Werk

Titel: Eine Erzeugende der Hermiteschen Polynome, deren Grundgebiet die Ebene ist

Autor: Koschmieder, Prof. Dr. L., Brünn (C.S.R.),

Ort: Berlin

Jahr: 1938

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0043|log35

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Eine Erzeugende der Hermiteschen Polynome, deren Grundgebiet die Ebene ist.

Von

Lothar Koschmieder in Brünn.

Die in der Form

$$(1) \qquad H_n(x) = (-1)^n \exp \frac{x^2}{2} \frac{d^n}{dx^n} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

darstellbaren Hermiteschen Polynome bringt der Ausdruck

$$\exp\left(s\,x - \frac{s^2}{2}\right) = \sum_n^{0,\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(x)$$

hervor[1]). Auf eine zweite wichtige Weise erzeugt sie die Mehlersche Formel

$$(2) \qquad \frac{1}{\sqrt{1-s^2}} \exp\left\{\frac{s}{2(1-s^2)}\,[2\,x\,X - s\,(x^2+X^2)]\right\} = \sum_n^{0,\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(x)\,H_n(X).$$

Watson hat sie kürzlich auf drei Arten bewiesen[2]).

Hier werde ich ein Gegenstück zu (2) in *zwei* Veränderlichen gewinnen. Es betrifft die Hermiteschen Polynome[3])

$$(3) \qquad H_{m\,n}(x,y) = (-1)^{m+n} \exp[\tfrac{1}{2}\,\varphi(x,y)] \frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m\,\partial y^n} \exp[-\tfrac{1}{2}\,\varphi(x,y)]$$

und die ihnen in der Ebene biorthogonal zugeordneten

$$(4) \qquad G_{m\,n}(x,y) = (-1)^{m+n} \exp[\tfrac{1}{2}\,\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})] \frac{\partial^{m+n}}{\partial \mathfrak{x}^m\,\partial \mathfrak{y}^n} \exp[-\tfrac{1}{2}\,\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})].$$

Hierbei ist

$$(5) \qquad \varphi(x,y) = a\,x^2 + 2\,b\,x\,y + c\,y^2, \quad a > 0, \quad c > 0, \quad \Delta = a\,c - b^2 > 0$$

eine entschieden positive quadratische Form,

$$(6) \qquad \mathfrak{x} = a\,x + b\,y, \quad \mathfrak{y} = b\,x + c\,y$$

---

[1]) Vgl. P. Appell und J. Kampé de Fériet, Fonctions hypergéométriques et hypersphériques. Polynomes d'Hermite (1926), S. 331. Ich führe dieses Werk mit A.-K. an.

[2]) G. N. Watson, Journal of the London Mathematical Society 8 (1933), S. 194—199. Die dortige Gestalt der Mehlerschen Formel geht in (2) über, wenn man dort $H_n(x)$ durch $2^{n/2} H_n(x\sqrt{2})$ ersetzt.

[3]) A.-K., S. 369—387.

und

$$\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) = \frac{c}{\Delta}\,\mathfrak{x}^2 - 2\,\frac{b}{\Delta}\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{y} + \frac{a}{\Delta}\,\mathfrak{y}^2 = \varphi(x, y) \tag{7}$$

die zu φ adjungierte Form. Die H_{mn}, G_{mn} werden von den Ausdrücken

$$\exp\left[p\,\mathfrak{x} + q\,\mathfrak{y} - \tfrac{1}{2}\,\varphi(p, q)\right] = \sum_{m,n}^{0,\infty} \frac{p^m}{m!}\,\frac{q^n}{n!}\,H_{mn}(x, y),$$

$$\exp\left[\mathfrak{p}\,x + \mathfrak{q}\,y - \tfrac{1}{2}\,\psi(\mathfrak{p}, \mathfrak{q})\right] = \sum_{m,n}^{0,\infty} \frac{\mathfrak{p}^m}{m!}\,\frac{\mathfrak{q}^n}{n!}\,G_{mn}(x, y)$$

erzeugt. Wie x, y seien weiterhin X, Y beliebig reell, s, t reell[4]).

Die erste der Mehlerschen Formel (2) *entsprechende Entwicklung lautet*, wie ich behaupte,

$$\begin{aligned}(8)\qquad &\sum_{m,n}^{0,\infty} \frac{s^m}{m!}\,\frac{t^n}{n!}\,G_{mn}(x, y)\,G_{mn}(X, Y)\\ &= \frac{\Delta}{\sqrt{(s\,t+\Delta)^2 - (c\,s + a\,t)^2}}\,\exp\left\{-\frac{1}{2}\,\frac{1}{(s\,t+\Delta)^2 - (c\,s+a\,t)^2}\right.\\ &\quad\cdot\left[s^2\,(c\,\Delta - a\,t^2)\,(x^2 + X^2) + t^2\,(a\,\Delta - c\,s^2)\,(y^2 + Y^2)\right.\\ &\quad - 2\,b\,s\,t\,(s\,t + \Delta)\,(x\,y + X\,Y) + 2\,b\,s\,t\,(c\,s + a\,t)\,(x\,Y + y\,X)\\ &\quad\left.\left. - 2\,s\,(\Delta^2 - b^2\,s\,t - a^2\,t^2)\,x\,X - 2\,t\,(\Delta^2 - c^2\,s^2 - b^2\,s\,t)\,y\,Y\right]\right\};\end{aligned}$$

sie gilt, wenn der Punkt $R\,(s, t)$ in dem den Ursprung $(s = 0,\ t = 0)$ enthaltenden Viereck $\mathfrak{h}$ verbleibt, das die jeweils im ersten, ..., vierten Quadranten verlaufenden Bögen der vier Hyperbeln

$$(9_1)\quad s\,t - c\,s - a\,t + \Delta = 0, \qquad (9_2)\quad s\,t - c\,s + a\,t - \Delta = 0,$$

$$(9_3)\quad s\,t + c\,s + a\,t + \Delta = 0, \qquad (9_4)\quad s\,t + c\,s - a\,t - \Delta = 0$$

durch ihre Schnittpunkte $(0, a^{-1}\Delta)$, $(-c^{-1}\Delta, 0)$, $(0, -a^{-1}\Delta)$, $(c^{-1}\Delta, 0)$ *bilden* (s. Fig. 1, $a = b = 2, c = 3$).

Ist die etwas umfängliche, aber vollkommen übersichtliche Formel (8) bewiesen, so folgt aus ihr ohne weiteres eine zweite, auf die H_{mn} bezügliche; denn man geht von den G_{mn} zu diesen über, indem man[5]) x, y durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$ (6), entsprechend X, Y durch

$$\mathfrak{X} = a\,X + b\,Y, \quad \mathfrak{Y} = b\,X + c\,Y \tag{10}$$

---

[4]) Ich unterlasse es hier, auch komplexe Werte dieser Größen in Betracht zu ziehen.

[5]) A.-K., S. 370.

und $c\Delta^{-1}$, $-b\Delta^{-1}$, $a\Delta^{-1}$ durch a, b, c ersetzt. Man erhält dabei aus (8) als *zweite der Formel* (2) *entsprechende Entwicklung*

$$(11)\qquad \sum_{m,n}^{0,\infty} \frac{s^m}{m!}\frac{t^n}{n!} H_{mn}(x,y) H_{mn}(X,Y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\Delta st+1)^2-(as+ct)^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{1}{(\Delta st+1)^2-(as+ct)^2}\right.$$

$$\cdot[s^2(a-c\Delta t^2)(\mathfrak{x}^2+\mathfrak{X}^2)+t^2(c-a\Delta s^2)(\mathfrak{y}^2+\mathfrak{Y}^2)$$

$$+2bst(\Delta st+1)(\mathfrak{x}\mathfrak{y}+\mathfrak{X}\mathfrak{Y})-2bst(as+ct)(\mathfrak{x}\mathfrak{Y}+\mathfrak{y}\mathfrak{X})$$

$$\left.-2s(1-b^2st-c^2t^2)\mathfrak{x}\mathfrak{X}-2t(1-a^2s^2-b^2st)\mathfrak{y}\mathfrak{Y}]\right\};$$

sie gilt in dem den Ursprung enthaltenden Viereck, das die Hyperbeln

(12_1) $\Delta st-as-ct+1=0$, (12_2) $\Delta st-as+ct-1=0$,

(12_3) $\Delta st+as+ct+1=0$, (12_4) $\Delta st+as-ct-1=0$

bilden (Fig. 2).

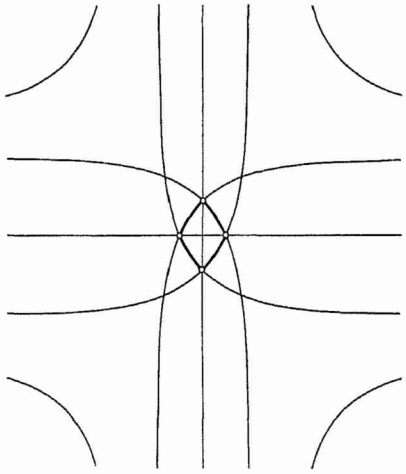

Fig. 1.

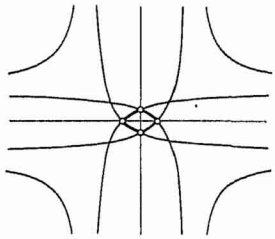

Fig. 2.

Um nun (8) herzuleiten, bedienen wir uns desselben Verfahrens wie Watson a. a. O.[2]), S. 198 f. beim dritten, ihm von G. H. Hardy mitgeteilten Beweise von (2). Hardy bezeichnet es als unwahrscheinlich, daß dieser auf der Integraldarstellung der Polynome (1) beruhende Beweis von (2) neu sei; es sei mir gestattet, zu bemerken, daß er sich in der Tat 1914 in einer Arbeit von Kapteyn[6]) findet.

[6]) W. Kapteyn, Verslag Amsterdam 22 (1914), S. 1063 f.

Die Integraldarstellung der Polynome (4) lautet[7])

$$(13)\qquad G_{mn}(x,y)=\frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\exp\left[\tfrac{1}{2}\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})\right](-i)^{m+n}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\tfrac{1}{2}\varphi(u,v)+i(\mathfrak{x}u+\mathfrak{y}v)\right]u^m v^n\,du\,dv.$$

Damit und mit dem entsprechenden Ausdruck der $G_{mn}(X,Y)$ bildet man die Summe

$$(14)\qquad G=\sum_{m,n}^{0,\infty}\frac{s^m}{m!}\frac{t^n}{n!}G_{mn}(x,y)\,G_{mn}(X,Y)$$

$$=\frac{\Delta}{4\pi^2}\exp\left[\tfrac{1}{2}\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y})+\tfrac{1}{2}\psi(\mathfrak{X},\mathfrak{Y})\right]\sum_{m,n}^{0,\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\Omega\,\omega_{mn}\,du\,dv\,dU\,dV,$$

wo kurz

$$\Omega(u,v,U,V)=\exp\left[-\tfrac{1}{2}\varphi(u,v)-\tfrac{1}{2}\varphi(U,V)+i(\mathfrak{x}u+\mathfrak{y}v+\mathfrak{X}U+\mathfrak{Y}V)\right],$$

$$\omega_{mn}(u,v,U,V)=(-1)^{m+n}\frac{s^m}{m!}\frac{t^n}{n!}u^m v^n U^m V^n.$$

Hier darf man die Reihenfolge von Integration und Summierung umkehren, wenn das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}|\Omega|\sum_{m,n}^{0,\infty}|\omega_{mn}|\,du\,dv\,dU\,dV$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\tfrac{1}{2}\varphi(u,v)-\tfrac{1}{2}\varphi(U,V)\right]\cdot\sum_{m,n}^{0,\infty}\frac{|s\,u\,U|^m}{m!}\frac{|t\,v\,V|^n}{n!}\,du\,dv\,dU\,dV$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\tfrac{1}{2}\left[\varphi(u,v)+\varphi(U,V)-2|s\,u\,U|-2|t\,v\,V|\right]\right\}du\,dv\,dU\,dV$$

konvergiert. Das ist aber der Fall, wenn die in der letzten eckigen Klammer enthaltene quadratische Form der vier Veränderlichen u, v, U, V, in der wir

$$(15)\qquad |s|=\sigma,\quad |t|=\tau$$

[7]) A.-K., S. 376. Die dortige Formel (37) hat eine von unserer (13) etwas abweichende Gestalt; um auf (13) zu kommen, ersetze man in der ersten Formel der dortigen Nr. CXXIII u durch $u-ix$, v durch $v-iy$ und führe statt x, y die Größen (6) ein. Dann bilde man die $G_{mn}(x,y)$ nach (4).

setzen, entschieden positiv ist; sie ist es, wenn[8]) die vier Hauptminoren ihrer Diskriminante[9])

$$D = \begin{vmatrix} a & b & -\sigma & 0 \\ b & c & 0 & -\tau \\ -\sigma & 0 & a & b \\ 0 & -\tau & b & c \end{vmatrix}$$

positiv sind. Ihre Ausrechnung führt zu den Bedingungen

(16) $a > 0$, (17) $ac - b^2 = \Delta > 0$, (18) $a\Delta - c\sigma^2 > 0$,

(19) $(\sigma\tau + \Delta)^2 - (c\sigma + a\tau)^2 > 0.$

Hiervon gelten (16), (17) nach (5). In $\mathfrak{h}$ (9) trifft (18) zu, weil dort $\sigma \leqq c^{-1}\Delta$, also

$$a\Delta - c\sigma^2 \geqq a\Delta - c^{-1}\Delta^2 = c^{-1}\Delta(ac - \Delta) = b^2 c^{-1}\Delta > 0$$

ist. Schließlich ist in $\mathfrak{h}$ auch (19) erfüllt; denn dort ist nach (9) im ersten und dritten Quadranten

$$(st + \Delta)^2 - (cs + at)^2 > 0,$$

im zweiten und vierten aber

$$(st - \Delta)^2 - (cs - at)^2 > 0.$$

Mithin ist in (14) die Reihenfolge der genannten Verfahren umkehrbar, und es gilt daher auch

(20) $$G = \frac{\Delta}{4\pi^2} \exp\left[\tfrac{1}{2}\psi(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}) + \tfrac{1}{2}\psi(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})\right] \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\, dv\, dU\, dV$$

$$\cdot \exp\left[-\tfrac{1}{2}\varphi(u, v) - \tfrac{1}{2}\varphi(U, V) - su\,U - tv\,V + i(\mathfrak{x}u + \mathfrak{y}v + \mathfrak{X}U + \mathfrak{Y}V)\right].$$

Jetzt führen wir der Reihe nach die vier Integrationen nach V, U, v, u durch, indem wir jedesmal die Formel[10]) benutzen

(21) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\alpha^2 + 2i\alpha\beta)\, d\alpha = \sqrt{\pi}\exp(-\beta^2).$$

Sie liefert für das Integral

$$J_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{c}{2}V^2 + iV[\mathfrak{Y} + i(tv + bU)]\right\} dV$$

$$= \sqrt{\frac{2}{c}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\mathsf{M}^2 + i\mathsf{M}\sqrt{\frac{2}{c}}[\mathfrak{Y} + i(tv + bU)]\right\} d\mathsf{M}$$

---

[8]) Vgl. G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie (1909), S. 230—239.

[9]) Ich schreibe D nur bei positiven Werten der Veränderlichen an; sind diese teilweise oder sämtlich negativ, so ergeben sich Bedingungen, die mit (16), (17), (18), (19) gleichfalls befriedigt sind.

[10]) Vgl. Watson [2]), S. 198.

mit $V = \sqrt{\frac{2}{c}}\,\mathsf{M}\,(c > 0$ nach (5)) den Wert

$$J_1 = \sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{2}{c}}\exp\left\{-\frac{1}{2c}\left[\mathfrak{Y} + i\,(tv + bU)\right]^2\right\};$$

daher wird aus (20)

$$(22)\qquad G = \frac{\Delta}{4\pi\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{c}}\exp\left[\frac{1}{2}\,\varphi\,(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + \frac{1}{2}\,\psi\,(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) - \frac{1}{2c}\,\mathfrak{Y}^2\right]$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} du\,dv\exp\left[-\frac{1}{2}\,\varphi\,(u,v) + \frac{1}{2c}\,t^2v^2 + i\left(\mathfrak{x}u + \mathfrak{y}v - \frac{1}{c}\,t\,\mathfrak{Y}\,v\right)\right]$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} dU\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(a - \frac{b^2}{c}\right)U^2 + i\,U\left[\mathfrak{X} - \frac{b}{c}\,\mathfrak{Y} + i\left(su - \frac{b}{c}\,tv\right)\right]\right\}.$$

Das letzte, nach U zu nehmende Integral ermittelt man nach (21) mit der Einsetzung $U = \sqrt{\frac{2c}{\Delta}}\,\Lambda$, in der $c\Delta^{-1} > 0$ nach (5), und mit Rücksicht auf (10) zu

$$J_2 = \sqrt{\frac{2c}{\Delta}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\Lambda^2 + i\Lambda\sqrt{\frac{2}{c\Delta}}\left[\Delta X + i\,(csu - btv)\right]\right\}d\Lambda$$
$$= \sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{2c}{\Delta}}\exp\left\{-\frac{1}{2c\Delta}\left[\Delta X + i\,(csu - btv)\right]^2\right\};$$

folglich vereinfacht sich (22) zu

$$(23)\qquad G = \frac{\sqrt{\Delta}}{2\pi}\exp\left[\frac{1}{2}\,\varphi\,(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + \frac{1}{2}\,\psi\,(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) - \frac{1}{2c}\,\mathfrak{Y}^2 - \frac{\Delta}{2c}\,X^2\right]$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} du\exp\left[-\frac{1}{2}\left(a - \frac{cs^2}{\Delta}\right)u^2 + i\,(\mathfrak{x} - sX)\,u\right]$$
$$\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} dv\exp\left\{-\frac{c\Delta - at^2}{2\Delta}\,v^2 + iv\left[\mathfrak{y} + \frac{bt}{c}\,X - \frac{t}{c}\,\mathfrak{Y} + ib\left(1 + \frac{st}{\Delta}\right)u\right]\right\}.$$

Unter dem letzten, nach v zu bildenden Integrale J_3 ist der Faktor von $-v^2$ in $\mathfrak{h}$ (9) entsprechend (18) positiv. Setzt man in J_3

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta}{c\Delta - at^2}}\,\mu,$$

so ergibt (21) mit Hilfe von (10)

$$J_3 = \sqrt{\frac{2\Delta}{c\Delta - at^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{-\mu^2 + i\mu\sqrt{\frac{2\Delta}{c\Delta - at^2}}\left[\mathfrak{y} - tY + i\,\frac{b}{\Delta}\,(\Delta + st)\,u\right]\right\}d\mu$$
$$= \sqrt{\pi}\,\sqrt{\frac{2\Delta}{c\Delta - at^2}}\exp\left\{-\frac{\Delta}{2\,(c\Delta - at^2)}\left[\mathfrak{y} - tY + i\,\frac{b}{\Delta}\,(\Delta + st)\,u\right]^2\right\};$$

mithin geht (23) über in

$$(24)\quad G = \frac{\Delta}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{c\Delta - at^2}} \exp\Big[\frac{1}{2}\psi(\mathfrak{x},\mathfrak{y}) + \frac{1}{2}\psi(\mathfrak{X},\mathfrak{Y}) - \frac{1}{2c}\mathfrak{Y}^2 - \frac{\Delta}{2c}X^2 - \frac{\Delta}{2(c\Delta - at^2)}(\mathfrak{y} - tY)^2\Big] \int_{-\infty}^{+\infty} du \exp\Big\{-\frac{1}{2}\Big[a - \frac{cs^2}{\Delta} - \frac{b^2(\Delta + st)^2}{\Delta(c\Delta - at^2)}\Big]u^2 + iu\Big[\mathfrak{x} - sX - b\frac{\Delta + st}{c\Delta - at^2}(\mathfrak{y} - tY)\Big]\Big\}.$$

In dem jetzt noch verbliebenen Integrale J_4 bringt man die erste eckige Klammer leicht auf die Gestalt

$$\frac{(\Delta + st)^2 - (cs + at)^2}{c\Delta - at^2}$$

und findet sie positiv; denn von dem Nenner wurde dies bei J_3 vermerkt, und der Zähler ist entweder gleich der linken Seite von (19), oder er ist gleich

$$(\Delta - \sigma\tau)^2 - (c\sigma - a\tau)^2 = (\Delta + \sigma\tau)^2 - (c\sigma + a\tau)^2 + 4b^2\sigma\tau.$$

Wir setzen in J_4

$$u = \frac{\sqrt{2}\sqrt{c\Delta - at^2}}{\sqrt{(\Delta + st)^2 - (cs + at)^2}}\lambda$$

und wenden (21) an; dann erhalten wir

$$J_4 = \sqrt{\pi}\frac{\sqrt{2}\sqrt{c\Delta - at^2}}{\sqrt{(\Delta + st)^2 - (cs + at)^2}} \cdot \exp\Big\{-\frac{1}{2}\frac{c\Delta - at^2}{(\Delta + st)^2 - (cs + at)^2}\Big[\mathfrak{x} - sX - b\frac{\Delta + st}{c\Delta - at^2}(\mathfrak{y} - tY)\Big]^2\Big\}.$$

Tragen wir diesen Wert in (24) ein, so ergibt sich bei Beachtung von (7)

$$G = \frac{\Delta}{\sqrt{(\Delta + st)^2 - (cs + at)^2}} \exp\Big\{\frac{1}{2}\varphi(x,y) + \frac{1}{2}\varphi(X,Y) - \frac{1}{2c}(bX + cY)^2 - \frac{\Delta}{2c}X^2 - \frac{\Delta}{2(c\Delta - at^2)}(bx + cy - tY)^2 - \frac{1}{2[(\Delta + st)^2 - (cs + at)^2](c\Delta - at^2)}[(\Delta^2 - b^2st - a^2t^2)x - bt(cs + at)y - s(c\Delta - at^2)X + bt(\Delta + st)Y]^2\Big\}.$$

Wenn man den Inhalt der geschweiften Klammer als eine quadratische Form der vier Veränderlichen x, y, X, Y schreibt, so findet man als deren Vorzahlen durch einfachste Rechnung gerade die in (8) angegebenen Werte.

Die Formeln (8), (11) lassen sich in der Funktionalrechnung verwerten, wie ich ein andermal darzulegen hoffe.

(Eingegangen am 29. Juni 1937.)