Werk

Titel: Neue periodische Lösungen des ebenen Drei-und Mehrkörperproblems

Autor: Perron, O.

Ort: Berlin

Jahr: 1937

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0042|log46

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Neue periodische Lösungen des ebenen Drei- und Mehrkörperproblems.

Von

Oskar Perron in München.

§ 1.

Einleitung.

Kürzlich konnte ich für das Dreikörperproblem[1]) und für das Vierkörperproblem[2]) nach einheitlicher Methode einparametrige Scharen periodischer Lösungen nachweisen, wobei die drei bzw. vier Massen ganz beliebig sein durften. Dabei ging ich — die Sache mag hier am *Vier*körperproblem erläutert werden — aus von der bekannten Lagrangeschen Lösung des *Drei*körperproblems, bei der alle drei Massen in einem mit konstanter Geschwindigkeit rotierenden Koordinatensystem in Ruhe bleiben und zwar auf gerader Linie. Wenn dann eine der drei Massen in zwei Teilmassen gespalten wird, entsteht das *Vier*körperproblem und man wird vermuten, daß es Lösungen gibt, bei denen die vier Massen in dem rotierenden Koordinatensystem lange Zeit in beliebiger Nähe der drei Ruhepunkte der erwähnten Lagrangeschen Lösung bleiben, die beiden Teile der gespaltenen Masse also insbesondere nahe beieinander. In der Tat konnte ich derartige Bewegungen nachweisen und sogar eine einparametrige Schar periodischer Umläufe um die Ruhepunkte. Sie ergab sich unter Benutzung des aus den Differentialgleichungen der Bewegung leicht ersichtlichen Umstands, daß simultane Bahnkurven, welche die Gerade der drei Ruhepunkte zu zwei verschiedenen Zeitpunkten senkrecht schneiden, notwendig periodisch werden. Dieser Ansatz lieferte nach Einführung eines Scharparameters λ als Periodizitätsbedingungen sechs Gleichungen mit sechs den Anfangszustand der Bewegung charakterisierenden Unbekannten, die als Funktionen von λ zu bestimmen waren. Ihre eindeutige Erfüllbarkeit folgte aus dem Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante. — Ähnlich war die Sache beim *Drei*körperproblem; hier wurde von der Kreis-

[1]) Über eine Schar periodischer Lösungen des ebenen Dreikörperproblems (Mondbahnen), Sitzungsber. d. Bayr. Akad. d. Wissensch., math.-naturw. Abt., Jahrg. 1936, S. 157—176.

[2]) Über eine Schar periodischer Lösungen des ebenen Vierkörperproblems, Math. Annalen **113** (1936), S. 95—109.

bewegung des *Zwei*körperproblems ausgegangen, die sich ja in einem rotierenden Koordinatensystem als Ruhe darstellt, und dann wurde die eine der beiden Massen gespalten.

Nun kann man fragen, ob es nicht auch periodische Lösungen gibt, bei denen die Bedingung des zweimaligen Senkrechtschneidens nicht erfüllt ist. Stellt man demgemäß unter Beibehaltung der übrigen Bestandteile meiner Methode, insbesondere des Scharparameters λ, die Periodizitätsbedingungen in der allgemeinen Form auf, daß man einfach nach bestimmter Zeit Wiederkehr des Anfangszustands fordert, so erhält man — um die Sache wieder am *Vier*körperproblem zu erläutern — zwölf Gleichungen mit zwölf den Anfangszustand charakterisierenden Unbekannten. Aber die Weiterbehandlung ist wesentlich schwieriger, weil es sich zeigt, daß die jetzt zwölf-reihige Funktionaldeterminante verschwindet. Dabei ist dieses Verschwinden allerdings vorauszusehen, weil ja periodische Bahnen an einer beliebigen Stelle ihres Weges begonnen werden können, so daß die zwölf Gleichungen, wenn sie überhaupt lösbar sind, gewiß unendlich viele Lösungen haben müssen, indem eine der zwölf Unbekannten willkürlich bleiben darf. Aber diese Voraussicht nützt nichts für den Nachweis der Lösbarkeit.

Nun kennt man aber von den Bewegungsgleichungen das Integral der lebendigen Kraft, und dieses bewirkt, daß eine der zwölf Gleichungen eine Folge der elf anderen ist, so daß man sich nur um die Lösbarkeit dieser elf zu kümmern braucht. Damit sind aber die Schwierigkeiten noch nicht behoben. In Wahrheit zerfällt nämlich die zwölf-reihige Funktionaldeterminante in drei vierreihige Faktoren, von denen *zwei* verschwinden, während der dritte nicht verschwindet. Nur das Verschwinden des ersten Faktors war vorauszusehen und findet seine Erklärung in dem geschilderten Sachverhalt. *Das Verschwinden des zweiten Faktors ist dagegen eine wirkliche Überraschung*; es deutet an, daß die Lösungsschar größer ist als vermutet, indem noch eine weitere Unbekannte willkürlich bleiben darf. Nun kennt man außer dem Integral der lebendigen Kraft auch noch das Integral der Flächen, und beide zusammen bewirken, daß von den zwölf Gleichungen sogar *zwei* eine Folge der zehn anderen sind. Diese letzteren erweisen sich bei willkürlicher Wahl von zwei Unbekannten als eindeutig lösbar. So gelangt man zu einer *zweiparametrigen* Schar periodischer Lösungen, von der die a. a. O. gefundene Schar eine einparametrige Unterschar ist. Die beiden Parameter, die sich nicht etwa auf einen reduzieren lassen, sind dabei λ und die eine der beiden willkürlich gebliebenen Unbekannten, während die andere nur die Willkürlichkeit des Anfangspunktes innerhalb der gleichen Bahn bezeichnet und daher ohne Verlust an Allgemeinheit auch als fest gewählt werden kann. —

Ebenso stellt sich auch beim *Drei*körperproblem die a. a. O. nachgewiesene einparametrige Schar als Unterschar einer zweiparametrigen heraus.

Die befolgte Methode läßt sich verallgemeinern, indem man von $n+1$ Massenpunkten ausgeht, die unter dem Einfluß der Schwerkraft in einem mit konstanter Geschwindigkeit rotierenden Koordinatensystem in Ruhe bleiben. Derartige Konfigurationen sind mehrere bekannt. Speziell bei zwei Punkten, also $n=1$, ist es die triviale Planetenkreisbahn; bei drei Punkten, also $n=2$, gibt es außer dem obigen Fall noch den ebenfalls von Lagrange angegebenen Fall, daß die drei Ruhepunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden (und keinen weiteren Fall); auch für $n>2$ sind schon Fälle angegeben worden[3]). Indem man eine der $n+1$ Massen in zwei Teile spaltet[4]), so daß das $(n+2)$-Körperproblem entsteht, erhält man nach Einführung eines Scharparameters λ als Periodizitätsbedingungen $4+4n$ Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten. Die $(4+4n)$-reihige Funktionaldeterminante zerfällt in eine vierreihige und zwei $(2n)$-reihige Determinanten. Der eine $(2n)$-reihige Faktor verschwindet nicht, während der vierreihige und der andere $(2n)$-reihige Faktor verschwinden. Die bekannten Integrale der lebendigen Kraft und der Flächen bewirken aber, daß zwei der $4+4n$ Gleichungen eine Folge der übrigen sind. Wählt man dann zwei der Unbekannten willkürlich oder auch ohne Verlust an Allgemeinheit eine davon fest (vgl. oben), so sind noch $3+(4n-1)$ Gleichungen mit ebensoviel Unbekannten zu lösen. Dabei bleibt die nichtverschwindende $(2n)$-reihige Determinante erhalten; an Stelle der verschwindenden vierreihigen aber tritt eine dreireihige, die nicht verschwindet. Statt der verschwindenden $(2n)$-reihigen Determinante schließlich kommt eine $(2n-1)$-reihige, die im allgemeinen wieder nicht verschwinden wird; doch konnte ich das nicht allgemein entscheiden. Jedenfalls hat man in allen Fällen, in denen diese kritische Determinante nicht verschwindet, eine zweiparametrige Schar periodischer Lösungen. Man hat sogar, da mehrere der Unbekannten (nicht alle) sich dazu eignen, als die willkürlich bleibende gewählt zu werden, eine gewisse Auswahl zwischen mehreren kritischen Determinanten; das Nichtverschwinden einer einzigen genügt schon.

---

[3]) Über die Literatur vgl. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften Band VI, 2 A, S. 529.

[4]) Eine andere Klasse periodischer Lösungen erhält man, wenn man, ohne die Anzahl der Massen durch Spaltung um eine zu vermehren, Bahnkurven sucht, die in der Nähe der Ruhepunkte verlaufen. Das ist eine spezielle Aufgabe aus dem Gebiet der kleinen Schwingungen (was bei der Aufgabe des Textes nicht der Fall ist); sie kann ohne Vernachlässigung der Störungsglieder exakt durchgeführt werden, was in Münchener Dissertationen geschehen wird.

Speziell für $n = 1$ ist das Nichtverschwinden der (einreihigen) kritischen Determinante sofort zu sehen, womit für das Dreikörperproblem die zweiparametrige Schar nachgewiesen ist. Ebenso verschwindet für $n = 2$ sowohl in dem Fall, daß die drei Ruhepunkte in gerader Linie liegen, als auch im Fall des gleichseitigen Dreiecks eine der zur Auswahl stehenden kritischen (dreireihigen) Determinanten nicht, so daß auch beim Vierkörperproblem die zweiparametrigen Scharen gesichert sind.

Im folgenden wird die Rechnung zunächst für beliebiges n durchgeführt und dann speziell für $n = 1$ und $n = 2$ das Nichtverschwinden der kritischen Determinante gezeigt.

§ 2.

Die Bewegungsgleichungen.

I. Wir betrachten $n + 2$ Massenpunkte mit den Massen $m_0, m_1, \ldots, m_{n+1}$. Ihre Bewegung unter dem Einfluß der Schwerkraft soll in der Ebene erfolgen. Sind x_ν, y_ν die Koordinaten des Punktes mit der Masse m_ν (kurz: des Punktes m_ν) in einem unbewegten Koordinatensystem und setzt man $x_\nu + i y_\nu = z_\nu$, so lauten bei passender Wahl der Zeiteinheit die Bewegungsgleichungen folgendermaßen[5]):

$$\frac{d^2 z_\nu}{dt^2} = \sum_{\mu=0}^{n+1}{}' m_\mu \frac{z_\mu - z_\nu}{|z_\mu - z_\nu|^3} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n+1). \tag{1}$$

An Integralen kennt man:
erstens den Schwerpunktsatz:

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} m_\nu z_\nu = C_1 t + C_2; \tag{2}$$

zweitens das Integral der lebendigen Kraft (Energiesatz):

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} m_\nu \left|\frac{d z_\nu}{dt}\right|^2 = 2 \sum_{\nu=1}^{n+1} \sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{m_\mu m_\nu}{|z_\mu - z_\nu|} + h; \tag{3}$$

drittens das Integral der Flächen (Flächensatz):

$$\Im\left(\sum_{\nu=0}^{n+1} m_\nu \bar{z}_\nu \frac{d z_\nu}{dt}\right) = k, \tag{4}$$

wobei in üblicher Weise durch Überstreichen die konjugiert-komplexe Größe bezeichnet ist und $\Im(a)$ den durch i dividierten imaginären Teil

[5]) Ein Akzent an einem Summenzeichen soll stets andeuten, daß ein Summand, der infolge verschwindenden Nenners sinnlos ist, nicht mitzählt. In Formel (1) ist also bei der Summation nach μ der Wert $\mu = \nu$ auszulassen.

der komplexen Zahl a bedeutet: $\Im(a) = \frac{a-\bar{a}}{2i}$ (entsprechend wird $\Re(a)$ später den reellen Teil bedeuten: $\Re(a) = \frac{a+\bar{a}}{2}$). Dabei sind C_1 und C_2 willkürliche komplexe, h und k willkürliche reelle Konstanten.

II. Wir führen jetzt die Relativkoordinaten der ersten $n+1$ Punkte in bezug auf den Punkt m_{n+1} ein:

$$z_\nu - z_{n+1} = p_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n). \tag{5}$$

Nur diese interessieren uns; denn sobald sie bekannt sind, ergeben sich die z_ν selbst aus dem Schwerpunktsatz (2). Aus (1) erhält man durch Subtraktion die Differentialgleichungen für die p_ν:

$$\frac{d^2 p_\nu}{dt^2} = \sum_{\mu=0}^{n}{}' m_\mu \frac{p_\mu - p_\nu}{|p_\mu - p_\nu|^3} - \sum_{\mu=0}^{n} m_\mu \frac{p_\mu}{|p_\mu|^3} - m_{n+1}\frac{p_\nu}{|p_\nu|^3} \tag{6}$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Für dieses System ergeben sich aus dem Energie- und Flächensatz zwei entsprechende Integrale. Zunächst folgt nämlich aus (2) und (5), wenn

$$\sum_{\nu=0}^{n+1} m_\nu = M \tag{7}$$

gesetzt wird:

$$\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu p_\nu + M z_{n+1} = C_1 t + C_2. \tag{8}$$

Sodann geht der Energiesatz (3) vermöge (5) über in

$$\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \left|\frac{dp_\nu}{dt} + \frac{dz_{n+1}}{dt}\right|^2 + m_{n+1}\left|\frac{dz_{n+1}}{dt}\right|^2 = 2\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{m_\mu m_\nu}{|p_\mu - p_\nu|} + 2\sum_{\mu=0}^{n}\frac{m_\mu m_{n+1}}{|p_\mu|} + h,$$

oder mit Benutzung der Formel $|a+b|^2 = |a|^2 + a\bar{b} + \bar{a}b + |b|^2$ in

$$\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \left|\frac{dp_\nu}{dt}\right|^2 + \frac{dz_{n+1}}{dt}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{d\bar{p}_\nu}{dt} + \frac{d\overline{z_{n+1}}}{dt}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + M\left|\frac{dz_{n+1}}{dt}\right|^2 = 2\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{m_\mu m_\nu}{|p_\mu - p_\nu|} + 2\sum_{\mu=0}^{n}\frac{m_\mu m_{n+1}}{|p_\mu|} + h. \tag{9}$$

Hier kann man aber z_{n+1} mit Hilfe von (8) herausschaffen. Aus (8) folgt nämlich

$$\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + M\frac{dz_{n+1}}{dt} = C_1, \qquad \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{d\bar{p}_\nu}{dt} + M\frac{d\overline{z_{n+1}}}{dt} = \bar{C}_1,$$

und hieraus durch Multiplikation

$$\left|\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt}\right|^2 + M\frac{dz_{n+1}}{dt}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{d\bar{p}_\nu}{dt} + M\frac{d\bar{z}_{n+1}}{dt}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + M^2\left|\frac{dz_{n+1}}{dt}\right|^2 = C_1\bar{C}_1.$$

Dividiert man diese Gleichung durch M und subtrahiert sie dann von (9), so kommt

$$(10)\quad \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \left|\frac{dp_\nu}{dt}\right|^2 - \frac{1}{M}\left|\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt}\right|^2 = 2\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{\nu-1}\frac{m_\mu m_\nu}{|p_\mu - p_\nu|} + 2\sum_{\mu=0}^{n}\frac{m_\mu m_{n+1}}{|p_\mu|} + h_1,$$

wo auch h_1 eine willkürliche reelle Konstante ist. Das ist der Energiesatz für die Relativkoordinaten.

Der Flächensatz (4) geht vermöge (5) über in

$$(11)\quad \Im\Big(\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{p}_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + \bar{z}_{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + \frac{dz_{n+1}}{dt}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{p}_\nu + M\bar{z}_{n+1}\frac{dz_{n+1}}{dt}\Big) = k.$$

Hier kann man wieder z_{n+1} mit Hilfe von (8) herausschaffen. Nach (8) ist nämlich

$$\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{p}_\nu + M\bar{z}_{n+1} = \bar{C}_1 t + \bar{C}_2, \quad \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + M\frac{dz_{n+1}}{dt} = C_1,$$

und hieraus folgt durch Multiplikation

$$\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{p}_\nu \cdot \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + M\bar{z}_{n+1}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt} + M\frac{dz_{n+1}}{dt}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{p}_\nu + M^2\bar{z}_{n+1}\frac{dz_{n+1}}{dt} = \bar{C}_1 C_1 t + \bar{C}_2 C_1.$$

Der imaginäre Teil der linken Seite ist also konstant. Dividiert man ihn durch iM und subtrahiert dann von (11), so erhält man

$$(12)\quad \Im\Big(\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{p}_\nu \frac{dp_\nu}{dt} - \frac{1}{M}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{p}_\nu \cdot \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \frac{dp_\nu}{dt}\Big) = k_1,$$

wo auch k_1 wieder eine willkürliche reelle Konstante ist. Das ist der Flächensatz für die Relativkoordinaten.

III. Wir führen jetzt ein mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit α rotierendes Koordinatensystem ein, indem wir

$$p_\nu = e^{i\alpha t} u_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, n) \tag{13}$$

setzen. Die Bewegungsgleichungen (6) gehen dann über in

$$\boxed{\frac{d^2 u_\nu}{dt^2} + 2i\alpha \frac{du_\nu}{dt} - \alpha^2 u_\nu = \sum_{\mu=0}^{n}{}' m_\mu \frac{u_\mu - u_\nu}{|u_\mu - u_\nu|^3} - \sum_{\mu=0}^{n} m_\mu \frac{u_\mu}{|u_\mu|^3} - m_{n+1}\frac{u_\nu}{|u_\nu|^3}} \tag{14}$$

$$(\nu = 0, 1, \ldots, n).$$

Der Energiesatz (10) geht über in

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \left|\frac{du_\nu}{dt} + i\alpha u_\nu\right|^2 - \frac{1}{M}\left|\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \left(\frac{du_\nu}{dt} + i\alpha u_\nu\right)\right|^2 \\ &= 2\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=0}^{\nu-1} \frac{m_\mu m_\nu}{|u_\mu - u_\nu|} + 2\sum_{\mu=0}^{n} \frac{m_\mu m_{n+1}}{|u_\mu|} + h_1, \end{aligned} \tag{15}$$

und der Flächensatz (12) in

$$\Im\left(\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{u}_\nu \left(\frac{du_\nu}{dt} + i\alpha u_\nu\right) - \frac{1}{M}\sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \bar{u}_\nu \cdot \sum_{\nu=0}^{n} m_\nu \left(\frac{du_\nu}{dt} + i\alpha u_\nu\right)\right) = k_1. \tag{16}$$

IV. Denkt man jetzt vorübergehend die Masse m_0 mit m_{n+1} in einem Punkt vereinigt, so daß es sich um das $(n+1)$-Körperproblem mit den Massen $m_1, \ldots, m_n, m_0 + m_{n+1}$ handelt, so lauten die Bewegungsgleichungen analog zu (14):

$$\frac{d^2 u_\nu}{dt^2} + 2i\alpha \frac{du_\nu}{dt} - \alpha^2 u_\nu = \sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{u_\mu - u_\nu}{|u_\mu - u_\nu|^3} - \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{u_\mu}{|u_\mu|^3} - (m_0 + m_{n+1})\frac{u_\nu}{|u_\nu|^3}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Sie haben als Lösung u. a. die Ruhelage $u_\nu = a_\nu$, wenn die n Konstanten a_ν aus den n Gleichungen

$$\boxed{-\alpha^2 a_\nu = \sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3} - \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3} - (m_0 + m_{n+1})\frac{a_\nu}{|a_\nu|^3}} \tag{17}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

berechnet werden. Dieses Gleichungssystem soll hier nicht diskutiert werden. Jedenfalls ist im Fall $n = 1$ die Lösung trivial; im Fall $n = 2$ gibt es die Lagrangeschen Lösungen, bei denen die zwei Ruhepunkte mit dem dritten, dem Nullpunkt, in gerader Linie liegen oder ein gleichseitiges Dreieck bilden, und auch für $n > 2$ sind einzelne Lösungen bekannt (vgl. Einleitung). *Wir*

werden daher im folgenden einfach unter α *und* $m_0, m_1, \ldots, m_{n+1}$ *irgend welche positive, unter* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *komplexe Zahlen verstehen, die durch die Gleichungen* (17) *aneinander gebunden sind.* Natürlich sind wegen der auftretenden Nenner die a_ν voneinander und von 0 verschieden.

V. Wird nun die Masse $m_0 + m_{n+1}$ wieder in ihre beiden Teile m_0 und m_{n+1} gespalten, so ist zu vermuten, daß das entstehende durch die Gleichungen (14) dargestellte $(n+2)$-Körperproblem eine Schar von Lösungen hat, bei denen die Masse m_0 kleine Umläufe um m_{n+1} beschreibt und die anderen Massen m_ν kleine Umläufe um die Ruhepunkte a_ν beschreiben. Man wird weiter, wenn m_0 sehr nahe bei m_{n+1} bleibt, so daß die von den übrigen Massen m_ν auf m_0 und m_{n+1} ausgeübte Anziehungskraft gegenüber der Kraft, mit der sich m_0 und m_{n+1} gegenseitig anziehen, nicht sehr ins Gewicht fällt, vermuten, daß die Schar der Umläufe von m_0 um m_{n+1} annähernd dem dritten Keplerschen Gesetz folgt. Diese Erwägungen führen zu der in ähnlicher Weise wohl zuerst beim sog. eingeschränkten Dreikörperproblem von Herrn Birkhoff[6]) angewandten Transformation

$$(18)\qquad \begin{cases} t = \lambda^3 \tau, \\ u_0 = \lambda^2 V, \\ u_\nu = a_\nu + \lambda^2 U_\nu \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wo λ ein reeller Scharparameter ist. Die Bewegungsgleichungen (14) gehen dann, wenn die Differentiation nach τ (nicht nach t) durch einen Akzent bezeichnet wird, über in:

$$(19)\quad \begin{cases} V'' + 2i\alpha\lambda^3 V' - \alpha^2\lambda^6 V = -(m_0 + m_{n+1})\dfrac{V}{|V|^3} \\ \quad + \lambda^4 \displaystyle\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu + \lambda^2(U_\mu - V)}{|a_\mu + \lambda^2(U_\mu - V)|^3} - \lambda^4 \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu + \lambda^2 U_\mu}{|a_\mu + \lambda^2 U_\mu|^3}, \end{cases}$$

$$(20)\quad \begin{cases} U_\nu'' + 2i\alpha\lambda^3 U_\nu' - \alpha^2\lambda^4(a_\nu + \lambda^2 U_\nu) \\ \quad = -m_0 \dfrac{V}{|V|^3} + \lambda^4 \displaystyle\sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu + \lambda^2(U_\mu - U_\nu)}{|a_\mu - a_\nu + \lambda^2(U_\mu - U_\nu)|^3} \\ \quad - \lambda^4 \displaystyle\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu + \lambda^2 U_\mu}{|a_\mu + \lambda^2 U_\mu|^3} - \lambda^4 m_0 \frac{a_\nu + \lambda^2(U_\nu - V)}{|a_\nu + \lambda^2(U_\nu - V)|^3} \\ \quad - \lambda^4 m_{n+1} \dfrac{a_\nu + \lambda^2 U_\nu}{|a_\nu + \lambda^2 U_\nu|^3} \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

[6]) G. D. Birkhoff, The restricted problem of three bodies, Rendiconti del circolo matematico di Palermo **39** (1915), S. 265–334; speziell S. 299. Natürlich fallen beim Birkhoffschen Problem die letzten n Transformationsgleichungen weg.

Setzt man schließlich noch

$$m_0 + m_{n+1} = \beta^2 \qquad (\beta > 0), \tag{21}$$

$$U_\nu = \frac{m_0}{\beta^2} V + W_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{22}$$

so gehen die Gleichungen (19), (20) mit den Unbekannten $V, U_1, \ldots, U_n$ über in die folgenden endgültigen Gleichungen mit den Unbekannten $V, W_1, \ldots, W_n$:

$$\begin{aligned} &V'' + 2i\alpha\lambda^3 V' - \alpha^2\lambda^6 V \\ &\quad = -\beta^2 \frac{V}{|V|^3} + \lambda^4 \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \left(\frac{a_\mu + \lambda^2 (U_\mu - V)}{|a_\mu + \lambda^2 (U_\mu - V)|^3} - \frac{a_\mu + \lambda^2 U_\mu}{|a_\mu + \lambda^2 U_\mu|^3} \right), \end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &W_\nu'' + 2i\alpha\lambda^3 W_\nu' - \alpha^2\lambda^6 W_\nu \\ &= \alpha^2 a_\nu \lambda^4 + \lambda^4 \sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu + \lambda^2 (U_\mu - U_\nu)}{|a_\mu - a_\nu + \lambda^2 (U_\mu - U_\nu)|^3} \\ &\quad - \lambda^4 \frac{m_0}{\beta^2} \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu + \lambda^2 (U_\mu - V)}{|a_\mu + \lambda^2 (U_\mu - V)|^3} - \lambda^4 \frac{m_{n+1}}{\beta^2} \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu + \lambda^2 U_\mu}{|a_\mu + \lambda^2 U_\mu|^3} \\ &\quad - \lambda^4 m_0 \frac{a_\nu + \lambda^2 (U_\nu - V)}{|a_\nu + \lambda^2 (U_\nu - V)|^3} - \lambda^4 m_{n+1} \frac{a_\nu + \lambda^2 U_\nu}{|a_\nu + \lambda^2 U_\nu|^3} \\ &\qquad\qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned} \tag{24}$$

Dabei sind auf der rechten Seite die U_ν vermöge (22) durch V und W_ν auszudrücken.

Die rechten Seiten der Gleichungen (23) und (24) lassen sich unter Benutzung der Formel

$$\begin{aligned} \frac{a + \lambda^2 U}{|a + \lambda^2 U|^3} &= \frac{a}{|a|^3} \left(1 + \lambda^2 \frac{U}{a}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \lambda^2 \frac{\overline{U}}{\overline{a}}\right)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \frac{a}{|a|^3} \left[1 - \frac{\lambda^2}{2} \left(\frac{U}{a} + 3 \frac{\overline{U}}{\overline{a}}\right) + \cdots\right] \end{aligned}$$

nach Potenzen von λ^2 entwickeln, und diese Entwicklungen werden, solange V und die W_ν beschränkt bleiben, für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|$ gelten. Dabei sieht man sofort, daß in (23) das Glied mit λ^4 herausfällt. Das gleiche ist aber auch bei (24) der Fall; hier ist der Koeffizient von λ^4 nämlich gleich

$$\begin{aligned} &\alpha^2 a_\nu + \sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3} - \frac{m_0}{\beta^2} \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a|^3} - \frac{m_{n+1}}{\beta^2} \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3} - m_0 \frac{a_\nu}{|a_\nu|^3} \\ &- m_{n+1} \frac{a_\nu}{|a_\nu|^3} = \alpha^2 a_\nu + \sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3} - \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3} - (m_0 + m_{n+1}) \frac{a_\nu}{|a_\nu|^3}, \end{aligned}$$

also wegen (17) gleich 0. Auch der Koeffizient von λ^6 ist leicht zu berechnen, wobei die U_ν natürlich durch die Ausdrücke (22) zu ersetzen sind. So erhält man

$$\text{(23a)}\qquad \boxed{\begin{aligned} &V'' + 2i\alpha\lambda^3 V' - \alpha^2\lambda^6 V \\ &\quad = -\beta^2 \frac{V}{|V|^3} + \frac{\lambda^6}{2}\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3}\left(\frac{V}{a_\mu} + 3\,\frac{\overline{V}}{\overline{a_\mu}}\right) + \sum_{r=8}^{\infty} F_r \lambda^r \end{aligned}},$$

$$\text{(24a)}\qquad \boxed{\begin{aligned} &W_\nu'' + 2i\alpha\lambda^3 W_\nu' - \alpha^2\lambda^6 W_\nu \\ &= \frac{\lambda^6}{2}\Big[-\sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3}\left(\frac{W_\mu - W_\nu}{a_\mu - a_\nu} + 3\,\frac{\overline{W}_\mu - \overline{W}_\nu}{\overline{a_\mu} - \overline{a_\nu}}\right) \\ &\quad + \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3}\left(\frac{W_\mu}{a_\mu} + 3\,\frac{\overline{W}_\mu}{\overline{a_\mu}}\right) \\ &\quad + \beta^2 \frac{a_\nu}{|a_\nu|^3}\left(\frac{W_\nu}{a_\nu} + 3\,\frac{\overline{W}_\nu}{\overline{a_\nu}}\right)\Big] + \sum_{r=8}^{\infty} G_{\nu r}\lambda^r \end{aligned}} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei die F_r und $G_{\nu r}$ Polynome von $V, \overline{V}, W_1, \overline{W}_1, \ldots, W_n, \overline{W}_n$ sind.

VI. Der Energiesatz (15) nimmt vermöge (18) die Form[7])

$$\begin{aligned} &m_0 |V' + i\alpha\lambda^3 V|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu |U_\nu' + i\alpha\lambda(a_\nu + \lambda^2 U_\nu)|^2 \\ &\qquad - \frac{1}{M}\Big|m_0(V' + i\alpha\lambda^3 V) + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu (U_\nu' + i\alpha\lambda(a_\nu + \lambda^2 U_\nu))\Big|^2 \\ &\quad = 2\lambda^2 \sum_{\nu=2}^{n}\sum_{\mu=1}^{\nu-1} \frac{m_\mu m_\nu}{|a_\mu - a_\nu + \lambda^2(U_\mu - U_\nu)|} + 2\lambda^2 \sum_{\nu=1}^{n} \frac{m_0 m_\nu}{|a_\nu + \lambda^2(U_\nu - V)|} \\ &\qquad + 2\lambda^2 \sum_{\mu=1}^{n} \frac{m_\mu m_{n+1}}{|a_\mu + \lambda^2 U_\mu|} + 2\,\frac{m_0 m_{n+1}}{|V|} + h_2 \end{aligned}$$

an, wo h_2 wieder eine willkürliche Konstante ist ($h_2 = \lambda^2 h_1$). Auch hier kann man nach Potenzen von λ entwickeln, wobei die Formel

$$\frac{1}{|a + \lambda^2 U|} = \frac{1}{|a|}\left(1 + \lambda^2 \frac{U}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 + \lambda^2 \frac{\overline{U}}{\bar{a}}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{|a|}\left[1 - \frac{\lambda^2}{2}\left(\frac{U}{a} + \frac{\overline{U}}{\bar{a}}\right) + \ldots\right]$$

zu benutzen ist. Dadurch ergibt sich zunächst

$$m_0 |V'|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu |U_\nu'|^2 - \frac{1}{M}\Big|m_0 V' + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu U_\nu'\Big|^2 - 2\,\frac{m_0 m_{n+1}}{|V|} + \lambda P = h_2,$$

---

[7]) Im Fall $n = 1$ fällt die Doppelsumme, die für $n = 1$ keinen Sinn hat („leer" ist), einfach weg. Ebenso ist es auch später bei leeren Summen.

wo P eine Potenzreihe von

$$\lambda, V, \overline{V}, V', \overline{V}', U_\nu, \overline{U}_\nu, U'_\nu, \overline{U}'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{25}$$

ist. Führt man noch an Stelle der U_ν wieder vermöge (22) die W_ν ein, so kommt schließlich nach leichter Rechnung

$$\boxed{\frac{m_0 m_{n+1}}{\beta^2}|V'|^2 + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu |W'_\nu|^2 - \frac{1}{M}\Big|\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu W'_\nu\Big|^2 - 2\frac{m_0 m_{n+1}}{|V|} + \lambda P_1 = h_2}, \tag{26}$$

wo jetzt P_1 eine Potenzreihe der folgenden Größen ist:

$$\lambda, V, \overline{V}, V', \overline{V}', W_\nu, \overline{W}_\nu, W'_\nu, \overline{W}'_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n); \tag{27}$$

oder, was auf dasselbe hinausläuft, eine Potenzreihe der Größen

$$\lambda, \Re(V), \Im(V), \Re(V'), \Im(V'), \Re(W_\nu), \Im(W_\nu), \Re(W'_\nu), \Im(W'_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{27a}$$

und zwar in dieser letzteren Form augenscheinlich mit reellen Koeffizienten.

Schließlich geht der Flächensatz (16) durch die Transformation (18) über in

$$\Im\Big(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{a_\nu}\, U'_\nu - \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{a_\nu}\cdot\Big(m_0 V' + \sum_{\nu=1}^{n} m_\nu U'_\nu\Big) + \lambda Q\Big) = k_2,$$

wo Q ein Polynom der Größen (25) und k_2 wieder eine willkürliche Konstante ist ($k_2 = \lambda k_1$). Führt man auch hier wieder die W_ν an Stelle der U_ν ein, so kommt schließlich

$$\boxed{\Im\Big(\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{a_\nu} W'_\nu - \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{a_\nu}\cdot\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu W'_\nu + \lambda Q_1\Big) = k_2}, \tag{28}$$

wo auch Q_1 ein Polynom der Größen (27) bzw. (27a) ist.

Bei den Konstanten h_2 und k_2 in (26) und (28) ist zu beachten, daß sie nur von τ unabhängig sind, aber keineswegs von λ; sie stellen einfach den Wert der linken Gleichungsseite für den Anfangswert $\tau = 0$ dar.

§ 3.

Integration durch Reihen.

I. Es handelt sich jetzt um die Integration des Systems (23), (24) oder, was dasselbe ist: (23a), (24a). Speziell für $\lambda = 0$ hat dieses System u. a. die Lösung

$$V = e^{i\beta\tau}, \quad W_\nu = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

die die Periode $\tau = \frac{2\pi}{\beta}$ hat und deren Anfangswerte für $\tau = 0$ die folgenden sind:

$$\begin{aligned} V(0) &= 1, \quad V'(0) = i\beta, \\ W_\nu(0) &= 0, \quad W'_\nu(0) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

Nun läßt sich die Lösung des Systems (23 a), (24 a), also des Systems (23), (24) mit den modifizierten Anfangswerten

$$\begin{aligned} V(0) &= 1 + \delta_0, \quad V'(0) = i\beta + \varepsilon_0, \\ W_\nu(0) &= \delta_\nu, \quad W'_\nu(0) = \varepsilon_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{aligned}$$

bekanntlich[8]) in Reihen nach Potenzen der δ_ν, ε_ν und λ entwickeln, die für hinreichend kleine Werte von $|\delta_\nu|$, $|\varepsilon_\nu|$, $|\lambda|$ absolut konvergieren; und zwar gilt das für ein beliebig langes Intervall von τ, gewiß etwa im Intervall $0 \leqq \tau \leqq \frac{2\pi}{\beta}$, wenn nur $|\delta_\nu|$, $|\varepsilon_\nu|$, $|\lambda|$ klein genug sind. Wählen wir daher speziell die Anfangswerte[9])

$$\begin{aligned} V(0) &= 1 + a\lambda^3, \quad V'(0) = i\beta + i\beta b\lambda^3, \\ W_\nu(0) &= c_\nu\lambda, \quad W'_\nu(0) = i d_\nu \lambda^4 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \tag{29}$$

wo die a, b, c_ν, d_ν beliebige (später noch genauer zu bestimmende) komplexe Konstanten sind, so läßt sich die Lösung für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|$ nach Potenzen von λ entwickeln:

$$V = e^{i\beta\tau}\left(1 + \sum_{r=1}^{\infty} f_r(\tau)\lambda^r\right), \tag{30}$$

$$W_\nu = \sum_{r=1}^{\infty} g_{\nu r}(\tau)\lambda^r \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{31}$$

Die Anfangswerte der Funktionen f_r, $g_{\nu r}$ sind dabei wegen (29) die folgenden:

$$\begin{cases} f_3(0) = a, & f_r(0) = 0 \quad \text{für} \quad r \neq 3, \\ f'_3(0) = i\beta(b-a), & f'_r(0) = 0 \quad \text{für} \quad r \neq 3, \end{cases} \tag{32}$$

$$\begin{cases} g_{\nu 1}(0) = c_\nu, & g_{\nu r}(0) = 0 \quad \text{für} \quad r \neq 1, \\ g'_{\nu 4}(0) = i d_\nu, & g'_{\nu r}(0) = 0 \quad \text{für} \quad r \neq 4. \end{cases} \tag{33}$$

---

[8]) Vgl. etwa meine Arbeit: Über die Entwickelbarkeit der Integrale von Differentialgleichungen nach Potenzen eines Parameters und der Anfangswerte, Math. Annalen **113** (1936), S. 292—303.

[9]) In meinen früheren Arbeiten habe ich bei $W'_\nu(0)$ den Exponenten von λ gleich 7 statt 4 gewählt. Das würde auch jetzt zum Ziele führen, nur ist die Rechnung mit dem Exponenten 4 diesmal etwas bequemer. Alles läuft auf das gleiche hinaus; in Wahrheit werden nämlich die erst später aus den Periodizitätsbedingungen richtig zu berechnenden $W'_\nu(0)$ mit λ von mindestens siebenter Ordnung unendlich klein (was sich natürlich nicht voraussehen läßt), d. h. also die jetzigen d_ν noch mindestens von dritter Ordnung.

Mit Rücksicht auf diese Anfangswerte erkennt man sofort, daß bei Einsetzen des Ansatzes (30), (31) in die Gleichungen (23a), (24a) die $f_r(\tau)$, $g_{\nu r}(\tau)$ Polynome von

$$a, \bar{a}, b, \bar{b}, c_\nu, \bar{c}_\nu, d_\nu, \bar{d}_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{34}$$

sind, oder, was dasselbe sagt, von

$$\Re(a), \Im(a), \Re(b), \Im(b), \Re(c_\nu), \Im(c_\nu), \Re(d_\nu), \Im(d_\nu) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{34a}$$

II. Wir wollen jetzt die Koeffizienten $f_r(\tau)$, $g_{\nu r}(\tau)$ in (30) und (31) wirklich berechnen, soweit es für unsere Zwecke nötig ist. Ganz leicht ist die Berechnung von $g_{\nu r}(\tau)$ für $r \leqq 7$. Setzt man nämlich die Reihen (30) und (31) in (24a) ein, so ergibt sich durch Vergleich der Koeffizienten von $\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^7$ der Reihe nach:

$$g''_{\nu 1} = 0, \quad g''_{\nu 2} = 0, \quad g''_{\nu 3} = 0, \quad g''_{\nu 4} + 2i\alpha g'_{\nu 1} = 0,$$
$$g''_{\nu 5} + 2i\alpha g'_{\nu 2} = 0, \quad g''_{\nu 6} + 2i\alpha g'_{\nu 3} = 0,$$

$$g''_{\nu 7} + 2i\alpha g'_{\nu 4} - \alpha^2 g_{\nu 1} = -\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3}\left(\frac{g_{\mu 1} - g_{\nu 1}}{a_\mu - a_\nu} + 3\frac{\overline{g_{\mu 1}} - \overline{g_{\nu 1}}}{\overline{a_\mu} - \overline{a_\nu}}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3}\left(\frac{g_{\mu 1}}{a_\mu} + 3\frac{\overline{g_{\mu 1}}}{\overline{a_\mu}}\right) + \frac{\beta^2}{2}\frac{a_\nu}{|a_\nu|^3}\left(\frac{g_{\nu 1}}{a_\nu} + 3\frac{\overline{g_{\nu 1}}}{\overline{a_\nu}}\right).$$

Hieraus folgt durch Integration mit Rücksicht auf die durch (33) vorgeschriebenen Anfangswerte:

$$g_{\nu 1}(\tau) = c_\nu, \quad g_{\nu 2}(\tau) = 0, \quad g_{\nu 3}(\tau) = 0, \quad g_{\nu 4}(\tau) = i d_\nu \tau,$$
$$g_{\nu 5}(\tau) = 0, \quad g_{\nu 6}(\tau) = 0, \quad g_{\nu 7}(\tau) = (K_\nu + 2\alpha d_\nu)\frac{\tau^2}{2},$$

wobei

$$K_\nu = \alpha^2 c_\nu - \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3}\left(\frac{c_\mu - c_\nu}{a_\mu - a_\nu} + 3\frac{\overline{c_\mu} - \overline{c_\nu}}{\overline{a_\mu} - \overline{a_\nu}}\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3}\left(\frac{c_\mu}{a_\mu} + 3\frac{\overline{c_\mu}}{\overline{a_\mu}}\right) + \frac{\beta^2}{2}\frac{a_\nu}{|a_\nu|^3}\left(\frac{c_\nu}{a_\nu} + 3\frac{\overline{c_\nu}}{\overline{a_\nu}}\right). \tag{35}$$

Also ist schließlich

$$W_\nu = c_\nu \lambda + i d_\nu \tau \lambda^4 + (K_\nu + 2\alpha d_\nu)\frac{\tau^2}{2}\lambda^7 + \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{36}$$

III. Umständlicher ist die Berechnung der Funktionen $f_r(\tau)$, die wir bis zum Index $r = 6$ benötigen werden. Wir machen zunächst die Transformation

$$V = e^{i\beta\tau} P, \tag{37}$$

wobei dann nach (30)

$$P = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} f_r(\tau)\,\lambda^r \tag{38}$$

ist. Dadurch geht die Gleichung (23a) über in

$$P'' + 2i\beta P' - \beta^2 P + 2i\alpha\lambda^3 (P' + i\beta P) - \alpha^2\lambda^6 P$$
$$= -\beta^2 \frac{P}{|P|^3} + \frac{\lambda^6}{2} \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3} \left(\frac{P}{a_\mu} + 3\, e^{-2i\beta\tau} \frac{\overline{P}}{\overline{a}_\mu} \right) + e^{-i\beta\tau} \sum_{r=8}^{\infty} F_r \lambda^r . \tag{39}$$

Setzt man hier für P die Reihe (38) ein, so ergibt der Koeffizientenvergleich von λ:

$$f_1'' + 2i\beta f_1' - \beta^2 f_1 = \tfrac{1}{2}\beta^2 (f_1 + 3\bar{f}_1).$$

Mit Rücksicht auf die in (32) vorgeschriebenen Anfangswerte folgt hieraus

$$f_1(\tau) = 0. \tag{40}$$

Unter Berücksichtigung dieses Resultats liefert sodann der Koeffizientenvergleich von λ^2 für f_2 genau dieselbe Differentialgleichung, die sich soeben für f_1 ergab, und mit Rücksicht auf die Anfangswerte ist auch wieder

$$f_2(\tau) = 0. \tag{41}$$

Genau so liefert alsdann auch der Koeffizientenvergleich von λ^4, λ^5, λ^7 der Reihe nach die Formeln

$$f_4(\tau) = 0, \quad f_5(\tau) = 0, \quad f_7(\tau) = 0, \tag{42}$$

von denen wir die letzte übrigens nicht mehr brauchen.

Der Koeffizientenvergleich von λ^3 ergibt dagegen:

$$f_3'' + 2i\beta f_3' - \beta^2 f_3 - 2\alpha\beta = \tfrac{1}{2}\beta^2 (f_3 + 3\bar{f}_3), \tag{43}$$

und schließlich der von λ^6:

$$f_6'' + 2i\beta f_6' - \beta^2 f_6 + 2i\alpha (f_3' + i\beta f_3) - \alpha^2$$
$$= \frac{1}{2}\beta^2 \left(f_6 + 3\bar{f}_6 - \frac{3}{4} f_3^2 - \frac{3}{2} f_3 \bar{f}_3 - \frac{15}{4} \bar{f}_3^2 \right)$$
$$+ \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3} \left(\frac{1}{a_\mu} + 3\, e^{-2i\beta\tau} \frac{1}{\overline{a}_\mu} \right). \tag{44}$$

IV. Die Gleichung (43) kann, wenn man ihre beiden Seiten in den reellen und imaginären Teil zerlegt, nach bekannten Methoden integriert werden. Ihr allgemeines Integral lautet, wie man sofort verifiziert,

$$f_3(\tau) = -\frac{2\alpha}{3\beta} + C_1 i + C_2 (3i\beta\tau - 2) + C_3 (e^{i\beta\tau} - 3\, e^{-i\beta\tau})$$
$$+ C_4 i (e^{i\beta\tau} + 3\, e^{-i\beta\tau}), \tag{45}$$

wobei die C_ν willkürliche *reelle* Konstanten sind. Wegen der durch (32) vorgeschriebenen Anfangswerte muß

$$-\frac{2\alpha}{3\beta}+C_1 i-2C_2-2C_3+4C_4 i=a,$$
$$3i\beta C_2+4i\beta C_3+2\beta C_4=i\beta(b-a)$$

sein; oder, indem man in den reellen und imaginären Teil zerlegt,

$$-\frac{2\alpha}{3\beta}-2C_2-2C_3=\Re(a), \qquad C_1+4C_4=\Im(a),$$
$$3C_2+4C_3=\Re(b-a), \qquad -2C_4=\Im(b-a).$$

Die Auflösung ergibt

$$(46)\qquad \begin{cases} C_1=-\Im(a)+2\Im(b), \\ C_2=-\Re(a)-\Re(b)-\frac{4\alpha}{3\beta}, \\ C_3=\frac{1}{2}\Re(a)+\Re(b)+\frac{\alpha}{\beta}, \\ C_4=\frac{1}{2}\Im(a)-\frac{1}{2}\Im(b). \end{cases}$$

Wir werden die Formel (45) und die durch Differentiation daraus entstehende Formel speziell für den Wert $\tau=\frac{2\pi}{\beta}$ brauchen:

$$(47)\qquad \begin{cases} f_3\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)-f_3(0)=6i\pi C_2, \\ f_3'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)-f_3'(0)=0. \end{cases}$$

V. Nun ist noch die Gleichung (44) zu integrieren, die wir in die Gestalt

$$(48)\qquad f_6''+2i\beta f_6'-\tfrac{3}{2}\beta^2(f_6+\bar{f}_6)=p$$

setzen; dabei ist p bereits bekannt, nämlich

$$(49)\qquad p=-\frac{3\beta^2}{8}(f_3^2+2f_3\bar{f}_3+5\bar{f}_3^2)-2i\alpha(f_3'+i\beta f_3)+\alpha^2$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu\frac{a_\mu}{|a_\mu|^3}\left(\frac{1}{a_\mu}+3e^{-2i\beta\tau}\frac{1}{\bar{a}_\mu}\right).$$

Die Gleichung (48) kann wieder nach bekannten Methoden unter Berücksichtigung der Anfangswerte $f_6(0)=0$, $f_6'(0)=0$ integriert werden; doch wird das nur zum Teil nötig sein. Schreibt man neben (48) noch die Gleichung für die konjugiert-komplexen Größen hin, so erhält man durch Addition und Subtraktion

$$(50)\qquad (f_6+\bar{f}_6)''+2i\beta(f_6-\bar{f}_6)'-3\beta^2(f_6+\bar{f}_6)=p+\bar{p},$$

$$(51)\qquad (f_6-\bar{f}_6)''+2i\beta(f_6+\bar{f}_6)'=p-\bar{p}.$$

Aus (51) folgt durch Integration von 0 bis τ

$$(52) \qquad (f_6 - \bar{f}_6)' + 2i\beta(f_6 + \bar{f}_6) = \int_0^\tau (p - \bar{p})\, d\tau,$$

und wenn man diese Gleichung nach Multiplikation mit $2i\beta$ von (50) subtrahiert, erhält man weiter

$$(53) \qquad (f_6 + \bar{f}_6)'' + \beta^2 (f_6 + \bar{f}_6) = q,$$

wobei q bekannt ist, nämlich

$$(54) \qquad q = p + \bar{p} - 2i\beta \int_0^\tau (p - \bar{p})\, d\tau.$$

Integration der Differentialgleichung (53) unter Berücksichtigung der Anfangswerte $f_6(0) = 0$, $f_6'(0) = 0$ ergibt:

$$(55) \qquad f_6 + \bar{f}_6 = \frac{1}{2i\beta} e^{i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{-i\beta\tau}\, d\tau - \frac{1}{2i\beta} e^{-i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{i\beta\tau}\, d\tau,$$

$$(56) \qquad (f_6 + \bar{f}_6)' = \frac{1}{2} e^{i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{-i\beta\tau}\, d\tau + \frac{1}{2} e^{-i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{i\beta\tau}\, d\tau.$$

Aus (52) und der mit $2i\beta$ multiplizierten Formel (55) folgt durch Subtraktion

$$(57) \qquad (f_6 - \bar{f}_6)' = \int_0^\tau (p - \bar{p})\, d\tau - e^{i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{-i\beta\tau}\, d\tau + e^{-i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{i\beta\tau}\, d\tau$$

und, indem man (57) zu (56) addiert, ergibt sich schließlich

$$(58) \qquad f_6' = \tfrac{1}{2} \int_0^\tau (p - \bar{p})\, d\tau - \tfrac{1}{4} e^{i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{-i\beta\tau}\, d\tau + \tfrac{3}{4} e^{-i\beta\tau} \int_0^\tau q\, e^{i\beta\tau}\, d\tau.$$

Weiter brauchen wir die Integration nicht durchzuführen. Wir werden nur die Formeln benötigen, die aus (55) und (58) für den Spezialwert $\tau = \frac{2\pi}{\beta}$ hervorgehen:

$$(59) \qquad f_6\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) + \overline{f_6\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)} = \frac{1}{2i\beta} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} q\, e^{-i\beta\tau}\, d\tau - \frac{1}{2i\beta} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} q\, e^{i\beta\tau}\, d\tau,$$

$$(60) \qquad f_6'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} (p - \bar{p})\, d\tau - \frac{1}{4} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} q\, e^{-i\beta\tau}\, d\tau + \frac{3}{4} \int_0^{\frac{2\pi}{\beta}} q\, e^{i\beta\tau}\, d\tau.$$

VI. Nun sind noch für p und q die Werte einzusetzen und die Integrale auszuwerten. p und q erweisen sich als Polynome zweiten Grades von C_1, C_2, C_3, C_4; jedoch werden wir nur die linearen Glieder benötigen und von diesen wieder das Glied mit C_2 nicht. Wir wollen daher von jetzt an nur noch

$$\text{modulo } C_2,\ C_1^2,\ C_3^2,\ C_4^2,\ C_1 C_3,\ C_1 C_4,\ C_3 C_4$$

rechnen und uns dabei des Kongruenzzeichens $\equiv$ bedienen. Nach (45) ist

$$f_3(\tau) \equiv -\frac{2\alpha}{3\beta} + C_1 i + C_3 (e^{i\beta\tau} - 3 e^{-i\beta\tau}) + C_4 i (e^{i\beta\tau} + 3 e^{-i\beta\tau})$$

und entsprechend sieht $\overline{f_3(\tau)}$ aus, wobei zu beachten ist, daß die C_ν reell sind. Setzt man das in (49) ein, so erhält man

$$p \equiv -4\alpha\beta (C_3 + i C_4) e^{i\beta\tau} + A_1 + (A_2 + A_3 i) e^{-2i\beta\tau},$$

wobei A_1, A_2, A_3 reelle Konstanten sind, die nur von den m_ν und a_ν abhängen und auf deren genauen Wert es nicht ankommen wird. Durch Einsetzen dieses Resultats in (54) kommt weiter

$$q \equiv 4\alpha\beta C_3 (e^{i\beta\tau} + e^{-i\beta\tau} - 4) + 4\alpha\beta C_4 i (e^{i\beta\tau} - e^{-i\beta\tau}) + B_1 + B_2 e^{2i\beta\tau} + B_3 e^{-2i\beta\tau},$$

wo jetzt B_1, B_2, B_3 komplexe Konstanten sind, die wieder nur von den m_ν und a_ν abhängen.

Hiernach können nun die Integrale in (59) und (60) leicht ausgewertet werden und man erhält:

$$f_6\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) + \overline{f_6\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)} \equiv \frac{8\alpha\pi}{\beta} C_4, \quad \text{also} \quad \Re\left(f_6\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\right) \equiv \frac{4\alpha\pi}{\beta} C_4,$$

$$f_6'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) \equiv 4\alpha\pi (C_3 - 2 C_4 i).$$

Geht man jetzt von der Kongruenz zur Gleichheit über, so besagen diese Formeln:

$$(61) \qquad \begin{cases} \Re\left(f_6\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\right) = \frac{4\alpha\pi}{\beta} C_4 + L C_2 + \sum_{rs} L_{rs} C_r C_s, \\ \Re\left(f_6'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\right) = 4\alpha\pi C_3 + L' C_2 + \sum_{rs} L'_{rs} C_r C_s, \\ \Im\left(f_6'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\right) = -8\alpha\pi C_4 + L'' C_2 + \sum_{rs} L''_{rs} C_r C_s, \end{cases}$$

wobei die L, L', L'', L_{rs}, L'_{rs}, L''_{rs} reelle Konstanten sind, die nur von den m_ν und a_ν abhängen und auf deren genauen Wert es nicht ankommen wird.

VII. Nach (30) und der aus (30) durch Differentiation entstehenden Formel ist

$$V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0) = \sum_{r=1}^{\infty} \left[f_r\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - f_r(0)\right]\lambda^r,$$

$$V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0) - i\beta\left[V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right] = \sum_{r=1}^{\infty} \left[f_r'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - f_r'(0)\right]\lambda^r.$$

Setzt man hier die Werte aus (40), (41), (42), (47), (61) ein, so erhält man durch Trennung des Reellen vom Imaginären die Formeln

$$(62)\quad \begin{aligned} &\Re\left(V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right) = \left(\frac{4\alpha\pi}{\beta}C_4 + LC_2 + \sum_{rs} L_{rs}C_rC_s\right)\lambda^6 + (\lambda^7), \\ &\Im\left(V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right) = 6\pi C_2\lambda^3 + (\lambda^6), \end{aligned}$$

$$(63)\quad \begin{aligned} &\Re\left(V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0) - i\beta\left[V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right]\right) \\ &\qquad = (4\alpha\pi C_3 + L'C_2 + \sum_{rs} L'_{rs}C_rC_s)\lambda^6 + (\lambda^7), \\ &\Im\left(V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0) - i\beta\left[V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right]\right) \\ &\qquad = (-8\alpha\pi C_4 + L''C_2 + \sum_{rs} L''_{rs}C_rC_s)\lambda^6 + (\lambda^7). \end{aligned}$$

Dabei steht das Symbol (λ^r) als Abkürzung für eine Potenzreihe von λ, die frühestens mit der Potenz λ^r beginnt und deren Koeffizienten reelle Polynome der Größen (34 a) sind.

§ 4.

Die Periodizitätsbedingungen.

I. Die Lösung (30), (31) des Differentialgleichungssystems (23), (24) hat speziell für $\lambda = 0$ die Periode $\tau = \frac{2\pi}{\beta}$. Sie wird auch, da in den Differentialgleichungen die unabhängige Variable τ nicht vorkommt, bei beliebigem (absolut hinreichend kleinem) λ diese Periode haben, wenn die Bedingungen

$$(64)\quad \begin{cases} V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0) = 0, & V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0) = 0, \\ W_\nu\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - W_\nu(0) = 0, & W_\nu'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - W_\nu'(0) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \end{cases}$$

erfüllt sind. Die ihr vermöge der Transformationen (18) und (22) entsprechende Lösung des ursprünglichen Systems (14) hat dann die Periode

$t = \frac{2\pi}{\beta}\lambda^3$. Es fragt sich also, ob man die in (29) eingeführten komplexen Konstanten a, b, c_ν, d_ν so als Funktionen von λ bestimmen kann, daß die Bedingungen (64) erfüllt sind. Es sind das aber nicht, wie es scheinen könnte, $2+2n$ Gleichungen für die $2+2n$ Unbekannten a, b, c_ν, d_ν; denn in (64) treten auch die konjugiert-komplexen Größen $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}_\nu$, $\bar{d}_\nu$ auf. Man muß daher die Gleichungen (64) in ihre reellen und imaginären Teile zerlegen und hat dann $4+4n$ Gleichungen für die $4+4n$ reellen Unbekannten (34a). Statt der ersten vier Unbekannten $\Re(a)$, $\Im(a)$, $\Re(b)$, $\Im(b)$ kann man vermöge der eindeutig umkehrbaren Formeln (46) auch die Größen C_1, C_2, C_3, C_4 einführen, so daß man die folgenden $4+4n$ Unbekannten hat:

$$C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4,\ \Re(c_\nu),\ \Im(c_\nu),\ \Re(d_\nu),\ \Im(d_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{65}$$

Führt man jetzt in den Periodizitätsbedingungen (64) die Trennung des Reellen vom Imaginären wirklich durch, so gehen sie nach (62), (63) und (36), wenn man überflüssige Potenzen von λ unterdrückt, über in:

$$\begin{cases} \frac{4\alpha\pi}{\beta} C_4 + L C_2 + \sum_{rs} L_{rs} C_r C_s + (\lambda) = 0, \\ 6\pi C_2 + (\lambda^3) = 0, \\ 4\alpha\pi C_3 + L' C_2 + \sum_{rs} L'_{rs} C_r C_s + (\lambda) = 0, \\ -8\alpha\pi C_4 + L'' C_2 + \sum_{rs} L''_{rs} C_r C_s + (\lambda) = 0, \end{cases} \tag{66}$$

$$\Re(d_\nu) + (\lambda^3) = 0, \qquad \Im(d_\nu) + (\lambda^3) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n), \tag{67}$$

$$\Re(K_\nu + 2\alpha d_\nu) + (\lambda) = 0, \qquad \Im(K_\nu + 2\alpha d_\nu) + (\lambda) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{68}$$

Diese $4+4n$ Gleichungen haben nun, wenn man für die K_ν die Werte aus (35) einsetzt, speziell für $\lambda = 0$ die Lösung: Alle $4+4n$ Unbekannten (65) sind gleich 0. Aber das ist nicht die einzige Lösung und man kann nicht schließen, daß für kleine $|\lambda|$ benachbarte Lösungen vorhanden sind; denn die Funktionaldeterminante verschwindet für das fragliche Wertsystem. In der Tat zerfällt sie in folgende drei Faktoren: Zunächst die vierreihige Funktionaldeterminante der Gleichungen (66) in bezug auf die C_ν[10]); aber diese verschwindet für $C_\nu = 0$, weil C_1 gar nicht linear vorkommt. Sodann kommt ein aus den $2n$ Gleichungen (67) herrührender Faktor, die Funktionaldeterminante dieser $2n$ Gleichungen nach den $2n$ Größen $\Re(d_\nu)$, $\Im(d_\nu)$; dieser Faktor ist offenbar gleich 1,

[10]) Natürlich ist es nicht so, daß in den vier Gleichungen (66) bloß die vier Unbekannten C_ν vorkommen; vielmehr werden in den durch die Symbole (λ) und (λ^3) angedeuteten Potenzreihen alle $4+4n$ Unbekannten vorkommen. Aber die Funktionaldeterminante interessiert uns ja nur für $\lambda = 0$.

also von 0 verschieden. Dann kommt noch ein aus den $2n$ Gleichungen (68) herrührender Faktor, der sich seinerseits zusammensetzt aus der Funktionaldeterminante dieser Gleichungen nach den $2n$ Größen $\Re(K_\nu)$, $\Im(K_\nu)$ (dieser Faktor ist wieder gleich 1) und der Funktionaldeterminante der Größen $\Re(K_\nu)$, $\Im(K_\nu)$ nach den $\Re(c_\mu)$, $\Im(c_\mu)$. Diese letzte ist, von einem nicht verschwindenden Faktor abgesehen, offenbar identisch mit der Funktionaldeterminante der $2n$ Größen K_ν, $\overline{K_\nu}$ nach den c_μ, $\overline{c_\mu}$. Aber diese verschwindet; denn die $2n$ linearen homogenen Gleichungen $K_\nu = 0$, $\overline{K_\nu} = 0$ für die $2n$ Unbekannten c_μ, $\overline{c_\mu}$ haben die nicht triviale Auflösung $c_\mu = i a_\mu$, $\overline{c_\mu} = -i\overline{a_\mu}$, weil ja für diese Spezialwerte nach (35)

$$K_\nu = i\Big[\alpha^2 a_\nu - \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3}\cdot(-2) + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3}\cdot(-2) + \frac{\beta^2}{2}\frac{a_\nu}{|a_\nu|^3}\cdot(-2)\Big],$$

also nach (17) gleich 0 ist und entsprechend auch $\overline{K_\nu} = 0$.

Damit ist zunächst bestätigt, was über die Funktionaldeterminante in der Einleitung gesagt wurde. Nun handelt es sich um die Überwindung der Schwierigkeit auf dem dort skizzierten Weg.

II. Wir dürfen und wollen annehmen, daß die Größe

$$k = a_n - \frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu a_\nu \tag{69}$$

von 0 verschieden ist. Denn für $n = 1$ trifft das von selbst zu, für $n > 1$ kann es nötigenfalls durch Umnumerierung der a_ν erreicht werden, weil ja die a_ν voneinander verschieden sind. Dann ist die Periodizitätsbedingung $W_n'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - W_n'(0) = 0$ gleichbedeutend mit

$$\overline{k}\left[W_n'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - W_n'(0)\right] = 0.$$

Hiernach schreiben wir die sämtlichen Periodizitätsbedingungen (64) noch einmal unter Trennung des Reellen vom Imaginären in folgender Weise auf:

$$\text{(A)}\qquad \Re\left(V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right) = 0,$$

$$\text{(B)}\quad \Im\left(V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right) = 0,\ \Re\left(V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0)\right) = 0,\ \Im\left(V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0)\right) = 0,$$

$$\text{(C)}\quad \Re\left(W_\nu\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - W_\nu(0)\right) = 0,\ \Im\left(W_\nu\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - W_\nu(0)\right) = 0,\ (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

$$(D)\begin{cases}\Re\left(W_\nu'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)-W_\nu'(0)\right)=0,\ \Im\left(W_\nu'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)-W_\nu'(0)\right)=0,\ (\nu=1,2,\ldots,n-1),\\ \Re\left(\bar{k}\left[W_n'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)-W_n'(0)\right]\right)=0,\end{cases}$$

$$(E)\qquad \Im\left(\bar{k}\left[W_n'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)-W_n'(0)\right]\right)=0.$$

Nun nehmen wir einmal an, es sei gelungen, die $4+4n$ Unbekannten (65) derart als analytische Funktionen von λ (für hinreichend kleines $|\lambda|$) zu wählen, daß wenigstens die $2+4n$ Bedingungen (B), (C), (D) erfüllt sind; wir wollen zeigen, daß dann von selbst auch die Bedingungen (A) und (E) erfüllt sind. In der Tat ist zunächst nach (30)

$$(70)\qquad V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)=1+(\lambda)\qquad\qquad [\text{sogar } 1+(\lambda^3)].$$

Ferner sind nach dem Energiesatz (26) und dem Flächensatz (28) die beiden Ausdrücke

$$(71)\quad \frac{m_0 m_{n+1}}{\beta^2}|V'|^2+\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu|W_\nu'|^2-\frac{1}{M}\left|\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu W_\nu'\right|^2-2\frac{m_0 m_{n+1}}{|V|}+\lambda P_1,$$

$$(72)\quad \Im\left(\sum_{\nu=1}^{n-1} m_\nu \overline{a_\nu} W_\nu'-\frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu \overline{a_\nu}\cdot\sum_{\nu=1}^{n-1} m_\nu W_\nu'+m_n \bar{k} W_n'+\lambda Q_1\right)$$

unabhängig von τ. Dabei sind P_1, Q_1 Potenzreihen der Argumente (27). Statt dessen kann man außer λ augenscheinlich auch die folgenden Argumente einführen:

$$(73)\qquad \begin{cases}\Re(V),\quad \Im(V),\quad \Re(V'),\quad \Im(V'),\\ \Re(W_\nu),\quad \Im(W_\nu) & (\nu=1,2,\ldots,n),\\ \Re(W_\nu'),\quad \Im(W_\nu') & (\nu=1,2,\ldots,n-1),\\ \Re(\bar{k}W_n'),\ \Im(\bar{k}W_n'),\end{cases}$$

und auch die übrigen Terme in (71) und (72) kann man als Funktionen dieser Größen aufbauen.

Nun sind die Größen (73) speziell für $\tau=0$ nach (29) bekannt. Von der ersten und letzten abgesehen haben sie aber, weil die Bedingungen (B), (C), (D) erfüllt sind, für $\tau=\frac{2\pi}{\beta}$ denselben bekannten Wert wie für $\tau=0$. Bildet man daher die von τ unabhängigen Ausdrücke (71) und (72) zuerst für $\tau=\frac{2\pi}{\beta}$, dann für $\tau=0$ und setzt die Differenzen gleich 0, so erhält man ein Gleichungspaar für die allein noch unbekannten Größen

$$(74)\qquad x=\Re\left(V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\right),\qquad y=\Im\left(\bar{k}W_n'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\right),$$

wobei x wegen (70) die Form $1+(\lambda)$ hat. Dieses Gleichungspaar ist, wenn zur Abkürzung

$$\Re\left(V(0)\right) = 1 + \Re(a)\,\lambda^3 = \gamma,$$

$$\Im\left(V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right)\right) = \Im\left(V(0)\right) = \Im(a)\,\lambda^3 = \delta$$

gesetzt wird, mit Rücksicht auf $W_\nu'(0) = d_\nu \lambda^4$ von der Gestalt

$$(75)\quad \begin{cases} \dfrac{m_n y^2}{|k|^2} - \dfrac{1}{M}\dfrac{m_n^2 y^2}{|k|^2} - 2\dfrac{m_0 m_{n+1}}{\sqrt{x^2+\delta^2}} + 2\dfrac{m_0 m_{n+1}}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}} + \lambda\,\Phi(\lambda, x, y) = 0, \\ y + \lambda\,\Psi(\lambda, x, y) = 0, \end{cases}$$

wo Φ und Ψ Potenzreihen der drei Argumente sind, und läßt nach der Entstehungsweise gewiß die Auflösung

$$(76)\qquad x = \Re\left(V(0)\right) = 1 + \Re(a)\,\lambda^3, \qquad y = \Im\left(\bar{k}\,W_n'(0)\right)$$

zu. Wenn sich zeigen läßt, daß es keine andere Lösung gibt, bei der x die Form $1+(\lambda)$ hat, so besagt das, weil ja x und y die in (74) angegebene Bedeutung haben, daß die Bedingungen (A) und (E) erfüllt sind. Nun hat das Gleichungspaar (75) speziell für $\lambda = 0$ nur die beiden Auflösungen[11])

$$y = 0, \qquad x = \pm\gamma = \pm 1,$$

und die Funktionaldeterminante ist für beide augenscheinlich von 0 verschieden. Daher gibt es für hinreichend kleine Werte von $|\lambda|$ eindeutig bestimmte benachbarte Lösungen, aber nur bei dem oberen Vorzeichen hat x die Form $1+(\lambda)$. Es gibt also *nur eine* solche Auflösung. Der Beweis, daß bei Erfülltsein der Bedingungen (B), (C), (D) von selbst auch die Bedingungen (A) und (E) erfüllt sind, ist damit erbracht.

III. Nun handelt es sich noch um die Erfüllbarkeit der Bedingungen (B), (C), (D). Die drei Bedingungen (B) sind offenbar den folgenden drei gleichwertig:

$$\Im\left(V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right) = 0, \qquad \Im\left(V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0)\right) = 0,$$

$$\Re\left(V'\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V'(0) - i\beta\left[V\left(\frac{2\pi}{\beta}\right) - V(0)\right]\right) = 0.$$

Wenn man hier die Werte aus (62) und (63) einsetzt, ergibt sich nach Unterdrückung überflüssiger Potenzen von λ:

$$(\mathrm{B}^*)\quad \begin{cases} 6\pi C_2 + (\lambda^3) = 0, \\ -4\alpha\pi C_4 + (L'' + \beta L)\,C_2 + \sum\limits_{rs}(L''_{rs} + \beta L_{rs})\,C_r C_s + (\lambda) = 0, \\ 4\alpha\pi C_3 + L'\,C_2 + \sum\limits_{rs} L'_{rs} C_r C_s + (\lambda) = 0. \end{cases}$$

[11]) Hier ist wesentlich, daß wir die m_ν, insbesondere m_0, als *positiv* vorausgesetzt haben. Für das *eingeschränkte* Problem ($m_0 = 0$) gilt die Sache nicht.

Die Bedingungen (C) nehmen nach (36) wieder die Gestalt (67) an; wir schreiben sie neu:

$$(C^*) \qquad \Re(d_\nu) + (\lambda^3) = 0, \qquad \Im(d_\nu) + (\lambda^3) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Entsprechend haben die Bedingungen (D) zunächst die Form

$$\Re(K_\nu + 2\alpha d_\nu) + (\lambda) = 0, \quad \Im(K_\nu + 2\alpha d_\nu) + (\lambda) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$\Re(\bar{k}(K_n + 2\alpha d_n)) + (\lambda) = 0.$$

Sie reduzieren sich vermöge (C*) auf[12])

$$(D^*) \qquad \begin{cases} \Re(K_\nu) + (\lambda) = 0, \quad \Im(K_\nu) + (\lambda) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Re(\bar{k} K_n) + (\lambda) = 0. \end{cases}$$

IV. Jetzt wollen wir gemäß der Einleitung eine Unbekannte fest und eine willkürlich wählen. Wir wählen fest:

$$(77) \qquad \Im(a) = 0;$$

das besagt lediglich, daß $V(0)$, also nach (18) auch $u_0(0)$, reell und positiv ist, daß also zur Anfangszeit $t = 0$ die Richtung vom Punkt m_{n+1} nach dem ihn umlaufenden Punkt m_0 die der positiven reellen Achse (im rotierenden System) ist, bedeutet also keine Beschränkung der Allgemeinheit. Die Wahl (77) besagt, wenn man sie mit Hilfe von (46) auf die C_ν überträgt, soviel wie

$$(77a) \qquad C_1 = -4C_4;$$

von den vier Unbekannten C_ν fällt also C_1 weg.

Sodann wählen wir $\Re(c_\varkappa)$ oder $\Im(c_\varkappa)$ für irgendeinen der Werte $\varkappa = 1, 2, \ldots, n$ willkürlich, indem wir

$$(78) \qquad \text{entweder } \Re(c_\varkappa) = \varrho\,\Re(a_\varkappa i) \quad \text{oder} \quad \Im(c_\varkappa) = \varrho\,\Im(a_\varkappa i)$$

setzen und ϱ als zweiten reellen Parameter einführen. Damit das wirklich eine Willkürlichkeit bedeutet, muß

$$(79) \qquad \Re(a_\varkappa i) \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad \Im(a_\varkappa i) \neq 0$$

vorausgesetzt werden; wenigstens eine dieser Bedingungen ist von selbst erfüllt, weil $a_\varkappa \neq 0$ ist. Alsdann bleiben von den $4 + 4n$ Unbekannten noch die folgenden $2 + 4n$ übrig:

$$C_2, \quad C_3, \quad C_4,$$
$$\Re(d_\nu), \quad \Im(d_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\Re(c_\nu), \quad \Im(c_\nu) \qquad (\text{außer } \Re(c_\varkappa) \text{ bzw. } \Im(c_\varkappa)),$$

die den $2 + 4n$ Gleichungen (B*), (C*), (D*) genügen müssen. Die in (D*) auftretenden Größen K_ν sind dabei durch (35) gegeben.

---

[12]) Man beachte, daß nach (C*) ja insbesondere $\Re(d_n) + (\lambda^3) = 0$ und $\Im(d_n) + (\lambda^3) = 0$ ist; also auch $d_n + (\lambda^3) = 0$ und folglich $\bar{k} d_n + (\lambda^3) = 0$. Daher ist gewiß $\Re(\bar{k} d_n) + (\lambda^3) = 0$.

Speziell für $\lambda = 0$ haben diese Gleichungen wegen (78) und weil die K_ν, $\overline{K_\nu}$, also auch die Größen

$$\Re(K_\nu), \quad \Im(K_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$\Re(\bar{k} K_n)$$

für $c_\nu = \varrho a_\nu i$, $\overline{c_\nu} = -\varrho \overline{a_\nu} i$ verschwinden (vgl. S. 612), die Lösung

$$C_2 = 0, \quad C_3 = 0, \quad C_4 = 0,$$
$$\Re(d_\nu) = 0, \quad \Im(d_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\Re(c_\nu) = \varrho\, \Re(a_\nu i), \quad \Im(c_\nu) = \varrho\, \Im(a_\nu i) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

wobei von den $2n$ Formeln der letzten Zeile sich eine mit (78) deckt und nur die $2n-1$ übrigen die Lösung des Gleichungssystems betreffen. Die Funktionaldeterminante zerfällt wieder in drei Faktoren: Zunächst die dreireihige Funktionaldeterminante der Gleichungen (B*) nach C_2, C_3, C_4; diese ist gleich $6\pi(4\alpha\pi)^2$, also $\neq 0$. Sodann die $(2n)$-reihige Funktionaldeterminante der Gleichungen (C*) nach den Größen $\Re(d_\nu)$, $\Im(d_\nu)$; diese ist gleich 1, also wieder $\neq 0$. Schließlich kommt die $(2n-1)$-reihige Funktionaldeterminante der Gleichungen (D*) nach den Größen

(80) $$\Re(c_\nu), \quad \Im(c_\nu) \quad \text{außer } \Re(c_\varkappa) \text{ bzw. } \Im(c_\varkappa).$$

Das ist die Determinante des linearen homogenen Gleichungssystems

(81) $$\begin{cases} \Re(K_\nu) = 0, \quad \Im(K_\nu) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1), \\ \Re(\bar{k} K_n) = 0 \end{cases}$$

mit den Größen (80) als Unbekannten, also diejenige Determinante, die aus der Matrix

(82) $$\left\| \begin{array}{cccccc} \frac{\partial \Re(K_1)}{\partial \Re(c_1)} & \cdots & \frac{\partial \Re(K_{n-1})}{\partial \Re(c_1)} & \frac{\partial \Im(K_1)}{\partial \Re(c_1)} & \cdots & \frac{\partial \Im(K_{n-1})}{\partial \Re(c_1)} \quad \frac{\partial \Re(\bar{k} K_n)}{\partial \Re(c_1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Re(K_1)}{\partial \Re(c_n)} & \cdots & \frac{\partial \Re(K_{n-1})}{\partial \Re(c_n)} & \frac{\partial \Im(K_1)}{\partial \Re(c_n)} & \cdots & \frac{\partial \Im(K_{n-1})}{\partial \Re(c_n)} \quad \frac{\partial \Re(\bar{k} K_n)}{\partial \Re(c_n)} \\ \frac{\partial \Re(K_1)}{\partial \Im(c_1)} & \cdots & \frac{\partial \Re(K_{n-1})}{\partial \Im(c_1)} & \frac{\partial \Im(K_1)}{\partial \Im(c_1)} & \cdots & \frac{\partial \Im(K_{n-1})}{\partial \Im(c_1)} \quad \frac{\partial \Re(\bar{k} K_n)}{\partial \Im(c_1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial \Re(K_1)}{\partial \Im(c_n)} & \cdots & \frac{\partial \Re(K_{n-1})}{\partial \Im(c_n)} & \frac{\partial \Im(K_1)}{\partial \Im(c_n)} & \cdots & \frac{\partial \Im(K_{n-1})}{\partial \Im(c_n)} \quad \frac{\partial \Re(\bar{k} K_n)}{\partial \Im(c_n)} \end{array} \right\|$$

durch Weglassen der $\varkappa$-ten bzw. $(n+\varkappa)$-ten Zeile entsteht. Wir nennen sie die $\varkappa$-te bzw. $(n+\varkappa)$-te *kritische Determinante* und bezeichnen sie mit $\Delta_\varkappa$ bzw. $\Delta_{n+\varkappa}$. *Wenn wenigstens eine der $2n$ kritischen Determinanten, etwa die $\varkappa$-te bzw. $(n+\varkappa)$-te nicht verschwindet, dann ist nach willkürlicher Wahl von $\Re(c_\varkappa)$ bzw. $\Im(c_\varkappa)$ die eindeutige Auflösbarkeit des Gleichungssystems*

(B*), (C*), (D*) *und damit die Existenz der zweiparametrigen Schar periodischer Lösungen unseres Differentialgleichungssystems* (14) *gewährleistet.*

Dabei kann man die bisher notwendige Bedingung (79) nachträglich fallen lassen; denn beim Nichtverschwinden von $\Delta_\varkappa$ bzw. $\Delta_{n+\varkappa}$ ist von selbst auch $\Re(a_\varkappa i)$ bzw. $\Im(a_\varkappa i)$ von 0 verschieden, also (79) erfüllt. Wenn nämlich $\Re(a_\varkappa i)$ bzw. $\Im(a_\varkappa i)$ verschwindet, so haben die linearen Gleichungen (81) für die Unbekannten (80) die unendlich vielen Auflösungen

$$\Re(c_\nu) = \varrho\,\Re(a_\nu i), \qquad \Im(c_\nu) = \varrho\,\Im(a_\nu i)$$

mit willkürlichem ϱ, so daß auch ihre Determinante verschwindet, das ist aber $\Delta_\varkappa$ bzw. $\Delta_{n+\varkappa}$. Auch die Bedingung $k \neq 0$ (vgl. (69)) kann nachträglich gestrichen werden, weil sie beim Nichtverschwinden einer kritischen Determinante, wie ein Blick auf die letzte Spalte zeigt, von selbst erfüllt ist.

V. Noch muß gezeigt werden, daß die zwei Parameter unserer Lösungsschar wirklich wesentlich sind und sich nicht etwa auf einen reduzieren lassen. Nun haben unsere Lösungen die Periode $t = \frac{2\pi}{\beta}\lambda^3$; der Parameter λ bestimmt also die Periode. Wenn wir zeigen können, daß bei fester Periode, also bei festem λ, in unseren Lösungen noch immer eine einparametrige Schar mit dem Parameter ϱ vorhanden ist, so wird die Wesentlichkeit der beiden Parameter dargetan sein. Nun erfüllen unsere Lösungen u. a. die beiden Anfangsbedingungen

$$u_0(0) = \lambda^2 V(0) = \lambda^2(1 + a\lambda^3),$$

$$u_\varkappa(0) - a_\varkappa = \lambda^2 U_\varkappa(0) = \lambda^2\left(\frac{m_0}{\beta^2} V(0) + W_\varkappa(0)\right),$$

also ist

$$u_\varkappa(0) - a_\varkappa - \frac{m_0}{\beta^2} u_0(0) = \lambda^2 W_\varkappa(0) = \lambda^3 c_\varkappa.$$

Wegen (78) ist also entweder

$$\Re\left(u_\varkappa(0) - a_\varkappa - \frac{m_0}{\beta^2} u_\varkappa(0)\right) = \lambda^3 \varrho\,\Re(a_\varkappa i)$$

oder

$$\Im\left(u_\varkappa(0) - a_\varkappa - \frac{m_0}{\beta^2} u_\varkappa(0)\right) = \lambda^3 \varrho\,\Im(a_\varkappa i).$$

Die Anfangslage enthält also bei festem λ noch immer in dem Parameter ϱ ein willkürliches Element. Daß dabei nicht etwa für verschiedene ϱ die gleichen Bahnkurven, an anderer Stelle beginnend, herauskommen, dafür wurde bereits oben gesorgt, indem durch (77) der Zeitanfang festgelegt wurde.

VI. Zwischen den $2n$ kritischen Determinanten bestehen einige Beziehungen, durch deren Kenntnis die Prüfung, ob eine davon nicht

verschwindet, abgekürzt werden kann. Da die K_ν homogene Polynome ersten Grades der c_μ und $\overline{c_\mu}$, also auch der $\Re(c_\mu)$ und $\Im(c_\mu)$ sind, die für $\Re(c_\mu) = \Re(a_\mu i)$, $\Im(c_\mu) = \Im(a_\mu i)$ verschwinden, gilt die Formel

$$(83) \quad \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial K_\nu}{\partial \Re(c_\mu)} \Re(a_\mu i) + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{\partial K_\nu}{\partial \Im(c_\mu)} \Im(a_\mu i) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

Wenn man daher der Matrix (82) eine neue Spalte anfügt, die — unter $\varkappa$ eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ verstanden — in der $\varkappa$-ten und $(n+\varkappa)$-ten Zeile die Elemente $\Im(a_\varkappa i)$ und $-\Re(a_\varkappa i)$ und sonst lauter Nullen enthält, so wird die entstehende $(2n)$-reihige Determinante den Wert 0 haben; denn wenn man für $\mu = 1, 2, \ldots, n$ die Elemente der μ-ten Zeile mit $\Re(a_\mu i)$ und die der $(n+\mu)$-ten Zeile mit $\Im(a_\mu i)$ multipliziert und dann nach μ summiert, kommt mit Rücksicht auf (83) in jeder Spalte eine Null. Entwickelt man die $(2n)$-reihige Determinante aber nach den Elementen der neu hinzugefügten Spalte, so ergibt sich

$$(84) \quad \Im(a_\varkappa i)\, \Delta_\varkappa - (-1)^n \Re(a_\varkappa i)\, \Delta_{n+\varkappa} = 0 \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots, n).$$

Wenn daher bei der Prüfung des Nichtverschwindens sich herausstellt, daß etwa $\Delta_\varkappa$ verschwindet, und wenn zugleich $\Re(a_\varkappa i) \neq 0$ ist, so muß von selbst auch $\Delta_{n+\varkappa}$ verschwinden, so daß eine besondere Prüfung sich erübrigt. Analog, wenn ein $\Delta_{n+\varkappa}$ verschwindet und zugleich $\Im(a_\varkappa i) \neq 0$ ist, dann muß auch $\Delta_\varkappa$ verschwinden.

In dem besonderen Fall, daß alle Ruhepunkte in gerader Linie liegen, kann man die reelle Achse in diese Linie legen, so daß alle $a_\varkappa$ reell sind. Dann ist $\Re(a_\varkappa i) = 0$ und die Formel (84) lehrt, daß dann $\Delta_\varkappa$ verschwindet. Man kann sich also auf die Prüfung der n Determinanten $\Delta_{n+\varkappa}$ beschränken. Aber auch von diesen braucht nur eine einzige geprüft zu werden; wenn sie nämlich verschwindet, so läßt sich zeigen, daß auch alle anderen verschwinden. Das beruht auf der (nur für $r \neq s$ interessierenden, aber für $r = s$ trivialerweise auch gültigen) Formel

$$(85) \quad a_s \Delta_{n+r} - (-1)^{r-s} a_r \Delta_{n+s} = 0 \quad \text{(falls alle } a_\varkappa \text{ reell)}.$$

Zum Beweis von (85) bemerken wir, daß die Formel (35) im Fall reeller $a_\varkappa$ folgende Gestalt annimmt:

$$K_\nu = \alpha^2 c_\nu - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{n}{}' \frac{m_\mu}{|a_\mu - a_\nu|^3} (c_\mu - c_\nu + 3\,\overline{c} - 3\,\overline{c_\nu})$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^{n} \frac{m_\mu}{|a_\mu|^3} (c_\mu + 3\,\overline{c_\mu}) + \frac{\beta^2}{2} \frac{1}{|a_\nu|^3} (c_\nu + 3\,\overline{c_\nu}).$$

Daher ist

$$\frac{1}{i}\frac{\partial K_\nu}{\partial \Im(c_\nu)} = \alpha^2 - \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{n}{}' \frac{m_\mu}{|a_\mu - a_\nu|^3}(-1+3) + \frac{1}{2}(m_\nu+\beta^2)\frac{1}{|a_\nu|^3}(1-3)$$

$$= \alpha^2 - \sum_{\mu=1}^{n}{}' \frac{m_\mu}{|a_\mu - a_\nu|^3} - \frac{m_\nu+\beta^2}{|a_\nu|^3},$$

$$\frac{1}{i}\frac{\partial K_\nu}{\partial \Im(c_\mu)} = -\frac{1}{2}\frac{m_\mu}{|a_\mu - a_\nu|^3}(1-3) + \frac{1}{2}\frac{m_\mu}{|a_\mu|^3}(1-3)$$

$$= \frac{m_\mu}{|a_\mu - a_\nu|^3} - \frac{m_\mu}{|a_\mu|^3} \qquad \text{für } \mu \neq \nu,$$

und daraus folgt sogleich

$$\frac{1}{i}\sum_{\mu=1}^{n} a_\mu \frac{\partial K_\nu}{\partial \Im(c_\mu)} = \alpha^2 a_\nu + \sum_{\mu=1}^{n}{}' m_\mu \frac{a_\mu - a_\nu}{|a_\mu - a_\nu|^3} - \sum_{\mu=1}^{n} m_\mu \frac{a_\mu}{|a_\mu|^3} - \beta^2 \frac{a_\nu}{|a_\nu|^3},$$

also gleich 0 nach (17). Wenn man daher der Matrix (82) eine neue Spalte anfügt, die — unter r und s zwei verschiedene der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ verstanden — in der $(n+r)$-ten und $(n+s)$-ten Zeile die Elemente a_s und $-a_r$ und sonst lauter Nullen enthält, so wird die entstehende $(2n)$-reihige Determinante den Wert 0 haben; denn wenn man für $\mu = 1, 2, \ldots, n$ die Elemente der $(n+\mu)$-ten Zeile mit a_μ multipliziert und dann nach μ summiert, kommt in jeder Spalte eine Null. Entwickelt man die $(2n)$-reihige Determinante aber nach den Elementen der neu hinzugefügten Spalte, so erhält man gerade die zu beweisende Formel (85).

§ 5.

Die kritischen Determinanten in den Fällen $n = 1$ und $n = 2$.

I. Im Fall $n = 1$ hat man die kritischen Determinanten

$$\Delta_1 = \frac{\partial \Re(\bar{k} K_1)}{\partial \Im(c_1)}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial \Re(\bar{k} K_1)}{\partial \Re(c_1)}.$$

Nach (17) ist

$$-\alpha^2 a_1 = -\frac{M a_1}{|a_1|^3} \qquad (a_1 \neq 0).$$

Dabei darf a_1 als reell angenommen werden, so daß Δ_1 nach § 4, VI verschwindet. Aber Δ_2 verschwindet nicht. Denn nach (35) ist

$$K_1 = \alpha^2 c_1 + \frac{1}{2}\frac{M}{|a_1|^3}(c_1 + 3\bar{c}_1),$$

also vermöge der vorigen Gleichung

$$K_1 = \alpha^2 c_1 + \tfrac{1}{2}\alpha^2 (c_1 + 3\,\bar{c}_1) = 3\,\alpha^2 \Re(c_1).$$

Schließlich ist nach (69)

$$k = a_1 - \frac{m_1 a_1}{M} = \frac{\beta^2}{M} a_1 = \text{reell}.$$

Daher

$$\Delta_2 = \frac{\partial \Re(\bar{k} K_1)}{\partial \Re(c_1)} = \frac{\beta^2}{M} a_1 \cdot 3\,\alpha^2 \neq 0.$$

Die zweiparametrige Schar existiert also.

II. Im Fall $n = 2$ ist nach (17)

$$(86) \quad \begin{cases} -\alpha^2 a_1 = m_2 \dfrac{a_2 - a_1}{|a_2 - a_1|^3} - (m_1 + \beta^2) \dfrac{a_1}{|a_1|^3} - m_2 \dfrac{a_2}{|a_2|^3}, \\ -\alpha^2 a_2 = m_1 \dfrac{a_1 - a_2}{|a_1 - a_2|^3} - (m_2 + \beta^2) \dfrac{a_2}{|a_2|^3} - m_1 \dfrac{a_1}{|a_1|^3}. \end{cases}$$

Wir behandeln zuerst den Fall, daß die drei Ruhepunkte in gerader Linie liegen; dann kann man die a_ν als reell annehmen, so daß Δ_1 und Δ_2 nach § 4, VI verschwinden. Wir betrachten daher die Determinante

$$(87) \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \Re(K_1)}{\partial \Re(c_1)} & \dfrac{\partial \Im(K_1)}{\partial \Re(c_1)} & \dfrac{\partial \Re(\bar{k} K_2)}{\partial \Re(c_1)} \\ \dfrac{\partial \Re(K_1)}{\partial \Re(c_2)} & \dfrac{\partial \Im(K_1)}{\partial \Re(c_2)} & \dfrac{\partial \Re(\bar{k} K_2)}{\partial \Re(c_2)} \\ \dfrac{\partial \Re(K_1)}{\partial \Im(c_2)} & \dfrac{\partial \Im(K_1)}{\partial \Im(c_2)} & \dfrac{\partial \Re(\bar{k} K_2)}{\partial \Im(c_2)} \end{vmatrix}.$$

Nach (35) und (69) ist jetzt

$$K_1 = \alpha^2 c_1 - \frac{1}{2} \frac{m_2}{|a_2 - a_1|^3} (c_2 - c_1 + 3\,\bar{c}_2 - 3\,\bar{c}_1) + \frac{1}{2} \frac{m_1 + \beta^2}{|a_1|^3} (c_1 + 3\,\bar{c}_1) + \frac{1}{2} \frac{m_2}{|a_2|^3} (c_2 + 3\,\bar{c}_2),$$

$$K_2 = \alpha^2 c_2 - \frac{1}{2} \frac{m_1}{|a_1 - a_2|^3} (c_1 - c_2 + 3\,\bar{c}_1 - 3\,\bar{c}_2) + \frac{1}{2} \frac{m_2 + \beta^2}{|a_2|^3} (c_2 + 3\,\bar{c}_2) + \frac{1}{2} \frac{m_1}{|a_1|^3} (c_1 + 3\,\bar{c}_1),$$

$$k = a_2 - \frac{1}{M} (m_1 a_1 + m_2 a_2) = \text{reell}.$$

In der Determinante Δ_3 kann man daher den reellen Faktor $\bar{k} = k$ herausziehen und erhält dann

$$\Delta_3 = k \begin{vmatrix} a^2 + \frac{2m_2}{|a_2-a_1|^3} + \frac{2(m_1+\beta^2)}{|a_1|^3} & 0 & -\frac{2m_1}{|a_1-a_2|^3} + \frac{2m_1}{|a_1|^3} \\ -\frac{2m_2}{|a_2-a_1|^3} + \frac{2m_2}{|a_2|^3} & 0 & a^2 + \frac{2m_1}{|a_1-a_2|^3} + \frac{2(m_2+\beta^2)}{|a_2|^3} \\ 0 & \frac{m_2}{|a_2-a_1|^3} - \frac{m_2}{|a_2|^3} & 0 \end{vmatrix} = k\left(\frac{m_2}{|a_2|^3} - \frac{m_2}{|a_2-a_1|^3}\right)\Phi,$$

wobei

$$\Phi = \left(\alpha^2 + \frac{2m_2}{|a_2-a_1|^3} + \frac{2(m_1+\beta^2)}{|a_1|^3}\right)\left(\alpha^2 + \frac{2m_1}{|a_1-a_2|^3} + \frac{2(m_2+\beta^2)}{|a_2|^3}\right) - \left(\frac{2m_2}{|a_2|^3} - \frac{2m_2}{|a_2-a_1|^3}\right)\left(\frac{2m_1}{|a_1|^3} - \frac{2m_1}{|a_1-a_2|^3}\right)$$

$$> \left(\frac{2m_2}{|a_2-a_1|^3} + \frac{2m_1}{|a_1|^3}\right)\left(\frac{2m_1}{|a_1-a_2|^3} + \frac{2m_2}{|a_2|^3}\right) - \left(\frac{2m_2}{|a_2|^3} - \frac{2m_2}{|a_2-a_1|^3}\right)\left(\frac{2m_1}{|a_1|^3} - \frac{2m_1}{|a_1-a_2|^3}\right)$$

$$= \frac{4m_1^2 + 4m_1m_2}{|a_1|^3|a_1-a_2|^3} + \frac{4m_2^2 + 4m_1m_2}{|a_2|^3|a_1-a_2|^3} > 0.$$

Das Nichtverschwinden von Δ_3 läuft daher auf das Nichtverschwinden des Produkts

$$k\left(\frac{m_2}{|a_2|^3} - \frac{m_2}{|a_2-a_1|^3}\right) = \frac{1}{M}(Ma_2 - m_1a_1 - m_2a_2)\left(\frac{m_2}{|a_2|^3} - \frac{m_2}{|a_2-a_1|^3}\right)$$

hinaus oder, da der letzte Faktor wegen $a_1 \neq 0$ nur für $a_1 = 2a_2$ verschwindet, auf das Nichtverschwinden des Produkts

$$(Ma_2 - m_1a_2 - m_2a_2)(2a_2 - a_1). \tag{88}$$

Wenn die beiden Ruhepunkte ihre Rollen tauschen, ergibt sich das Produkt

$$(Ma_1 - m_1a_1 - m_2a_2)(2a_1 - a_2). \tag{88 a}$$

Die zweiparametrige Schar wird daher gesichert sein, wenn wenigstens eines der beiden Produkte nicht verschwindet. Falls nun $a_1 \neq 2a_2$ und auch $a_2 \neq 2a_1$ ist, trifft das sicher zu, weil die beiden ersten Faktoren der Produkte voneinander verschieden sind, also nicht beide zugleich verschwinden können. Falls aber etwa $a_1 = 2a_2$ ist, ergibt sich aus (86) durch Elimination von α^2 nach leichter Rechnung: $\beta^2 = m_1$; daher ist

$$M - m_1 = m_2 + \beta^2 = m_2 + m_1$$

und folglich das Produkt (88a) gleich

$$[(M - m_1)\,2a_2 - m_2 a_2]\,3a_2 = [(m_2 + m_1)\,2a_2 - m_2 a_2]\,3a_2 = (2m_1 + m_2)\,3a_2^2 > 0.$$

Im Fall $a_2 = 2a_1$ tauschen die Ruhepunkte ihre Rolle, so daß in jedem Fall eines der Produkte (88), (88a) nicht verschwindet, womit die Existenz der zweiparametrigen Schar gesichert ist.

III. Jetzt kommt noch der Fall, daß die drei Ruhepunkte ein gleichseitiges Dreieck bilden. Wenn wir die Dreieckseite als Längeneinheit wählen, ist $|a_1| = |a_2| = |a_1 - a_2| = 1$. Durch geeignete Numerierung der a_ν und Wahl der reellen Achse kann man weiter erreichen, daß

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}+i}{2}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{3}-i}{2} \tag{89}$$

ist. Jede der Gleichungen (86) ergibt dann

$$\alpha^2 = m_1 + m_2 + \beta^2 = M. \tag{90}$$

Die Gleichungen (35) gehen über in

$$K_1 = \alpha^2 c_1 - \frac{m_2}{2}(c_2 - c_1 - 3\bar{c}_2 + 3\bar{c}_1) + \frac{m_2}{2}\left(c_2 + 3\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\bar{c}_2\right) + \frac{m_1+\beta^2}{2}\left(c_1 + 3\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\bar{c}_1\right),$$

$$K_2 = \alpha^2 c_2 - \frac{m_1}{2}(c_1 - c_2 - 3\bar{c}_1 + 3\bar{c}_2) + \frac{m_1}{2}\left(c_1 + 3\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\bar{c}_1\right) + \frac{m_2+\beta^2}{2}\left(c_2 + 3\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\bar{c}_2\right),$$

und hieraus folgt unter Berücksichtigung von (90):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial K_1}{\partial \Re(c_1)} = \alpha^2 - m_2 + \dfrac{m_1+\beta^2}{2}\left(1 + 3\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}(m_1+\beta^2)(\sqrt{3}+i), \\ \dfrac{\partial K_1}{\partial \Re(c_2)} = m_2 + \dfrac{m_2}{2}\left(1 + 3\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}m_2(\sqrt{3}-i), \\ \dfrac{\partial K_1}{\partial \Im(c_2)} = -2m_2 i + \dfrac{m_2}{2}i\left(1 - 3\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}m_2(-1-\sqrt{3}\,i), \end{cases} \tag{91}$$

$$(92)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial K_2}{\partial \Re(c_1)} = m_1 + \dfrac{m_1}{2}\left(1 + 3\,\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\,m_1(\sqrt{3}+i), \\ \dfrac{\partial K_2}{\partial \Re(c_2)} = \alpha^2 - m_1 + \dfrac{m_2+\beta^2}{2}\left(1 + 3\,\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \\ \qquad\qquad = \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\,(m_2+\beta^2)(\sqrt{3}-i), \\ \dfrac{\partial K_2}{\partial \Im(c_2)} = \alpha^2 i + 2\,m_1 i + \dfrac{m_2+\beta^2}{2}\left(i - 3\,i\,\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}\right) \\ \qquad\qquad = 3\,m_1 i + \dfrac{3}{4}\,(m_2+\beta^2)(i-\sqrt{3}). \end{cases}$$

Weiter ist nach (69) und (89)

$$\bar{k} = \bar{a}_2 - \frac{1}{M}(m_1\bar{a}_1 + m_2\bar{a}_2) = \frac{1}{2M}\,[\beta^2\sqrt{3} + (\beta^2 + 2m_1)\,i].$$

Multipliziert man hiermit die Formeln (92), so kommt

$$(93)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial(\bar{k}K_2)}{\partial \Re(c_1)} = \dfrac{3\sqrt{3}\,m_1}{8M}\,(\sqrt{3}+i)\,[\beta^2\sqrt{3} + (\beta^2+2m_1)\,i], \\ \dfrac{\partial(\bar{k}K_2)}{\partial \Re(c_2)} = \dfrac{3\sqrt{3}\,(m_2+\beta^2)}{8M}\,(\sqrt{3}-i)\,[\beta^2\sqrt{3} + (\beta^2+2m_1)\,i], \\ \dfrac{\partial(\bar{k}K_2)}{\partial \Im(c_2)} = \dfrac{3}{8M}\,[4\,m_1 i + (m_2+\beta^2)\,(i-\sqrt{3})]\,[\beta^2\sqrt{3} \\ \qquad\qquad + (\beta^2+2m_1)\,i]. \end{cases}$$

Wir wollen jetzt wieder die Determinante Δ_3 prüfen. Wenn man in den Formeln (91) und (93) das Reelle vom Imaginären trennt und die entstehenden Ausdrücke in (87) einsetzt, ergibt sich

$$\Delta_3 = \left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{8M} \cdot \begin{vmatrix} (m_1+\beta^2)\sqrt{3} & m_1+\beta^2 & \sqrt{3}\,m_1(2\beta^2 - 2m_1) \\ m_2\sqrt{3} & -m_2 & \sqrt{3}\,(m_2+\dot{\beta}^2)\,(4\beta^2+2m_1) \\ -m_2 & -m_2\sqrt{3} & -(m_2+\beta^2)(4\beta^2+2m_1) - 4m_1(\beta^2+2m_1) \end{vmatrix}.$$

Wenn man hier zu den Elementen der dritten Zeile die durch $\sqrt{3}$ dividierten Elemente der zweiten Zeile hinzuzählt, geht die dritte Zeile über in

$$0 \qquad -\frac{4m_2}{\sqrt{3}} \qquad -4m_1(\beta^2+2m_1).$$

Entwickelt man alsdann nach den Elementen der dritten Zeile, so ergibt sich für die vorstehende Determinante der Ausdruck

$$-4m_1(\beta^2+2m_1)\begin{vmatrix}(m_1+\beta^2)\sqrt{3} & m_1+\beta^2\\ m_2\sqrt{3} & -m_2\end{vmatrix}$$
$$+\frac{4m_2}{\sqrt{3}}\begin{vmatrix}(m_1+\beta^2)\sqrt{3} & \sqrt{3}\,m_1(2\beta^2-2m_1)\\ m_2\sqrt{3} & \sqrt{3}\,(m_2+\beta^2)(4\beta^2+2m_1)\end{vmatrix}.$$

Hier sieht man sofort, daß beim Ausrechnen nur ein einziges negatives Glied kommt und daß dieses durch ein positives mit doppelt so großem Koeffizienten verschluckt wird. Der Gesamtausdruck ist also positiv, daher ist auch Δ_3 von 0 verschieden, womit die Existenz der zweiparametrigen Schar wieder nachgewiesen ist.

(Eingegangen am 20. November 1936.)