

Werk

Titel: VI. Geometrische Deutungen der Invarianten einer Kreiskurve II. Ordnung

Ort: Berlin

Jahr: 1938

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0043|log100

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Wir erwähnen noch, daß nach der Diskussion der aus (66) hergeleiteten Gleichungen auch jene Kreiskurven des quadratischen Büschels $f_1 = \nu^2 f + 2\nu h + k$, deren Parameter ν der Gleichung:

$$2\nu^3 - I_2\nu - I_3 = 0$$

genügen, irgendwelche besondere Eigenschaften aufzuweisen scheinen.

VI. Geometrische Deutungen der Invarianten einer Kreiskurve zweiter Ordnung.

36. Die geometrische Deutung der Invarianten g_2 und g_3 ist bekannt¹⁹⁾. Ist $g_3 = 0$ oder $g_2 = 0$, so liegen die vier reellen Brennpunkte harmonisch bzw. äquianharmonisch. Zieht man von beiden unendlich fernen Kreispunkten Tangenten an die Kreiskurve, so sind bekanntlich die Doppelverhältnisse der beiden Tangentenquadrupel einander gleich und letzte daher projektiv. Jede Tangente des einen Büschels schneidet eine jede Tangente des zweiten in einem Brennpunkte. Da die Strahlen zweier projektiver Quadrupel auf vier Arten aufeinander bezogen werden können, so liegen die Brennpunkte zu je vieren auf vier Kreisen. Es ist dies der Inhalt des Hartschen Satzes und wir wollen diese Kreise die Hartschen Kreise der Kreiskurve nennen.

Ist aber $g_3 = 0$, so ist das Doppelverhältnis der beiden Tangentenquadrupel harmonisch und die Tangenten können auf acht verschiedene Weisen projektiv aufeinander bezogen werden. Die Anzahl der Hartschen Kreise ist also acht, ebenso findet man, daß bei $g_2 = 0$ diese Anzahl zwölf sein muß. Also:

Ist $g_3 = 0$ oder $g_2 = 0$, so liegen die Brennpunkte zu je vieren auf acht bzw. zwölf Hartschen Kreisen.

37. Die Bedeutung von $I_3 = 0$ haben wir bereits erwähnt. In diesem Falle reduziert sich die abgeleitete Kreiskurve $h = 0$ auf ein Punktepaar. Ähnliche Bedeutung besitzt das Verschwinden von J_4 , für die Kreiskurve $k = 0$, die in diesem Falle in zwei Kreise zerfällt. Dadurch ist aber auch die ursprüngliche Kreiskurve $f = 0$ geometrisch ausgezeichnet.

Im Falle $I_3 = 0$ dürfen wir, da die Determinante (13) verschwindet, setzen:

$$\bar{C} = \lambda A + 2\mu \bar{B}, \quad \bar{E} = \lambda B + 2\mu D, \quad F = \lambda C + 2\mu E.$$

und somit:

$$\begin{aligned} C &= \bar{\lambda} A + 2\bar{\mu} B, & E &= \bar{\lambda} B + 2\bar{\mu} D, \\ F &= \lambda \bar{\lambda} A + 2\lambda \bar{\mu} B + 2\bar{\lambda} \mu B + 4\mu \bar{\mu} D. \end{aligned}$$

¹⁹⁾ R. Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen. I, Leipzig (1916), S. 121 u. 135.

Die Kreiskurve $f = 0$ können wir also in folgender Weise schreiben:

$$A(u^2 + \lambda)(\bar{u}^2 + \bar{\lambda}) + 2B(u^2 + \lambda)(\bar{u} + \bar{\mu}) + 2B(u + \mu)(\bar{u}^2 + \bar{\lambda}) + 4D(u + \mu)(\bar{u} + \bar{\mu}) = 0.$$

Also:

Die Kreiskurve mit verschwindender Invariante I_3 entsteht, wenn man einen geeigneten Kreis der besonderen Transformation:

$$z = u + \frac{1}{u}$$

unterwirft.

38. Die Kreiskurven mit $I_3 = 0$ besitzen eine bereits von Darboux²⁰⁾ angegebene Erzeugungsweise. Bezeichnen wir mit u_i , $i = 1, 2, 3, 4$ vier Punkte der u -Ebene, so ist die von Darboux behandelte Kreiskurve:

$$|z - u_1|^2 |z - u_2|^2 = k |z - u_3|^2 |z - u_4|^2$$

von der erwähnten Art. Eine wesentlich andere Kreiskurve mit $I_3 = 0$ ist definiert durch das Verschwinden folgender Determinante:

$$(68) \quad \begin{vmatrix} 0 & |u - u_1|^2 & |u - u_2|^2 \\ |u - u_3|^2 & |u_1 - u_3|^2 & |u_2 - u_3|^2 \\ |u - u_4|^2 & |u_1 - u_4|^2 & |u_2 - u_4|^2 \end{vmatrix} = 0,$$

die den Punkten u_i offenbar invariant zugeordnet ist. Legt man etwa u_3 und u_4 nach 0 und ∞ , so kann man leicht bestätigen, daß $I_3 = 0$ ist.

Die Erzeugungsweise einer Kreiskurve (68) ist einfach. Sucht man die Bedingung, unter welcher sich zwei Kreise, die beziehungsweise durch die Punkte u , u_1 , u_2 und u , u_3 , u_4 gehen, orthogonal schneiden, so muß man verlangen, daß das folgende Matrizenprodukt:

$$\begin{vmatrix} u\bar{u} & u & \bar{u} & 1 \\ u_1\bar{u}_1 & u_1 & \bar{u}_1 & 1 \\ u_2\bar{u}_2 & u_2 & \bar{u}_2 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} 1 & -\bar{u} & -u & u\bar{u} \\ 1 & -\bar{u}_3 & -u_3 & u_3\bar{u}_3 \\ 1 & -\bar{u}_4 & -u_4 & u_4\bar{u}_4 \end{vmatrix}$$

gleich Null ist. Das Produkt beider Matrizen ergibt aber gerade die Determinante (68). Also:

Die Schnittpunkte eines beliebigen Kreises durch die Punkte u_1 , u_2 mit jenem Kreise durch u_3 , u_4 , der zu dem ersten orthogonal ist, liegen auf der Kreiskurve (68).

Zu vier gegebenen Punkten u_i existieren noch zwei solche Kreiskurven, die man aus (68) erhält, wenn man 2 mit 3 bzw. 4 vertauscht. Man beweist leicht, daß sich alle drei Kurven in denselben acht Punkten schneiden, unter denen aber vier Punkte u_i vorkommen. Bezeichnen wir die übrigen vier Punkte mit v_i , $i = 1, 2, 3, 4$, so sind auf diese Weise vier beliebigen Punkten u_i

²⁰⁾ Darboux, S. 78ff.

vier ganz bestimmte Punkte v_i zugeordnet. Die geometrische Konstruktion der Punkte v_i ist mindestens in einem Falle höchst einfach. Liegen die Punkte u_i derart, daß sie Eckpunkte und der Höhenschnittpunkt eines Dreiecks sind, so sind die Punkte v_i der unendlich ferne Punkt und die drei Höhenfußpunkte (s. Fig. 4). Es folgt daraus der weniger bekannte Satz, demzufolge die Summe der Quadrate einer Seite und des Höhenabschnittes zwischen dem Höhenschnittpunkt und des der Seite entgegengesetzten Eckpunktes für alle drei Seiten des Dreiecks dieselbe ist.

Verlangen wir in der Tat, daß die Kreiskurve (68) durch den Punkt $u = \infty$ geht, so bekommen wir, wenn wir (68) mit u^2 dividieren und dann $\frac{1}{u}$ gleich Null setzen, die folgende Beziehung:

$$|u_2 - u_3|^2 + |u_1 - u_4|^2 = |u_1 - u_3|^2 + |u_2 - u_4|^2.$$

Weil $u = \infty$ auch ein Punkt der aus (68) durch Vertauschung von 2 und 3 folgenden Kreiskurve sein soll, so ergibt dieselbe Vertauschung, ausgeführt in der obigen Gleichung, die neue Beziehung:

$$|u_2 - u_3|^2 + |u_1 - u_4|^2 = |u_1 - u_2|^2 + |u_3 - u_4|^2.$$

Die Punkte u_1, u_2, u_3 sind Eckpunkte, u_4 aber der Höhenschnittpunkt eines sonst beliebigen Dreiecks (s. Fig. 4).

39. Bedeutend schwieriger ist die geometrische Deutung der einfachsten Invariante I_2 und damit der der Invarianten I_4 und J_4 . Zu diesem Zweck ist es notwendig, ein zur Kreiskurve $f = 0$ besonders gelegenes Punktsystem einzuführen, welches wir kurz das Grundpunktsystem nennen wollen.

Um dies zu erreichen, untersuchen wir zuerst die aus $I_2 = 2D^2 + AF + C\bar{C} - 2(B\bar{E} + \bar{B}E)$ hergeleitete Reduktion der gegebenen Kreiskurve $f = 0$ auf die kanonische Gestalt:

$$(69) \quad f = Au^2\bar{u}^2 + 2Bu^2\bar{u} + 2\bar{B}u\bar{u}_2 + 2Eu + 2\bar{E}\bar{u} + F = 0,$$

wo:

$$(70) \quad C = D = \bar{C} = B\bar{E} + \bar{B}E = 0$$

sind. In diesem Falle erhalten wir für die Invarianten I_2, I_3, J_4 folgende Ausdrücke:

$$(71) \quad \begin{aligned} I_2 &= AF, \\ I_3 &= -(AE\bar{E} + F\bar{B}\bar{B}), \\ J_4 &= (B\bar{E} - \bar{B}E)^2 = -4B\bar{B}E\bar{E}. \end{aligned}$$

Diese Reduktion ist also nur reell, wenn $J_4 < 0$ ist.

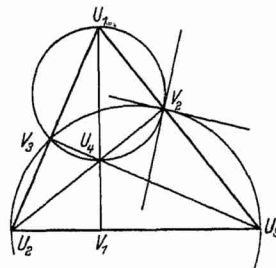


Fig. 4.

Aus $B\bar{E} + \bar{B}E = 0$, $B\bar{E} - \bar{B}E = \sqrt{J_4}$ folgt sofort:

$$(72) \quad E = \frac{\sqrt{J_4}}{2B}, \quad \bar{E} = -\frac{\sqrt{J_4}}{2\bar{B}}.$$

Setzen wir diese Werte in den Ausdruck für I_3 ein und schreiben wir für $\frac{1}{A}B\bar{B} = t$, so muß t folgender Gleichung genügen:

$$(73) \quad 4I_2t^2 + 4I_3t - J_4 = 0.$$

Jeder Wurzel t_j der letzten Gleichung entspricht von Drehungen und Dehnungen abgesehen eine einzige Reduktion der Kreiskurve. In der Tat bekommt man aus (71) und (72):

$$B = \sqrt{At_j} e^{i\theta}, \quad E = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{J_4}{At_j}} e^{i\theta}, \quad F = \frac{1}{A} I_2$$

und man beweist leicht, daß jeder Änderung von A eine Dehnung der u -Ebene entspricht. Den beiden Wurzeln von (73) würden also noch zwei verschiedene Formen (69) entsprechen. Nun bestätigt man leicht, daß die Vertauschung der Wurzeln t_1, t_2 auch durch die lineare Transformation:

$$u' = \frac{1}{u}$$

erreicht werden kann. Also:

Die Reduktion der Kreiskurve auf die Gestalt (69) ist bis auf solche Transformationen der u -Ebene, die die beiden Punkte 0 und ∞ ungeändert lassen oder vertauschen, eindeutig bestimmt.

40. Neben dem Punktepaar 0, ∞ haben für die kanonische Gestalt (69) noch jene Punktepaare dieselbe Bedeutung, die aus 0, ∞ durch Spiegelung an den Inversionskreisen von (69) entstehen. Da die Spiegelung an einem Inversionskreis als Produkt der Spiegelungen an den drei übrigen Inversionskreisen ausdrückbar ist, gibt es im ganzen acht Paare solcher zur gegebenen Kreiskurve ausgezeichnet gelegenen Punkte. Sie bilden das am Anfang von Nummer 39 angesagte Grundpunktsystem der Kreiskurve.

Die Lagebestimmung dieser Punkte ist einfach. Da diese Punkte symmetrisch in bezug auf die Inversionskreise liegen, dürfen wir sie als Schnittpunkte solcher Kreiskurven auffassen, die mit der ursprünglichen dieselben Inversionskreise besitzen. Wir bestimmen daher das Büschel jener Kreiskurven $pf + qh + rk$, die durch die Punkte 0 und ∞ gehen. Zu diesem Zweck berechnen wir uns für den Fall einer Kreiskurve (69) den ersten und den letzten Koeffizienten der Kreiskurven h und k . Wir finden nach (11) und (21):

$$h = -B\bar{B}u^2\bar{u}^2 + \dots - E\bar{E},$$

$$k = - \begin{vmatrix} A & B & \bar{B} \\ B & 0 & 0 \\ \bar{B} & 0 & 0 \end{vmatrix} u^2\bar{u}^2 + \dots - \begin{vmatrix} 0 & 0 & E \\ 0 & 0 & \bar{E} \\ E & \bar{E} & F \end{vmatrix}.$$