

## Werk

**Titel:** II. Abschnitt - Kreiserbewegungen.

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1938

**PURL:** [https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020\\_0043|log19](https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0043|log19)

## Kontakt/Contact

[Digizeitschriften e.V.](#)  
SUB Göttingen  
Platz der Göttinger Sieben 1  
37073 Göttingen

✉ [info@digizeitschriften.de](mailto:info@digizeitschriften.de)

c) Die asymptotischen Lösungen zweiter Art sind als formal berechenbar nachgewiesen. Ein Konvergenzbeweis für sie findet sich aber nicht direkt in der Literatur, sondern erfordert längere Ausführungen. Die Konvergenzfrage soll daher hier offen und einer späteren Untersuchung vorbehalten bleiben. Es ist ja bekannt, daß man in den Anwendungen der Mechanik vielfach mit Reihen arbeitet, deren Konvergenzverhalten unbekannt ist, und daß man unter Umständen sogar divergente Reihen verwerten kann.

## II. Abschnitt.

### Kreiselbewegungen.

#### § 3.

#### Die kanonischen Gleichungen des Kreisels.

Im II. Abschnitt handelt es sich darum, die allgemeinen Entwicklungen des I. Abschnitts auf das Kreiselproblem anzuwenden. Zu dem Zweck soll es in diesem Paragraphen in der verlangten kanonischen Form dargestellt werden.

#### 1. Berechnung von $H$ .

Als Koordinaten  $q_k$  für die Lage des Körpers im Raum verwenden wir die Eulerschen Winkel  $\vartheta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  (Fig. 1). Sie legen die Lage des körperfesten Achsenkreuzes  $(x_1, y_1, z_1)$  der Hauptträgheitsachsen im Aufhängepunkt  $O$  gegen ein raumfestes System  $(x_2, y_2, z_2)$  mit lotrechter  $z_2$ -Achse fest. Die Variablen  $p_k$  sind dann, wie sich sogleich zeigen wird, die Komponenten des Drehimpulsvektors, und zwar  $p_1$  die Komponente  $p_\vartheta$  in der Knotenlinie,  $p_2$  die Komponente  $p_\varphi$  in der  $z_1$ -Achse und  $p_3$  die Komponente  $p_\psi$  in der lotrechten  $z_2$ -Achse. Wir legen deshalb bei jeder Bezugnahme auf den I. Abschnitt die Zuordnungen

$$\begin{aligned} q_1 &= \vartheta, & q_2 &= \varphi, & q_3 &= \psi, \\ p_1 &= p_\vartheta, & p_2 &= p_\varphi, & p_3 &= p_\psi \end{aligned}$$

zugrunde.

Im körperfesten System hat die Lotlinie die Richtungscos<sup>13)</sup>

$$(43) \quad \begin{cases} x = \sin \vartheta \sin \varphi, \\ y = \sin \vartheta \cos \varphi, \\ z = \cos \vartheta \end{cases}$$

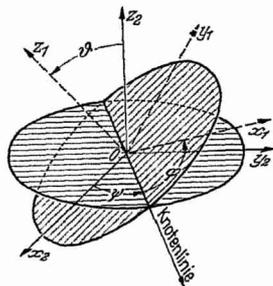


Fig. 1. Eulersche Winkel.

<sup>13)</sup> Vgl. z. B. F. Klein u. A. Sommerfeld, Über die Theorie des Kreisels, Leipzig 1897, S. 19.

und der Vektor der Winkelgeschwindigkeit die Komponenten<sup>14)</sup>

$$(44) \quad \begin{cases} p = \dot{\psi} \sin \vartheta \sin \varphi + \dot{\vartheta} \cos \varphi, \\ q = \dot{\psi} \sin \vartheta \cos \varphi - \dot{\vartheta} \sin \varphi, \\ r = \dot{\psi} \cos \vartheta + \dot{\varphi}. \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit  $A, B, C$  die Hauptträgheitsmomente für den Stützpunkt  $O$ , mit  $\xi, \eta, \zeta$  die Koordinaten des Schwerpunkts im körperfesten System, multipliziert mit dem Gewicht des Körpers, so ist die potentielle Energie

$$(45) \quad U = \xi \sin \vartheta \sin \varphi + \eta \sin \vartheta \cos \varphi + \zeta \cos \vartheta$$

und die kinetische Energie

$$(46) \quad T = \frac{1}{2} [A p^2 + B q^2 + C r^2],$$

wo noch (44) einzutragen ist. Daraus berechnen wir die Hamiltonfunktion des Kreisels. Es ist

$$(47) \quad \begin{cases} p_{\vartheta} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\vartheta}} = A p \cos \varphi - B q \sin \varphi, \\ p_{\varphi} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C r, \\ p_{\psi} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A p \sin \vartheta \sin \varphi + B q \sin \vartheta \cos \varphi + C r \cos \vartheta, \end{cases}$$

worin man leicht die auf S. 76 bezeichneten Impulskomponenten erkennt. Auflösung von (47) nach  $p, q, r$  und Einsetzen dieser Größen in (46) liefert nach einigen Zwischenrechnungen die Hamiltonfunktion

$$(48) \quad \begin{aligned} H &= T + U \\ &= H_{11} p_{\vartheta}^2 + 2 H_{12} p_{\vartheta} p_{\varphi} + H_{22} p_{\varphi}^2 + 2 H_{13} p_{\vartheta} p_{\psi} + 2 H_{23} p_{\varphi} p_{\psi} \\ &\quad + H_{33} p_{\psi}^2 + U \end{aligned}$$

mit den Koeffizienten

$$(49) \quad \begin{cases} H_{11} = \frac{1}{2A} \cos^2 \varphi + \frac{1}{2B} \sin^2 \varphi, \\ H_{12} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) \frac{\sin \varphi \cos \varphi \cos \vartheta}{\sin \vartheta}, \\ H_{22} = \frac{1}{2A} \cdot \frac{\sin^2 \varphi \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \frac{1}{2B} \cdot \frac{\cos^2 \varphi \cos^2 \vartheta}{\sin^2 \vartheta} + \frac{1}{2C}, \\ H_{13} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{\sin \vartheta}, \\ H_{23} = -\frac{\cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \left( \frac{1}{2A} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2B} \cos^2 \varphi \right), \\ H_{33} = \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \left( \frac{1}{2A} \sin^2 \varphi + \frac{1}{2B} \cos^2 \varphi \right). \end{cases}$$

<sup>14)</sup> Klein—Sommerfeld, a. a. O. S. 45.

Das Problem hat damit die Form (1).  $\psi$  ist die zyklische Koordinate und  $p_\psi = \text{const}$  das Flächenintegral, das aussagt, daß die Vertikalkomponente des Drehimpulsvektors konstant bleibt.

Nach § 1, Ziffer 1 hat man, um zu der Form (4) zu gelangen,  $H$  nach  $\vartheta' = \vartheta - \vartheta_0, \dots, p'_\varphi = p_\varphi - p_{\varphi_0}$  zu entwickeln. Wir verschieben die Bestimmung der Konstanten  $\vartheta_0, \varphi_0, p_{\vartheta_0}, p_{\varphi_0}$  auf Ziffer 2 und lassen sogleich die Entwicklungen von  $H_{kl}$  und  $U$  folgen. Mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} a &= \sin \vartheta_0, & c &= \sin \varphi_0, \\ b &= \cos \vartheta_0, & d &= \cos \varphi_0. \end{aligned}$$

findet man unter der Voraussetzung  $\vartheta_0 \neq 0, k\pi$  bis zu den Gliedern 3. Grades

$$(50) \left\{ \begin{aligned} H_{11} &= \frac{d^2}{2A} + \frac{c^2}{2B} - \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)cd\varphi' + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)(c^2 - d^2)\varphi'^2 \\ &\quad + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)cd\varphi'^3 + \dots \\ H_{12} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)\left[\frac{bcd}{a} - \frac{cd}{a^2}\vartheta' + \frac{b}{a}(d^2 - c^2)\varphi' + \frac{bcd}{a^3}\vartheta'^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{d^2 - c^2}{a^2}\vartheta'\varphi' - 2\frac{bcd}{a}\varphi'^2 - cd\left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}\right)\vartheta'^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{a^3}(d^2 - c^2)\vartheta'^2\varphi' + 2\frac{cd}{a^2}\vartheta'\varphi'^2 + \frac{2}{3}\frac{b}{a}(c^2 - d^2)\varphi'^3 + \dots\right] \\ H_{22} &= \frac{1}{2C} + \frac{b^2}{2a^2}\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right) - \frac{b}{a^3}\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right)\vartheta' + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\frac{b^2cd}{a^3}\varphi' \\ &\quad + \frac{1}{2a^2}\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right)\left(1 + 3\frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'^2 - 2\frac{bcd}{a^3}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\vartheta'\varphi' \\ &\quad + \frac{b^2}{2a^2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)(d^2 - c^2)\varphi'^2 - 2\frac{b}{a}\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right)\left(\frac{2}{3} + \frac{5}{3}\frac{b^2}{a^2} + \frac{b^4}{a^4}\right)\vartheta'^3 \\ &\quad + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\frac{cd}{a^3}\left(1 + 3\frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'^2\varphi' - \frac{b}{a^3}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)(d^2 - c^2)\vartheta'\varphi'^2 \\ &\quad - \frac{2}{3}\frac{b^3}{a^2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)cd\varphi'^3 + \dots \\ H_{13} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\left[\frac{cd}{a} - \frac{bcd}{a^2}\vartheta' + \frac{1}{a}(d^2 - c^2)\varphi' + \frac{cd}{a}\left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{b}{a^2}(d^2 - c^2)\vartheta'\varphi' - 2\frac{cd}{a}\varphi'^2 - \frac{bcd}{a^3}\left(\frac{5}{6} + \frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'^3 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{a}(d^2 - c^2)\left(\frac{1}{2} + \frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'^2\varphi' + 2\frac{bcd}{a^2}\vartheta'\varphi'^2 + \frac{2}{3a}(c^2 - d^2)\varphi'^3 + \dots\right] \\ H_{23} &= -\frac{b}{2a^2}\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right) + \frac{1}{2a}\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right)\left(1 + 2\frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta' \\ &\quad - \frac{bcd}{a^3}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\varphi' - \frac{b}{2a^2}\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right)\left(\frac{5}{2} + 3\frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'^2 \\ &\quad + \frac{cd}{a}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\left(1 + 2\frac{b^2}{a^2}\right)\vartheta'\varphi' - \frac{b}{2a^2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)(d^2 - c^2)\varphi'^2 \\ &\quad + \frac{1}{2a}\left(\frac{5}{6} + \frac{14}{3}\frac{b^2}{a^2} + 4\frac{b^4}{a^4}\right)\left(\frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B}\right)\vartheta'^3 - \left(\frac{5}{2} + 3\frac{b^2}{a^2}\right)\frac{bcd}{a^2}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\vartheta'^2\varphi' \\ &\quad + \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\left(1 + 2\frac{b^2}{a^2}\right)(d^2 - c^2)\vartheta'\varphi'^2 + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)\frac{bcd}{a^2}\varphi'^3 + \dots \end{aligned} \right.$$

$$(50) \left\{ \begin{aligned} H_{33} &= \frac{1}{2a^2} \left( \frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B} \right) - \frac{b}{a^3} \left( \frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B} \right) \vartheta' + \frac{cd}{a^2} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \varphi' \\ &+ \frac{1}{2a^2} \left( 1 + 3 \frac{b^2}{a^2} \right) \left( \frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B} \right) \vartheta'^2 - 2 \frac{bcd}{a^3} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \vartheta' \varphi' \\ &+ \frac{1}{2a^2} (d^2 - c^2) \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \varphi'^2 - 2 \frac{b}{a^3} \left( \frac{c^2}{A} + \frac{d^2}{B} \right) \left( \frac{2}{3} + \frac{b^2}{a^2} \right) \vartheta'^3 \\ &+ \frac{cd}{a^2} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \left( 1 + 3 \frac{b^2}{a^2} \right) \vartheta'^2 \varphi' - \frac{b}{a^3} (d^2 - c^2) \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \vartheta' \varphi'^2 \\ &- \frac{2cd}{3a^2} \left( \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \varphi'^3 + \dots \\ U &= -\frac{1}{2} (ac\xi + ad\eta + b\zeta) \vartheta'^2 + b(d\xi - c\eta) \vartheta' \varphi' - \frac{a}{2} (c\xi + d\eta) \varphi'^2 \\ &- \frac{1}{6} (bc\xi + bd\eta - a\zeta) \vartheta'^3 - \frac{a}{2} (d\xi - c\eta) \vartheta'^2 \varphi' \\ &- \frac{b}{2} (c\xi + d\eta) \vartheta' \varphi'^2 - \frac{a}{6} (d\xi - c\eta) \varphi'^3 + \dots \end{aligned} \right.$$

$H$  bekommt ferner nach (3) und (1) die Gestalt

$$(51) \quad \begin{aligned} H &= H_{11} p_{\vartheta}^2 + 2 H_{12} p_{\vartheta}' p_{\varphi}' + H_{22} p_{\varphi}'^2 \\ &+ 2 p_{\vartheta}' (H_{11} p_{\vartheta 0} + H_{12} p_{\varphi 0} + H_{13} p_{\psi}) \\ &+ 2 p_{\varphi}' (H_{12} p_{\vartheta 0} + H_{22} p_{\varphi 0} + H_{23} p_{\psi}) \\ &+ H_{11} p_{\vartheta 0}^2 + 2 H_{12} p_{\vartheta 0} p_{\varphi 0} + H_{22} p_{\varphi 0}^2 + 2 H_{13} p_{\vartheta 0} p_{\psi} \\ &+ 2 H_{23} p_{\varphi 0} p_{\psi} + H_{33} p_{\psi}^2 + U. \end{aligned}$$

Durch (50) und (51) sind die Koeffizienten der Entwicklung (4) unmittelbar gegeben.

## 2. Die stationären Bewegungen.

Die stationären Bewegungen des allgemeinen Kreisels sind nach §1, Ziffer 1 durch konstante Werte  $\vartheta_0$ ,  $\varphi_0$ ,  $p_{\vartheta 0}$ ,  $p_{\varphi 0}$  und durch  $\psi_0 = \omega t + c'$  charakterisiert. Fig. 1 lehrt, daß dann der Körper eine permanente Drehung um die Lotlinie ausführt, wobei also der Vektor der Winkelgeschwindigkeit im Raum und im Körper nach Größe und Richtung konstant bleibt. Diese Drehungen sind schon längst von Staude<sup>15)</sup> entdeckt und schon vielfach nach ihren dynamischen Eigenschaften untersucht worden. Doch dürfte es nicht überflüssig sein, in Kürze den Weg anzugeben, auf dem man die Drehungen aus den kanonischen Gleichungen auffinden kann.

Die Gleichungen der stationären Bewegungen lauten

$$(52) \quad \left( \frac{\partial H}{\partial p_{\vartheta}} \right)_0 = 0, \quad \left( \frac{\partial H}{\partial p_{\varphi}} \right)_0 = 0, \quad \left( \frac{\partial H}{\partial \vartheta} \right)_0 = 0, \quad \left( \frac{\partial H}{\partial \varphi} \right)_0 = 0$$

<sup>15)</sup> O. Staude, Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um einen festen Punkt, Journ. f. reine u. angew. Math. 113 (1894), S. 318.

und sind durch Ableitung von (48) zu bilden. Der Index 0 bedeutet, daß es sich um die Koordinaten einer stationären Bewegung handelt. Es wäre aussichtslos, (52) nach  $\vartheta_0, \varphi_0, p_{\vartheta_0}, p_{\varphi_0}$  explizit auflösen zu wollen; man kann aber folgendermaßen zum Ziel kommen: man setze überall in (52) für die Impulse die Werte (47) und führe dann die Größen (43) ein, letzteres nötigenfalls durch Erweitern mit  $\sin \vartheta_0$ . Dadurch entstehen aus (52) gewisse Gleichungen zwischen  $x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0$ . Durch Ausmultiplizieren und Zusammenfassen geht die erste davon über in

$$p_0 y_0 - q_0 x_0 = 0.$$

Daraus folgern wir

$$(53 \text{ a}) \quad p_0 = \omega x_0, \quad q_0 = \omega y_0$$

mit dem Proportionalitätsfaktor  $\omega$ . Die zweite Gleichung (52) wird

$$x_0 (p_0 z_0 - r_0 x_0) + y_0 (q_0 z_0 - r_0 y_0) = 0$$

oder mit (53 a)

$$(53 \text{ b}) \quad r_0 = \omega z_0.$$

Man sieht jetzt aus (53), daß  $\omega$  den Betrag des lotrechten Vektors der Winkelgeschwindigkeit darstellt, was mit der leicht zu verifizierenden Beziehung  $\dot{\psi}_0 = \frac{\partial H}{\partial p_\psi} = \omega$  im Einklang steht. Die dritte Gleichung (52) geht über in

$$(54) \quad x_0 \{ (A - C) x_0 z_0 \omega^2 + \zeta x_0 - \xi z_0 \} + y_0 \{ (B - C) y_0 z_0 \omega^2 + \zeta y_0 - \eta z_0 \} = 0$$

und die vierte in

$$(55 \text{ a}) \quad (A - B) x_0 y_0 \omega^2 - \xi y_0 + \eta x_0 = 0.$$

Multiplizieren wir (54) mit  $x_0$ , (55 a) mit  $y_0 z_0$  bzw. (54) mit  $y_0$ , (55 a) mit  $x_0 z_0$  und addieren jeweils, so kommt

$$(55 \text{ b}) \quad \begin{cases} (C - A) x_0 z_0 \omega^2 + \xi z_0 - \zeta x_0 = 0, \\ (B - C) y_0 z_0 \omega^2 + \zeta y_0 - \eta z_0 = 0. \end{cases}$$

Wir sind so in (55) zu den bekannten Eulerschen Kreisgleichungen für permanente Drehungen gelangt.

Die ganze Rechnung setzt ebenso wie die Aufstellung der Entwicklungen (50)  $\vartheta_0 \neq 0, k\pi$  voraus. Das bedeutet, daß die  $z_1$ -Achse nie Drehachse sein darf. Man muß also, falls eine der Hauptträgheitsachsen Drehachse werden kann (s. unten), die Achsen des  $x_1 y_1 z_1$ -Systems so bezeichnen, daß diese Hauptträgheitsachse nicht die  $z_1$ -Achse ist.

Die Verteilung der Drehachsen im Körper erkennt man aus der Gleichung

$$(56) \quad (B - C) y_0 z_0 \xi + (C - A) x_0 z_0 \eta + (A - B) x_0 y_0 \zeta = 0,$$

die aus (55) durch Multiplikation mit bzw.  $\xi, \eta, \zeta$  und Addition folgt. Sie stellt in den Variablen  $x_0, y_0, z_0$  einen körperfesten Kegel, den

Staudeschen Kegel, dar, auf dem jede Drehachse liegt. Auf den Drehsinn kommt es bei der Bewegung nicht an, weil in (55) nur  $\omega^2$  vorkommt. Dagegen darf jeweils nur die eine Halbachse nach oben gerichtet werden, für die  $\omega^2$  aus (55) als positiver Wert folgt. Fällt eine Drehachse in eine Hauptträgheitsachse, die den Schwerpunkt nicht trägt, so wird  $\omega = \infty$ . Diesen Fall schließen wir aus.

Auf die weiteren Eigenschaften der Staudeschen Drehungen können wir nicht eingehen und merken nur noch einen Sonderfall an:

Eine Drehachse heißt symmetrisch<sup>16)</sup>, wenn sie in eine Hauptträgheitsachse fällt, auf der auch der Schwerpunkt liegt.  $\omega$  bleibt dann nach (55) beliebig. Werden auch noch die zwei Hauptträgheitsmomente um die beiden anderen Achsen gleich, so handelt es sich um die aufrechte Drehung des symmetrischen schweren Kreisels.

### 3. Die charakteristische Gleichung.

Bestimmend für die Bewegungsform in der Nähe einer bestimmten Staudeschen Drehung sind die zu dieser Drehung gehörigen Wurzeln der charakteristischen Gleichung (7). Sie hat (nach Multiplikation mit einer beliebigen Konstanten  $g_0 > 0$ ) die Gestalt

$$(57) \quad g_0 \varrho^4 + g_1 \varrho^2 + g_2 = 0.$$

Um einen Überblick über die möglichen Bewegungen eines Körpers zu bekommen, sollte man die Bereiche auf dem Staudeschen Kegel angeben, die von den Achsen in den früher eingeführten Fällen 1 bis 4 ausgefüllt werden. Folgende Tabelle gibt die Bedingungen für das Eintreten der vier Fälle an:

	1. Fall	2. Fall	3. Fall	4. Fall
(58)	$g_1 < 0$	$g_1 \equiv 0$	$g_1 \equiv 0$	$g_1 > 0$
	$g_2 > 0$	$g_2 > 0$	$g_2 < 0$	$g_2 > 0$
	$k \equiv g_1^2 - 4g_0g_2 > 0$	$k \equiv g_1^2 - 4g_0g_2 < 0$	$k \equiv g_1^2 - 4g_0g_2 > 0$	$k \equiv g_1^2 - 4g_0g_2 > 0$

Die Aufgabe, damit allgemein die verschiedenen Achsenbereiche zu bestimmen, erscheint bei näherer Betrachtung als praktisch unlösbar. Doch gelingt es, im Anschluß an eine Arbeit von R. Grammel<sup>17)</sup> durch Umkehrung der Fragestellung eine Antwort zu geben.

<sup>16)</sup> Nach R. Grammel, Die Stabilität der Staudeschen Kreiselbewegungen, Mathem. Zeitschr. 6 (1920), S. 124, § 2.

<sup>17)</sup> Fußnote 16).

Dort wird auf Grund der Theorie der kleinen Schwingungen die charakteristische Gleichung der Eulerschen Kreisgleichungen ebenfalls in der Form (57) aufgestellt. Dabei finden sich unter der Voraussetzung

$$A \neq B \neq C \neq A, \quad x_0 \neq 0, \quad y_0 \neq 0, \quad z_0 \neq 0$$

die Koeffizienten<sup>18)</sup>

$$(59) \quad \begin{cases} g_0 = A B C, \\ g_1 = a_1 \xi + b_1 \eta + c_1 \zeta, \\ g_2 = a_2 \eta \zeta + b_2 \zeta \xi + c_2 \xi \eta \end{cases}$$

mit den Abkürzungen

$$a_1 = \frac{y_0^3}{x_0} \frac{B}{(A-C)} \{(B-C)^2 + A(3C-2B)\} + \frac{z_0^3}{x_0} \frac{C}{(A-B)} \{(B-C)^2 + A(3B-2C)\},$$

$$a_2 = \frac{x_0^3}{y_0 z_0} \{A + 3y_0^2(A-B) + 3z_0^2(A-C)\}.$$

$b_1$  und  $c_1$  bzw.  $b_2$  und  $c_2$  entstehen aus  $a_1$  bzw.  $a_2$  durch zyklische Vertauschung von  $x_0, y_0, z_0$ ;  $A, B, C$ . Sonderfälle liefern andere Ausdrücke, auf die wir an gegebener Stelle hinweisen.

Man kann durch eine elementare, allerdings ziemlich mühsame Rechnung direkt nachweisen, daß (7) dieselben Koeffizienten (59) besitzt, wenn man vermittels (43), (47), (53) und (55) überall  $x_0, y_0, z_0$  einführt. Einfacher schließt man es indirekt: Es ist leicht durch Beispiele zu belegen, daß es überhaupt Wurzeln von (7) gibt, die nicht die ausgeschlossenen Beziehungen (17) erfüllen (vgl. S. 96, Zahlentafel 1); wir besitzen damit also nach Abschnitt I exakte Lösungen der kanonischen Gleichungen. Aus einer solchen läßt sich nach (43), (47) auch eine exakte Lösung der Eulerschen Gleichungen in Form unendlicher Reihen bilden; deren Glieder 1. Grades erfüllen also die Variationsgleichungen der Eulerschen Gleichungen samt ihrer charakteristischen Gleichung (57), (59). Da man aber den Schluß für alle Lösungen in der Nachbarschaft der einen wiederholen kann, müssen die Koeffizienten der zwei charakteristischen Gleichungen als Funktionen von  $A, B, C, \xi, \eta, \zeta, x_0, y_0, z_0$  übereinstimmen.

Die Wendung, die Grammel dem Problem gibt, besteht nun darin, daß er in der Gleichung (56) des Staudeschen Kegels nicht mehr  $x_0, y_0, z_0$ , sondern  $\xi, \eta, \zeta$  als laufende Koordinaten auffaßt, somit statt eines einzigen eine ganze Schar von Körpern betrachtet. (56) stellt dann nicht mehr einen Kegel, sondern eine die lotrechte Drehachse enthaltende Nullpunktsebene dar, auf der der Schwerpunkt wandern kann und auf der wir die verschiedenen Bereiche der Schwerpunktslagen aufzusuchen haben, die nach (58) zu den Fällen 1 bis 4 führen.

<sup>18)</sup> R. Grammel, a. a. O. Gl. (18) bis (20).

Wir stellen zu dem Zweck fest, daß die Gleichung  $g_1 = 0$  nach (59) ebenfalls eine Ebene durch den Nullpunkt darstellt, ferner  $g_2 = 0$  und  $k \equiv g_1^2 - 4g_0g_2 = 0$  zwei Nullpunktskegel 2. Ordnung, von denen der letztere den ersteren längs dessen reellen oder imaginären Schnittgeraden mit der Ebene  $g_1 = 0$  berührt. Die konvexe Seite der Kegel wird als Außenraum, die konkave als Innenraum bezeichnet. Unsere Aufgabe ist, die Geraden aufzusuchen, nach denen die Schwerpunktschneidebene (56) von diesen drei Gebilden geschnitten wird, in den Zwischenfeldern festzustellen, ob hier  $g_1$ ,  $g_2$  und  $k$  positiv oder negativ ausfallen und danach die Einteilung der Felder in die Bereiche der Fälle 1 bis 4 vorzunehmen.

Die angeführte Arbeit erlaubt die Lösung dieser Aufgabe vollends ohne alle Rechnung anzugeben; wir stellen deshalb ihre Ergebnisse kurz zusammen, ohne auf einen Beweis einzugehen, und müssen ihr dazu nur die Figuren 2  $\alpha$ ) bis  $\delta$ ) entnehmen. Die Schwerpunktschneidebene (56) ist hier zur Zeichenebene gewählt und die Schnittgeraden mit  $g_1 = 0$ ,  $g_2 = 0$ ,  $k = 0$  sind durch die entsprechenden großen Buchstaben bezeichnet.  $PP'$  ist die lotrechte Drehachse. Es zeigt sich, daß nur diese vier Konfigurationen in der Schwerpunktschneidebene möglich sind, daß nur die eine Hälfte der Ebene den Schwerpunkt tragen kann (die andere ist durch schräge Schraffur ausgeschaltet) und daß die Stabilitätsbereiche (Bereiche des 4. Falles) in die durch waagerechte Schraffur gekennzeichneten Gebiete fallen. Die mit den Klammern versehenen Bereiche können auch verschwinden. Von den vier Fällen der Fig. 2 tritt der eine oder andere ein, je nachdem

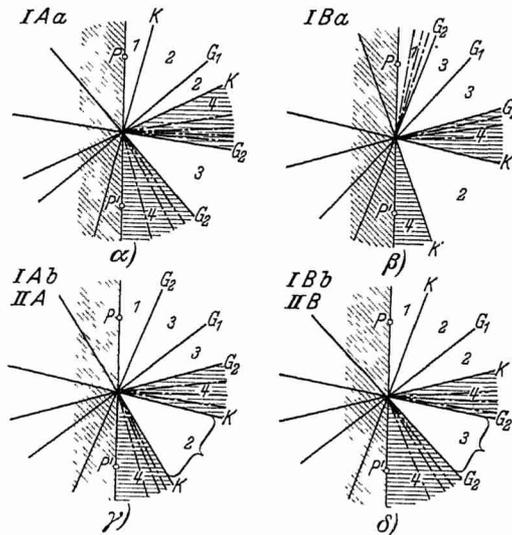


Fig. 2. Allgemeiner Kreisels.

I. die Berührung der zwei Kegel reell ist, wobei die Gerade  $G_1$  a) innerhalb, b) außerhalb der Kegel liegt, oder  
 II. die Berührung der Kegel imaginär ist und ferner  $g_2$  A) im Innenraum, B) im Außenraum des Kegels  $g_2 = 0$  positiv wird.

In einem solchen Lageplan, der in jedem Einzelfall leicht genau festgelegt werden kann, teilt man nun vollends rasch die Bereiche außerhalb

der Stabilitätsbereiche unter die drei übrigen Fälle auf. Am Beispiel der Fig. 2 $\alpha$ ) soll dies gezeigt werden. Wir gehen davon aus, daß in den beiden waagrecht schraffierten Gebieten  $g_1 > 0$ ,  $g_2 > 0$ ,  $k > 0$  ist (vgl. Tabelle (58)). Um in das zwischen ihnen liegende Gebiet zu gelangen, muß man den Kegel  $g_2 = 0$  überschreiten. Hier ist also  $g_2 < 0$ , d. h. ein Bereich des 3. Falles. Überschreiten wir aber den oberen Stabilitätsbereich nach der anderen Seite, d. h. nach oben, so wird  $k < 0$ , und wir gelangen in einen Bereich des 2. Falles. Dieser erstreckt sich über die Gerade  $G_1$  hinüber. Doch ist rechts von ihr  $g_1 > 0$ , links  $g_1 < 0$ . Gehen wir also jetzt nochmal über  $k = 0$  hinweg nach links, so wird  $k > 0$ , aber  $g_1 < 0$ , d. h. wir kommen in einen Bereich des 1. Falles. Auf dieselbe Weise sind auch die übrigen Figuren 2 $\beta$ ) bis  $\delta$ ) mit Ziffern versehen worden; damit ist die Einteilung der Schwerpunkthalbebene im allgemeinen Fall vollständig durchgeführt.

Schließlich müssen wir noch feststellen, wie sich die ausgeschlossenen Beziehungen (17) ausdrücken. Nach (57) geht (17) über in

$$(60) \quad g_1^2 = \left(\frac{m^2 + 1}{m^2 - 1}\right)^2 (g_1^2 - 4g_0g_2) \quad \left(\begin{array}{l} m \geq 0 \\ \text{ganz} \end{array}\right).$$

Diese Gleichung stellt in den Variablen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  eine Folge von Nullpunktskegeln 2. Ordnung dar, die alle im Raumgebiet  $k \geq 0$  verlaufen. Für  $m = 0$  geht (60) in  $g_2 = 0$  und für  $m = 1$  in  $k = 0$  über. Für  $m \rightarrow \infty$  streben die Kegel wieder gegen  $g_2 = 0$ . Wir erhalten somit als Schnittgerade mit der Schwerpunkthalbebene und damit als Linien für verbotene Schwerpunktslagen eine unendliche Folge von diskreten Strahlen, die gegen  $G_2$  konvergieren, und zwar liegen sie auf den Seiten der Strahlen  $G_2$ , auf denen  $k \geq 0$ ,  $g_2 > 0$  ist. In der Weise sind sie in Fig. 2 strichpunktirt angedeutet.

Der Spezialfall, daß eine der Größen  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  verschwindet, führt zu anderen Formeln (59)<sup>19)</sup>, kann aber genau so erledigt werden. Dagegen liegt bei dem besonders wichtigen Sonderfall der symmetrischen Drehachsen (S. 81), wo also zwei der drei Größen  $x_0$ ,  $y_0$ ,  $z_0$  und damit notwendigerweise auch die beiden entsprechenden der drei Größen  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  verschwinden, eine andere Aufgabe vor, die im folgenden behandelt werden soll. Wird nämlich etwa  $\eta = \zeta = 0$ ,  $\xi \neq 0$ , so kann sich der Körper mit beliebiger Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um die lotrecht gestellte, den Schwerpunkt tragende Hauptachse  $x_1$  drehen, und die Frage lautet nun, zu welchem der Fälle 1 bis 4 ein bestimmtes  $\omega$  führt. Wir behandeln auch diese Aufgabe in engem Anschluß an die Grammelsche Arbeit<sup>20)</sup>; insbesondere führen wir die Unterscheidung des verkürzten,

<sup>19)</sup> R. Grammel, a. a. O., S. 133.

<sup>20)</sup> A. a. O., S. 133 ff.

ausgeglichenen oder verlängerten Kreisels durch, je nachdem der Schwerpunkt auf der Achse des größten, mittleren oder kleinsten Trägheitsmoments liegt, und nennen den Kiesel stehend bzw. hängend für  $\xi > 0$  bzw.  $\xi < 0$ .

Gleichung (7) liefert jetzt wegen  $p_{\vartheta_0} = p_{\varphi_0} = 0$ ,  $p_{\psi} = A\omega$ ,  $\vartheta_0 = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  nach (50) und (51) rasch

$$(61) \quad \begin{cases} g_1 = 2g_0(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \\ g_2 = 4g_0\sigma_1\sigma_2 \end{cases}$$

mit

$$(62) \quad \begin{cases} \sigma_1 = -\frac{(B-A)\omega^2 + \xi}{2C}, \\ \sigma_2 = -\frac{(C-A)\omega^2 + \xi}{2B}, \\ \sigma_3 = \frac{(B+C-A)^2\omega^2}{2BC}. \end{cases}$$

Wir untersuchen zwecks Anwendung der Tabelle (58)  $g_1$ ,  $g_2$  und  $k \equiv g_1^2 - 4g_0g_2$  als Funktionen von  $\omega^2$ , und zwar am übersichtlichsten in graphischer Darstellung. (Fig. 3 bis 6. Die Kurven sind überall nur schematisch skizziert, nicht maßstäblich gezeichnet.) Dazu merken wir uns noch an, daß  $k$  die Form

$$(63) \quad k \equiv A^2(\tau_1\omega^4 - 2\tau_2\omega^2 + \tau_3)$$

mit den Konstanten

$$(64) \quad \begin{cases} \tau_1 = A^2(B+C-A)^2, \\ \tau_2 = (B+C-A)\{C(2B-A) + B(2C-A)\} \cdot \xi, \\ \tau_3 = (B-C)^2\xi^2 \end{cases}$$

besitzt.

a) *Verkürzter Kiesel*. Es gelte  $A > B > C$ .

$\alpha$ ) Hängend:  $\xi < 0$ .

Nach (62) sind die Größen  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  stets positiv, nach (61) daher  $g_1 > 0$ ,  $g_2 > 0$  und  $k > 0$ . Es liegt daher für alle  $\omega^2$  der 4. Fall vor.

$\beta$ ) Stehend:  $\xi > 0$ .

Die Werte  $g_2 = g_2(\omega^2)$  sind nach (61), (62) auf einer nach oben geöffneten Parabel aufzutragen, welche die Abszissenachse in den Punkten

$$\omega_1^2 = \frac{\xi}{A-B}, \quad \omega_2^2 = \frac{\xi}{A-C}$$

trifft [Fig. 3 a) bis c)].

Die Werte  $g_1 = g_1(\omega^2)$  erfüllen eine Gerade mit ersichtlich positivem Richtungsfaktor. Sie sind sicher positiv für  $\omega^2 > \omega_1^2$ , weil dort  $\sigma_1 > 0$ ,

$\sigma_2 > 0$  ist. Um festzustellen, welches Vorzeichen  $g_1$  für  $\omega^2 = \omega_3^2$  erhält, setzen wir diesen Wert in den Ausdruck (61) für  $g_1$  ein und erhalten

$$(65) \quad g_1 = \frac{\xi R}{2BC(A-C)}$$

mit

$$R = A^2 + C^2 + 3BC - 2A(B+C).$$

Der Ausdruck  $R$  kann positiv (z. B. für  $A:B:C = 4:3:2,5$ ) oder negativ (z. B. für  $A:B:C = 4:3:2$ ) sein,  $g_1$  also unterhalb oder oberhalb von  $\omega_3^2$  eine Nullstelle haben [Fig. 3 a) und b), c)]. Doch ist diese stets positiv, weil für  $\omega^2 = 0$   $g_1$  negativ ausfällt. Für  $R > 0$  heißt der Kreisler dick, für  $R < 0$  schlank.

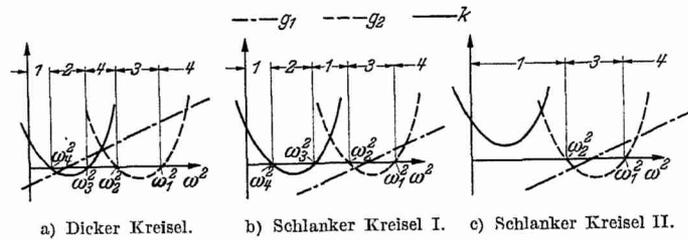


Fig. 3. Verkürzter stehender Kreisler.

Die Werte  $k = k(\omega^2)$  endlich liefern laut (63), (64) eine nach oben geöffnete Parabel. Ihre Schnittpunkte mit der Abszissenachse

$$\left. \begin{array}{l} \omega_3^2 \\ \omega_4^2 \end{array} \right\} = \frac{\tau_2}{\tau_1} \pm \frac{1}{\tau_1} \sqrt{\tau_2^2 - \tau_1 \tau_3}$$

liegen — falls sie überhaupt reell sind — unterhalb  $\omega_2^2$ , weil zwischen  $\omega_2^2$  und  $\omega_1^2$   $g_1 < 0$  und oberhalb  $\omega_1^2$   $\sigma_1 > 0$  und  $\sigma_2 > 0$  gilt, mithin  $k$  positiv sein muß. Andererseits sind  $\omega_3^2$  und  $\omega_4^2$  positiv, falls reell; denn unter der Wurzel findet sich der Ausdruck

$$(66) \quad \tau_2^2 - \tau_1 \tau_3 = BC(2B - A)(2C - A),$$

der wegen der bekannten Bedingungen  $A + B > C$  usw. nur dann größer als Null sein kann, wenn dies für beide Klammern der Fall ist. Dann wird aber nach (64) auch  $\tau_2 > 0$  und damit  $\omega_3^2 > 0$ ,  $\omega_4^2 > 0$ . Nun gilt weiter

$$\tau_4^2 - \tau_1 \tau_3 = BC(R + C(B - C)).$$

Beim dicken Kreisler ( $R > 0$ ) treten also stets reelle Nullstellen von  $k$  auf. Die Gerade  $g_1 = g_1(\omega^2)$  muß dabei zwischen diesen Punkten die Abszissenachse schneiden, weil  $k$  für  $g_1 = 0$  und  $g_2 > 0$  negativ wird [Fig. 3 a)]. Aber auch der schlanke Kreisler ( $R < 0$ ) kann reelle Nullstellen liefern. Beispielsweise werden sie reell für  $A:B:C = 3,9:3:2$ , aber komplex

für den gleichfalls schlanken Kresel  $A : B : C = 4,1 : 3 : 2$ . Die Unterscheidung schlank — dick reicht also hier nicht mehr aus. In Fig. 3 b) und c) ist deshalb zwischen schlank I und II unterschieden, je nachdem  $R + C(B - C) \geq 0$  ist.

Man kann jetzt in Fig. 3 die  $\omega^2$ -Achse vollends leicht in die Bereiche der vier Fälle einteilen.

b) *Ausgeglichener Kresel.* Es gelte  $B > A > C$ .

$\alpha$ ) Hängend:  $\xi < 0$ . Es ist nach (62) stets  $\sigma_2 > 0$ . Ferner wird auch  $\sigma_1 > 0$  für  $\omega^2 < \omega_1^2$ , so daß hier der 4. Fall vorliegt; dagegen folgt  $\sigma_1 < 0$  und damit  $g_2 < 0$ , d. h. der 3. Fall für  $\omega^2 > \omega_1^2$ .

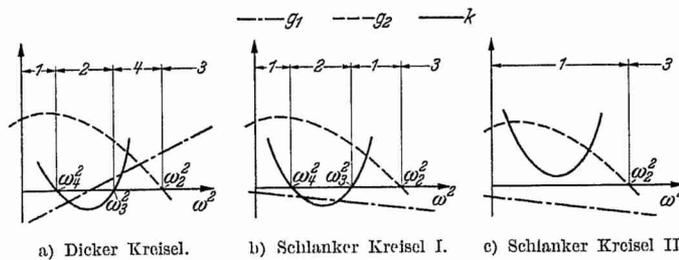


Fig. 4. Ausgeglichener stehender Kresel.

$\beta$ ) Stehend:  $\xi > 0$ . Hier ist stets  $\sigma_1 < 0$ . Die Parabel  $g_2 = g_2(\omega^2)$  ist jetzt nach unten geöffnet und hat rechts vom Ursprung mit der Abszissenachse nur den Schnittpunkt  $\omega_2^2$  [Fig. 4 a) bis c)].

$g_1$  nimmt für  $\omega^2 = \omega_2^2$  auch jetzt den Wert (65) an, der wieder positiv (z. B. für  $A : B : C = 2 : 3 : 1,5$ ) oder negativ (z. B. für  $A : B : C = 2 : 3 : 1,1$ ) sein kann. Für  $\omega^2 = 0$  ist nach (62) stets  $g_1 < 0$  [Fig. 4 a) und b), c)].

$k = k(\omega^2)$  ist eine nach oben geöffnete Parabel, deren Schnitte mit der  $\omega^2$ -Achse — falls vorhanden — links von  $\omega_2^2$  liegen, weil nur hier  $g_2 > 0$  ist, und rechts vom Ursprung aus den oben beim verkürzten Kresel dargelegten Gründen. Wieder liefert der dicke Kresel stets reelle Schnitte [Fig. 4 a)], der schlanke je nach seiner Gestalt [Fig. 4 b) und c)]. Beispiele für letzteren sind  $A : B : C = 7 : 8 : 4$  (reell) und  $A : B : C = 7 : 8 : 3$  (nicht reell).

Die Einteilung der  $\omega^2$ -Achse in Fig. 4 ist damit gegeben.

c) *Verlängerter Kresel.* Es gelte  $B > C > A$ .

$\alpha$ ) Hängend:  $\xi < 0$ . Während die Parabel  $g_2 = g_2(\omega^2)$  die Lage der Fig. 3 hat, besitzt  $k$  nach (66) nun stets zwei reelle Nullstellen, die aber wegen  $\xi < 0$  laut (64) beide negativ sind. Die Gerade  $g_1 = g_1(\omega^2)$

hat, wie aus (62) leicht nachzurechnen ist, einen positiven Richtungsfaktor; für  $\omega^2 = 0$  ist  $g_1 > 0$ . Die Sachlage wird also durch Fig. 5 wiedergegeben.

$\beta$ ) Stehend:  $\xi > 0$ .  $\sigma_1$  und  $\sigma_2$  sind jetzt beide stets negativ, so daß  $g_2$  keine reellen Nullstellen besitzt. Dagegen hat  $k = 0$  wegen  $\xi > 0$  nunmehr immer zwei positive Wurzeln  $\omega_3^2, \omega_4^2$ . Der Richtungsfaktor der Geraden  $g_1 = g_1(\omega^2)$  bleibt positiv, doch wird  $g_1 < 0$  für  $\omega^2 = 0$ . Die Gerade schneidet also die Abszissenachse rechts vom Ursprung, und zwar zwischen  $\omega_3^2$  und  $\omega_4^2$ . Fig. 6 stellt diesen Fall dar.

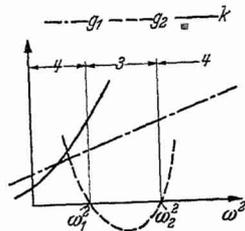


Fig. 5.

Verlängerter hängender Kreisel.

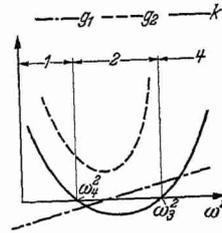


Fig. 6.

Verlängerter stehender Kreisel.

Die Überlegungen von S. 84 betreffs der Beziehungen (17) lassen sich hier ganz entsprechend anstellen. Man erhält aus (60), (61) und (62) auf der  $\omega^2$ -Achse gewisse Punktfolgen in den Bereichen  $g_2 \geq 0, k \geq 0$ , welche gegen die Punkte  $\omega_1^2$  und  $\omega_2^2$  konvergieren und die natürlich nur dann unendlich viele Punkte enthalten, wenn  $\omega_1^2$  und  $\omega_2^2$  reell sind.

Im Fall des symmetrischen schweren Kreisels ( $B = C$ ) vereinfachen sich die Formeln (61), (62) weiter, so daß man die vier Wurzeln von (57) in der Form

$$\varrho = \pm i \left\{ \frac{\omega(2B-A)}{2B} \pm \sqrt{\frac{\omega^2 A^2}{4B^2} - \frac{\xi}{B}} \right\}$$

angeben kann. Daraus ist ersichtlich, daß der hängende symmetrische Kreisel ( $\xi < 0$ ) stets den 4. Fall liefert, der stehende jedoch nur dann, wenn  $A^2 \omega^2 > 4B\xi$  ist, während für  $A^2 \omega^2 < 4B\xi$  der 2. Fall eintritt.

## § 4.

**Die Kreiselbewegungen.**

## 1. Das allgemeine Bild der Bewegungen.

Die Voraussetzungen für die Aufstellung der Reihen des I. Abschnitts sind nun gegeben. Die damit bestimmten Bewegungen werden im folgenden diskutiert, soweit sich ihre Eigenschaften aus den allgemeinen Reihen ablesen lassen.

Die Staudeschen Drehungen des 1. Falles besitzen laut § 2, Ziff. 1 Nachbarbewegungen, die dargestellt werden durch Reihen der Form

$$(67) \quad \begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{\mu+v=n} \Theta_n^{\mu\nu} e^{-(\mu\varrho_1 + \nu\varrho_2)t}, \\ \varphi &= \varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{\mu+v=n} \Phi_n^{\mu\nu} e^{-(\mu\varrho_1 + \nu\varrho_2)t}, \quad (\mu, \nu \geq 0, \text{ ganz}) \\ \psi &= \omega t + c' + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{\mu+v=n} \Psi_n^{\mu\nu} e^{-(\mu\varrho_1 + \nu\varrho_2)t} \end{aligned}$$

und entsprechende Ausdrücke für  $p_\vartheta, p_\varphi$ . Die Bewegung nähert sich demnach asymptotisch einer Staudeschen Drehung derart, daß der Durchstoßpunkt der  $z_1$ -Achse auf der Einheitskugel um  $O$  eine aperiodische Spirale beschreibt, die sich asymptotisch an den Kreis anschmiegt, den der Punkt während der zugehörigen Staudeschen Drehung durchläuft. Gleichzeitig streben  $\varphi$  und  $\psi$  ihren durch die Staudesche Drehung gegebenen Grenzwerten zu<sup>21)</sup>. Da nach einiger Zeit alle anderen Glieder gegen die  $e$ -Potenz mit dem kleinsten Exponenten  $\varrho_k$  vernachlässigt werden können, winden sich die Spiralen je nach den Anfangswerten innen oder außen um den Grenzkreis, ohne ihn von einer gewissen Zeit ab noch zu schneiden. Die Spitze des Drehimpulsvektors beschreibt in ihrer horizontalen Ebene eine Spirale, die sich gleichfalls an ihren Grenzkreis für die Staudesche Drehung annähert.

Bemerkenswert ist, daß (67) auch die asymptotische Annäherung des Körpers an seine labile Ruhelage enthält, wobei dann  $\omega$  verschwindet. In § 3, Ziff. 3 (Fig. 2 bis 6) entsteht ja stets der 1. Fall, wenn der Schwerpunkt ohne Drehung des Körpers senkrecht über den Stützpunkt liegt.

Auch für die Staudeschen Drehungen des 2. Falles gelten die Reihen (67), aber sie sind dann in komplexer Schreibweise aufgestellt (S. 68). Setzen wir

$$\begin{aligned} \varrho_1 &= \kappa + i\sigma \\ \varrho_2 &= \kappa - i\sigma, \end{aligned}$$

so werden die Bewegungen jetzt beschrieben durch

$$(68) \quad \begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n e^{-n\kappa t} \sum_{\nu=0}^n (\Theta_{n,1}^\nu \cos \nu\sigma t + \Theta_{n,2}^\nu \sin \nu\sigma t), \\ \varphi &= \varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n e^{-n\kappa t} \sum_{\nu=0}^n (\Phi_{n,1}^\nu \cos \nu\sigma t + \Phi_{n,2}^\nu \sin \nu\sigma t), \\ \psi &= \omega t + c' + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n e^{-n\kappa t} \sum_{\nu=0}^n (\Psi_{n,1}^\nu \cos \nu\sigma t + \Psi_{n,2}^\nu \sin \nu\sigma t) \end{aligned}$$

<sup>21)</sup> Für die Staudeschen Drehungen mit reellen Kennziffern  $\varrho_k$  sichert der Satz von Perron [Fußnote <sup>8)</sup>] auch in dem Fall, daß (17) erfüllt ist, die Reihen (67) also nicht gelten, wenigstens die Existenz von Nachbarbewegungen, deren Variable  $\vartheta, \varphi$  und  $\psi$  sich asymptotisch den durch die jeweilige Staudesche Drehung gegebenen Grenzwerten annähern. Für imaginäre  $\varrho_k$  ist kein entsprechender Satz bekannt.

und entsprechende Ausdrücke für  $p_\vartheta$ ,  $p_\varphi$ . Die Bewegung verläuft danach ähnlich wie im 1. Fall. Der Unterschied besteht darin, daß die oben gefundenen Spiralen nicht mehr aperiodisch, sondern „gewellt“ sind: statt sich von innen oder außen an den Grenzkreis anzuschmiegen, pendeln sie mit abnehmender Amplitude hin und her und schneiden den Kreis immer wieder.

Die Reihen (68) enthalten insbesondere die bekannten Spiralen des aufrechten symmetrischen schweren Kreisels. Auf Seite 88 ergab sich ja, daß dieser nur asymptotische Bewegungen des 2. Falles ausführen kann. In der Ungleichung  $A^2 \omega^2 < 4 B \xi$ , welche mit  $A \omega = p_\psi$  in  $p_\psi^2 < 4 B \xi$  übergeht, haben wir die altbekannte Voraussetzung für die asymptotischen Bewegungen des aufrechten symmetrischen Kreisels wiedergefunden, welche längst in geschlossener Form berechnet sind<sup>22)</sup>. Sie sind bekanntlich die einzigen Bewegungen, die in die aufrechte Drehung übergehen; also führt auch unsere Reihenmethode auf sie zurück.

Für die Staudeschen Drehungen des 3. Falles werden nach § 2, Ziffer 2 Nachbarbewegungen beschrieben durch die Reihen

$$\begin{aligned} \vartheta &= \vartheta_0 + \vartheta'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{1 \leq \mu + \nu \leq n} e^{-\nu \alpha_2 t} (\mathcal{O}_{n1}^{\mu\nu} \cos \mu(\alpha_1 t + \varepsilon) + \mathcal{O}_{n2}^{\mu\nu} \sin \mu(\alpha_1 t + \varepsilon)), \\ (69) \quad \varphi &= \varphi_0 + \varphi'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{1 \leq \mu + \nu \leq n} e^{-\nu \alpha_2 t} (\mathcal{P}_{n1}^{\mu\nu} \cos \mu(\alpha_1 t + \varepsilon) + \mathcal{P}_{n2}^{\mu\nu} \sin \mu(\alpha_1 t + \varepsilon)), \\ \psi &= (\omega + \omega')t + \varphi'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \sum_{1 \leq \mu + \nu \leq n} e^{-\nu \alpha_2 t} (\mathcal{Y}_{n1}^{\mu\nu} \cos \mu(\alpha_1 t + \varepsilon) + \mathcal{Y}_{n2}^{\mu\nu} \sin \mu(\alpha_1 t + \varepsilon)) \end{aligned}$$

und entsprechende Ausdrücke für  $p_\vartheta$ ,  $p_\varphi$ .  $\vartheta'_0$ ,  $\varphi'_0$ ,  $\omega'$ ,  $\alpha_1$  und  $\alpha_2$  sind darin Potenzreihen von  $\lambda$ .

Setzen wir zunächst die in (69) enthaltene Integrationskonstante  $c_2$  Null (S. 72 a)), so behalten wir alle Glieder, für die  $\nu = 0$  ist, d. h. reine trigonometrische Reihen der Art (39). Die Bewegung bietet dann das Bild einer pseudoregulären Präzession: Der regulären Präzession, die durch die Werte  $\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta'_0$ ,  $\varphi = \varphi_0 + \varphi'_0$ ,  $\dot{\psi} = \omega + \omega'$  charakterisiert ist, überlagern sich Nutationen der  $z_1$ -Achse, deren Teilbögen alle unter sich kongruent sind. Zudem vollzieht der Körper synchrone Schwingungen um die  $z_1$ -Achse. Der Drehimpulsvektor führt eine ebensolche pseudo-reguläre Präzession aus<sup>23)</sup>.

Der Körper schwingt also periodisch *um* die stationäre Bewegung, während natürlich die Gesamtbewegung nicht rein periodisch ist. Trotz-

<sup>22)</sup> Klein-Sommerfeld, a. a. O., S. 334 ff.

<sup>23)</sup> Diese periodischen Bewegungen sind in den zwei Sonderfällen, daß es sich um eine symmetrische Drehachse oder die stabile Ruhelage des Kreisels handelt, schon von J. Horn behandelt in Zeitschr. f. Math. u. Phys. 52 [Fußnote 6)], Aufgabe II bis IV.

dem möge sie weiterhin als periodische Bewegung bezeichnet werden. Es liegt hier wieder eine Bewegungsform vor, die vom schweren symmetrischen Kiesel her bekannt ist.

Für  $c_2 \neq 0$  bietet die Bewegung nicht sofort das eben gegebene Bild, sondern nähert sich ihm asymptotisch an, um nach einiger Zeit praktisch mit ihm übereinzustimmen. Doch läßt sich über die Art der Annäherung allgemein nicht viel aussagen. Je kleiner man aber  $c_1$  und damit die Amplituden der Nutationen wählt, d. h. je näher die periodische Bewegung mit einer Staudeschen Bewegung zusammenfällt, um so mehr wird die asymptotische Bewegung zweiter Art einer solchen erster Art, nämlich einer einfachen Spiralen, ähnlich, weil dann in den Reihen die  $e$ -Funktionen ohne periodische Koeffizienten überwiegen. Für verschwindende Nutationen geht die Bewegung wirklich in eine asymptotische Bewegung erster Art über (S. 72), die damit hier als Grenzfall erscheint. Die asymptotischen Bewegungen zweiter Art können wir deshalb als allgemeinste asymptotische Bewegungen des schweren unsymmetrischen Kreisels bezeichnen, die sich einer Staudeschen Drehung nähern. Der symmetrische schwere Kiesel kann sie bekanntlich nicht ausführen.

Für die Staudeschen Drehungen des 4. Falles findet man keine asymptotischen Nachbarbewegungen, sondern nur periodische (S. 72), wie sie eben auf S. 90 geschildert wurden.

Wir wollen diese Diskussion der Kieselbewegungen noch durch zwei Bemerkungen vervollständigen.

Einmal geben unsere Ergebnisse Auskunft über die Frage, wie sich ein Körper bei einem kleinen Anstoß von einer Staudeschen Drehung entfernen kann; denn er vermag jede der geschilderten Bewegungen auch in umgekehrter Richtung auszuführen. Man erkennt dies daraus, daß man in den Bewegungsgleichungen die Vorzeichen von Zeit und Impulsen umkehren kann, ohne im ganzen etwas zu ändern. Demnach dreht sich der Kiesel aus einer instabilen Staudeschen Drehung bei einem geeigneten kleinen Anstoß entweder spiralenförmig heraus (Fall 1 und 3) oder in allmählich sich vergrößernden Schwingungen (Fall 2 und 3). Je kleiner dabei der Anstoß ist, um so länger bleibt die Drehachse aufrecht stehen, ehe sie „umfällt“. Im 3. Fall kann man den Anstoß auch so wählen, daß die Achse dauernd annähernd lotrecht bleibt; im 4. Fall, dem Fall der Stabilität, tritt das sogar bei jedem kleinen Anstoß ein.

Weiter haben wir zu beachten, daß alle behandelten Lösungen weniger als sechs der verfügbaren Integrationskonstanten der Kieselgleichungen enthalten. Neben den willkürlichen Konstanten  $p_\psi$  und  $c'$ , die allen Lösungen eigen sind, hängen (67) und (68) noch von  $c_1$  und  $c_2$  ab, die in § 2, Ziffer 1 benutzt wurden, im ganzen also von vier Konstanten. Die

periodischen Teile von (69) enthalten  $c_1$  und  $\varepsilon$ , also gleichfalls vier Konstante, während durch die asymptotischen Glieder von (69) noch  $c_2$  hinzukommt (§ 2, Ziffer 2).  $\lambda$  dagegen ist keine weitere Integrationskonstante. Die Bewegungen haben also den Charakter von Grenzfällen, die nur durch gewisse genau berechenbare Anfangswerte der Koordinaten und Impulse eingeleitet werden können. Sobald diese Anfangswerte nicht exakt getroffen werden — was z. B. bei Versuchen immer der Fall sein wird — tritt die Bewegung nicht ein. Wohl aber kann man aus der stetigen Abhängigkeit der Integrale von den Anfangswerten schließen, daß bei abnehmendem Fehler in den Anfangsbedingungen auch die Abweichung der wahren Bewegung von dem Grenzfall klein wird und erst nach langer Zeit zur Geltung kommt. Dieser stetige Übergang läßt erhoffen, daß die geschilderten speziellen Bewegungen des Kreisels bei der Erforschung seiner bis jetzt ganz unbekanntenen allgemeinen Bewegung sich nützlich erweisen werden.

## 2. Numerische Beispiele.

Wir haben uns bisher mit der Aufstellung allgemeiner Reihen beschäftigt und in Ziffer 1 dieses Paragraphen zunächst einige qualitative Folgerungen für die Kreiselbewegung daraus gezogen. Zum Schluß soll nun noch an einigen Beispielen die Frage behandelt werden, wie man die Reihen für die quantitative Berechnung der Lösungen nutzbar machen kann, die ja für die geometrische und mechanische Veranschaulichung der Bewegung von größter Bedeutung ist. Die dabei auftretende Schwierigkeit liegt auf der Hand. Weder die formale Berechnung noch die zitierten Konvergenzbeweise der Reihen geben uns eine praktisch brauchbare Abschätzung ihrer Glieder; man ist also nach der numerischen Berechnung einer notwendigerweise endlichen Anzahl von Gliedern prinzipiell nie sicher, ob nicht die Summe der folgenden so groß wird, daß die vorherigen keine Näherung an die wahre Lösung darstellen<sup>24)</sup>. Man muß sich also darüber klar sein, daß jeder quantitative Schluß aus den Reihen auf dem Standpunkt der exakten Mathematik mit Vorbehalt an-

<sup>24)</sup> Wir befinden uns hier offenbar in einer ähnlichen Lage wie im Dreikörperproblem: auch dort sind die periodischen und asymptotischen Lösungen nachgewiesen, aber die numerische Rechnung muß andere Wege beschreiten als der Existenzbeweis. Vielleicht könnte man die Lösungen wie dort so auch im Kreiselproblem mit Hilfe des „numerischen Experiments“ (vgl. Enzykl. d. math. Wiss. Bd. VI, 2, 1, S. 966 ff.) durch numerische Integration der Differentialgleichungen aufsuchen. Allein bei der Kompliziertheit der Kreiselgleichungen hat man hier große Schwierigkeiten zu erwarten und ist deshalb doch hauptsächlich auf die Reihenentwicklungen angewiesen.

zunehmen ist, gleichgültig, ob die Konvergenz allgemein bewiesen ist oder nicht.

Eine weniger strenge Betrachtung pflegt allerdings diesen Standpunkt wesentlich zu modifizieren und sich mit wenigen Reihengliedern zu begnügen, wenn die Integrationskonstanten so klein gewählt werden, daß der weggelassene Rest der Reihe mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit klein bleibt. So stellt man sich bei Beschränkung auf die Glieder ersten Grades auf den Boden der Theorie der kleinen Schwingungen, die ihre Berechtigung und Fruchtbarkeit schon oft genug erwiesen hat. Ferner kann man bei Berechnung mehrerer Glieder aus ihrer Abnahme einen Anhaltspunkt dafür gewinnen, wie weit die Näherungen brauchbar sind.

In den nachstehenden Ausführungen kann es sich nur darum handeln, wenige willkürlich herausgegriffene Beispiele vorzuführen, die zeigen sollen, daß man überhaupt in diesem Sinne zu praktischen Resultaten zu gelangen vermag. Eine vollständige numerische Erforschung der nachgewiesenen Lösungen würde den Rahmen dieser Arbeit weit überschreiten.

Vorher beschäftigen wir uns noch kurz mit der Frage der zeichnerischen Darstellung der Bewegungen. Die Gleichungen (67) bis (69) beschreiben die Bahn eines Punktes einer Hauptträgheitsachse. Diese Bahn ist zur Zeichnung nicht sehr geeignet, weil die kleinen Abweichungen von den stationären Werten der Eulerschen Winkel zu ihrer Verdeutlichung zu große Figuren benötigen. Wir verfolgen daher besser die Bahn eines Punktes  $P$  der jeweiligen Staudeschen Drehachse im Abstand Eins von  $O$ ; diese verläuft in der Nähe des oberen Kugelpols und kann bequem vergrößert werden. Ferner benutzen wir die horizontale  $x_2 y_2$ -Ebene als Zeichenebene und projizieren die betrachtete sphärische Kurve senkrecht darauf. In dieser anschaulichen Abbildung der Kreiselbewegung kommt allerdings die Drehung des Körpers *um* die stationäre Achse nicht zum Ausdruck.

Die Projektion von  $P$  hat die Koordinaten<sup>25)</sup>

$$(70) \quad \begin{aligned} x_2 &= x_0 (\cos \varphi \cos \psi - \cos \vartheta \sin \varphi \sin \psi) \\ &\quad - y_0 (\sin \varphi \cos \psi + \cos \vartheta \cos \varphi \sin \psi) + z_0 \sin \vartheta \sin \psi, \\ y_2 &= x_0 (\cos \varphi \sin \psi + \cos \vartheta \sin \varphi \cos \psi) \\ &\quad - y_0 (\sin \varphi \sin \psi - \cos \vartheta \cos \varphi \cos \psi) - z_0 \sin \vartheta \cos \psi. \end{aligned}$$

Den übersichtlichsten Einblick in den geometrischen Aufbau der Kurven, bei dem es uns auf große Genauigkeit nicht ankommt, erhält man durch Beschränkung auf die Theorie erster Ordnung. Wir führen also in (70)

$$\vartheta = \vartheta_0 + \vartheta_1, \quad \varphi = \varphi_0 + \varphi_1, \quad \psi = \omega t + c' + \psi_1$$

<sup>25)</sup> Klein-Sommerfeld a. a. O., S. 19.

ein, unter  $\vartheta_1, \varphi_1, \psi_1$  die Glieder ersten Grades in  $\lambda$  von (67) bis (69) verstanden, und setzen weiter

$$\sin \vartheta_1 = \vartheta_1, \quad \sin \varphi_1 = \varphi_1, \quad \cos \vartheta_1 = \cos \varphi_1 = 1.$$

Dann wird aus (70)

$$(71) \quad \begin{aligned} x_2 &= x' \cos(\omega t + c' + \psi_1) - y' \sin(\omega t + c' + \psi_1), \\ y_2 &= x' \sin(\omega t + c' + \psi_1) + y' \cos(\omega t + c' + \psi_1) \end{aligned}$$

mit

$$(72) \quad x' = -\varphi_1 \sin \vartheta_0, \quad y' = -\vartheta_1.$$

$x', y'$  sind also die Koordinaten des Punktes  $P$  in einem Koordinatensystem, das gegen das ursprüngliche System  $x_2, y_2$  um den Winkel  $\psi = \omega t + c' + \psi_1$  gedreht ist. Bei Benutzung dieses zweiten Systems lassen sich die Kurven besonders leicht diskutieren und aufzeichnen.

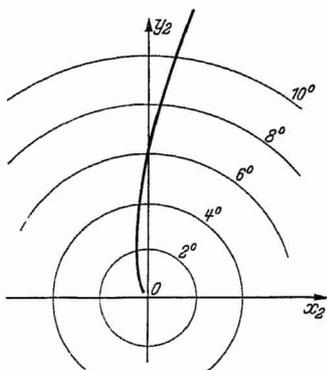


Fig. 7. Drehung 1. Asymptotische Bewegung erster Art, 1. Fall.

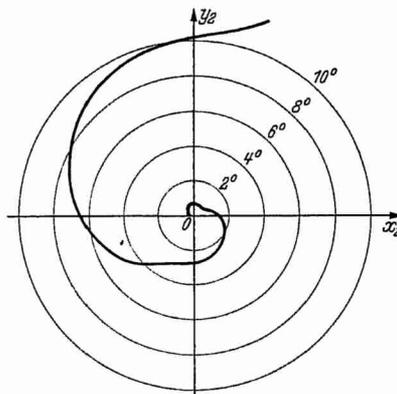


Fig. 8. Drehung 2. Asymptotische Bewegung erster Art, 2. Fall.

Zur Anfertigung einer solchen Zeichnung geht man also so vor: Nach Wahl einer Drehachse  $(x_0, y_0, z_0)$  auf dem Staudeschen Kegel (56) des vorgelegten Körpers berechnet man zunächst aus (43) und (55) die Koordinaten  $\vartheta_0, \varphi_0$  und  $\omega$  der stationären Drehung, ferner aus (57), (59) die Kenngrößen  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$ . Die Koeffizienten  $a_{ik}$  von (4) lassen sich dann aus (53), (47), (50) und (51) gewinnen. Zur Berechnung der Nachbarbewegungen der Drehung kann man sich nun vollständig auf die Differentialgleichungen (5) beschränken. Man hat nämlich einfach diejenigen ihrer partikulären Integrale (8) zu bilden, deren Exponenten  $\varrho_i$  einen Realteil  $\leq 0$  besitzen, und wie üblich mit willkürlichen Konstanten multipliziert zu addieren. Um die Erfüllung der Bedingungen (11) braucht man sich nicht zu kümmern, so lange man nicht höhere Glieder aufstellen will.  $\vartheta_1$  und  $\varphi_1$  erhält man auf diese Weise direkt,  $\psi_1$  durch einen weiteren Schritt als lineares Glied von  $\int \frac{\partial H}{\partial p_\psi} dt$  (Gleichung (25) oder (38)).

Die Kurven im  $x' y'$ -System sind nun nach (72) leicht zu übersehen:

1. Fall. Wegen der reellen  $\rho_1$  entsteht eine Kurve durch den Ursprung, auf welcher der betrachtete Punkt asymptotisch in den Ursprung hineinwandert.

2. Fall. Da  $\rho_1 = \kappa \pm i\sigma$  jetzt einen Imaginärteil besitzt, erscheinen  $x'$  und  $y'$  als Summen von sin- und cos-Gliedern, so daß (72) eine elliptisch polarisierte Schwingung um den Ursprung darstellt, deren Amplitude jedoch wegen des Faktors  $e^{-\kappa t}$  asymptotisch zu Null abnimmt.

3. Fall. Aus dem rein imaginären  $\rho_1 = i s_1$  folgen reine sin- und cos-Glieder, nach (72) also eine ungedämpfte elliptisch polarisierte Schwingung. Die durch das reelle  $\rho_2$  hinzutretenden aperiodischen Glieder bedeuten eine Verschiebung des Mittelpunktes der Ellipse; dieser rückt allmählich in den Ursprung hinein.

4. Fall. Gegenüber Fall 3 fällt die letztgenannte Verschiebung weg.

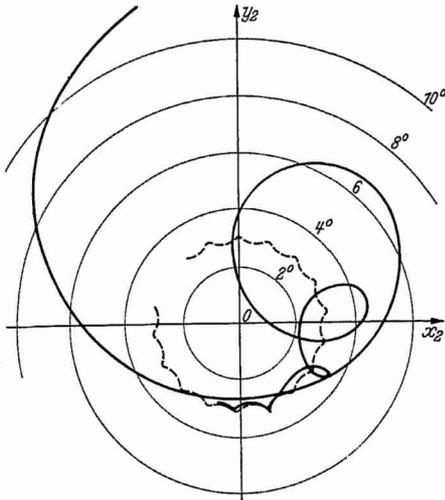


Fig. 9. Drehung 3. Periodische Bewegung und asymptotische Bewegung zweiter Art, 3. Fall.

--- periodische Bewegung,  
 — asymptotische Bewegung.

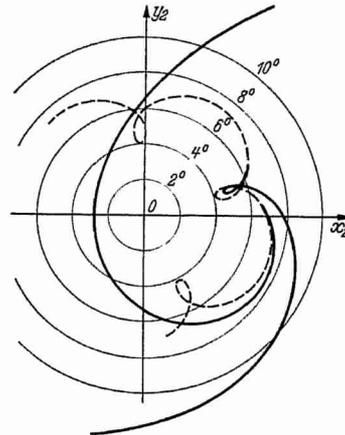


Fig. 10. Drehung 4. Periodische Bewegung und asymptotische Bewegungen zweiter Art, 3. Fall.

Symmetrische Drehachse.

--- periodische Bewegung,  
 — zwei asymptotische Bewegungen.

Das  $x' y'$ -System rotiert nun mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega + \psi_1$  um den Ursprung. Man zeichnet sich deshalb am besten die betrachteten Kurven auf Pauspapier, markiert darauf den wandernden Punkt für gleiche Zeitabstände und überträgt ihn auf die feste Zeichenebene, während man die  $x'$ -Achse jeweils unter dem zugehörigen Winkel  $\omega t + c' + \psi_1$  gegen die feste  $x_2$ -Achse einstellt.

Die Figuren 7 bis 10 zeigen vier Beispiele so entstehender Formen. Die Ausgangswerte sind in Zahlentafel 1 vermerkt und daraus die Kurven wie beschrieben hergestellt. Die eingezeichneten Kreise mit Gradzahlen sind die projizierten Breitenkreise der Einheitskugel um  $O$ , auf der die sphärische Kurve verläuft, mit ihren Polabständen. Es liegt eine gewisse Willkür darin, bis zu welchen Gradzahlen man die Kurven, die ja beliebig weit gezeichnet werden können, als Näherungen gelten läßt. Je näher sie bei  $O$  liegen, um so genauer sind sie natürlich, weil dann die Konvergenz der Reihen besser ist. Es ist zu vermuten und wird sich unten weiter bestätigen, daß diese genügt, falls man nur Werte bis zu etwa  $10^0$  für die Winkel  $\vartheta_1$ ,  $\varphi_1$ ,  $\psi_1$  und damit nur wenig mehr für den Polabstand  $\sqrt{x_1'^2 + y_2'^2}$  von  $P$  zuläßt. Gleichzeitig bleibt man damit im Geltungsbereich der Vernachlässigungen, die von (70) zu (71), (72) geführt haben.

Zahlentafel 1.

Drehung Nr.	1	2	3	4
Fall	1	2	3	3
$A \text{ gcm}^2$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	$5 \cdot 10^6$	$6 \cdot 10^5$
$B \text{ gcm}^2$	$4 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$	$7 \cdot 10^5$
$C \text{ gcm}^2$	$3 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^6$	$3 \cdot 10^6$	$2 \cdot 10^5$
$\xi \text{ dyn cm}$	$1 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^7$	$3 \cdot 10^7$
$\eta \text{ dyn cm}$	$7 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^7$	$7 \cdot 10^7$	0
$\zeta \text{ dyn cm}$	$2,5 \cdot 10^7$	$2,5 \cdot 10^7$	$2,5 \cdot 10^7$	0
$x_0$	0,1313	0,06137	0,1945	1
$y_0$	0,9321	0,7058	− 0,9725	0
$z_0$	0,3377	0,7058	− 0,1280	0
$\vartheta_0$	$70,26^0$	$45,11^0$	$97,35^0$	$90^0$
$\varphi_0$	$8,02^0$	$4,97^0$	$168,69^0$	$90^0$
$\omega$	1,036	7,985	11,11	13
$\varrho_1$	4,282	1,793 + $i \cdot 4,280$	$i \cdot 12,52$	$i \cdot 9,045$
$\varrho_2$	4,472	1,793 − $i \cdot 4,280$	1,878	12,41

Nach dieser Orientierung über die Geometrie der Bewegung, welche sich auf die Theorie erster Ordnung beschränken sollte, gehen wir noch in zwei Beispielen auf die Frage der genaueren Berechnung der Lösungen ein, um einen ungefähren Anhaltspunkt dafür zu gewinnen, wie weit man mit dem entwickelten Verfahren numerisch gelangen kann. Gleichzeitig fassen wir den Gang der Rechnung kurz zusammen. Als

1. Beispiel wählen wir Kreisel und Zahlenwerte der Drehung Nr. 1 von Zahlentafel 1, also eine asymptotische Bewegung erster Art. Wir

wollen die Reihen bis zu den Gliedern zweiten Grades in  $\lambda$  berechnen, haben also in der Hamiltonfunktion (4) die Glieder zweiten und dritten Grades zu berücksichtigen. Ihre Koeffizienten  $a_{ik}$  und  $A_{m_1 m_2 n_1 n_2}$  können nach (50) und (51) ohne weiteres berechnet werden.

Als nächster Schritt folgt die Auflösung der Gleichungen (6). Die sich ergebenden Wurzeln  $u_{kl}, v_{kl}$  sind so zu normieren, daß die beiden oberen Bedingungen (11) erfüllt werden (die unteren sind es natürlich von selbst). Die gleichzeitige Befriedigung der vier homogenen Gleichungen (6) ist eine Kontrolle für die richtige Berechnung der  $\varrho_l$  und der  $a_{ik}$ . Die Berührungstransformation (10) ist damit gefunden.

Weiter haben wir die Funktionen  $R_{k_2}, S_{k_2}$  zu bilden (Gleichung (23)). Sie bestehen einfach aus den Gliedern zweiten Grades in den Gleichungen (18), nachdem man in diese Glieder  $q_k = q_{k_1}, p_k = p_{k_1}$  eingesetzt hat (vgl. (21<sub>2</sub>)). Man erhält also  $R_{k_2}$  und  $S_{k_2}$  dadurch, daß man die Transformation (10) in das Aggregat der Glieder dritten Grades von (4) einträgt, dieses je einmal nach den neuen Variablen  $q'_k, p'_k$  partiell ableitet (die Striche sind in § 2 weggelassen!) und  $q''_k = q_{k_1}, p''_k = p_{k_1}$  in die Ableitungen einsetzt. Es ist dabei zweckmäßig, noch vor dem Ausmultiplizieren der Potenzprodukte zu differenzieren, weil man dann sofort  $q_{11} = q_{21} = 0$  (Gleichung (22<sub>1</sub>)) einführen kann und so die unnötige Bildung von Produkten vermeidet, die hinterher doch verschwinden.

Mit  $R_{k_2}, S_{k_2}$  hat man die  $\beta_{k_2}^{u,v}, \gamma_{k_2}^{u,v}$  und aus (24) die  $Q_{k_2}^{u,v}, P_{k_2}^{u,v}$ , muß also nur noch die ursprünglichen Koordinaten nach (10) zusammensetzen. Damit kann auch die Berechnung der letzten Koordinate  $q_3 = \psi$  nach (25) erfolgen. Da die Entwicklungen von  $H_{13}, H_{23}$  und  $H_{33}$  schon zur Bestimmung der Koeffizienten von (4) aufgestellt werden mußten, ist das nur noch eine kleine Arbeit. Wir setzen noch  $\lambda = 10^3$  und stellen das Endergebnis in Zahlentafel 2 zusammen. Man erhält daraus den gesuchten Ausdruck für eine der linksstehenden Variablen, indem man die Zahlen der betreffenden Zeile, multipliziert mit den am Kopf der Spalten stehenden Funktionen, addiert.

Zur Untersuchung der Konvergenz der Reihen müssen wir zunächst nur die Ausdrücke für  $\vartheta', \varphi', p'_\vartheta, p'_\varphi$  betrachten, da  $\psi'$  gesondert berechnet wurde. Wir wollen — was natürlich ein keineswegs unanfechtbarer Standpunkt ist — die Konvergenz als gesichert und die Rechnung mit den angegebenen Gliedern als genügend betrachten, wenn in jeder Reihe die Summe der Glieder zweiten Grades absolut genommen  $\leq \frac{1}{10}$  von der der Glieder ersten Grades wird. Dies ist für alle  $t$  der Fall z. B. für  $c_1 = c_2 = \pm 0,7$ . Man hat dann für  $t = 0$

$$\begin{aligned}\vartheta' &\approx \mp 22,8^0 + 1,2^0, \\ \varphi' &\approx \mp 26,1^0 - 2,6^0.\end{aligned}$$

Zahlentafel 2.

	$c_1 e^{-\varrho_1 t}$	$c_2 e^{-\varrho_2 t}$	$c_1^2 e^{-2\varrho_1 t}$	$c_1 c_2 e^{-(\varrho_1 + \varrho_2)t}$	$c_2^2 e^{-2\varrho_2 t}$
$\vartheta' = \vartheta - \vartheta_0$	-0,3084	-0,2594	0,0095	0,0220	0,0128
$\varphi' = \varphi - \varphi_0$	-0,2969	-0,3536	-0,0226	-0,0462	-0,0231
$p_{\vartheta}' = p_{\vartheta} - p_{\vartheta 0}$	0,6245 · 10 <sup>7</sup>	0,5385 · 10 <sup>7</sup>	-0,0263 · 10 <sup>7</sup>	-0,0644 · 10 <sup>7</sup>	-0,0395 · 10 <sup>7</sup>
$p_{\varphi}' = p_{\varphi} - p_{\varphi 0}$	0,4410 · 10 <sup>7</sup>	0,5116 · 10 <sup>7</sup>	-0,0026 · 10 <sup>7</sup>	-0,0061 · 10 <sup>7</sup>	-0,0034 · 10 <sup>7</sup>
$\psi' = \psi - (\omega t + c')$	0,07043	0,08529	0,03046	0,06435	0,03259

Eine eingehendere Abschätzung hat wenig Sinn; wir begnügen uns vielmehr mit der Feststellung, daß der größte so erreichbare Winkel rund 30° beträgt.

Die Reihe für  $\psi'$  konvergiert offenbar bedeutend schlechter. Doch wird dadurch die Konvergenz der übrigen Reihen in keiner Weise berührt, da  $\psi'$  nachträglich aus ihnen berechnet ist. Vielmehr wird umgekehrt die Reihe für  $\psi'$  umso schlechter konvergieren, je besser dies bei den andern der Fall ist, d. h. je größere Werte mit ihnen erreichbar werden. Es liegt hier ja einfach die Aufgabe vor, die gewonnenen Lösungen  $\vartheta', \dots, p_{\varphi}'$  in die Funktion  $\frac{\partial H}{\partial p_{\psi}}$  einzutragen und diese dann nach  $t$  zu integrieren, was prinzipiell keine Schwierigkeit mit sich bringt. Diese Aufgabe ist durch den Ausdruck für  $\psi'$  aus Zahlentafel 2 näherungsweise nur für kleine Werte von  $c_1, c_2$  gelöst. Für größere Werte müßte man entweder die Entwicklung von  $\frac{\partial H}{\partial p_{\psi}}$  nach Potenzen von  $c_1 e^{-\varrho_1 t}, c_2 e^{-\varrho_2 t}$  über die Glieder zweiten Grades hinaus fortführen oder aber eines der vielen Verfahren zur numerischen oder graphischen Auswertung des Integrals  $\int \frac{\partial H}{\partial p_{\psi}} dt$  heranziehen. Wir gehen darauf nicht näher ein, weil wir keinen Gebrauch von der Lösung machen wollen.

Die Genauigkeit der Näherungen von Tafel 2 wächst mit der Zeit, weil die höheren Glieder rascher abnehmen. Man erkennt ferner, daß bei Beschränkung von  $\vartheta'$  und  $\varphi'$  auf Werte bis zu 10° die Genauigkeit der Glieder ersten Grades für die Zwecke der Zeichnung ausreichen dürfte.

2. Beispiel. Schließlich betrachten wir noch als Beispiel für die symmetrischen Drehachsen die Drehung Nr. 4 von Zahlentafel 1. Hier sind die Aussichten für eine gute Konvergenz besonders günstig. Es ergibt sich nämlich wegen  $\vartheta_0 = \varphi_0 = \frac{\pi}{2}$  aus (49) oder (50) für alle symmetrischen

Zahlentafel 3.

Glieder ersten Grades	$c_1 \sin(w_1 + \varepsilon)$	$c_1 \cos(w_1 + \varepsilon)$	$c_2 e^{-w_2}$
$\vartheta'$	0,4603	0	0,1402
$\varphi'$	0	-0,2567	-0,4213
$\mathcal{P}'_3 \cdot 10^{-6}$	0	-2,581	-0,6703
$\mathcal{P}'_{\varphi} \cdot 10^{-6}$	-0,7325	0	-1,410

$$w_1 = \alpha_1 t \quad \alpha_1 = 9,045 + c_1^2 \cdot 1,424 + \dots$$

$$w_2 = \alpha_2 t \quad \alpha_2 = 12,41 + c_1^2 \cdot 0,2517 + \dots$$

Glieder dritten Grades	$c_1^3 \sin 3(w_1 + \varepsilon) \cos 3(w_1 + \varepsilon)$	$c_1^3 \sin(w_1 + \varepsilon)$	$c_1^3 \cos(w_1 + \varepsilon)$	$c_1^3 c_2 \sin 2(w_1 + \varepsilon) e^{-w_2}$	$c_1^3 c_2 \cos 2(w_1 + \varepsilon) e^{-w_2}$	$c_1 c_2^3 \sin(w_1 + \varepsilon) \cos(w_1 + \varepsilon) e^{-2w_2}$	$c_2^3 e^{-3w_2}$	$c_1^2 c_2 e^{-w_2}$
$\vartheta'$	-0,0055	0	$0,0062 \sin 3\varepsilon + 0,0510 \sin \varepsilon$	-0,0028	-0,0005	0,0007	-0,0027	0
$\varphi'$	0	0,0093	$-0,0538 + 0,0162 \cdot (\cos 3\varepsilon - \cos \varepsilon)$	-0,0088	0,0020	-0,0001	-0,0013	-0,0046
$\mathcal{P}'_3 \cdot 10^{-6}$	0	-0,0912	$0,0035 \sin 3\varepsilon + 0,0284 \sin \varepsilon$	0,0120	-0,0399	-0,0065	0,0153	0,0501
$\mathcal{P}'_{\varphi} \cdot 10^{-6}$	0,0031	0	$-0,0347 \sin 3\varepsilon - 0,2860 \sin \varepsilon$	0,0174	-0,0075	0,0417	0,0275	0,0012

Drehachsen, daß (4) nur Glieder mit geradem Grad besitzt. Daraus folgt, daß jetzt nur Gleichungen (30<sub>r</sub>) mit ungeradem  $r$  auftreten; die mit geradem  $r$  sind mit (30<sub>1</sub>) identisch und können fortgelassen werden. Deshalb kommen in den Lösungen (27) nur die ungeraden Potenzen von  $\lambda$  vor.

Der Gang der Rechnung ist im wesentlichen derselbe wie im 1. Beispiel. Im einzelnen sind gewisse Abweichungen bedingt durch den hier vorliegenden 3. Fall: es muß die Transformation (10) noch durch (14) in eine reelle Form übergeführt und dann nach § 2, Ziffer 2 verfahren werden. Das Ergebnis ist in Zahlentafel 3 zusammengestellt. Die Form der Koeffizienten von  $\sin(w_1 + \varepsilon)$  und  $\cos(w_1 + \varepsilon)$  ist darin durch die Gleichungen (37) bedingt.

Die Konvergenz der Reihen beurteilen wir nach denselben Gesichtspunkten wie beim 1. Beispiel. Allerdings kann die Forderung, daß das Verhältnis der Glieder  $\leq \frac{1}{10}$  sein soll, nicht für jeden Wert  $t$  erhoben werden, da es sich hier um Schwingungen handelt. Offenbar kommt es nur auf deren (abnehmende) größte Ausschläge an. Wenn wir nun in den Gliedern dritten Grades jeder Reihe sämtliche Koeffizienten absolut nehmen und die  $\sin$  und  $\cos$  gleich Eins setzen, so entsteht dadurch eine mit wachsendem  $t$  abnehmende obere Schranke für die Summe dieser Glieder. Diese wird von der Summe der Glieder ersten Grades immer wieder um mindestens das Zehnfache übertroffen, wenn 1. die Summe der Beträge sämtlicher Koeffizienten der Glieder dritten Grades  $\leq \frac{1}{10}$  von der der Glieder ersten Grades ist und wenn 2. dasselbe für die Koeffizienten der rein trigonometrischen Glieder gilt. Wenn außerdem 3. in den Reihen für  $\alpha_1$  und  $\alpha_3$  das zweite Glied  $\leq \frac{1}{10}$  des ersten wird, betrachten wir die Konvergenz aller Reihen als genügend.

Die drei Forderungen sind beispielsweise erfüllt für  $c_1 = 0,8$ ,  $c_2 = 1,4$ ,  $\varepsilon = 0$ . Man findet für diese Werte, daß  $\varphi'$  in der periodischen Lösung zwischen  $\sim \pm 12,0^\circ$  hin und her schwankt,  $\vartheta'$  zwischen  $\sim \pm 19,7^\circ$ , während sich der größte auftretende Winkel in der asymptotischen Lösung für  $t = 0$  zu  $\varphi' \approx 45,3^\circ$  ergibt.

Die Reihe für  $\psi$ , die aus (38) gewonnen wird, hat im Gegensatz zu Zahlentafel 3 nur Glieder geraden Grades. Es zeigt sich bei näherer Betrachtung wieder, daß die Konvergenz dieser Reihe für große Winkel schlechter ist als die der übrigen, wenn auch nicht so schlecht wie im 1. Beispiel. Es gilt auch hier das dort Gesagte; wir brauchen den langen Ausdruck für  $\psi$  nicht anzuschreiben, weil wir ihn nicht benutzen werden.

Mit den behandelten Beispielen wollen wir uns begnügen. Sie dürften gezeigt haben, daß man mit Hilfe der Reihenentwicklungen auf einem zwar etwas mühsamen, aber doch gangbaren Weg auch zu einer gewissen zahlenmäßigen Beherrschung unserer Kreiselbewegungen gelangt.

(Eingegangen am 30. Januar 1937.)