Werk

Titel: Zur Liniengeometrie im linearen Strahlenkomplex und zur Laguerreschen Kugelgeomet...

Autor: Graf, U.,

Ort: Berlin

Jahr: 1937

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0042|log21

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Zur Liniengeometrie im linearen Strahlenkomplex und zur Laguerreschen Kugelgeometrie.

Von

Ulrich Graf in Berlin.

Die Kollineationsgeometrie in einem linearen Strahlenkomplex Γ läßt sich aus seinen involutorischen Projektivitäten entwickeln; dieser Aufbau ist, wie aus der Abbildung der Strahlen des Komplexes auf die Punkte einer Hyperfläche zweiter Ordnung folgt, analog dem Aufbau einer (nichteuklidischen) metrischen Geometrie aus Spiegelungen. Die Isomorphie der Kollineationsgeometrie eines allgemeinen linearen Strahlenkomplexes zur Laguerreschen Kugelgeometrie in nichteuklidischen Räumen vermittelt die gleichlaufende Entwicklung beider Disziplinen, wobei der Übergang zum speziellen linearen Komplex in der isomorphen Übertragung auf die Laguerresche Kugelgeometrie eines Raumes mit einer Metrik vom euklidischen Typ führt. Die benutzte Isomorphie gestattet den Aufbau quadratischer Mannigfaltigkeiten von linearen Strahlenkongruenzen aus Γ, die den linearen Mannigfaltigkeiten in demselben Sinne übergeordnet sind wie die Kugeln den Ebenen[1]).

A. Der allgemeine lineare Strahlenkomplex — der Kugelraum mit nichteuklidischer Metrik.

In Plückerschen Linienkoordinaten $\mathfrak{x}_{ik}$, zwischen denen die quadratische Fundamentalrelation

$$\mathfrak{x}_{01}\mathfrak{x}_{23} + \mathfrak{x}_{02}\mathfrak{x}_{31} + \mathfrak{x}_{03}\mathfrak{x}_{12} = 0 \tag{1}$$

besteht, sei der lineare Strahlenkomplex Γ durch die Gleichung

$$\Gamma\colon\ \mathfrak{x}_{12} + k^2 \cdot \mathfrak{x}_{03} = 0 \tag{2}$$

gegeben; für $k^2 = 0$ wird Γ speziell. In den neuen Koordinaten $\mathfrak{x}_\lambda$, die mit den $\mathfrak{x}_{ik}$ durch die Zuordnung

$$\left\{\begin{aligned} &\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 : \mathfrak{x}_4 = (\mathfrak{X}_{01} + \mathfrak{X}_{23}) : (\mathfrak{X}_{01} - \mathfrak{X}_{23}) : (\mathfrak{X}_{02} - \mathfrak{X}_{31}) \\ &\qquad\qquad : -(\mathfrak{X}_{02} + \mathfrak{X}_{31}) : 2\,\mathfrak{X}_{03}, \\ &\mathfrak{X}_{01} : \mathfrak{X}_{02} : \mathfrak{X}_{03} : \mathfrak{X}_{23} : \mathfrak{X}_{31} : \mathfrak{X}_{12} = (\mathfrak{x}_0 + \mathfrak{x}_1) : (\mathfrak{x}_2 - \mathfrak{x}_3) : \mathfrak{x}_4 \\ &\qquad\qquad : (\mathfrak{x}_0 - \mathfrak{x}_1) : -(\mathfrak{x}_2 + \mathfrak{x}_3) : -k^2\mathfrak{x}_4 \end{aligned}\right. \tag{3}$$

[1]) U. Graf, Über einscharig in der linearen Strahlenkongruenz enthaltene Regelflächen zweiten Grades, Math. Zeitschr. 40 (1936), S. 671.

verbunden sind, lautet die Plückersche Fundamentalrelation

$$\mathfrak{x}_0^2 - \mathfrak{x}_1^2 - \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 - k^2 \cdot \mathfrak{x}_4^2 = 0. \tag{4}$$

Zwei Strahlen $\mathfrak{x}_\lambda$ und $\bar{\mathfrak{x}}_\lambda$ schneiden einander, wenn

$$\mathfrak{x}_0\bar{\mathfrak{x}}_0 - \mathfrak{x}_1\bar{\mathfrak{x}}_1 - \mathfrak{x}_2\bar{\mathfrak{x}}_2 + \mathfrak{x}_3\bar{\mathfrak{x}}_3 - k^2 \cdot \mathfrak{x}_4\bar{\mathfrak{x}}_4 = 0 \tag{5}$$

ist.

Eine in Γ enthaltene lineare Kongruenz C_1^1 ist durch eine Gleichung der Form

$$(A\,\mathfrak{x}) \equiv A_0\mathfrak{x}_0 + A_1\mathfrak{x}_1 + A_2\mathfrak{x}_2 + A_3\mathfrak{x}_3 + A_4\mathfrak{x}_4 = 0 \tag{6}$$

gegeben, und zwar ist der Typ der Kongruenz durch das Vorzeichen der Diskriminante

$$\{A\,A\} \equiv k^2 A_0^2 - k^2 A_1^2 - k^2 A_2^2 + k^2 A_3^2 - A_4^2 \tag{7}$$

bestimmt:

$$\begin{cases} \text{I.} \quad \{A\,A\} \neq 0 : C_1^1 \text{ nicht speziell;} \\ \quad \text{a)} \ \{A\,A\} < 0 : C_1^1 \equiv H_1^1 \text{ hyperbolisch,} \\ \quad \text{b)} \ \{A\,A\} > 0 : C_1^1 \equiv E_1^1 \text{ elliptisch;} \\ \text{II.} \quad \{A\,A\} = 0 : C_1^1 \equiv P_1^1 \text{ parabolisch.} \end{cases} \tag{8}$$

Invariant bei den Kollineationen in Γ bleibt das Doppelverhältnis, das zwei Kongruenzen ${}_AC_1^1 : (A\,\mathfrak{x}) = 0$ und ${}_BC_1^1 : (B\,\mathfrak{x}) = 0$ mit dem Paar der in ihrem Büschel enthaltenen speziellen Kongruenzen ${}_1P_1^1$ und ${}_2P_1^1$ bilden; statt dieses Doppelverhältnisses selbst wird der Ausdruck

$$\begin{aligned} D = D(A,B) &= \frac{1}{2k} \cdot \ln \text{D. V.}\,({}_AC_1^1,\ {}_BC_1^1;\ {}_1P_1^1,\ {}_2P_1^1) \\ &= \frac{1}{2k} \cdot \ln \frac{\{A\,B\} + \sqrt{\{A\,B\}^2 - \{A\,A\}\,\{B\,B\}}}{\{A\,B\} - \sqrt{\{A\,B\}^2 - \{A\,A\}\,\{B\,B\}}} \end{aligned} \tag{9}$$

benutzt, der auch im Grenzübergang für $k \to 0$ einen endlichen, von ${}_AC_1^1$ und ${}_BC_1^1$ abhängigen Wert behält. Zwei Kongruenzen ${}_AC_1^1$ und ${}_BC_1^1$ sind konjugiert, wenn

$$\{A\,B\} \equiv k^2 \cdot A_0 B_0 - k^2 \cdot A_1 B_1 - k^2 \cdot A_2 B_2 + k^2 \cdot A_3 B_3 - A_4 B_4 = 0 \tag{10}$$

oder

$$D = \frac{i\pi}{2k}$$

ist.

Zwei Kongruenzen $(A\,\mathfrak{x}) = 0$ und $(B\,\mathfrak{x}) = 0$, die konjugiert sein mögen, schneiden einander in einer Regelschar zweiten Grades $\mathfrak{R}_{A\,B}^2$; für die durch $\mathfrak{R}_{A\,B}^2$ bestimmte Fläche zweiten Grades $R_{A\,B}^2$ gilt folgende Einteilung:

(11)
$$\begin{cases} \text{I.} & R^2_{AB} \text{ nicht singulär} \\ & \{AA\} \neq 0, \quad \{BB\} \neq 0, \quad \{AB\} = 0, \\ & \text{a) } \{AA\} \cdot \{BB\} < 0 : R^2_{AB} \text{ reell}, \\ & \text{b) } \{AA\} \cdot \{BB\} > 0 : R^2_{AB} \text{ imaginär}; \\ \text{II.} & R^2_{AB} \text{ zweifach singulär (Ebenenpaar)} \\ & \{AA\} = 0, \quad \{BB\} \neq 0, \quad \{AB\} = 0, \\ & \text{a) } \{BB\} < 0 : R^2_{AB} \text{ reelles Ebenenpaar}, \\ & \text{b) } \{BB\} > 0 : R^2_{AB} \text{ konj. imag. Ebenenpaar}; \\ \text{III.} & R^2_{AB} \text{ dreifach singulär (Doppelebene)} \\ & \{AA\} = 0, \quad \{BB\} = 0, \quad \{AB\} = 0. \end{cases}$$

Die Gleichung von R^2_{AB} in homogenen Punktkoordinaten x_λ lautet

$$\begin{aligned} & k^2(-\gamma_{02}+\gamma_{03}-\gamma_{12}+\gamma_{13})x_0^2 + (\gamma_{02}+\gamma_{03}+\gamma_{12}+\gamma_{13})x_1^2 \\ & + (-\gamma_{02}+\gamma_{03}+\gamma_{12}-\gamma_{13})x_2^2 + k^2(\gamma_{02}+\gamma_{03}-\gamma_{12}-\gamma_{13})x_3^2 \\ & + 2(\gamma_{04}+\gamma_{14})x_0x_1 + 2(\gamma_{24}-\gamma_{34})x_0x_2 - 2k^2(\gamma_{01}+\gamma_{23})x_0x_3 \\ & + 2(-\gamma_{01}+\gamma_{23})x_1x_2 - 2(\gamma_{24}+\gamma_{34})x_1x_3 - 2(\gamma_{04}-\gamma_{14})x_2x_3 = 0, \end{aligned}$$

wobei die γ_{ik} die zweigliedrigen Unterdeterminanten

$$\gamma_{ik} = \begin{vmatrix} A_i & A_k \\ B_i & B_k \end{vmatrix}$$

der Matrix

$$\begin{pmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{pmatrix}$$

sind. Zwischen ihnen bestehen die Identitäten

$$\begin{aligned} \gamma_{01}\gamma_{23} + \gamma_{02}\gamma_{31} + \gamma_{03}\gamma_{12} &= 0, \\ \gamma_{02}\gamma_{34} + \gamma_{03}\gamma_{42} + \gamma_{04}\gamma_{23} &= 0, \\ \gamma_{03}\gamma_{41} + \gamma_{04}\gamma_{13} + \gamma_{01}\gamma_{34} &= 0, \end{aligned}$$

aus denen sich weiterhin die analog gebauten Beziehungen

$$\begin{aligned} \gamma_{12}\gamma_{34} + \gamma_{13}\gamma_{42} + \gamma_{14}\gamma_{23} &= 0, \\ \gamma_{01}\gamma_{24} + \gamma_{02}\gamma_{41} + \gamma_{04}\gamma_{12} &= 0 \end{aligned}$$

ableiten lassen. Diese γ_{ik} stellen, wie aus der Deutung der A_λ bzw. B_λ als homogener Punktkoordinaten folgt, die Linienkoordinaten in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit dar.

Die projektiven Transformationen im linearen Strahlenkomplex Γ lassen sich aus den involutorischen Projektivitäten aufbauen [2]). Es gibt zwei Typen solcher Involutionen:

---

[2]) Vgl. G. Haenzel, Die Geometrie des linearen Strahlenkomplexes gegründet auf seine Polarentheorie, Crelles Journ. **174** (1936), S. 226.

1. *Primäre Involutionen*, induziert

sowohl durch die Kollineation im geschart involutorischen Raum einer in Γ enthaltenen linearen Kongruenz C_1^1

als auch durch die Korrelation im Nullraum des zu Γ konjugierten linearen Komplexes, der Γ in C_1^1 trifft;

2. *Sekundäre Involutionen*, induziert

sowohl durch die Korrelation im polaren Raum einer in Γ enthaltenen Regelschar zweiten Grades $\mathfrak{R}^2$

als auch durch die Kollineation im geschart involutorischen Raum derjenigen komplexfremden Kongruenz, die Γ in $\mathfrak{R}^2$ trifft.

Bei einer *primären Involution* $\mathfrak{I}_p$ bleiben in Γ die Strahlen der bestimmenden Kongruenz $C_1^1 : (A\,\mathfrak{x}) = 0$ sowie sämtliche zu C_1^1 konjugierten Kongruenzen, die ein Gebüsch $\pi_3(C_1^1)$ bilden, fest. Die ∞^2 parabolischen Kongruenzen aus $\pi_3(C_1^1)$ haben zu (doppelt zählenden) Leitgeraden die Strahlen von C_1^1.

Entsprechend der Einteilung (8) gibt es ∞^4 primäre Involutionen $\mathfrak{I}_p$ vom hyperbolischen Typ ($\{A\,A\} < 0$), ∞^4 vom elliptischen Typ ($\{A\,A\} > 0$) und ∞^3 vom parabolischen Typ ($\{A\,A\} = 0$). Im letzten Falle ist $\mathfrak{I}_p$ ausgeartet: *jedem* Strahl aus Γ ist die (doppelt zählende) Leitgerade

$$\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 : \mathfrak{x}_4 = k^2 A_0 : -k^2 A_1 : -k^2 A_2 : k^2 A_3 : -A_4$$

der parabolischen Kongruenz $(A\,\mathfrak{x}) = 0$ zugeordnet.

Bei einer *sekundären Involution* $\mathfrak{I}_s$ bleiben in Γ alle Strahlen der bestimmenden Regelschar $\mathfrak{R}^2$ sowie das in Γ liegende Strahlenpaar der Leitschar von R^2 fest. Dieses Strahlenpaar trägt den invarianten Kongruenzenbündel $\pi_2(\mathfrak{R}^2)$, dessen Kongruenzen sämtlich durch $\mathfrak{I}_s$ in sich transformiert werden. Die ∞^1 parabolischen Kongruenzen von $\pi_2(\mathfrak{R}^2)$ haben zu (doppelt zählenden) Leitgeraden die Strahlen von $\mathfrak{R}^2$.

Die Einteilung (11) der Regelflächen zweiten Grades entspricht der Einteilung der sekundären Involutionen. Ist $R^2_{A\,B}$ zweifach singulär, so wird durch $\mathfrak{I}_s$ *jeder* Strahl von Γ in die Schnittgerade

$$\bar{\mathfrak{x}}_0 : \bar{\mathfrak{x}}_1 : \bar{\mathfrak{x}}_2 : \bar{\mathfrak{x}}_3 : \bar{\mathfrak{x}}_4 = k^2 A_0 : -k^2 A_1 : -k^2 A_2 : k^2 A_3 : -A_4$$

des Ebenenpaares $R^2_{A\,B}$, d. h. also in die (doppelt zählende) Leitgerade der parabolischen Kongruenz ${}_AP_1^1 : (A\,\mathfrak{x}) = 0$, zu der sämtliche Kongruenzen des Büschels ${}_AP_1^1 + \lambda \cdot {}_BC_1^1 = 0$ konjugiert sind, übergeführt. Längs dieses Strahles berühren einander die ∞^2 Kongruenzen des $\mathfrak{R}^2_{A\,B}$ invariant zugeordneten C_1^1-Bündels $\pi_2(\mathfrak{R}^2_{A\,B})$, dessen Kongruenzen gleichzeitig zu ${}_AP_1^1$ und ${}_BC_1^1$ konjugiert sind.

Der Zusammenhang zwischen den primären und sekundären Involutionen ergibt sich aus der Figur von fünf paarweise konjugierten Kon-

gruenzen im Komplex Γ, die sich bei der Abbildung der Komplexstrahlen als Träger parabolischer Kongruenzen auf die Punkte einer M_3^2 den Ecken eines Polarpentatops zuordnen lassen. Je zwei dieser fünf Kongruenzen bestimmen eine Regelschar zweiten Grades in Γ, wobei von der zugehörigen Leitschar nur zwei Strahlen, nämlich die (doppelt zählenden) Leitgeraden der beiden parabolischen Kongruenzen aus dem Büschel durch die beiden Ausgangskongruenzen, in Γ liegen. In den zehn möglichen Büscheln ergeben sich somit zehn Geradenpaare aus Γ, die 60 Punkte bestimmen, wobei durch jeden Punkt zwei Gerade laufen und auf jeder Geraden sechs Punkte liegen. Jedes Geradenpaar legt als Paar der Leitschar eine mit der gesamten Regelschar in Γ enthaltene Regelfläche zweiten Grades fest; die drei mit dem Ausgangspaar inzidenten Geradenpaare gehören der Regelschar an und trennen einander paarweise harmonisch[3]). Auf diese Weise ergeben sich zehn Regelflächen zweiten Grades derart, daß jede autopolar im polaren Raume von drei anderen liegt. Aus dieser Grundkonfiguration[4]) ergibt sich:

Zwei primäre Involutionen an konjugierten Kongruenzen führen auf die sekundäre Involution an der ihnen gemeinsamen Regelschar; zwei sekundäre Involutionen an autopolaren Regelscharen führen auf die primäre Involution an der ihnen invariant zugeordneten Kongruenz.

Die Isomorphie der Kollineationsgruppe im allgemeinen linearen Strahlenkomplex zur Laguerreschen Gruppe eines Kugelraumes mit nichteuklidischer Metrik ergibt sich aus der Kleinschen Abbildung der Komplexstrahlen als Träger parabolischer Kongruenzen auf die Punkte einer M_3^2, wobei den nicht-speziellen Kongruenzen des Komplexes die Punkte des die M_3^2 tragenden R_4 zugeordnet werden. Werden nämlich diese Punkte durch eine verallgemeinerte zyklographische Projektion auf einen dreidimensionalen Bildraum bezogen, indem jedem Punkte des R_4 die (orientierte) Spurfläche zweiten Grades seines Tangentialhyperkegels an M_3^2 im Bildraum zugeordnet wird, so ist, sofern noch die Schnittfläche F^2 des Bildraumes mit der M_3^2 als Fundamentalgebilde der Metrik im Bildraum erklärt wird, jede Kongruenz des linearen Komplexes auf eine orientierte Kugel (Sphäre) des Bildraumes abgebildet[5]). Diese Abbildung ist, sofern $\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3, \mathfrak{x}_4$ als die homogenen Koordinaten der Ebene

$$\mathfrak{x}_1 \cdot x_1 + \mathfrak{x}_2 \cdot x_2 + \mathfrak{x}_3 \cdot x_3 + \mathfrak{x}_4 \cdot x_4 = 0$$

---

[3]) Von drei solchen Geradenpaaren sind zwei reell, während das dritte aus konjugiert imaginären Geraden besteht.

[4]) Sie entspricht der Kummerschen Konfiguration.

[5]) U. Graf, Über Laguerresche Geometrie in Ebenen und Räumen mit nichteuklidischer Metrik, Jahresber. d. Deutsch. Math. Ver. 45 (1935), S. 212.

und x_0 als ihre Orientierungskoordinate gedeutet werden, durch (3) gegeben; die Maßbestimmung des Kugelraumes mit den homogenen Punktkoordinaten x_i gründet sich auf die Fläche zweiter Ordnung

$$F^2: \quad k^2 x_1^2 + k^2 x_2^2 - k^2 x_3^2 + x_4^2 = 0, \tag{12}$$

dem (als Klassengebilde aufzufassenden) geometrischen Ort aller zu sich selbst entgegengesetzt orientierten (isotropen) Ebenen $x_0 = 0$, als metrisches Fundamentalgebilde.

Im einzelnen gilt folgende Gegenüberstellung:

Linearer Strahlenkomplex:	Laguerrescher Kugelraum:
Strahl,	orientierte Ebene,
einander schneidende Strahlen,	parallele orientierte Ebenen,
Strahlenbüschel,	Parallelebenenbüschel,
Regelschar zweiten Grades $\mathfrak{R}^2$,	orient. gerader Kreiskegel K^2,
Lineare Kongruenz C_1^1,	Sphäre (orient. Kugel) S^2,
a) C_1^1 nicht speziell,	a) S^2 irreduzibel,
b) $C_1^1 \equiv P_1^1$ parabolisch,	b) S^2 reduzibel [6]),
C_1^1-Büschel,	Sphärenschar,
C_1^1-Bündel,	Sphärenheer,
C_1^1-Gebüsch,	Sphärenverband,
Invariante $D(A, B)$ zweier Kongruenzen ${}_AC_1^1$ und ${}_BC_1^1$,	Distanz [7]) D der Sphären S_A^2 und S_B^2,
Primäre Involutionen,	Laguerresche Spiegelungen erster Art,
Sekundäre Involutionen,	Laguerresche Spiegelungen zweiter Art,
Gruppe $\mathfrak{L}^{10}$ der automorphen Kollineationen von Γ.	Gruppe L^{10} der Laguerreschen Kugeltransformationen.

Zwei Sphären liegen in absoluter Lage (entsprechend zwei konjugierten Kongruenzen), wenn ihre Distanz $D = \frac{i\pi}{2k}$ ist; zwei Kegel liegen in absoluter Lage (entsprechend zwei autoplaren Regelscharen), wenn dasjenige Ebenenpaar, das die beiden absoluten Kreise des einen Kegels trägt, dem anderen Kegel angehört. Die beiden Ebenenpaare, die die absoluten Kreise zweier solcher Kegel in absoluter Lage tragen, gehören wieder einem Kegel K^2 an und trennen auf diesem einander harmonisch.

Die Gruppe der Laguerreschen Kugelgeometrie in einem Raume mit nicht-singulärer Metrik enthält zwei Typen involutorischer Transformationen, die Spiegelungen erster und zweiter Art. Der Aufbau der automorphen

[6]) Zerfallen in die ∞^2 Parallelebenen einer festen Ebene.

[7]) Tangentialentfernung der beiden Sphären, gemessen von Berührungspunkt zu Berührungspunkt.

Kollineationen von Γ aus primären und sekundären Involutionen geht mit dem Aufbau der Laguerreschen Kugeltransformationen aus Spiegelungen erster und zweiter Art Hand in Hand.

Eine *Laguerresche Spiegelung erster Art*[8]) ist sowohl durch eine Sphäre S^2 als auch durch den der Sphäre absolut zugehörigen Sphärenverband $\pi_3(S^2)$ festgelegt. Die einer Ebene $\mathfrak{x}$ durch die Spiegelung an S^2 zugeordnete Ebene $\bar{\mathfrak{x}}$ wird gewonnen, indem die ∞^1 zu $\mathfrak{x}$ parallelen Tangentialebenen von S^2 konstruiert werden; die zweite diesen Ebenen parallele Ebene ist $\bar{\mathfrak{x}}$. Diese ∞^1 Tangentialebenen von S^2 bilden einen geraden Kreiskegel K^2, dessen beide absolute Kreise von $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ getragen werden. $\mathfrak{x}$ ist stets irgend drei Sphären aus $\pi_3(S^2)$ durch $\mathfrak{x}$ gemeinsam (Fig. 1).

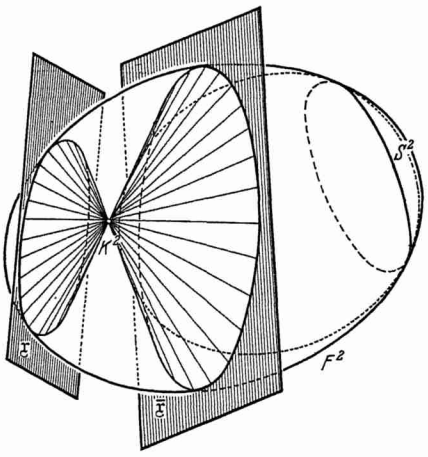

Fig. 1.

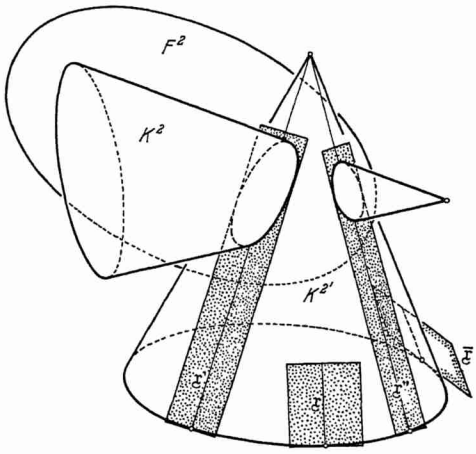

Fig. 2.

Eine *Laguerresche Spiegelung zweiter Art* ist sowohl durch eine Sphärenschar π_1 (getragen von einem Kegel K^2) als auch durch das absolut zugehörige Sphärenheer π_2 (getragen von dem Ebenenpaar $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$, das die beiden absoluten Kreise von K^2 enthält) festgelegt. Die einer Ebene $\mathfrak{x}$ durch die Spiegelung an K^2 zugeordnete Ebene $\bar{\mathfrak{x}}$ gehört dem Kegel durch $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ an; auf diesem Kegel $K^{2\prime}$ trennen die Ebenenpaare $\mathfrak{x}, \bar{\mathfrak{x}}$ und $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}''$ einander harmonisch. K^2 und $K^{2\prime}$ sind in absoluter Lage (Fig. 2).

Der im linearen Strahlenkomplex benutzten Grundfigur von fünf paarweise konjugierten Kongruenzen entspricht im Kugelraum die Figur von fünf Sphären in paarweise absoluter Lage[9]). Sie bestimmen zehn

[8]) Vgl. die der Spiegelung an einer Sphäre analoge Transformation in der Ebene, die Spiegelung am Zykel, bei H. Beck, Ein Seitenstück zur Möbiusschen Geometrie der Kreisverwandtschaften, Transact. of the Amer. Soc. **11** (1910), S. 426.

[9]) Diese Figur wird durch die absolute Polarität aus der Figur von fünf einander orthogonal schneidenden Kugeln gewonnen.

Kreiskegel derart, daß jeder in absoluter Lage zu drei anderen liegt; die zehn die absoluten Kreise der Kegel enthaltenden Ebenenpaare ergeben 20 Ebenen im Kugelraum, von denen jede zu sechs anderen parallel ist. Aus dieser Grundfigur des Kugelraumes folgt:

Zwei Spiegelungen erster Art an Sphären in absoluter Lage führen auf die Spiegelung zweiter Art an dem sie verbindenden Kegel; zwei Spiegelungen zweiter Art an Kegeln in absoluter Lage führen auf die Spiegelung erster Art an der ihnen absolut zugeordneten Sphäre.

B. Der spezielle lineare Strahlenkomplex — der Kugelraum mit euklidischer Metrik.

Der Übergang zum speziellen Komplex führt in der isomorphen Übertragung auf die Laguerresche Kugelgeometrie eines Raumes mit einer Metrik vom euklidischen Typ. Auf diese Weise lassen sich die Gesetze der Laguerreschen Kugelgeometrie im euklidischen Raum als Grenzfall derjenigen in einem nichteuklidischen Raume in derselben Art gewinnen wie die Beziehungen in einem speziellen linearen Strahlenkomplex als Ausartungen derjenigen eines allgemeinen Komplexes.

Aus (2) ergibt sich für $k^2 = 0$ der spezielle Komplex

(2 a) $$\bar{\Gamma}: \quad \mathfrak{x}_{12} = 0$$

mit der Achse [10])

$$\mathfrak{x}_0 : \mathfrak{x}_1 : \mathfrak{x}_2 : \mathfrak{x}_3 : \mathfrak{x}_4 = 0 : 0 : 0 : 0 : 1.$$

Zwischen den $\mathfrak{x}_i$ besteht die Beziehung

(4 a) $$\mathfrak{x}_0^2 - \mathfrak{x}_1^2 - \mathfrak{x}_2^2 + \mathfrak{x}_3^2 = 0.$$

Die metrische Fundamentalfläche $\bar{F}^2$ des zugeordneten Laguerreschen Kugelraumes erhält nach (12) die Gleichung

(12 a) $$\bar{F}^2: \quad x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \quad x_4 = 0,$$

ist also ein Kegelschnitt [11]) (einfach-singuläres Gebilde zweiter Klasse). Es entsprechen einander

im speziellen Strahlenkomplex	im euklidischen Kugelraum
Strahlenbündel oder Strahlenfeld,	Ebenenbündel mit absolutem Zentrum,
Strahlenbüschel, dem die Komplexachse nicht angehört,	Ebenenbüschel mit isotroper Trägergeraden,
Strahlenbüschel, dem die Komplexachse angehört.	Ebenenbüschel mit uneigentlicher Trägergeraden (Parallelebenenbüschel).

[10]) Der Achse von $\bar{\Gamma}$ entspricht die uneigentliche Ebene des Kugelraumes.

[11]) Aus Realitätsgründen ist der Fundamentalkegelschnitt (12 a) reell gewählt, so daß sich die Laguerresche Geometrie in einem Raume mit pseudoeuklidischer Metrik ergibt.

Für die im speziellen Komplex enthaltenen linearen Kongruenzen

$$C_1^1\colon\ (A\,\mathfrak{x}) \equiv A_0\,\mathfrak{x}_0 + A_1\,\mathfrak{x}_1 + A_2\,\mathfrak{x}_2 + A_3\,\mathfrak{x}_3 + A_4\,\mathfrak{x}_4 = 0$$

und die ihnen entsprechenden Sphären S^2 des Laguerreschen Kugelraumes gilt folgende Einteilung:

	Kongruenz C_1^1	*Sphäre* S^2
I. $\{A\,A\} \equiv -A_4^2 \neq 0$	$C_1^1 \equiv H_1^1$ hyperbolisch	S^2 eigentlich
II. $\{A\,A\} \equiv -A_4^2 = 0$, $[A\,A] \equiv A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 \neq 0$	$C_1^1 \equiv P_1^1$ parabolisch	S^2 entartet in einen den absoluten Kreis in zwei Punkten berührenden Klassenkegelschnitt der uneigentlichen Ebene
III. $\{A\,A\} \equiv -A_4^2 = 0$, $[A\,A] \equiv A_0^2 - A_1^2 - A_2^2 + A_3^2 = 0$	C_1^1 zerfallen in Strahlenbündel und Strahlenfeld	S^2 zerfallen in Ebenenbündelpaar mit absoluten Trägerpunkten

Zwei Kongruenzen [Sphären] $(A\,\mathfrak{x}) = 0$ und $(B\,\mathfrak{x}) = 0$ bestimmen eine Regelschar $\mathfrak{R}^2$ [einen orient. Kegel K^2] als Träger ihres Büschels [ihrer Schar]. Für die Art der durch $\mathfrak{R}^2$ festgelegten Fläche zweiten Grades R^2 bzw. den Kegel K^2 ist maßgebend der Wert von

$$\Delta = A_4^2\,[B\,B] - 2\,A_4\,B_4\,[A\,B] + B_4^2\,[A\,A]$$

und

$$\delta = [A\,A]\,[B\,B] - [A\,B]^2,$$

wobei

$$[A\,B] = A_0\,B_0 - A_1\,B_1 - A_2\,B_2 + A_3\,B_3$$

ist[12]). Es gilt folgende Einteilung:

	Regelfläche R^2	*Kegel* K^2
I. $\Delta \neq 0$	nichtsinguläre Fläche	eigentlicher Kegel
II. $\Delta = 0$, $\delta \neq 0$	Strahlenbüschelpaar	Ebenenbüschelpaar
a) A_4, B_4 verschwinden nicht gleichzeitig	Strahlenbüschelpaar, der gemeinsame Strahl ist nicht die Achse	Ebenenbüschelpaar mit isotropen Trägergeraden durch denselben absoluten Punkt
b) $A_4 = B_4 = 0$	Strahlenbüschelpaar mit der Achse als gemeinsamem Strahl	Parallelebenenbüschelpaar
III. $\Delta = 0$, $\delta = 0$	Doppelzählender Strahlenbüschel, dem die Achse angehört	Doppelt zählendes Parallelebenenbüschel

[12]) $\Delta = 0$ ist die Bedingung dafür, daß die freien Leitgeraden zweier Kongruenzen aus $\overline{\Gamma}$ einander schneiden.

Die Invariante D zweier Kongruenzen ${}_AC_1^1$ und ${}_BC_1^1$ bzw. die Distanz ihrer beiden Bildsphären erscheint nach dem Grenzübergang für $k \to 0$ in der Form

$$(9\,a)\quad D = \frac{1}{A_4\,B_4}\sqrt{(A_1B_4-A_4B_1)^2+(A_2B_4-A_4B_2)^2+(A_3B_4-A_4B_3)^2-(A_0B_4-A_4B_0)^2}.$$

Die Entartung des allgemeinen Komplexes in einen speziellen, gleichbedeutend mit der Entartung der allgemeinen Metrik des zugeordneten Laguerreschen Kugelraumes in eine Metrik vom euklidischen Typ, bringt eine Aufspaltung der primären und sekundären Involutionen $\mathfrak{I}_p$ und $\mathfrak{I}_s$ in je zwei Typen $\mathfrak{I}_p^1$, $\mathfrak{I}_p^2$ und $\mathfrak{I}_s^1$, $\mathfrak{I}_s^2$ von verschiedener Struktur mit sich. Das einer allgemeinen Kongruenz im speziellen Komplex invariant zugeordnete Kongruenzengebüsch besteht *stets* aus dem Gebüsch der entarteten Kongruenzen $\{A\,A\} = 0$, während einem allgemeinen Kongruenzengebüsch des speziellen Komplexes eine entartete Kongruenz (nicht mehr eineindeutig) zugeordnet ist. Laufen insbesondere alle Kongruenzen dieses Gebüsches durch *einen* Komplexstrahl, so ist die zugeordnete Kongruenz in das durch diesen Strahl und die Achse des Komplexes bestimmte Strahlenbündel und Strahlenfeld zerfallen.

Eine primäre [sekundäre] Involution im speziellen Komplex ist demnach nicht mehr *sowohl* durch eine in ihm enthaltene lineare Kongruenz [Regelschar zweiten Grades] *als auch* durch ein Kongruenzengebüsch [einen Kongruenzenbündel] bestimmt, sondern *entweder* durch eine Kongruenz [Regelschar] *oder* ein Kongruenzengebüsch [einen Kongruenzenbündel].

Im speziellen linearen Strahlenkomplex $\overline{\Gamma}$ gibt es somit folgende Arten von Involutionen:

1. *Primäre Involutionen.*

a) $\mathfrak{I}_p^1$, primäre Involution erster Art, festgelegt durch eine Kongruenz C_1^1 aus $\overline{\Gamma}$, konstruierbar durch die Kollineation des geschart involutorischen Raumes von C_1^1.

b) $\mathfrak{I}_p^2$, primäre Involution zweiter Art, festgelegt durch ein Kongruenzengebüsch $\pi_3(C_1^1)$ aus $\overline{\Gamma}$. Einem Strahl r aus $\overline{\Gamma}$ ist derjenige Komplexstrahl s zugeordnet, der mit r zusammen als Grundgeradenpaar einen in $\pi_3(C_1^1)$ enthaltenen Kongruenzenbündel trägt. Irgend drei Kongruenzen aus $\pi_3(C_1^1)$ durch einen Strahl r laufen durch den r zugeordneten Strahl s.

2. *Sekundäre Involutionen.*

a) $\mathfrak{I}_s^1$, sekundäre Involution erster Art, festgelegt durch eine in $\overline{\Gamma}$ enthaltene Regelschar zweiten Grades $\mathfrak{R}^2$ (als Träger eines Kongruenzenbüschels), konstruierbar durch die Korrelation des polaren Raumes von $\mathfrak{R}^2$.

b) $\mathfrak{I}_s^2$, sekundäre Involution zweiter Art, festgelegt durch ein Strahlenpaar u, v aus $\overline{\Gamma}$ (als Trägerpaar eines Kongruenzenbündels). Einem Strahl r aus $\overline{\Gamma}$ ist der vierte harmonische Strahl s auf der durch r und u, v laufenden Regelschar zweiten Grades zugeordnet. (D. V. $(r, s; u, v) = -1$).

In dem zugeordneten Laguerreschen Kugelraum mit einer Metrik vom euklidischen Typ [13]) entsprechen diesen involutorischen projektiven Transformationen in $\overline{\Gamma}$ die Laguerreschen Spiegelungen an der Sphäre ($\mathfrak{I}_p^1$), an der Spärenschar ($\mathfrak{I}_s^1$), am Sphärenheer ($\mathfrak{I}_s^2$) und am Sphärenverband ($\mathfrak{I}_p^2$). Durch die Laguerresche Spiegelung an einer Sphäre werden die Parallelebenenbüschel in sich transformiert, in Übereinstimmung mit der Tatsache, daß bei einer Transformation $\mathfrak{I}_p^1$ die Strahlenbüschel aus $\overline{\Gamma}$ fest bleiben.

C. Quadratische Kongruenzenmannigfaltigkeiten im linearen Strahlenkomplex.

Die Invariante $D({}_AC_1^1, {}_BC_1^1)$ zweier Kongruenzen ${}_AC_1^1$ und ${}_BC_1^1$ in Γ, gleichbedeutend mit der Distanz der beiden Bildsphären in dem zugeordneten Laguerreschen Kugelraum, veranlaßt die Betrachtung dreistufiger quadratischer Mannigfaltigkeiten in Γ enthaltener Kongruenzen C_1^1, bestehend aus allen Kongruenzen, die mit einer gegebenen Kongruenz ${}_MC_1^1$ einen festen D-Wert bestimmen. Die so erklärten *sphärischen C_1^1-Komplexe* $\sigma_3^2(C_1^1)$ sind den Kongruenzengebüschen $\pi_3(C_1^1)$ in Γ in etwa demselben Sinne übergeordnet wie die Kugeln den Ebenen; für $D = \frac{i\pi}{2k}$ geht ein sphärischer C_1^1-Komplex in ein (doppelt zählendes) Kongruenzengebüsch und seine „Mittelkongruenz" ${}_MC_1^1$ in die dem Gebüsch invariant zugehörige Kongruenz über.

Entsprechend wird die Mannigfaltigkeit der $\infty^2[\infty^1]$ Kongruenzen eines Gebüsches [Bündels], die mit einer gegebenen Mittelkongruenz ${}_MC_1^1$ des Gebüsches [Bündels] einen festen D-Wert bestimmen, als *sphärische C_1^1-Kongruenz* $\sigma_2^3(C_1^1)$ [*sphärische C_1^1-Reihe* $\sigma_1^3(C_1^1)$] bezeichnet. Für $D = \frac{i\pi}{2k}$ entartet die sphärische C_1^1-Kongruenz [sphärische C_1^1-Reihe] in ein (doppelt zählendes) Kongruenzenbündel $\pi_2(C_1^1)$ [Kongruenzenbüschel $\pi_1(C_1^1)$].

Diese Vorstellungen behalten auch für einen speziellen Komplex $\overline{\Gamma}$ nach dem sinngemäß anzustellenden Grenzübergang Gültigkeit.

---

[13]) Vgl. E. Müller, Die Geometrie orientierter Kugeln nach Graßmannschen Methoden, Monatsh. f. Math. Phys. 9 (1898), S. 269.

In dem zugeordneten Laguerreschen Kugelraum entspricht dem sphärischen C_1^1-Komplex ein *sphärischer S^2-Komplex*, bestehend aus den ∞^3 Sphären fester Distanz von einer Mittelsphäre ${}_M S^3$. In gleicher Weise ist das Bild einer sphärischen C_1^1-Kongruenz [sphärischen C_1^1-Reihe] eine *sphärische S^2-Kongruenz* [*sphärische S^2-Reihe*], gelegen in einem Sphärenverband [Sphärenheer]. Für $D = \frac{i\pi}{2k}$ gehen die sphärischen S^2-Komplexe, -Kongruenzen, -Reihen in (doppelt zählende) Sphärenverbände, -heere, -scharen über.

Bei der Deutung der Laguerreschen Geometrie als metrischer Geometrie in einer vierdimensionalen Mannigfaltigkeit auf Grund der verallgemeinerten zyklographischen Projektion entsprechen den sphärischen S^2-Mannigfaltigkeiten die Hyperkugeln, Kugeln und Kreise.

Aus der Definition der so den linearen C_1^1-Mannigfaltigkeiten übergeordneten quadratischen C_1^1-Mannigfaltigkeiten folgt:

I. Jede automorphe Kollineation von Γ führt sphärische C_1^1-Komplexe [-Kongruenzen, -Reihen] in sphärische C_1^1-Komplexe [-Kongruenzen, -Reihen] mit gleichem D-Wert sowie Mittelkongruenzen in Mittelkongruenzen über.

II. Ein sphärischer C_1^1-Komplex wird von einem C_1^1-Gebüsch [C_1^1-Bündel] in einer sphärischen C_1^1-Kongruenz [sphärischen C_1^1-Reihe] geschnitten.

Aus der Deutung der sphärischen Kongruenzenmannigfaltigkeiten als Hyperkugeln, Kugeln und Kreise in der vierdimensionalen Bildmannigfaltigkeit ergibt sich:

III. Jeder sphärische C_1^1-Komplex $\sigma_3^3(C_1^1)$ enthält eine entartete, nur aus parabolischen Strahlenkongruenzen P_1^1 bestehende sphärische C_1^1-Kongruenz $\sigma_2^{3'}(P_1^1)$; die Leitgeraden dieser Strahlenkongruenzen bilden die Mittelkongruenz ${}_M C_1^1$ von $\sigma_3^3(C_1^1)$; ${}_M C_1^1$ ist die zu dem Trägerkongruenzengebüsch von $\sigma_2^{3'}(P_1^1)$ invariante Strahlenkongruenz.

IV. Jede sphärische C_1^1-Kongruenz $\sigma_2^3(C_1^1)$ enthält eine entartete sphärische C_1^1-Reihe $\sigma_1^{3'}(P_1^1)$, die nur aus parabolischen Strahlenkongruenzen besteht. Deren Leitgeraden bilden diejenige Regelschar in Γ, die den dem Trägerkongruenzenbündel π_2 der Reihe $\sigma_1^{3'}(P_1^1)$ invariant zugeordneten Kongruenzenbüschel π_1 trägt. π_1 durchstößt das Trägerkongruenzengebüsch π_3 von $\sigma_2^3(C_1^1)$ in der Mittelkongruenz ${}_M C_1^1$ von $\sigma_2^3(C_1^1)$.

V. Jede sphärische C_1^1-Reihe $\sigma_1^3(C_1^1)$ enthält ein Paar parabolischer Strahlenkongruenzen ${}_1 P_1^1$ und ${}_2 P_1^1$. Ihre Leitgeraden tragen denjenigen Kongruenzenbündel π_2, der dem Kongruenzenbüschel π_1 durch ${}_1 P_1^1$ und

${}_2P_1^1$ invariant zugeordnet ist. π_2 hat mit dem Trägerkongruenzenbündel von $\sigma_1^2(C_1^1)$ die Mittelkongruenz ${}_MC_1^1$ von $\sigma_1^2(C_1^1)$ gemein.

Aus der Tatsache, daß durch eine Kugel [einen Kreis] der vierdimensionalen Bildmannigfaltigkeit zwei [drei] Minimalhyperkegel legbar sind, folgt auf Grund der Isomorphie der metrischen Geometrie dieser Bildmannigfaltigkeit zur Kollineationsgeometrie im linearen Strahlenkomplex:

VI. Die $\infty^2[\infty^1]$ Strahlenkongruenzen einer sphärischen C_1^1-Kongruenz [sphärischen C_1^1-Reihe] berühren sämtlich zwei [drei] feste Strahlenkongruenzen aus Γ.

Für $D = \frac{i\pi}{2k}$ werden diese Leitkongruenzen parabolisch; die sphärische C_1^1-Kongruenz [sphärische C_1^1-Reihe] entartet in den (doppelt zählenden) Kongruenzenbündel [Kongruenzenbüschel] durch die Leitgeraden der zwei [drei] parabolischen Leitkongruenzen.

Aus der Deutung über den Laguerreschen Kugelraum folgt:

VII. Zwei sphärische C_1^1-Komplexe $\sigma_3^2(C_1^1)$ und $\bar{\sigma}_3^2(C_1^1)$ schneiden einander in einem Paar sphärischer C_1^1-Kongruenzen $\sigma_2^2(C_1^1)$ und $\bar{\sigma}_2^2(C_1^1)$, die eine entartete, nur aus parabolischen Strahlenkongruenzen P_1^1 bestehende sphärische C_1^1-Reihe $\sigma_1^{2'}(P_1^1)$ gemein haben.

VIII. Die ∞^1 sphärischen C_1^1-Komplexe durch eine feste sphärische C_1^1-Kongruenz $\sigma_2^2(C_1^1)$ haben paarweise noch je eine zweite sphärische C_1^1-Kongruenz gemein. Alle diese zweiten sphärischen C_1^1-Kongruenzen $\bar{\sigma}_2^2(C_1^1)$ laufen durch die entartete sphärische C_1^1-Reihe $\sigma_1^{2'}(P_1^1)$ von $\sigma_2^2(C_1^1)$; je ∞^1 dieser sphärischen C_1^1-Kongruenzen $\bar{\sigma}_2^2(C_1^1)$ haben dieselbe Mittelkongruenz ${}_MC_1^1$; die ∞^1 Mittelkongruenzen ${}_MC_1^1$ bilden den zu dem Trägerkongruenzenbündel von $\sigma_1^{2'}(P_1^1)$ invarianten Kongruenzenbüschel.

IX. Die Mittelkongruenzen der $\infty^1[\infty^2, \infty^3]$ sphärischen C_1^1-Komplexe durch eine feste sphärische C_1^1-Kongruenz [eine feste sphärische C_1^1-Reihe, ein festes Paar von Strahlenkongruenzen] bilden einen Kongruenzenbüschel [einen Kongruenzenbündel, ein Kongruenzengebüsch].

Die Betrachtung der primären und sekundären Involutionen des linearen Strahlenkomplexes Γ liefert:

X. Jeder sphärische C_1^1-Komplex $\sigma_3^2(C_1^1)$ bleibt als Ganzes fest bei der durch seine Mittelkongruenz ${}_MC_1^1$ bedingten primären Involution $\mathfrak{I}_p$, und zwar vertauscht $\mathfrak{I}_p$ je zwei in einem Kongruenzenbüschel durch ${}_MC_1^1$ gelegene Kongruenzen von $\sigma_3^2(C_1^1)$ miteinander. Fallen diese beiden Kongruenzen stets zusammen, so ist der sphärische C_1^1-Komplex $\sigma_3^2(C_1^1)$ in ein (doppelt zählendes) Kongruenzengebüsch entartet.

XI. Eine sphärische C_1^1-Kongruenz $\sigma_2^2(C_1^1)$, die zwei sphärischen C_1^1-Komplexen mit den Mittelkongruenzen ${}_MC_1^1$ und ${}_M\overline{C}_1^1$ gemeinsam ist,

wird durch diejenige sekundäre Involution $\mathfrak{I}_s$ in sich übergeführt, die durch den ${}_M C_1^1$ und ${}_M \bar{C}_1^1$ verbindenden Kongruenzenbüschel festgelegt ist, und zwar vertauscht $\mathfrak{I}_s$ je zwei in einem Kongruenzenbüschel durch die Mittelkongruenz von $\sigma_2^2(C_1^1)$ gelegene Strahlenkongruenzen miteinander. Fallen diese beiden Kongruenzen stets zusammen, so ist die sphärische C_1^1-Kongruenz $\sigma_2^2(C_1^1)$ in einen (doppelt zählenden) Kongruenzenbündel entartet.

Die Überordnung der sphärischen über die linearen Mannigfaltigkeiten veranlaßt die Erwähnung derjenigen Transformationsgruppe A^{15} von Γ, deren Transformationen gegenüber die Kongruenzen C_1^1 in Γ einen Körper bilden. Diese Gruppe ist isomorph der 15-gliedrigen konformen Gruppe des M_3^2-Raumes bez. der 15-gliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen im Laguerreschen Kugelraum, die zugleich Sphärentransformationen sind. Die der primären Involution übergeordnete Transformation ist die „Spiegelung an einem sphärischen C_1^1-Komplex", der Inversion an einer Hyperkugel des M_3^2-Raumes entsprechend und danach in Γ leicht zu konstruieren. Aus solchen Spiegelungen läßt sich A^{15} in derselben Weise aufbauen wie $\mathfrak{L}^{10}$ aus primären Involutionen.

(Eingegangen am 30. Mai 1936.)