f_1 inzidiert, und zwar so, daß $B_2 = F_3'$, $B_3 = F_2'$ wird. Dann ist das Gelenkviereck ein Rhombus. Nun zerfallen aber alle mittels eines Gelenkrhombus erzeugten Koppelkurven in drei Kreise. Hierüber wird noch zu sprechen sein (§ 27).

Zusammenfassend kann gesagt werden: *Es gibt keine dreispitzige Wattsche Kurve. Damit die durch ein Koppelgetriebe erzeugte Kurve Γ drei reelle Teilbögen mit je einer Spitze aufweise, ist notwendig und hinreichend, daß die Koppel und die Arme kürzer als der Steg seien und daß unter den Stellungen des Getriebes die im Kreislagensatz beschriebene vorkomme.*

Ist in einem Gelenkviereck der Steg f_1 länger als die Koppel b_1 und die Arme m_2, m_3 und liegt das Viereck so, daß b_1 eine Sehne des Kreises c ist, der f_1 zum Durchmesser hat, so muß man nur die Arme zum Schnitt bringen, um die Ecke B_1 eines Koppeldreiecks zu erhalten, das eine dreispitzige Kurve Γ erzeugt. Spiegelt man das Gelenkviereck an f_1, so resultiert eine zweite Stellung, in der b_1 eine Sehne von c ist. Dementsprechend beschreibt auch der zu B_1 bezüglich b_1 symmetrische Punkt eine dreispitzige Koppelkurve [7]). Weitere Punkte mit dieser Eigenschaft gibt es nicht, weil höchstens in zwei Stellungen eines Gelenkvierecks die Koppel eine Sehne des Kreises über dem Steg als Durchmesser ist [8]).

Da ein Koppelgetriebe, wenn es eine dreispitzige Koppelkurve Γ erzeugt, nur eine Hauptstellung besitzt, ist die Spitze S_1, in welcher der beschreibende Punkt in der Hauptstellung liegt, vor den beiden übrigen Spitzen hervorgehoben. Es ist zu vermuten, daß diese Ungleichmäßigkeit verschwinden wird, sobald wir die dreifache Erzeugung von Γ heranziehen werden. Zunächst leiten wir aber eine Relation zwischen den Stablängen eines Gelenkvierecks ab, das zur Erzeugung einer dreispitzigen Koppelkurve dient.

§ 6.

Eine Beziehung zwischen Koppel, Steg und Armen.

Messen wir in der Hauptstellung (Fig. 3, 4, 5) die Winkel, die bei den Ecken des Gelenkvierecks auftreten, $\bmod \pi$ mittels positiv durchlaufener Bögen des umschriebenen Kreises c, so gilt:

(1) $$\text{Winkel } f_1 m_2 = \beta_3, \qquad \text{Winkel } m_3 f_1 = \beta_2.$$

[7]) Bezüglich der Koppel symmetrische Punkte erzeugen Koppelkurven, die in bezug auf den Steg symmetrisch sind [Bennett [1]), S. 62].

[8]) Jedes Gelenkviereck wird im Laufe seiner Bewegung das Sehnenviereck eines Kreises; es scheint angebracht, die verschiedenen Gelenkvierecke durch Eigenschaften ihres Sehnenvierecks zu kennzeichnen (wie oben im Kreislagensatz).

Mit r_2 und r_3 seien jene Radien des Kreises c bezeichnet, die nach B_2 bzw. B_3 führen. Dann lehrt die Gleichheit der Winkelsummen bei den Punkten B_2 und B_3 mit der Winkelsumme im Koppeldreieck, daß

(2) $$\text{Winkel } r_2 b_1 = \text{Winkel } b_1 r_3 = \beta_1$$

ist. Aus (1) und (2) folgt[9]), indem wir f_1 zur Längeneinheit machen,

(3) $$b_1 = \pm \cos\beta_1, \quad m_2 = \pm \cos\beta_3, \quad m_3 = \pm \cos\beta_2.$$

Das erste Vorzeichen ist negativ oder positiv, je nachdem die Arme sich schneiden (Fig. 5) oder nicht (Fig. 3, 4). Die weiteren beiden Vorzeichen

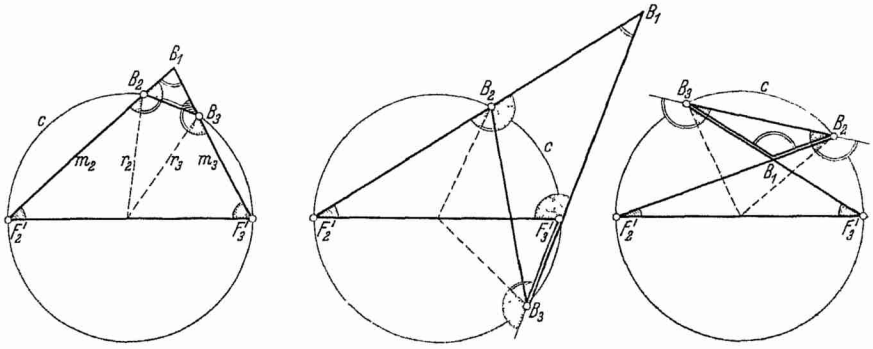

Fig. 3 bis 5. Winkelbeziehungen in der Hauptstellung.

sind gleich (und positiv), wenn Steg und Koppel sich nicht schneiden (Fig. 3, 5), sonst ungleich (Fig. 4).

Setzen wir in die einzige zwischen den Cosinus eines Dreiecks bestehende Gleichung, nämlich

(4) $$\Sigma \cos^2\beta_i + 2\Pi \cos\beta_i = 1,$$

aus (3) ein, so ergibt sich[10])

(5) $$\boxed{b_1^2 + m_2^2 + m_3^2 \pm 2 b_1 m_2 m_3 = 1.}$$

Das Minuszeichen steht für Gelenkvierecke, die in der Hauptstellung überschlagen sind (Fig. 4, 5).

§ 7.

Brennpunkte und Spitzen. Das Hauptspiegelbild.

Jede Koppelkurve, also auch eine dreispitzige, ist eine trizirkulare Kurve sechster Ordnung. Die Tangenten in den absoluten Kreispunkten liefern drei reelle Schnittpunkte und von diesen (außerordentlichen) Brennpunkten liegen zwei in den Stegenden F_2, F_3. Um den restlichen Brennpunkt F_1 zu ermitteln, konstruiert man bekanntlich das Dreieck $\{F_i\}$

[9]) Vgl. etwa C. Beyel, 57 Sätze über das orthogonale Viereck, Zeitschr. Math. u. Phys. 34 (1889), S. 218—237, 290—302 (bes. S. 224).

[10]) Gleichung (3) und (5) im wesentlichen bei Cayley [1]), S. 556.

gleichsinnig ähnlich zum Koppeldreieck $\{B_i\}$. Bezeichnet wieder S_1 die Spitze, in der der beschreibende Punkt B_1 in der Hauptstellung $\mathfrak{S}_1$ liegt, so folgt aus der für $\mathfrak{S}_1$ statthabenden Inzidenz der Geraden b_2, m_3 und b_3, m_2, ferner aus den Winkelgleichheiten (1), daß die Dreiecke $\{B_i\}$ und $S_1F_3F_2$ gegensinnig ähnlich, mithin $\{F_i\}$ *und* $S_1F_3F_2$ *in bezug auf die Mittelsenkrechte der Strecke* F_2F_3 *symmetrisch* sind. Diese Aussage formen wir auf zweierlei Art um.

Erstens werde das ganze Getriebe in seiner Hauptstellung an der Symmetralen des Steges gespiegelt. Die neue Figur nenne ich das *Hauptspiegelbild* des Getriebes. Nun ergibt die Symmetrie zwischen $\{F_i\}$ und $S_1F_3F_2$ im Verein mit dem Kreislagensatz den

Satz vom Hauptspiegelbild. *Eine Seite des Höhenfußpunktedreiecks* $\{H_i\}$ *im Brennpunktedreieck* $\{F_i\}$ *ist das Hauptspiegelbild der Koppel, und zwar die dem Steg gegenüberliegende Seite. Die Hauptspiegelbilder der übrigen Getriebestäbe fallen in die Geraden* $\{f_i\}$ *des Brennpunktedreiecks.*

Zweitens führen wir den Umkreis k des Dreiecks $\{F_i\}$ ein und nennen ihn wegen seiner später zutage tretenden Wichtigkeit den *Grundkreis*[11]) der Koppelkurve. Dann gilt der

Satz über Grundkreissehnen. *Die Spitze* S_1 *liegt auf dem Grundkreis* k *und auf einer durch* F_1 *laufenden Parallelen zu* f_1.

Wir ziehen nun wieder die umgekehrte Bewegung heran (Fig. 2) und hier außer der Hauptstellung $\mathfrak{S}_1$, in welcher F_2', F_3' die Enden des Stabes f_1 sind, auch eine andere spitzenerzeugende Stellung, etwa $\mathfrak{S}_2$, wo $F_2''F_3'$ die Lage von f_1 angibt. Wird die Figur $\mathfrak{S}_1$ so bewegt, daß F_2', F_3' mit den festen Punkten F_2 und F_3, den Stegendpunkten, zur Deckung kommen, so gelangt der beschreibende Punkt B_1 in die Spitze S_1. Entsprechendes gilt für $\mathfrak{S}_2$ und die Spitze S_2.

Am einfachsten ist es, wir identifizieren F_2' mit F_2 und F_3' mit F_3. Dann ist die Bewegung, die F_2'', F_3' nach F_2 bzw. F_3 und B_1 nach S_2 befördert, eine bloße Drehung um F_3. Folglich ist die Strecke $S_2F_3 = S_1F_3$. Überdies liegt S_2 auf dem Grundkreis k. Zu Beginn der Drehung um F_3 gehen nämlich die Geraden b_3, b_2 durch F_2 bzw. F_3 und am Ende der Drehung, wenn also F_2'' nach F_2 gelangt ist, muß ja wieder b_3 mit F_2 inzidieren und selbstredend auch b_2 mit F_3. Es gibt nun in der Tat auf k einen einzigen von S_1 verschiedenen Punkt, für den $S_2F_3 = S_1F_3$ ist, denn S_1 kann nicht der Gegenpunkt zu F_3 auf k sein, weil sonst der Winkel $S_1F_2F_3$ ein rechter, also dem Kreislagensatz zufolge $m_2 = 0$ wäre.

Diese letzte Bemerkung halten wir in erweiterter Form folgendermaßen fest: *Das Brennpunktedreieck* $\{F_i\}$ *ist nicht rechtwinkelig.*

---

[11]) Name wie bei Morley[1]), S. 146.

Die Spitze S_2 kann schließlich auch als Restschnitt der Parallelen zu f_2 durch den Punkt F_2 und des Grundkreises k gefunden werden. Die Gerade F_2S_1 ist nämlich einerseits bezüglich der Mittelsenkrechten von f_1 symmetrisch zu f_2. Dreht man andererseits die Gerade F_2S_1 so lange um F_3, bis sie wieder durch F_2 geht, so sind Anfangs- und Endlage gleichfalls symmetrisch in bezug auf eine Gerade $\perp F_2F_3$. Hiermit ist bewiesen, daß der oben angegebene Satz über Grundkreissehnen auch für den Index 2 gilt; analog für den Index 3.

§ 8.

Dreifache Erzeugung der Koppelkurve.

Haben wir bisher die dreispitzige Koppelkurve mittels eines einzigen Koppelgetriebes erzeugt — es hatte f_1 zum Steg — so nehmen wir jetzt die weiteren beiden Getriebe hinzu, die dieselbe Kurve ergeben. Das eine von ihnen hat f_2, das andere f_3 zum Steg. Das über f_2 aufgebaute Getriebe besitzt natürlicherweise auch eine Hauptstellung und erzeugt in dieser Hauptstellung eine Spitze, die nach dem Satz über Grundkreissehnen auf einer Parallelen zum Steg durch den von den Stegenden verschiedenen Brennpunkt der Koppelkurve liegt, also auf der Parallelen zu f_2 durch F_2. Mithin ist S_2 diese Spitze. Entsprechendes gilt für das auf f_3 ruhende Getriebe. Wir können somit für alle drei Getriebe sagen:

Das Koppelgetriebe mit dem Steg f_i erzeugt in seiner Hauptstellung die Spitze S_i, womit die bisherige Sonderstellung der Spitze S_1 aufgehoben ist.

Auch der Satz vom Hauptspiegelbild, nunmehr auf drei erzeugende Getriebe angewendet, liefert eine regelmäßigere Figur:

Zeichnet man alle drei Hauptspiegelbilder übereinander, so resultiert das Brennpunktedreieck $\{F_i\}$ samt dessen Höhenfußpunktedreieck $\{H_i\}$. Die Seiten des letzteren sind die Hauptspiegelbilder der Koppeln. (Hierbei ist zu beachten, daß aus der Hauptstellung jedes Getriebes das Hauptspiegelbild durch Spiegelung an der Symmetralen des betreffenden Steges hervorgeht.) Von welchen Stäben die Strecken herrühren, die in den drei übereinandergelegten Hauptspiegelbildern vorkommen, und wie sie zusammengehören, lehrt nachstehende Tabelle:

Tabelle 1. Vereinigung dreier Hauptspiegelbilder.

$F_{i-1}F_{i+1}$	$H_{i-1}H_{i+1}$	$F_{i-1}H_{i+1}$	$H_{i-1}F_{i+1}$	Im Getriebe, dessen in der Hauptstellung erzeugte Spitze:
ist Hauptspiegelbild eines Stabes von folgender Bedeutung:				
Steg	Koppel	Koppeldreieck-Seite		S_{i-1}
		Arm	Arm	S_i
			Koppeldreieck-Seite	S_{i+1}

§ 9.

Feuerbachsche Figur.

Unter a_i sei die durch F_i gelegte Parallele zur Geraden f_i verstanden, welche Parallele gemäß dem Satz über Grundkreissehnen (§ 7) auch die Spitze S_i enthält. Die Geraden $\{a_i\}$ bilden ein Dreieck mit den Ecken $\{A_i\}$, das sogenannte Außendreieck[12]) des Brennpunktedreiecks $\{F_i\}$. Es empfiehlt sich, diese Beziehung umzukehren und $\{A_i\}$ als Urdreieck aufzufassen; dann hat man nämlich folgenden Satz:

Feuerbachsche Relation. *Das Brennpunktedreieck $\{F_i\}$ ist das Mittendreieck, dessen Umkreis k also der Feuerbachsche Kreis von $\{A_i\}$. Die*

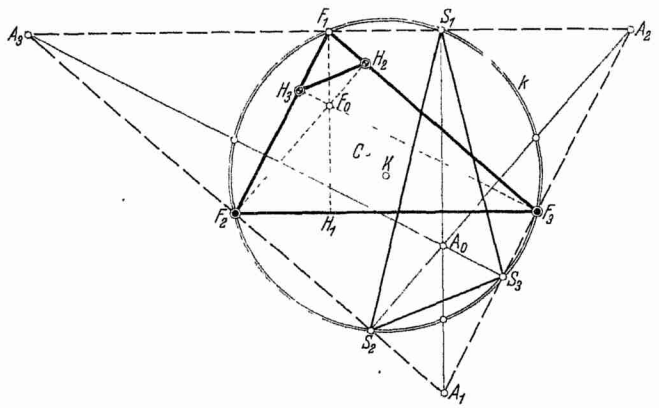

Fig. 6. Spitzen und Brennpunkte sind Punkte eines Feuerbachschen Kreises.

Restschnittpunkte $\{S_i\}$ des Grundkreises k mit den Urseiten $\{a_i\}$ bilden daher das Höhenfußpunktedreieck von $\{A_i\}$.

Das Urdreieck $\{A_i\}$ hat denselben Schwerpunkt C wie das Mittendreieck $\{F_i\}$. Aus $\{F_i\}$ geht $\{A_i\}$ hervor durch eine zentrisch ähnliche Vergrößerung mit dem Zentrum C im Verhältnis $-2:1$. Die Höhenfußpunktedreiecke von $\{F_i\}$ und $\{A_i\}$ stehen in der gleichen Beziehung. Mithin kann man aus der Feuerbachschen Relation und aus dem Satz vom Hauptspiegelbild (§ 7) schließen:

Das Getriebe, das in seiner Hauptstellung die Spitze S_i erzeugt, hat eine Koppel, die halb so lang ist wie die Entfernung der Spitzen S_{i-1}, S_{i+1}. Das Hauptspiegelbild der Koppel ist parallel zu $S_{i-1}\,S_{i+1}$ (Fig. 6).

Das Dreieck $\{F_i\}$ ist einer Bemerkung in § 7 zufolge nicht rechtwinkelig, desgleichen $\{A_i\}$ als zu $\{F_i\}$ ähnliches Dreieck. Ist, umgekehrt,

---

[12]) Über hier und später verwendete Begriffe aus der Dreiecksgeometrie siehe G. Berkhan und W. F. Meyer, Neuere Dreiecksgeometrie, Encyklop. math. Wiss. III AB 10.

ein nicht ausgeartetes schiefwinkeliges Dreieck $\{F_i\}$ vorgegeben, so *existiert eine und nur eine dreispitzige Koppelkurve Γ, für die $\{F_i\}$ Brennpunkte sind.*

Wir konstruieren etwa über f_1 als Steg das Hauptspiegelbild eines Koppelgetriebes, das die im Satz vom Hauptspiegelbild (§ 7) angegebene Gestalt zeigt. Folglich besitzt dieses Getriebe eine Kreislage, erzeugt also nach § 5 eine dreispitzige Koppelkurve Γ, die eben dem Satz vom Hauptspiegelbild zufolge die Brennpunkte $\{F_i\}$ hat. Ginge man vom Steg f_2 bzw. f_3 aus, so erhielte man noch zwei Getriebe, die je eine dreispitzige Koppelkurve mit den Brennpunkten $\{F_i\}$ erzeugen. Aus § 8 ist ersichtlich, daß alle drei Getriebe d i e s e l b e Kurve Γ ergeben. Weitere Getriebe läßt der Satz vom Hauptspiegelbild nicht zu. Hiermit ist bewiesen, daß Γ durch $\{F_i\}$ eindeutig bestimmt ist. Dann müssen auch die Spitzen $\{S_i\}$ eindeutig bestimmt sein. In der Tat erhält man $\{S_i\}$, wenn zum Mittendreieck $\{F_i\}$ das Urdreieck $\{A_i\}$ und dann in diesem das Höhenfußpunktedreieck gesucht wird.

Zu einem beliebigen, nicht ausgearteten Spitzendreieck $\{S_i\}$ existieren hingegen vier verschiedene Koppelkurven, wie wir nun zeigen wollen. Dabei wird auch der folgende Umstand aufgeklärt werden. Der Grundkreis k, als Neunpunktekreis von $\{A_i\}$ aufgefaßt, trägt nebst den Seitenmitten $\{F_i\}$ und den Höhenfußpunkten $\{S_i\}$ auch die Mitten der „oberen" Höhenabschnitte. Welche kinematische Bedeutung haben diese Punkte, die übrigens in Fig. 6 gleichfalls eingetragen sind?

§ 10.

Koppelkurven mit demselben Spitzendreieck.

Auch das dritte in der Feuerbachschen Figur auftretende Dreieck, nämlich $\{S_i\}$, könnte man zum Grunddreieck machen. Von diesem Standpunkt aus wären $\{A_i\}$ Mittelpunkte von Berührungskreisen. Wir fügen den vierten derartigen Punkt A_0 hinzu, der zugleich Höhenschnittpunkt für $\{A_i\}$ ist. Auch für $\{F_i\}$ werde der Höhenschnittpunkt F_0 bestimmt.

Jeder Punkt des Quadrupels A_0, $\{A_i\}$ ist Höhenschnittpunkt im Dreieck der übrigen Punkte und für dieses restliche Dreieck sind $\{S_i\}$ die Höhenfußpunkte. Überhaupt könnten die Überlegungen des gegenwärtigen Paragraphen so geführt werden, daß die Punkte A_0, $\{A_i\}$ völlig gleichwertig erscheinen. Da wir aber später nicht werden umhin können, Inkreise und Ankreise auseinanderzuhalten, mag schon jetzt aus dem Quadrupel A_0, $\{A_i\}$ willkürlicherweise A_0 hervorgehoben werden. Wir verabreden, daß A_0 als Inkreismittelpunkt für $\{S_i\}$ bezeichnet werde — im Gegensatz hierzu $\{A_i\}$ als Ankreismittelpunkte — gleichgültig, ob A_0 der „Inkreismittelpunkt im engeren Sinne" ist, wie das Fig. 6 zeigt, oder nicht.

Jetzt fassen wir das Dreieck $A_0 A_2 A_3$ ins Auge, dessen Höhenschnittpunkt A_1 ist und nennen dessen Mittendreieck $F_1 F_2^* F_3^*$ (Fig. 7). Der Höhenschnittpunkt dieses letzten Dreiecks sei F_1^*. Das Quadrupel $F_1, \{F_i^*\}$ ist zu $A_0, \{A_i\}$ zentrisch ähnlich im Verhältnis $-1:2$. Das Ähnlichkeitszentrum ist der Schwerpunkt C_1 von $A_0 A_2 A_3$ (oder von $F_1 F_2^* F_3^*$). Da $F_0, \{F_i\}$ zu $A_0, \{A_i\}$ im selben Verhältnis zentrisch ähnlich war bezüglich des Schwerpunktes C von $\{A_i\}$, so sind $F_0, \{F_i\}$ und $F_1, \{F_i^*\}$ kongruent, und zwar parallel verschoben. Der Vektor der Schiebung $F_0, \{F_i\} \to F_1, \{F_i^*\}$ ist $F_0 F_1 = \frac{1}{2} A_1 A_0$. Bei dieser Schiebung gelangen die Seitenmittelpunkte F_2, F_3 des Dreiecks $\{A_i\}$ in die Mittelpunkte der

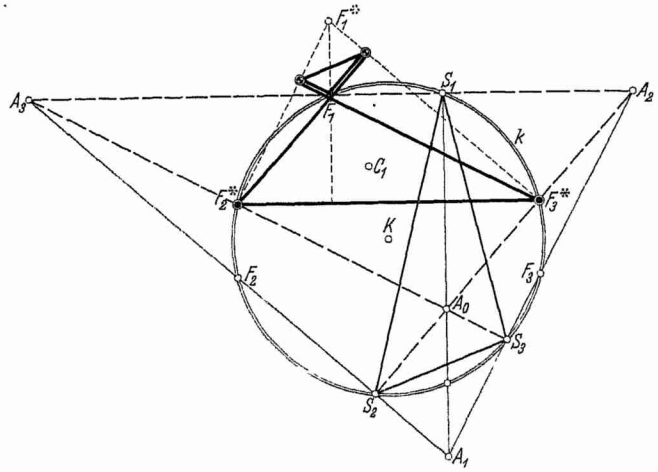

Fig. 7. Spitzendreieck und Brennpunktedreiecke.

oberen Höhenabschnitte desselben Dreiecks und F_2^*, F_3^* sind Gegenpunkte zu F_3, F_2 auf dem Feuerbachschen Kreis k. Analog zu der in § 9 beschriebenen Konstruktion einer Koppelkurve Γ mit den Brennpunkten $\{F_i\}$ und den Spitzen $\{S_i\}$ kann nun eine Koppelkurve Γ_1 mit denselben Spitzen $\{S_i\}$ ermittelt werden, deren Brennpunktedreieck $F_1 F_2^* F_3^*$ ist.

Wenn im vorangehenden Absatz unter Bevorzugung des Index 1 verfahren wurde, so war 1 nur Beispiel für einen beliebigen Index i. Werden alle Fälle zusammengefaßt, so besteht der Satz:

Es gibt vier Koppelkurven, deren Spitzen ein und dasselbe nicht ausgeartete, sonst beliebige Dreieck $\{S_i\}$ bilden. Die Brennpunkte sind die Mitten $\{F_i\}$ der Seiten und die Mitten der oberen Höhenabschnitte des Dreiecks $\{A_i\}$ der Ankreismittelpunkte von $\{S_i\}$. Das Brennpunktetripel jeder Kurve enthält einen Punkt F_i und entweder noch die beiden Punkte F_{i-1}, F_{i+1} oder deren Gegenpunkte auf dem Grundkreis k. Mithin gilt für jedes von den sechs Paaren der vier Kurven: Die beiden Kurven haben

einen Brennpunkt gemeinsam, während die restlichen Brennpunkte der einen Kurve den restlichen Brennpunkten der anderen Kurve auf k gegenüberliegen. Insbesondere sind die vier Kurven paarweise verschieden.

§ 11.

Zwölf Koppelgetriebe.

Interessierte an den Brennpunktedreiecken der vier Koppelkurven mit gemeinsamen Spitzen mehr ihre Verschiedenheit, so soll jetzt bei den erzeugenden Getrieben mehr das Übereinstimmende herausgearbeitet werden. Es liegt nahe, zu diesem Zweck das Quadrupel $F_1, \{F_i^*\}$ mit $F_0, \{F_i\}$

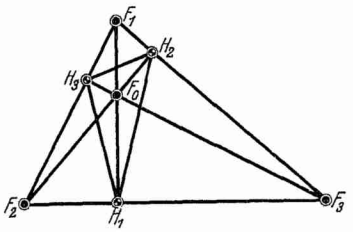

Fig. 8. Übereinandergelegte Hauptspiegelbilder von zwölf Getrieben.

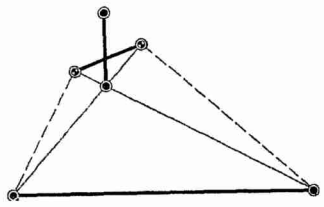

Fig. 9. Getriebepaar mit gleichen Stegen und gleichen Koppeln. (Ausschnitt aus Fig. 8.)

durch Translation zur Deckung zu bringen, ebenso die weiteren drei analogen Quadrupel. Sind in allen vier Brennpunktedreiecken die Hauptspiegelbilder je dreier Getriebe eingetragen worden (vgl. § 8), so überdecken nach dem Zusammenschieben der Quadrupel die Bilder der Koppeln die Seiten des Höhenfußpunktedreiecks $\{H_i\}$ von $\{F_i\}$, und zwar vierfach, während die Winkelsymmetralen von $\{H_i\}$ durch die Bilder der übrigen Stäbe ebenfalls vierfach bedeckt werden (Fig. 8). Welche Rollen die Strecken zwischen den bezeichneten Punkten der Figur als Getriebestäbe spielen, könnte man folgendermaßen herausfinden. Man ermittle für eine vorgegebene Strecke zunächst, in welchen von den vier Teilfiguren, deren Zusammenschieben Fig. 8 ergab, sie vorkommt. In jeder Teilfigur findet man sich dann an Hand der Tabelle 1 zurecht.

Wir wollen hier nicht in alle Einzelheiten eindringen, begnügen uns vielmehr mit dieser Feststellung: *Läßt man bei den zwölf Getrieben, deren jedes eine Koppelkurve mit den Spitzen $\{S_i\}$ erzeugt, für den Augenblick die Arme fort, betrachtet also bloß Stege und Koppeln, so können die zwölf Getriebe derart in sechs Paare eingeteilt werden, daß für die beiden Getriebe jedes Paares die Hauptspiegelbilder und daher auch die Hauptstellungen kongruent sind.*

Greifen wir das gemeinsame Bild von vier Koppeln heraus (Fig. 9), so gehören die betreffenden Koppeln vier Getrieben an, die in ihren

Hauptstellungen dieselbe Spitze erzeugen, nämlich zufolge § 9 jene Spitze, deren Gegenseite im Spitzendreieck zum gemeinsamen Bild der vier Koppeln parallel ist. Die Bilder der dazugehörigen Stege sind Strecken, deren Geraden die Enden des Koppelbildes nicht treffen. Entscheidet man sich für eines der Stegbilder (etwa die unterste Strecke in Fig. 9), so gibt dieses zusammen mit dem Koppelbild die gemeinsame Darstellung eines der oben erwähnten kongruenten Getriebepaare. Die Kongruenz verliert sich allerdings, sobald die Arme eingezeichnet werden (dünne Linien). Ein solches Getriebepaar zeigen auch Fig. 6 und 7.

§ 12.

Orthologe Dreiecke.

Wir kehren zur Untersuchung einer einzigen dreispitzigen Koppelkurve zurück und dementsprechend werde wieder $\{A_i\}$ als Urdreieck angesehen. Aus der Feuerbachschen Relation, welche besagt, daß $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ die Seitenmitten bzw. Höhenfußpunkte von $\{A_i\}$ sind (§ 9), folgen zahlreiche Beziehungen zwischen den Dreiecken $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$, denen wir uns jetzt zuwenden.

Die aus den Punkten $\{F_i\}$ auf die Seiten $\{s_i\}$ des Dreiecks $\{S_i\}$ gefällten Lote, das heißt die Geraden $\{F_i \perp s_i\}$ gehen durch einen Punkt, ebenso die Geraden $\{S_i \perp f_i\}$; mit anderen Worten: *Die Dreiecke* $\{F_i\}$ *und* $\{S_i\}$ *sind ortholog*. Das ist bekannt und kann leicht aus allgemeinen Sätzen über orthologe Dreiecke geschlossen werden[13]). Ein unmittelbarer Beweis ist jedoch nicht schwierig.

Weil der Kreis mit dem Durchmesser $A_{i-1}A_{i+1}$, der also F_i zum Mittelpunkt hat, die übrigen Seiten des Urdreiecks in den Höhenfußpunkten S_{i-1}, S_{i+1} schneidet, ist die Entfernung $F_iS_{i-1} = F_iS_{i+1}$ (vgl. auch § 7). Weil ferner F_i, S_{i-1}, S_{i+1} auf dem Grundkreis k liegen, geht die Gerade $F_i \perp s_i$ durch den Grundkreismittelpunkt K.

Die Gerade $S_i \perp f_i$ geht durch den Höhenschnittpunkt A_0 von $\{A_i\}$, denn $S_i \perp f_i$ ist ja auch $\perp a_i$, also die von A_i ausgehende Höhe.

Die beiden Orthologiezentren sind demnach der Mittelpunkt K *des Grundkreises und der Höhenschnittpunkt* A_0.

§ 13.

Relationen zwischen Grundkreisbögen.

Mit $\{\varphi_i\}$ und $\{\sigma_i\}$ seien die Innenwinkel von $\{F_i\}$ bzw. $\{S_i\}$ bezeichnet[14]). Wir messen die Winkel mod π mittels Bögen des Grund-

[13]) Vgl. Berkhan und Meyer[12]), S. 1223.

[14]) Weil $\{F_i\}$ und $\{B_i\}$ gleichsinnig ähnlich sind (§ 7), ist $\varphi_i = \beta_i$.

kreises k und setzen fest, daß alle im folgenden auftretenden Bögen von k im positiven Sinn zu durchlaufen sind.

Weil $a_{i-1} \| f_{i-1}$ und $a_{i+1} \| f_{i+1}$ gelten folgende Gleichungen:

(6) Bogen $F_{i+1} F_{i-1} = S_{i-1} F_i$, Bogen $F_{i+1} F_{i-1} = F_i S_{i+1}$.

Somit ist $2 F_{i+1} F_{i-1} = S_{i-1} S_{i+1}$ oder

$$2 \varphi_i + \sigma_i = 0. \tag{7}$$

Nun beweisen wir den

Satz von der Grundkreisbögen-Summe. *Werden die Bögen von einem beliebigen Grundkreispunkt P aus gemessen, so ist, abgesehen von Vielfachen des Umfanges, $\Sigma P F_i = \Sigma P S_i$.*

Es genügt offenbar, den Beweis für eine besondere Lage von P zu führen, etwa für $P = F_1$. Dann ist mit Rücksicht auf (6) die Summe von Bögen

$$\begin{aligned} \Sigma P F_i = F_1 F_2 + F_1 F_3 &= F_1 F_2 + F_2 S_1 = F_1 S_1 + (F_2 F_3 - F_2 F_3) \\ &= F_1 S_1 + F_1 S_2 + F_1 S_3, \end{aligned}$$

wie behauptet wurde.

Der Satz von der Grundkreisbögen-Summe gilt für beliebige, nicht bloß für dreispitzige Koppelkurven[15]), wenn unter $\{S_i\}$ die Doppelpunkte der Koppelkurve verstanden werden, welche auf dem Kreis k durch die Brennpunkte liegen (wie hier indessen nicht bewiesen werden soll). Hingegen ist das Bestehen von (7) und die Orthologie zwischen $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ auf spezielle Klassen von Koppelkurven beschränkt. Diese beiden Beziehungen setzen ja eine Zuordnung zwischen den Punkten $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ voraus. Nun sind bei allgemeinen Koppelkurven die Brennpunkte $\{F_i\}$ nicht auf natürliche Weise mit den Doppelpunkten $\{S_i\}$ gepaart, während dies für dreispitzige Koppelkurven die Feuerbachsche Relation leistet.

§ 14.

Winkelgegenpunkte.

Aus dem Satz über die Summe von Grundkreisbögen können mehrere einigermaßen beachtliche Sätze hergeleitet werden, die demnach gleichfalls für beliebige Koppelkurven richtig sind.

Die Punkte des Umkreises eines Dreiecks besitzen unendlich ferne Winkelgegenpunkte bezüglich dieses Dreiecks. Ich behaupte:

Jedem Grundkreispunkt P entspricht als Winkelgegenpunkt in bezug auf $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ ein und derselbe Fernpunkt.

Zum Beweis verbinden wir den zu P bezüglich $\{F_i\}$ isogonalen Punkt mit F_1; die Verbindungsgerade schneide den Grundkreis k in dem Rest-

---

[15]) Cayley[1]), S. 553; Bennett[1]), S. 82; Morley[1]), S. 146; Haarbleicher[1]), dort Gleichung (12).

punkt P_f. Analog werde der Winkelgegenpunkt zu P bezüglich $\{S_i\}$ aus S_1 in den Punkt P_s von k projiziert. Mithin ist

$$\text{Bogen } P_f F_2 = F_3 P, \quad \text{Bogen } P_s S_2 = S_3 P.$$

Daher ist der Bogen

$$(8) \qquad \begin{aligned} P_f P_s &= P_f F_2 + F_2 P + P S_1 + S_1 F_1 + F_1 P + P S_2 + S_2 P_s \\ &= (\Sigma F_i P + \Sigma P S_i) + S_1 F_1. \end{aligned}$$

Weil der Klammerausdruck nach dem Satz über die Grundkreisbögen-Summe verschwindet, sind die Geraden $F_1 P_f$ und $S_1 P_s$ parallel, was zu beweisen war.

Die besonderen Lagen $P = F_i$ und $P = S_i$ liefern das Ergebnis:

Jede Ecke von $\{F_i\}$ oder $\{S_i\}$ und der Fernpunkt ihrer Gegenseite sind Winkelgegenpunkte des anderen Dreiecks[16]).

Stimmt die Korrespondenz zwischen dem Grundkreis und der uneigentlichen Geraden, die die isogonale Verwandtschaft von $\{F_i\}$ erzeugt, auch nur in einem Paar entsprechender nicht absoluter Punkte mit der analogen, durch $\{S_i\}$ hervorgerufenen Korrespondenz überein, so stimmen beide Korrespondenzen im ganzen überein. Somit läßt sich aus dem letzten, speziellen Satz der vorhergehende, allgemeinere Satz zurückgewinnen.

§ 15.

Berührende Parabeln. Wallacegeraden.

Die Brennpunkte aller Inkegelschnitte eines Dreiecks sind Winkelgegenpunkte und umgekehrt. Hieraus folgt, daß die Brennpunkte der Inparabeln die Punkte des Umkreises sind, weiter im Hinblick auf § 14:

Berührende Parabeln an $\{f_i\}$ und $\{s_i\}$ haben denselben Brennpunkt und parallele Achsen oder keines von beiden[17]).

Wenn also die Inparabeln konfokal sind, so sind auch die Scheiteltangenten parallel. Dies kann man, weil die Scheiteltangente einer Inparabel die Wallacegerade ihres Brennpunktes ist, auch so ausdrücken:

Für jeden Grundkreispunkt P sind seine Wallacegeraden bezüglich $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ parallel[17]).

Die beiden letzten Sätze gelten mutatis mutandis auch dann, wenn die Parabeln als Klassenkegelschnitte in einen Grundkreispunkt und den uneigentlichen Winkelgegenpunkt zerfallen. Tritt dies ein, so ist immer die durch den eigentlichen und normal zum uneigentlichen Punkt gehende Gerade als Scheiteltangente und zugleich Leitlinie einer Parabel anzusehen.

Wenn der Brennpunkt P z. B. nach S_i rückt, degeneriert jedenfalls die $\{s_i\}$ berührende Parabel. Die Wallacegerade zu S_i im Dreieck $\{S_i\}$

---

[16]) Haarbleicher[1]), S. 22; z. T. Bennett[1]), S. 78.

[17]) Haarbleicher[1]), S. 22.

ist die Höhe durch S_i. Zu ihr parallel ist nach dem letzten Satz auch die Wallacegerade von S_i bezüglich $\{F_i\}$. Da diese Gerade die Scheiteltangente der $\{f_i\}$ berührenden Parabel mit dem Brennpunkt S_i ist, gilt dasselbe für die Leitlinie der Parabel; also:

Die Spiegelbilder des Punktes S_i an den Seiten $\{f_i\}$ liegen auf einer Parallelen zur Höhe im Punkte S_i. Auf dieser Parallelen liegt F_0, weil die Leitlinie jeder Parabel die Höhenschnittpunkte aller Tangentendreiseite enthält. Weil ferner die Scheiteltangente mitten zwischen Brennpunkt und Leitlinie verläuft, hat sich ergeben: Die Wallacegerade von S_i in bezug auf $\{F_i\}$ geht durch den Mittelpunkt der Höhenschnittpunkte[18]) von $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$, ebenso die Wallacegerade zu F_i bezüglich $\{S_i\}$. Der gemeinsame Schnittpunkt der Wallacegeraden kann auch als *Lotpunkt* jeder der sechs Geraden $\{f_i\}$, $\{s_i\}$ in bezug auf das Dreieck $\{S_i\}$ bzw. $\{F_i\}$ gedeutet werden[19]).

Jede Gerade durch den Höhenschnittpunkt eines Dreiecks ist Leitlinie einer Inparabel. Wählt man die Verbindungsgerade l der Höhenschnittpunkte von $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ zur Leitlinie für Inparabeln dieser Dreiecke, so haben die Parabeln parallele Achsen, sind daher nach dem ersten Satz des laufenden Paragraphen konfokal, also identisch. Mit anderen Worten: Es besteht der

Schließungssatz. *Die dem Grundkreis eingeschriebenen Dreiecke $\{F_i\}$, $\{S_i\}$ sind einer Parabel p umschrieben*[20]).

Deren Brennpunkt Q kann als gemeinsamer Schnittpunkt der Spiegelbilder von l bezüglich aller sechs Dreieckseiten konstruiert werden[21]).

Sind, umgekehrt, zwei dem Grundkreis eingeschriebene Dreiecke $\{F_i\}$, $\{S_i\}$ einer einzigen Parabel p umschrieben, so folgt aus der § 15 einleitenden Bemerkung, zusammen mit der Überlegung, die den Schluß des § 14 bildet, daß für $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ die Sätze des § 14 gelten. Aus diesen Sätzen resultiert mittels (8) der Satz von der Grundkreisbögen-Summe. Der letztere Satz ist also mit den Ergebnissen von § 14 und mit dem Schließungssatz äquivalent[22]) und, wie man auf ähnliche Weise zeigen könnte, mit den übrigen drei Lehrsätzen von § 15.

Die bisher abgeleiteten Konsequenzen des Satzes von der Grundkreisbögen-Summe gelten, wie bereits erwähnt, für beliebige Koppelkurven;

---

[18]) R. L. Hippisley, Note on the nodes of the 3-bar sextic, Proceed. London math. Soc. (2) 21 (1923), S. 410—412; Haarbleicher[1]), S. 22.

[19]) Hippisley[18]).

[20]) Cayley[1]), S. 575; Bennett[1]), S. 79; Haarbleicher[1]), S. 22.

[21]) Außerdem ist $\Pi Q F_i = \Pi Q S_i$, wo beiderseits Produkte dreier Grundkreissehnen stehen [Cayley[1]), S. 577; Bennett[1]), S. 82, dort noch andere Relationen].

[22]) Z. T. Cayley[1]), S. 577; Bennett[1]), S. 78.

bei dreispitzigen sind $\{F_i\}$, $\{S_i\}$ Teile der Feuerbachschen Figur, was viele Besonderheiten erwarten läßt. In der Tat: Die Inparabeln von $\{F_i\}$ sind Polparabeln[23]) des Urdreiecks $\{A_i\}$. Der Höhenschnittpunkt F_0 von $\{F_i\}$ ist Umkreismittelpunkt. Seine Verbindungsstrecke mit dem Höhenschnittpunkt des Höhenfußpunktedreiecks $\{S_i\}$ hat denselben Mittelpunkt M wie der Taylorsche Kreis[24]); die Strecke liegt auf dem Brocardschen Durchmesser. Diese Gerade ist demnach Leitlinie der $\{F_i\}$ und $\{S_i\}$ eingeschriebenen Parabel p, welche die Kiepertsche Parabel von $\{F_i\}$ ist[25]). Ihr Brennpunkt Q ist der Lotpunkt des Brocardschen Durchmessers, das ist der Komplementpunkt des Steinerschen Punktes[26]) (Steinerscher Punkt für $\{F_i\}$). Die Achse von p ist die Parallele durch Q zur Lemoineschen Geraden[27]).

§ 16.

Die Spitzentangenten.

Nachdem wir bei den Getrieben, die dreispitzige Koppelkurven erzeugen, verweilt haben und bei den Brennpunkten, die mit den Getrieben in innigem, mit den Kurven aber in nicht augenfälligem Zusammenhang stehen, so wollen wir uns endlich der Erscheinung der Kurven selbst zuwenden. Wir bleiben zunächst bei der Untersuchung einer einzigen dreispitzigen Koppelkurve und beginnen mit ihren Spitzen. Da über das Spitzendreieck selbst nichts weiter zu berichten ist, betrachten wir die Spitzentangenten und beweisen:

Die Spitzentangenten gehen durch einen Punkt.

Dieser Satz gilt, anders als bei Quartiken, keineswegs für alle Kurven sechster Ordnung mit drei Spitzen, nicht einmal für jede drei-

---

[23]) Vgl. Berkhan und Meyer[12]), S. 1252.

[24]) Vgl. A. Emmerich, Die Brocardschen Gebilde, Berlin 1891, S. 65—67; V. Thébault, Sur les cercles de Tucker, Mathesis (2) **48** (1934), S. 84. Für spitzwinkeliges $\{F_i\}$ ist M der Umfangsschwerpunkt von $\{S_i\}$; sind ferner $M f_i$ und $M s_i$ Normalabstände, so gilt: $\Pi M f_i = \Pi M s_i$ [V. Thébault, Géométrie de l'orthopôle, Mathesis (2) **47** (1933), Suppl.]. — Die Fußnoten [24]) bis [27]), sowie [30]) hat Herr J. Mahrenholz, Cottbus, liebenswürdigerweise beigesteuert.

[25]) A. Mineur, Sur les droites de Simson, Mathesis (2) **43** (1929), S. 332; V. Thébault, Sur le point de Feuerbach, ebenda S. 360; R. Goormaghtigh, Droite de Simson commune aux triangles orthique et complémentaire, Mathesis (2) **44** (1930), S. 333; V. Thébault, Sur les points de Feuerbach, Mathesis (2) **47** (1933), Suppl.

[26]) Goormaghtigh[25]); Thébault[25]). Die unter [24]) für M angeführte Abstandsrelation gilt auch für Q; siehe ferner [21]) [R. Deaux, Sur les triangles autopolaires, Mathesis (2) **47** (1933), S. 274].

[27]) Die Achse schneidet f_i und s_i in F_i^0 bzw. S_i^0, so daß $\Pi Q F_i^0 = \Pi Q S_i^0$ ist [V. Thébault, Mathesis (2) **48** (1934), S. 450, Aufgabe 2811].

spitzige Sextik mit zwei dreifachen Punkten. Das soll weiter unten durch ein Beispiel belegt werden (§ 17).

Ist etwa in S_1 die Spitzentangente t_1 zu suchen, so benützen wir die Hauptstellung des Getriebes, das in eben dieser Hauptstellung S_1 erzeugt (Fig. 10). Nun ist für die Bewegung der Koppel b_1 die Spitze S_1 Momentanpol (vgl. § 2). Somit ist t_1 senkrecht zur Polbahntangente u_1 im Punkte S_1. Wir ermitteln u_1 mit Hilfe der Bobillierschen Konstruktion: Die Gerade u_1^*, welche S_1 mit dem Schnittpunkt des Steges f_1 und der Koppel b_1 verbindet, ergibt als Spiegelbild an einer Symmetralen für den Winkel $b_2 b_3$ des Koppeldreiecks (oder, kurz gesagt, durch Spiegelung am Winkel $b_2 b_3$) die Polbahntangente u_1.

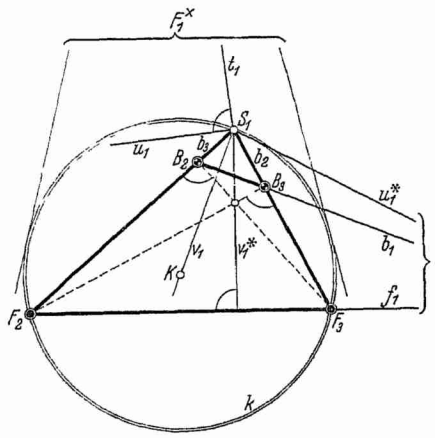

Fig. 10. Zur Konstruktion der Spitzentangente t_1.

Es ist vorteilhaft, die Gerade v_1^* hinzuzufügen, die zu u_1^* bezüglich b_2, b_3 harmonisch ist. Für das vollständige Viereck $F_2 F_3 B_2 B_3$ ist S_1 ein Punkt des Diagonaldreiecks, u_1^* eine Seite desselben. Daher ist v_1^* die andere durch S_1 gehende Seite des Diagonaldreiecks, mithin die Verbindungsgerade von S_1 mit dem Schnittpunkt der Geraden $F_2 B_3$ und $F_3 B_2$ Da letztere Geraden, dem Kreislagensatz (§ 5) zufolge, Höhen im Dreieck $S_1 F_2 F_3$ sind, ist $v_1^* \perp f_1$.

Man spiegle b_2, b_3, u_1^*, v_1^* am Winkel $b_2 b_3$. Dabei werden b_2 und b_3 bloß vertauscht; folglich sind die Spiegelbilder u_1, v_1 der Geraden u_1^*, v_1^* wieder harmonisch in bezug auf b_2, b_3. Bei der Spiegelung am Winkel $b_2 b_3$ geht die Höhe v_1^* des Dreiecks $S_1 F_2 F_3$ bekanntlich in den durch denselben Eckpunkt S_1 verlaufenden Umkreisradius über. Somit ist v_1 ein Radius des Grundkreises k.

Jetzt drehen wir den harmonischen Strahlwurf $b_2 b_3 u_1 v_1$ um S_1 durch einen rechten Winkel. Dabei entsteht aus u_1 die Spitzentangente t_1, aus dem Grundkreisradius v_1 die Tangente an k in S_1. Wir haben daher als vorläufiges Ergebnis: Die Spitzentangente t_1 ist zur Grundkreistangente bezüglich der Normalen zu b_2 und b_3 harmonisch. Um die vierte Harmonische t_1 wirklich zu konstruieren, verwenden wir k als Steinerschen Kreis. Die Normalen zu b_2 und b_3 schneiden ihn in den Gegenpunkten von F_2 bzw. F_3, die Grundkreistangente in S_1 selbst. Die Ermittlung der Harmonischen verläuft nun so: Die Tangenten an k in den Gegen-

punkten von F_2, F_3 schneiden sich in einem Punkt $F_1^\times$, dessen Verbindungsgerade mit S_1 den Grundkreis im Schnittpunkt der gesuchten Geraden t_1 trifft. Hieraus ist zu ersehen:

Die Tangente t_i in der Spitze S_i enthält $F_i^\times$, den Antipol zu f_i in bezug auf k.

Der Grundkreisradius nach F_i hin ist gemäß § 12 eine Normale zu s_i. Daher ist die F_i in der Antipolarität von k entsprechende Gerade $f_i^\times \| s_i$. Somit gehen die Verbindungsstrahlen analoger Ecken der Dreiseite $\{f_i^\times\}$, $\{s_i\}$, also die Spitzentangenten $\{t_i\}$, durch einen Punkt T, das Ähnlichkeitszentrum der Dreiecke $\{S_i\}$, $\{F_i^\times\}$. Ich will T das *Spitzenziel* nennen.

§ 17.

Das Spitzenziel. Inversion der Koppelkurve.

Die Lage des Spitzenziels T soll nun genauer beschrieben werden, seine Lage in bezug auf das Dreieck $\{S_i\}$, das ja schon in § 10 als Urdreieck verwendet wurde. Diese Auffassung wird fortan beibehalten. Ich erinnere auch an die zu Beginn von § 10 getroffene Verabredung über die Bezeichnungen „Inkreis" und „Ankreise". Sie besagt, daß die Ecken des $\{F_i\}$ umschriebenen Außendreiecks $\{A_i\}$ als *Ankreismittelpunkte* angesehen werden.

Der Antipol $F_i^\times$ zur Strecke f_i liegt auf deren Mittelsenkrechten, welche durch den Grundkreismittelpunkt K geht. Da $f_i \| a_i \perp A_0 S_i$ war, ist $K F_i^\times \| A_0 S_i$. In der zentrischen Ähnlichkeit $\{S_i\} \to \{F_i^\times\}$ entspricht somit K dem Punkt A_0 oder: Dem Inkreis entspricht in der zentrischen Ähnlichkeit der Grundkreis k (und kein anderer Berührungskreis von $\{F_i^\times\}$). Zur Geraden $K F_i^\times$, die eine Symmetrale des Winkels bei $F_i^\times$ ist, liegen auch die Punkte F_i, S_i symmetrisch; das hat uns ja zur Einführung der Hauptspiegelbilder veranlaßt. Folglich ist die Gerade $F_i^\times F_i$ Winkelgegengerade zu $F_i^\times S_i = t_i$ im Dreieck $\{F_i^\times\}$. Da die drei Geraden $\{t_i\}$ sich in T schneiden, laufen auch die Geraden $\{F_i^\times F_i\}$ in einem Punkt N zusammen, dem Winkelgegenpunkt zu T im Dreieck $\{F_i^\times\}$. Wir werden sogleich sehen, daß N der Nagelsche Punkt von $\{F_i^\times\}$ ist; damit wird, umgekehrt, dargelegt sein, daß T der Winkelgegenpunkt des Nagelschen Punktes ist, und hieraus folgt, weil die Geraden $\{t_i\}$ sich selbst in der zentrischen Ähnlichkeit $\{F_i^\times\} \to \{S_i\}$ entsprechen, der

Satz vom Spitzenziel. *T ist der Winkelgegenpunkt im Spitzendreieck $\{S_i\}$ zu dessen Nagelschem Punkt.*

Um nun den Beweis für die Behauptung nachzutragen, daß N der Nagelsche Punkt von $\{F_i^\times\}$ ist, bemerken wir vorerst, daß infolge der Antipolarität F_i auf k dem Punkt gegenüberliegt, in dem $f_i^\times$ den Grund-

kreis berührt. Die Behauptung läuft also auf folgenden Hilfssatz hinaus: *Die Ecktransversalen nach den Gegenpunkten der Berührungspunkte des Inkreises gehen durch den Nagelschen Punkt*[28]).

Beweis: Das Berührungsbüschel von Kegelschnitten, dem der Inkreis k des Dreiecks $\{F_i^\times\}$ und das Paar $f_{i-1}^\times, f_{i+1}^\times$ von Dreieckseiten angehören, schneidet der Kreisdurchmesser d durch den Berührungspunkt der dritten Seite $f_i^\times$ in einer Involution, von der ein Doppelpunkt auf der Berührungssehne des Büschels liegt. Die Polare dieses Doppelpunktes bezüglich jedes Büschelkegelschnittes trifft d im anderen Doppelpunkt, mithin auch die Polare bezüglich k, welche zu $f_i^\times$ parallel ist und durch $F_i^\times$ geht. Also wird die Involution auf d aus $F_i^\times$ in eine symmetrische Involution auf $f_i^\times$ projiziert. Die Ecktransversalen nach den Berührungspunkten des Inkreises und deren Gegenpunkten projizieren daher Seitengegenpunkte. Das ist der Inhalt des Hilfssatzes.

Durch *Inversion* entstehen aus Koppelkurven, weil sie trizirkulare Sextiken sind, wieder trizirkulare Sextiken[29]). Unterwerfen wir eine dreispitzige Koppelkurve Γ der Inversion am Grundkreis, so hat die inverse Kurve Γ^* dieselben Spitzen $\{S_i\}$. Da die Inversion gegensinnig konform ist, geht die Γ^* in S_i berührende Spitzentangente t_i^* aus t_i durch Spiegelung an dem S_i enthaltenden Grundkreisradius hervor. Die Geraden $\{t_i^*\}$ laufen im allgemeinen nicht durch einen Punkt. Hiermit haben wir trizirkulare dreispitzige Sextiken ohne Spitzenziel konstruiert, deren Existenz zu Beginn von § 16 angekündigt worden war.

§ 18.

Isogonalinvariante Gebietseinteilung.

Der Grundkreis k, also der Umkreis des Dreiecks $\{S_i\}$, und sein Inkreis sind, wie festgestellt wurde, entsprechende Kreise in einer Ähnlichkeit mit T als Zentrum. Daher ist das Spitzenziel ein Ähnlichkeitspunkt zwischen Um- und Inkreis, und zwar, wie eine nähere Untersuchung ergeben würde, der äußere Ähnlichkeitspunkt für den Fall des Inkreises im engeren Sinn, sonst der innere[30]). Folglich liegt T innerhalb des Inkreises, denn der Umkreis eines Dreiecks umschließt den Inkreis im

---

[28]) Chr. Nagel, Untersuchungen über die wichtigsten zum Dreiecke gehörigen Kreise, Leipzig 1836, S. 31, 33.

[29]) Roberts[1]). Dort findet man auch Inversionen, die eine Wattsche Kurve wieder in eine Wattsche Kurve überführen.

[30]) Zum äußeren und inneren Ähnlichkeitspunkt zwischen Umkreis und Inkreis im engeren Sinn ist der Nagelsche bzw. Gergonnesche Punkt isogonal [V. Thébault, Sur les centres de similitude des cercles inscrit et circonscrit au triangle, Mathesis (2) **46** (1932), S. 368].

engeren Sinn und trifft die übrigen Berührungskreise. Wir werden später folgende schwächere Aussage benötigen:

Von den vier Gebieten der projektiven Ebene, die durch die Geraden $\{s_i\}$ begrenzt werden, enthält eines das Spitzenziel T und zugleich den Inkreismittelpunkt A_0 als innere Punkte.

Dies kann ohne lästige Fallunterscheidungen zwischen Inkreis und Ankreisen, äußeren und inneren Ähnlichkeitspunkten folgendermaßen bewiesen werden. Für jeden berührenden Kegelschnitt eines nicht ausgearteten Dreiecks liegt der Brianchonpunkt im Innengebiet des Kegelschnitts. Um zu T zu gelangen, muß auf den Brianchonpunkt des Inkreises die isotome und hierauf die isogonale Verwandtschaft des Spitzendreiecks $\{S_i\}$ ausgeübt werden. Nun, diese beiden Transformationen führen jeden der projektiven Quadranten in sich über. Das ergibt sich leicht daraus, daß jeder projektive Quadrant der Durchschnitt von projektiven Gebieten ist, die durch je zwei Dreieckseiten begrenzt werden. Jedes dieser sechs projektiven Winkelgebiete wird durch die isotome und ebenso durch die isogonale Verwandtschaft offenkundig auf sich selbst oder auf einen Teil von sich abgebildet. Abbildung auf einen Teil widerspräche aber dem involutorischen Charakter der beiden Transformationen.

Bei dieser Gelegenheit geben wir noch eine weiterhin nützliche Gebietseinteilung der projektiven Quadranten eines Dreiecks in euklidische Gebiete an, die durch die isogonale Verwandtschaft $\mathfrak{W}$ des Dreiecks untereinander vertauscht werden. *Als Begrenzungen der Gebiete können die Geraden des Dreiecks, die uneigentliche Gerade und der Umkreis gewählt werden.*

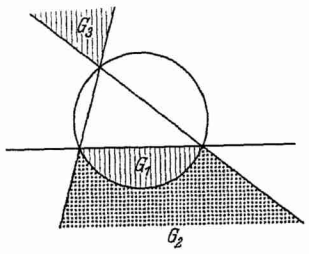

Fig. 11. Die isogonale Verwandtschaft bildet die schraffierten Gebiete aufeinander ab, das punktierte auf sich selbst.

Das läßt sich nachweisen, ohne daß man sich in die Eigenschaften von $\mathfrak{W}$ vertiefen müßte. Das Innere des Dreiecks ist, wie soeben für alle projektiven Quadranten erklärt wurde, selbstentsprechend. Es kommt also bloß auf die (euklidisch) nicht beschränkten projektiven Quadranten des Dreiecks an. Wir bezeichnen in einem dieser unbeschränkten Quadranten mit G_1 die Menge der außerhalb des Dreiecks, aber innerhalb des Umkreises gelegenen Punkte, nennen G_2 das benachbarte Gebiet und G_3 das restliche Gebiet des Quadranten (Fig. 11).

Wenn man von den Punkten der Begrenzungen absieht, ist $\mathfrak{W}$ eine topologische Abbildung, führt also G_i in ein Gebiet $\mathfrak{W}(G_i)$ über. Punkte

aus zweien der drei Gebiete $\{G_i\}$ kann $\mathfrak{W}(G_i)$ nicht enthalten, sonst wäre ja $\mathfrak{W}(G_i)$ nicht zusammenhängend. Nun kann nicht $\mathfrak{W}(G_1) \subseteq G_1$ sein. Punkte von G_1, die nahe dem Umkreis liegen, haben nämlich weit entfernte Winkelgegenpunkte, die mithin nicht im beschränkten Gebiet G_1 liegen können. Findet sich in G_i ein Fixpunkt der Abbildung $\mathfrak{W}$ vor, so ist $\mathfrak{W}(G_i) \subseteq G_i$. Die Fixpunkte sind die Mittelpunkte der Berührungskreise; ein solcher kommt in einem der Gebiete $\{G_i\}$ vor, aber sicherlich nicht in G_3. Aus all dem folgt:

$$\mathfrak{W}(G_2) \subseteq G_2, \qquad \mathfrak{W}(G_1) \subseteq G_3, \qquad \mathfrak{W}(G_3) \subseteq G_1.$$

Wäre $\mathfrak{W}(G_2) \subset G_2$, so ergäbe nochmalige Anwendung der isogonalen Verwandtschaft: $\mathfrak{W}^2(G_2) \subseteq \mathfrak{W}(G_2) \subset G_2$. Ähnlich schließt man aus $\mathfrak{W}(G_3) \subset G_1$ auf $\mathfrak{W}^2(G_1) \subset G_1$ und aus $\mathfrak{W}(G_1) \subset G_3$ auf $\mathfrak{W}^2(G_3) \subset G_3$. Das sind Widersprüche dazu, daß $\mathfrak{W}$ eine Involution ist. Somit ergibt sich, daß *die isogonale Verwandtschaft G_2 auf sich selbst abbildet, G_1 und G_3 aufeinander.* Bei der isotomen Verwandtschaft liegen übrigens die Dinge fast genau so, nur spielt die Steinersche Umellipse die Rolle des Umkreises.

§ 19.

Gegenstellung und Gegenspiegelbild.

Wir betrachten nebst der Hauptstellung eines Getriebes, das eine dreispitzige Koppelkurve erzeugt, noch diejenige Stellung des Getriebes, in der das Gelenkviereck zum Gelenkviereck in der Hauptstellung bezüglich des Steges spiegelbildlich ist; sie heiße die *Gegenstellung.* Wird das ganze Getriebe in seiner Hauptstellung am Steg gespiegelt, so erhalten wir eine Figur, die das *Gegenspiegelbild* heißen möge. Das Gegenspiegelbild des Koppeldreiecks ist nicht etwa die Lage des Koppeldreiecks in der Gegenstellung. Um diese Lage zu erhalten, muß vielmehr das Koppeldreieck an die Koppel der Gegenstellung so angesetzt werden, daß es zum Koppeldreieck der Hauptstellung gleichsinnig kongruent ist. Mit anderen Worten: *Wird, ausgehend von der Gegenstellung, das Koppeldreieck an der Koppel gespiegelt, so erhält man das Gegenspiegelbild.* Dies veranschaulicht Fig. 12 an dem Getriebe, das in seiner Hauptstellung S_1 erzeugt. Auch im nächstfolgenden exemplifizieren wir an demselben Getriebe.

Hauptspiegelbild und Gegenspiegelbild sind zueinander symmetrisch in bezug auf den Stegmittelpunkt, denn die beiden Spiegelbilder wurden ja durch Spiegelung an der Symmetralen des Steges bzw. am Steg selbst hergestellt.

Ich verweise darauf, daß aus dem Hauptspiegelbild des in Rede stehenden Getriebes durch eine zentrische Ähnlichkeit die Figur des Drei-

ecks $\{A_i\}$ mitsamt der Strecke s_1 hervorgeht. Das Ähnlichkeitszentrum ist der Schwerpunkt C von $\{F_i\}$, das Verzerrungsverhältnis $-2:1$ (vgl. § 9). Aus der zentrischen Symmetrie von Haupt- und Gegenspiegelbild folgt daher, daß auch aus dem Gegenspiegelbild durch zentrische Ähnlichkeit das Dreieck $\{A_i\}$ vermehrt um die Strecke s_1 entsteht. Zentrum ist nunmehr A_1, weil dieser Punkt bei Spiegelung an der Stegmitte in F_1 übergeht und F_1 durch die Ähnlichkeit $\{F_i\} \to \{A_i\}$ nach A_1 zurückkehrt; das Ähnlichkeitsverhältnis ist $2:1$, weil das Punktepaar F_2, F_3 vermöge

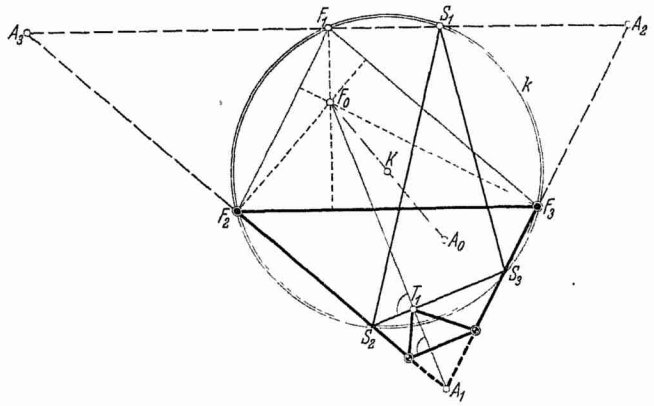

Fig. 12. Gegenstellung und Gegenspiegelbild.

der soeben genannten beiden Operationen in A_3, A_2 transformiert wird. Mithin ist die Gegenstellung (und das Gegenspiegelbild) der Koppel zu s_1 parallel und halbiert den Abstand zwischen A_1 und s_1. Daher fällt der zu A_1 bezüglich der Koppel in der Gegenstellung symmetrische Punkt T_1, den wir vorhin als die Lage des beschreibenden Punktes in der Gegenstellung erkannt hatten, auf die Gerade s_1. Noch mehr! Als Schnittpunkt der Arme ist A_1 Momentanpol für die Gegenstellung. Demnach ist in T_1 die Tangente an die Koppelkurve $\perp A_1 T_1$, inzidiert also mit s_1. Das heißt, die Koppelkurve berührt in T_1 das Spitzendreieck.

Die Gerade $A_1 T_1$ geht durch F_0, den Höhenschnittpunkt von $\{F_i\}$. Gemäß § 12 ist ja der Grundkreisdurchmesser $F_1 K \perp s_1$, also $F_1 K \parallel A_1 T_1$. Aus der Ähnlichkeit $\{F_i\} \to \{A_i\}$ folgt somit, daß die Gerade $A_1 T_1$ durch den Umkreismittelpunkt von $\{A_i\}$ oder, was dasselbe ist, durch den Höhenschnittpunkt in $\{F_i\}$ geht, wie behauptet wurde. Wir haben als Ergebnis das

Berührungstheorem. *Die dreispitzige Koppelkurve berührt die Seiten $\{s_i\}$ des Spitzendreiecks $\{S_i\}$ in den Fußpunkten $\{T_i\}$ der Lote, die aus dem Höhenschnittpunkt F_0 des Brennpunktedreiecks $\{F_i\}$ gefällt werden.*

Da A_i ein Ankreismittelpunkt für $\{S_i\}$ ist, wird s_i in T_i auch von einem Ankreis berührt, wobei gilt:

In bezug auf die Mitte der Strecke s_i liegt T_i zum Berührungspunkt des Inkreises symmetrisch.

Die erwähnten Punkte sind nämlich die Normalprojektionen auf s_i von den Punkten K, F_0, A_0, und auf der Eulerschen Geraden des Dreiecks $\{A_i\}$ gilt $F_0K = KA_0$.

§ 20.

Isogonalinvarianz der Koppelkurve.

Zwischen dem Berührungstheorem und dem Satz vom Spitzenziel (§ 17) besteht eine tiefliegende Verbindung.

Zunächst erkennt man aus dem Berührungstheorem und dem darauffolgenden Zusatz mit Rücksicht auf die Ordnung Sechs der Koppelkurve Γ, daß $\{S_i\}$ nicht bloß Spitzen auf Teilbögen von Γ sind, sondern, daß Γ auch *im großen nur einmal durch jede Spitze S_i hindurchgeht*, ferner, daß die Berührung in T_i zweipunktig ist.

Wir üben jetzt auf Γ die isogonale Transformation $\mathfrak{W}$ bezüglich des Dreiecks $\{S_i\}$ aus. Die so entstehende Kurve $\mathfrak{W}(\Gamma)$ ist ersichtlicherweise wieder eine trizirkulare Sextik. Weil zwischen Γ und s_i in T_i eine Berührung erster Ordnung stattfindet, hat $\mathfrak{W}(\Gamma)$ in S_i eine Spitze, deren Tangente aus der Geraden S_iT_i durch Spiegelung am Winkel $s_{i-1}s_{i+1}$ hervorgeht. Nun ergibt die ergänzende Bemerkung zum Berührungstheorem zusammen mit dem Satz vom Spitzenziel, daß die Geraden $\{t_i\}$ Spitzentangenten auch von $\mathfrak{W}(\Gamma)$ sind. Umgekehrt liefern die Spitzen $\{S_i\}$ von Γ Berührungen zwischen $\mathfrak{W}(\Gamma)$ und den Seiten $\{s_i\}$, und zwar in den Punkten $\{T_i\}$. Also treffen Γ und $\mathfrak{W}(\Gamma)$ einander in den Kreispunkten, sowie in $\{S_i\}$ und $\{T_i\}$. Die Kreispunkte zählen mindestens je neunfach als Schnittpunkte, weil beide Kurven trizirkular sind. In den Spitzen $\{S_i\}$ und in den Punkten $\{T_i\}$ haben Γ und $\mathfrak{W}(\Gamma)$ gemeinsame Tangenten; daher sind die Punkte $\{S_i\}$ sechsfach, die Punkte $\{T_i\}$ doppelt zu zählen. Insgesamt wurden 42 Schnittpunkte der Sextiken Γ, $\mathfrak{W}(\Gamma)$ nachgewiesen und damit die

Isogonalinvarianz der Koppelkurve. *Sie entspricht sich selbst in der isogonalen Verwandtschaft $\mathfrak{W}$ des Dreiecks $\{S_i\}$.*

Dieser sehr bemerkenswerte Satz *gilt auch für jede beliebige Koppelkurve*[31]) (was hier bloß referiert sei), wenn $\{S_i\}$ deren Doppelpunkte sind, die auf dem Grundkreis (Kreis durch die Brennpunkte) liegen.

---

[31]) Bennett[1]), S. 73; Morley[1]), S. 146; Haarbleicher[1]), S. 19; für den Sonderfall $\{F_i\} = \{S_i\}$ vgl. Alt[2]).

Hierzu ist zu bemerken: Bei Wattschen Kurven degeneriert der Grundkreis, der Satz wird selbstverständlich und beinhaltet bloß die Symmetrie der Kurve bezüglich des Steges. Sehen wir demgemäß von Wattschen Kurven ab. Eine nicht zerfallende Koppelkurve ist elliptisch oder rational. Im ersten Fall besitzt sie genau drei Doppelpunkte, welche der Grundkreis enthält. Zu diesen, den *gewöhnlichen Doppelpunkten*, gesellt sich im Falle rationaler Kurven ein vierter, *außerordentlicher Doppelpunkt* und die Vereinigung mehrerer Doppelpunkte ist möglich. Kommt zu den gewöhnlichen Doppelpunkten mehr als ein außerordentlicher Doppelpunkt hinzu, so zerfällt die Koppelkurve[32]).

Wenn im weiteren Verlauf von allgemeinen, also nicht notwendig dreispitzigen Koppelkurven die Rede sein wird, so sei ein für allemal angenommen, daß es sich nicht um Wattsche Kurven handle und daß die gewöhnlichen Doppelpunkte reell seien (wenn auch möglicherweise isolierte Doppelpunkte) und auf dem Grundkreis getrennt liegen.

Der Satz von der Isogonalinvarianz der Koppelkurve wird ergänzt durch den (hier ohne Beweis mitgeteilten)

Satz über zugeordnete Getriebestellungen. *Winkelgegenpunkte P und $\mathfrak{W}(P)$ von Γ sind dann und nur dann zwei Lagen des beschreibenden Punktes eines erzeugenden Getriebes, wenn die Gelenkvierecke der betreffenden Getriebestellungen bezüglich des Steges symmetrisch sind*[33]). Beispiele solch zugeordneter Stellungen bieten Haupt- und Gegenstellung jedes erzeugenden Getriebes einer dreispitzigen Koppelkurve.

Mit Hilfe der letzten Sätze soll folgendes Seitenstück zum Berührungstheorem bewiesen werden:

Berührt eine Koppelkurve Γ eine Seite s_i des Dreiecks $\{S_i\}$ ihrer gewöhnlichen Doppelpunkte, so geht die Normale im Berührungspunkt T_i durch den Höhenschnittpunkt im Brennpunktedreieck.

Wenn T_i von S_{i-1} und S_{i+1} verschieden ist, so ist die Berührung wegen der Ordnung von Γ zweipunktig. Hiermit übereinstimmend wird die Berührung dreipunktig, falls T_i in eine der Ecken von $\{S_i\}$ hineinrückt. In beiden Fällen entspricht der Berührung mit s_i vermöge der

---

[32]) Eine ausführliche Diskussion der elliptischen, rationalen und zerfallenden Koppelkurve (nebst Darstellung mittels elliptischer Parameter) gibt Morley[1]). Siehe ferner Haarbleicher[1]), S. 26, 34.

[33]) Die Korrespondenz, die $\mathfrak{W}$ auf Γ hervorruft, betrachtete zum erstenmal (allerdings außer Zusammenhang mit $\mathfrak{W}$) R. L. Hippisley, A new method of describing a three-bar curve, Proceed. London math. Soc. (2) **18** (1920), S. 136—140. Dort erscheinen P und $\mathfrak{W}(P)$ als Punkte von Γ, deren Projektionen auf f_i von der Mitte des Punktepaares P, $\mathfrak{W}(P)$ gleiche und konstante Abstände haben. Die Einführung der zugeordneten Getriebestellungen verdankt man Bennett[1]), S. 62. Vgl. auch Morley[1]), S. 144; Haarbleicher[1]), S. 24.

isogonalen Verwandtschaft $\mathfrak{W}$ bezüglich $\{S_i\}$ eine Spitze in der s_i gegenüberliegenden Ecke S_i. Wir greifen ein beliebiges der drei Getriebe heraus, die Γ erzeugen. Befindet sich das Getriebe in jener Stellung, bei der der beschreibende Punkt in die Spitze S_i fällt, so muß für diese Getriebestellung S_i Momentanpol sein (vgl. § 2). Also schneiden die Arme einander in S_i. In der zugeordneten Stellung gelangt der beschreibende Punkt nach T_i, wobei der zu S_i in bezug auf den Steg symmetrische Punkt S^* Momentanpol wird, weil ja die Gelenkvierecke zugeordneter Getriebestellungen Spiegelbilder bezüglich des Steges sind. Folglich ist T_i der Fußpunkt des aus S^* auf s_i gefällten Lotes. Dieses Lot geht, wie in § 15 für beliebige Koppelkurven festgestellt wurde, durch den Höhenschnittpunkt im Brennpunktedreieck.

§ 21.

Beschränkung dreispitziger Koppelkurven auf Gebiete.

Jede dreispitzige Koppelkurve Γ berührt, wie am Anfang des § 20 ausdrücklich bemerkt wurde, die Seiten ihres Spitzendreiecks $\{S_i\}$ zweipunktig, und zwar in den von den Ecken verschiedenen Punkten $\{T_i\}$. Mithin tritt Γ in der Nähe von T_i nicht aus einem durch die Geraden $\{s_i\}$ begrenzten Quadranten der projektiven Ebene in einen anderen über. Ein solcher Gebietswechsel findet auch nicht bei den Spitzen statt, da die Spitzentangenten nach § 18 von den $\{s_i\}$ verschieden sind. Außerhalb der Spitzen und Berührungspunkte kann Γ die Seiten $\{s_i\}$ nicht treffen; sonst hätte ja Γ eine höhere als die sechste Ordnung. Mithin haben wir als Zwischenresultat: Jeder Zug der Kurve Γ verläuft innerhalb eines der projektiven Quadranten von $\{S_i\}$, innerhalb, wenn hier und bei verwandten Aussagen im folgenden die Punkte $\{S_i\}$, $\{T_i\}$ vernachlässigt werden.

Wir erwähnten schon, daß die nicht zerfallenden Koppelkurven elliptisch oder rational sind. Die elliptische Koppelkurve besitzt, falls überhaupt, einen oder zwei reelle Züge, je nachdem nämlich, ob das Gelenkviereck eines erzeugenden Getriebes aus jeder Stellung durch kontinuierliche Bewegung in die am Steg gespiegelte Lage gebracht werden kann, oder nicht. Deshalb gilt im Hinblick auf den Satz über zugeordnete Getriebestellungen:

Die beiden Züge einer zweiteiligen Koppelkurve sind zueinander isogonal[34]) *bezüglich* $\{S_i\}$.

Hat insbesondere eine dreispitzige Koppelkurve zwei reelle Züge, so entsprechen sie sich also wechselseitig in der isogonalen Verwandtschaft $\mathfrak{W}$ von $\{S_i\}$; da nun jeder Zug in einem Quadranten liegt und wir außerdem

[34]) Morley[1]), S. 153.

wissen, daß die Quadranten durch $\mathfrak{W}$ auf sich selbst abgebildet werden (§ 18), können wir sagen:

Jede zweiteilige und umsomehr jede einteilige Koppelkurve mit drei Spitzen liegt in einem einzigen der projektiven Quadranten ihres Spitzendreiecks.

In welchem? Das kann mittels der Spitzentangenten $\{t_i\}$ entschieden werden, weil in der Nähe der Spitze S_i auf der Kurve Γ und auf t_i Punkte existieren, die demselben Quadranten angehören.

Es sei Q_i der den Ankreismittelpunkt A_i von $\{S_i\}$ enhaltende projektive Quadrant, Q_0 der den Inkreismittelpunkt A_0 enthaltende. Da das Spitzenziel sich in Q_0 befindet (§ 18), tritt t_i bei S_i aus Q_0 nach Q_i

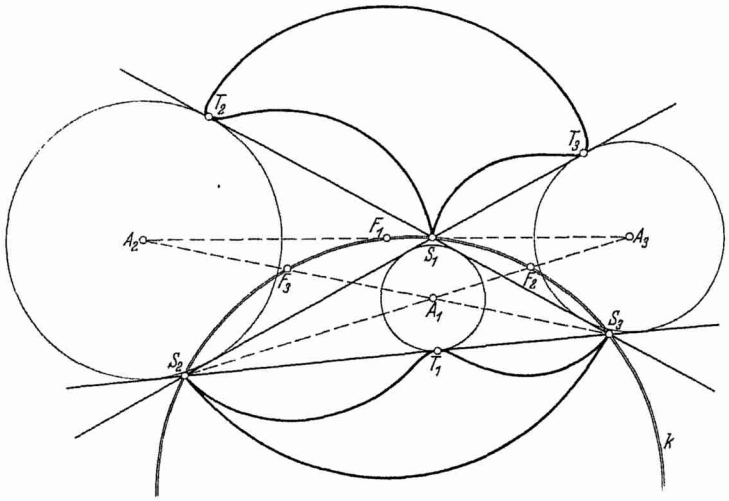

Fig. 13. Dreispitzige Koppelkurve und Berührungskreise des Spitzendreiecks.

über; denn A_0 und A_i fallen in eines der beiden von S_i ausstrahlenden projektiven Winkelgebiete. Mithin gehört Γ entweder Q_0 oder Q_i an. Stellen wir diese Alternative für $i = 1, 2, 3$ auf, so lassen die drei Alternativen nur eine gemeinsame Lösung zu, nämlich:

Die reellen Züge einer dreispitzigen Koppelkurve liegen in demselben Quadranten Q_0 des Spitzendreiecks $\{S_i\}$ wie der Inkreis.

Aus diesem Satz kann, gestützt auf das Berührungstheorem und die anschließende Ergänzung (§ 19), gefolgert werden:

Die dreispitzige Koppelkurve berührt die in den übrigen Quadranten $\{Q_i\}$ des Spitzendreiecks befindlichen eingeschriebenen Kreise von außen, was Fig. 13 für eine zweiteilige Kurve mit stumpfwinkligem Brennpunktedreieck illustriert.

Nunmehr richten wir unser Augenmerk wieder darauf, daß zu einem vorgegebenen, nicht ausgearteten Spitzendreieck $\{S_i\}$ vier dreispitzige Koppelkurven existieren (§ 10). Jede dieser Kurven ist eindeutig bestimmt, sobald ein beliebiger $\{s_i\}$ berührender Kreis als Inkreis angesehen wird. Eines der obenstehenden Ergebnisse kann jetzt auch so formuliert werden:

In jedem Quadranten des Spitzendreiecks liegt genau eine dreispitzige Koppelkurve.

§ 22.

Engere Gebietseinschränkungen.

Die letzte Aussage läßt sich verschärfen, wenn diejenige Einteilung der Ebene in zehn Gebiete herangezogen wird, für welche die Geraden $\{s_i\}$, die uneigentliche Gerade und der Grundkreis k die Begrenzungen liefern (vgl. § 18).

Als trizirkulare Sextik trifft jede dreispitzige Koppelkurve die uneigentliche Gerade bloß in den Kreispunkten. Mit k hat sie außer den Kreispunkten nur die Spitzen selbst gemein. In ihnen durchsetzt sie k nicht. Andernfalls wäre ja mindestens in einem Punkt S_i die Tangente t_i zugleich Grundkreistangente und dann entspräche S_i in der isogonalen Verwandtschaft $\mathfrak{W}$ bezüglich $\{S_i\}$ eine unendlich ferne Berührung mit s_i, was soeben ausgeschlossen wurde. Dies alles ergibt im Verein mit der Unüberschreitbarkeit der $\{s_i\}$, daß jeder Zweig der Kurve in einem der angegebenen zehn Gebiete enthalten ist. Befassen wir uns zuerst mit der Koppelkurve, die in einem der ins Unendliche reichenden projektiven Quadranten liegt, und übernehmen wir die Bezeichnung seiner Teile aus Fig. 11. Kein Zweig dieser Kurve kann sich in G_2 befinden. Ein solcher könnte nämlich nicht an jene Spitze herankommen, die zur Begrenzung von G_3 gehört und ein allenfalls vorhandener zweiter Zug müßte dem ersten vermittels $\mathfrak{W}$ entsprechen, demnach in $\mathfrak{W}(G_2) = G_2$ liegen, könnte also ebensowenig zu dieser Spitze gelangen. Hiermit erhalten wir den

Anordnungssatz. *Von den vier Koppelkurven mit denselben drei Spitzen sind mindestens drei zweiteilig: In den Gebieten außerhalb des Spitzendreiecks, aber innerhalb des Grundkreises, liegt je ein Kurvenzug; der zugehörige zweite Kurvenzug befindet sich immer in dem nicht benachbarten Gebiet desselben projektiven Quadranten, außerhalb des Dreiecks* (Fig. 13). *Die restlichen drei unbeschränkten Gebiete* (analog G_2 in Fig. 11) *bleiben leer. Im Inneren des Spitzendreiecks verläuft eine zweiteilige* (Fig. 14) *oder einteilige Koppelkurve* (Fig. 16); *den Übergang bilden rationale Kurven* (Fig. 15).

Man kann die Gebiete, auf die eine Koppelkurve Γ gemäß dem Anordnungssatz beschränkt ist, in folgender Weise noch mehr einengen.

Kommt der beschreibende Punkt eines der erzeugenden Getriebe mit einer Spitze S_i zur Deckung, so haben sich, wie wir wissen, die Seiten b_2, b_3 des Koppeldreiecks derart bewegt, daß sie in die Geraden der Arme m_3 und m_2 fallen. Daher erreicht der Abstand eines auf Γ wandernden Punktes von einem beliebigen Stegendpunkt in S_i ein absolutes Extrem.

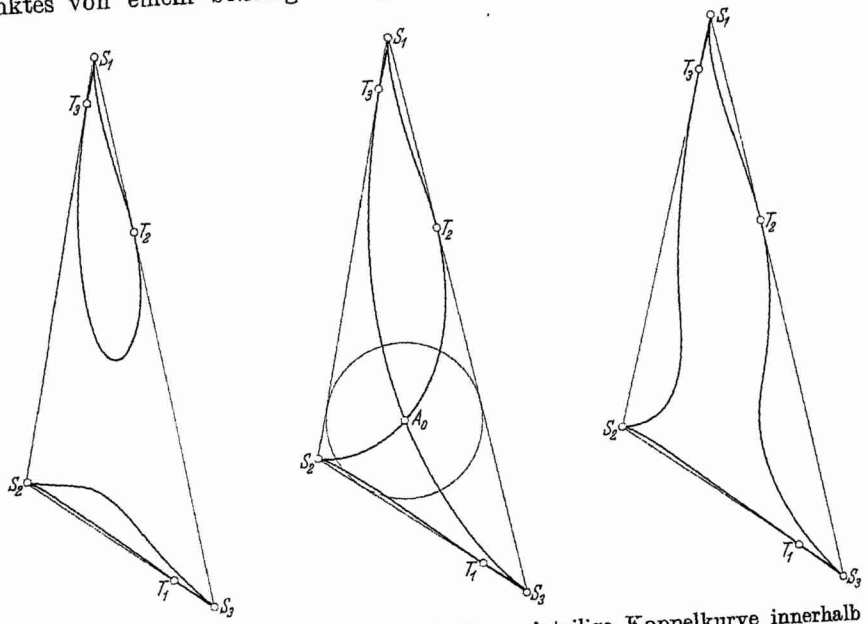

Fig. 14 bis 16. Zweiteilige bzw. rationale bzw. einteilige Koppelkurve innerhalb ihres Spitzendreiecks.

Also *liegen die reellen, nicht isolierten Punkte von Γ entweder außerhalb oder innerhalb des Kreises e_i, dessen Mittelpunkt F_i ist und der zugleich S_{i-1} und S_{i+1} trifft. Dasselbe gilt für den konzentrischen Kreis e_i^*, der durch S_i geht.*

Weil die reellen Züge von Γ zu allen drei Spitzen hingelangen, entscheidet für jeden einzelnen der Kreise $\{e_i\}$, $\{e_i^*\}$ die Lage einer mit ihm nicht inzidenten Spitze auch die Seite, auf welcher Γ verläuft. Jedenfalls kann man sagen:

Die reellen Züge von Γ finden im Ringstreifen zwischen e_i und e_i^* Platz.

Diese Regel gestattet fast immer, von den Γ im Anordnungssatz zugewiesenen Gebieten einen Teil fortzunehmen. Sie würde bloß dann versagen, wenn $\{S_i\}$ gleichseitig und Γ die Kurve innerhalb $\{S_i\}$ wäre.

Angenommen, e_i^* sei kein Nullkreis ($F_i \neq S_i$). Dann ist nicht schwer zu sehen:

An e_i^* tritt Γ außer in der Spitze S_i noch einmal heran, und zwar in einem Punkte T_i^* berührend.

Zeichnen wir das Koppelgetriebe mit dem Steg f_1 etwa in der Stellung, wenn der beschreibende Punkt nach S_2 kommt (Fig. 17). Dies ist also nicht die Hauptstellung des Getriebes (sondern die Stellung $\mathfrak{S}_2$ aus § 3). Wir lösen nun die gelenkige Verbindung bei B_3 und drehen den Arm m_3 in die bezüglich f_1 spiegelbildliche Lage m_3^*. Hierauf drehen wir das Koppeldreieck und den Arm m_2 gemeinsam um F_2 so lange, bis die Ecke B_3 des Koppeldreiecks das freie Ende von m_3^* trifft, worauf die Gelenkverbindung wiederhergestellt werden kann. Damit ist eine neue Stellung des Koppelgetriebes erreicht, in welcher der beschreibende Punkt eine von S_2 verschiedene Lage T_2^* auf e_2^* einnimmt. Denn nur für $F_2 = S_2$ fiele m_3^* mit m_3 zusammen, nämlich in die Gerade f_1. Weil e_2^* einzig die Spitze S_2 enthält, ist T_2^* keine Spitze, und da Γ den Kreis e_2^* nicht überschreiten kann, liegt in T_2^* Berührung vor.

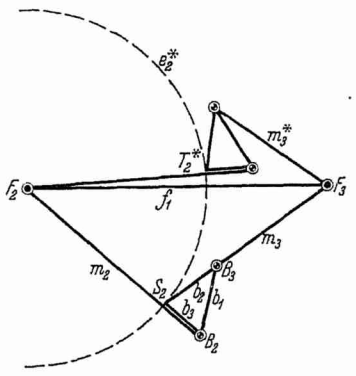

Fig. 17. Zwei Getriebestellungen; der beschreibende Punkt kommt in ihnen F_2 am nächsten.

§ 23.

Rationale dreispitzige Koppelkurven.

Wie der Anordnungssatz besagt, liegt eine rationale Koppelkurve mit drei Spitzen notwendig im Inneren ihres Spitzendreiecks $\{S_i\}$. Also ist A_0 Inkreismittelpunkt im engeren Sinn, befindet sich daher im Inneren des Dreiecks $\{A_i\}$ der Ankreismittelpunkte von $\{S_i\}$ und da A_0 der Höhenschnittpunkt in $\{A_i\}$ ist, muß $\{A_i\}$ und infolgedessen auch das zu $\{A_i\}$ ähnliche Brennpunktedreieck $\{F_i\}$ *spitzwinkelig* sein. Mithin ist auch das zu $\{F_i\}$ symmetrische Dreieck $S_1F_3F_2$ spitzwinkelig. Folglich hat das erzeugende Getriebe mit dem Steg f_1 (und ebenso jedes erzeugende Getriebe) in der Hauptstellung ein nicht überschlagenes Gelenkviereck (vgl. Fig. 3). Demnach gilt hier Gleichung (5) mit dem Pluszeichen.

Ändern wir bei einem solchen Gelenkviereck die Stablängen derart, daß die Längen der Koppel und eines Armes vertauscht werden[35]), so ist das neue Gelenkviereck ersichtlicherweise auch in einem Getriebe mit einer Kreislage (§ 5) enthalten. Die zugehörigen Dreiecke $S_1F_3F_2$ und $\{F_i\}$ sind zu den entsprechenden Dreiecken des ursprünglichen Getriebes ungleichsinnig ähnlich, weil in diesen Dreiecken durch Vertauschung zweier

[35]) Über diese Vertauschung bei allgemeinen Koppelgetrieben vgl. G. Kœnigs, Leçons de cinématique. Cinématique théorique, Paris 1897, S. 266.

Stablängen des Gelenkvierecks bloß die Reihenfolge der Winkel umgekehrt wird. Das geht aus den Gleichungen (1) und (3) in § 6 mit Rücksicht auf die Spitzwinkeligkeit hervor. Da eine dreispitzige Koppelkurve durch ihr Brennpunktedreieck eindeutig bestimmt ist (§ 9), bedeutet es somit keine wesentliche Einschränkung, wenn wir nun bei der Ermittlung rationaler Koppelkurven mit drei Spitzen voraussetzen, die Koppel sei nicht länger als die Arme.

Eine rationale Koppelkurve entsteht dann, wenn das erzeugende Getriebe eine *Verzweigungslage* einnehmen kann, d. h. eine Lage, in der die Arme und die Koppel mit der Geraden des Steges gleichzeitig inzidieren. Wird die Steglänge gleich Eins gesetzt (wie in § 6), so liefert die Verzweigungslage eine Gleichung von folgender Art für die Stablängen:

$$\pm b_1 \pm m_2 \pm m_3 = 1. \tag{9}$$

Umgekehrt reicht das Bestehen einer solchen Gleichung für das Zustandekommen einer Verzweigungslage hin.

Im Falle dreispitziger Koppelkurven ist der Steg die längste Seite des Gelenkvierecks (§ 5); bei rationalen Kurven ist daher gemäß unserer Annahme die Koppel die kürzeste oder eine kürzeste Viereckseite. Demnach kann (9) nur mit dieser Vorzeichenkombination[36]) bestehen:

$$\boxed{-b_1 + m_2 + m_3 = 1.} \tag{10}$$

Wir wollen diese Gleichung zunächst dazu verwenden, um die Konstruktion von Koppelgetrieben, die rationale dreispitzige Koppelkurven erzeugen, vollständig durchzuführen. Gegeben sei der Steg f_1 und der Koppelendpunkt B_2 in der Hauptstellung, also auf dem Kreis c mit f_1 als Durchmesser. Das andere Koppelende B_3 werde gesucht.

Wie (10) lehrt, muß $B_3F_3 - B_3B_2 = F_2F_3 - F_2B_2$ sein. Daher befindet sich B_3 auf der Hyperbel h, von der F_2 ein Punkt und B_2, F_3 die Brennpunkte sind; B_3 ist ein Restschnittpunkt des Kreises c mit dem F_2 enthaltenden Hyperbelast (Fig. 18). Weil c durch die Brennpunkte von h geht, sind *alle Schnittpunkte von c und h stets reell.*

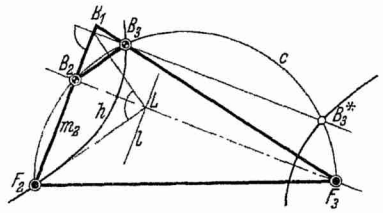

Fig. 18. Durchschlagendes Koppelgetriebe[37]) in der Hauptstellung.

Um nun B_3 zu finden, ziehe ich das Kreisbüschel heran, dessen Grundpunkte die Hyperbelbrennpunkte B_2, F_3 sind. Die Kreise des Büschels schneiden h nach je vier Punkten, die paarweise auf Parallelen zu B_2F_3 liegen. Somit sind diese parallelen Hyperbelsehnen einander durch

[36]) Die gleiche Normierung bei Morley[1]), S. 154.

[37]) Die zugehörige Koppelkurve zeigt Fig. 15 (im doppelten Maßstab).

eine algebraische Konstruktion zugeordnet, offenkundig in umkehrbar eindeutiger und involutorischer Weise. Sie bilden also[38]) eine quadratische Parallelstrahlinvolution i, welche auf der zum Brennpunkt B_2 polaren Leitlinie l der Hyperbel eine Punktinvolution I abschneidet, und zwar *die Involution bezüglich h konjugierter Punkte.* Die Minimalstrahlen durch B_2 berühren nämlich h in den konjugiert komplexen Schnittpunkten L', L'' von h und l. Jeder Minimalstrahl durch B_2 samt dem nicht parallelen Minimalstrahl durch F_3 ist ein zerfallener Kegelschnitt, der dem Kreisbüschel angehört. Daher sind L', L'' die Doppelpunkte von I, was mit der Behauptung gleichwertig ist.

Aus B_2 wird I durch eine Rechtwinkelinvolution projiziert. Mit deren Hilfe wäre es ein leichtes, zur Geraden $\| B_2F_3$ durch F_2 die in i zugeordnete Gerade, welche durch B_3 geht, zu zeichnen. Man kann aber noch eine kleine Vereinfachung mittels des Punktes L erzielen, in dem die Leitlinie l die Achse B_2F_3 trifft. Dieser Punkt ergibt sich als Schnitt von B_2F_3 mit der Tangente an h in F_2. Die Gerade des Armes m_2 wird von i nach einer zu I kongruenten Involution geschnitten, welche demnach aus L durch eine Rechtwinkelinvolution projiziert wird. Hiermit sind wir zu folgender Konstruktion gelangt:

Von den Halbierenden des Winkels $B_2F_2F_3$ schneidet eine die Strecke B_2F_3, und zwar in L. Dort errichte man auf F_2L die Senkrechte und ziehe durch deren Schnittpunkt mit m_2 die Parallele zu B_2F_3. Sie trifft den Kreis c in B_3 und B_3^*, wobei der näher an B_2 gelegene Punkt B_3 auf dem Hyperbelast durch F_2 liegt. Zu dem einen Koppelende B_2 hat sich somit *eindeutig* das andere ergeben. (Der Punkt B_3^* liefert ein Gelenkviereck, das aus dem eben ermittelten durch Festhalten der Stäbe f_1, m_2 und Vertauschen der übrigen entsteht. Dies führt, wie vorhin angemerkt wurde, zu nichts Neuem.)

Bei rationalen dreispitzigen Koppelkurven tritt zu den Spitzen ein weiterer, der außerordentliche Doppelpunkt hinzu. Weil der Steg jedes erzeugenden Getriebes, wie ebenfalls bereits erwähnt wurde, länger als die übrigen Seiten des Gelenkvierecks ist, kann dieses weder Parallelogramm, noch Deltoid, noch weniger Rhombus sein. Daher zerfällt die Koppelkurve nicht; sie enthält nebst den Spitzen und dem außerordentlichen Doppelpunkt keinen Doppelpunkt mehr.

In der Verzweigungslage des Gelenkvierecks, wenn es also in die Gerade f_1 zusammenklappt, trennen einander zufolge (10) die Gegeneckenpaare B_2, F_3 und B_3, F_2 des Gelenkvierecks nicht. Daher sind die Momentanpole für die Verzweigungslage, nämlich das zu beiden Gegen-

[38]) Vgl. L. Berzolari, Algebraische Transformationen und Korrespondenzen, Encyklop. math. Wiss. III C 11, S. 1803.

eckenpaaren harmonische Punktepaar, reell. Somit sind die Getriebe, die eine rationale dreispitzige Koppelkurve Γ erzeugen, beweglich und Γ besitzt einen reellen Teil. In der Verzweigungslage befindet sich der beschreibende Punkt im außerordentlichen Doppelpunkt. Jetzt ergibt der Satz über zugeordnete Getriebestellungen (§ 20), daß der außerordentliche Doppelpunkt ein Fixpunkt der isogonalen Verwandtschaft bezüglich des Spitzendreiecks $\{S_i\}$, also der Mittelpunkt eines Berührungskreises von $\{S_i\}$ ist[39]). Die Kurvennormalen in ihm gehen durch die Momentanpole für die Verzweigungslage und sind folglich reell. Der außerordentliche Doppelpunkt ist demnach nicht isoliert, woraus wir schließen, daß er, wie der ganze reelle Kurvenzug, im Inneren von $\{S_i\}$ liegt:

Der außerordentliche Doppelpunkt ist für $\{S_i\}$ der Inkreismittelpunkt im engeren Sinn (Fig. 15).

§ 24.

Ein Nomogramm.

Wir verschaffen uns nun eine Übersicht über die Gelenkvierecke aller Koppelgetriebe, die rationale dreispitzige Koppelkurven erzeugen.

Auch weiterhin sei die Steglänge $f_1 = 1$. Setzt man

$$-b_1 = x_1, \quad m_2 = x_2, \quad m_3 = x_3, \tag{11}$$

so nimmt die Gleichung (5), welche, wie bereits gesagt, im Falle rationaler Kurven mit dem Pluszeichen zu lesen ist, folgende Gestalt an:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2\,x_1 x_2 x_3 = 1. \tag{12}$$

An Stelle von (10) tritt:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1. \tag{13}$$

Werden die $\{x_i\}$ als Abstände eines Punktes von den Seiten eines gleichseitigen Dreiecks mit der Höhe Eins gedeutet, so ist (13) stets erfüllt und (12) ist die Gleichung einer Kubik Ξ. Diese hat, homogen geschrieben, die Form:

$$(x_1 + x_2 + x_3)\,(x_2 x_3 + x_3 x_1 + x_1 x_2) + x_1 x_2 x_3 = 0. \tag{14}$$

Die Konstante der Hesseschen Normalform der Kubik Ξ ist $\dfrac{5 + \sqrt[3]{100}}{5 - 2\sqrt[3]{100}}$; das Doppelverhältnis der Tangenten aus jedem ihrer Punkte hat u. a. den Wert $\frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})$.

Die Transformation $\{y_i = x_i + 1\}$ führt (14) in die Cayleysche Normalform

$$(y_1 + y_2 + y_3)^3 - 32\,y_1 y_2 y_3 = 0$$

---

[39]) Morley[1]), S. 156.

über, welche leicht erkennen läßt, daß Ξ eine „Dreieckskurve" ist, die innerhalb des Dreiecks $y_1 y_2 y_3 = 0$ der Wendeasymptoten einen ovalen Kurvenzug Ω besitzt, außerhalb einen aus drei hyperbelähnlichen Ästen bestehenden Kurvenzug[40]) (Fig. 19).

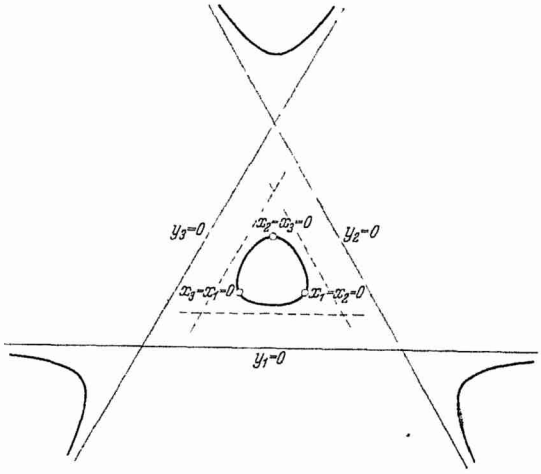

Fig. 19. Kubik nach Gleichung (14). (Gestrichelt: Inflexionsachsen.)

Mittels (11) ist also jedes erzeugende Getriebe einer rationalen dreispitzigen Koppelkurve auf einen Punkt von Ξ abgebildet. Weil aber b_1, m_2, m_3 als Stablängen positive Zahlen sind, kommt von der Kubik Ξ zunächst nur jener Bogen ${}^{c}\Omega$ des Ovals Ω in Betracht, der die Punkte $x_1 = x_2 = 0$ und $x_1 = x_3 = 0$ verbindet und $x_2 = x_3 = 0$ nicht enthält. Da für die in Rede stehenden Getriebe beispielsweise m_2 beliebig zwischen 0 und 1 gewählt werden kann, gilt umgekehrt:

Die Abstände eines jeden Punktes des Bogens ${}^{c}\Omega$ von den Koordinatenachsen $\{x_i = 0\}$ sind die Längen der Arme bzw. der Koppel des erzeugenden Gelenkvierecks einer dreispitzigen rationalen Koppelkurve, während die Steglänge gleich der Höhe des Koordinatendreiecks ist (Fig. 20).

Dabei ist die Reihenfolge, in der die ersten drei Längen den Armen und der Koppel zugewiesen werden, unerheblich, wie in § 23 auseinandergesetzt wurde. Aus Gründen der Symmetrie darf man von jedem Punkt des Ovals Ω ausgehen; Beschränkung auf den Teilbogen ${}^{c}\Omega$ ist bei der Anwendung

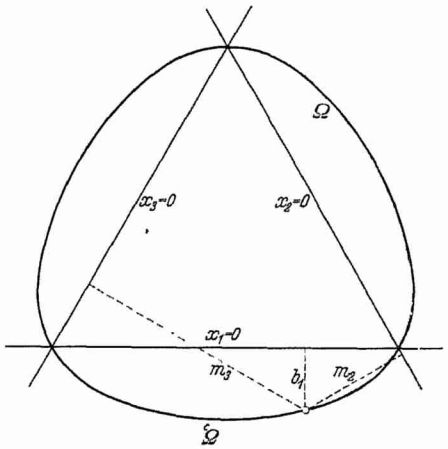

Fig. 20. Nomogramm der Gelenkvierecke aller erzeugenden Getriebe rationaler dreispitziger Koppelkurven. (Das Ablesebeispiel entspricht Fig. 18.)

[40]) Vgl. H. Wieleitner, Theorie der ebenen algebraischen Kurven höherer Ordnung (Sammlung Schubert 43), Leipzig 1905, S. 246.