# Konstruktion algebraischer Zahlkörper mit beliebiger Gruppe von Primzahlpotenzordnung I.

Von

Arnold Scholz in Kiel.

Emmy Noether zum Gedächtnis.

---

Die Aufgabe, über einem gegebenen endlichen algebraischen Zahlkörper einen solchen mit vorgegebener Gruppe ungerader Primzahlpotenzordnung zu konstruieren, wird hier mit Hilfe des Richterschen Einbettungssatzes[1]) gelöst. Nach meinen früheren Ergebnissen[2]) kann man damit auch Körper mit beliebiger zweistufiger Gruppe ungerader Ordnung bilden, während ich das zuletzt[3]) nur von den zweistufigen Gruppen mit zwei Erzeugenden sagen konnte. Die jetzige Konstruktion wird in Schritten von Primzahlgrad $l$ vor sich gehen, ohne daß sich $l$ verzweigt, und zwar werden in 1. brauchbare hinreichende Bedingungen für eine Erweiterung $l$-ten Grades angegeben für den im Richterschen Satz vorgesehenen Fall, daß der Grundkörper die $l$-te Einheitswurzel $\zeta$ enthält. In 3. werden die $l$-ten Einheitswurzeln im Grundkörper entbehrlich gemacht und dann in 4. gezeigt, daß die Erweiterung $l$-ten Grades immer so gebildet werden kann, daß jedesmal die hinreichenden Bedingungen für eine Fortsetzung der Konstruktion erfüllt sind; beides auf Grund von 2., wo die an sich wichtige Frage, wie aus einer Erweiterung alle möglichen entstehen, beantwortet wird. Die Notwendigkeit der Konstruktionsbedingungen wird in 6. erörtert; es werden dann in 7. und 8. je eine $l$-Entwicklung der freien Gruppe von $n$ Erzeugenden gegeben, in der jede $l$-Gruppe an endlicher Stelle auftritt; bei Konstruktionen in solcher Reihenfolge sind die in 1. gefundenen hinreichenden Bedingungen auch notwendig. 9. ordnet die Zweigkörperbildung aus[3]) in diesen Konstruktionsplan ein und erörtert die Lage für den quadratischen Fall.

---

[1]) H. Richter: Über die Lösbarkeit einiger nichtabelscher Einbettungsprobleme. Math. Annalen **112** (1935), S. 69—84, insbes. S. 72.

[2]) Reduktion der Konstruktion von Körpern mit zweistufiger (metabelscher) Gruppe. Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. 1929, Nr. 14.

[3]) A. Scholz, Die Kreisklassenkörper von Primzahlpotenzgrad ... II. Math. Annalen **110** (1935), S. 633—649.

Es sei gleichzeitig auf die Wittsche Lösung[4]) der entsprechenden Konstruktionsaufgabe in Funktionenkörpern gerade der Charakteristik $l$ und seine gruppentheoretische Einteilung der Konstruktion hingewiesen. Das Konstruktionsproblem ist hier und dort allerdings sehr verschieden: während dort, nach dem Hauptergebnis von Witt, die Existenz von Körpern mit beliebiger $l$-Gruppe durch die Existenz des Abelschen Unterkörpers vom Typ $(l, l, \ldots, l)$ gesichert ist und von da aus jede Teilerweiterung beliebig vorgenommen werden darf, so setzt hier die Existenzfrage gerade an der Stelle ein, und jede Erweiterungsmöglichkeit ist von der passenden Auswahl der vorangehenden Erweiterung abhängig.

**1.** Gegeben sei eine Gruppe $\mathfrak{G}$ von Primzahlpotenzordnung $l^m$. Wir entwickeln $\mathfrak{G}$ in eine Hauptreihe

$$\begin{aligned} \mathfrak{J} -\!\!< \mathfrak{G}_1 -\!\!< \mathfrak{G}_2 -\!\!< \ldots -\!\!< \mathfrak{G}_m &= \mathfrak{G} \\ = \mathfrak{C}_1 \smile \mathfrak{C}_2 \smile \ldots \smile \mathfrak{C}_m&, \end{aligned} \tag{1}$$

in der $\mathfrak{J}$ die Identifizierung (identische Faktorgruppe) bedeute und $\mathfrak{G}_{\mu-1} = \mathfrak{G}_\mu/\mathfrak{C}_\mu$ maximale echte Faktorgruppe von $\mathfrak{G}_\mu$ sei ($\mathfrak{G}_\mu >\!\!- \mathfrak{G}_{\mu-1}$ eine „einfache Aufspaltung" von $\mathfrak{G}_{\mu-1}$). Neben den zueinander inversen Faktorgruppen- und Aufspaltungszeichen, $-\!\!<$ und $>\!\!-$, verwenden wir wie oben das Zeichen $\smile$ für die absteigende Aneinanderreihung von Gruppenfaktoren. (Bei Krull[5]) findet sich $\frown$ im aufsteigenden Sinne.)

Da jede $l$-Gruppe ein nichtidentisches Zentrum besitzt, hat die Hauptreihe (1) lauter Faktoren $\mathfrak{C}_\mu$ der Ordnung $l$, und zwar liegt stets $\mathfrak{C}_\mu$ im Zentrum von $\mathfrak{G}_\mu$, weshalb wir $\mathfrak{G}_\mu$ eine zentrale Erweiterung (Aufspaltung) von $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ nennen. Wir können darum die Aufgabe, einen Körper mit beliebiger $l$-Gruppe $\mathfrak{G}_m$ zu bilden, auf die folgende zurückführen: einen Körper mit gegebener $l$-Gruppe $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ in einen solchen mit der Gruppe $\mathfrak{G}_\mu$ einzubetten, wo $\mathfrak{G}_\mu$ irgendeine Aufspaltung der Relativordnung $l$ von $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ ist. Dann ist die Gesamtkonstruktion in $m$ Teilschritte zerlegt, und jedesmal ist der zur Gruppe $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ konstruierte Normalkörper $K_{\mu-1}$ in einen über dem Grundkörper $K_0$ normalen Körper $K_\mu$ einzubetten, dessen Gruppe sich $\mathfrak{G}_\mu$ so isomorph zuordnen läßt, daß die alte Zuordnung zwischen $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ und der Galoisgruppe von $K_{\mu-1}$ dabei erhalten bleibt. — Dementsprechend werden wir zwei Aufspaltungen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ erst dann als isomorphe Aufspaltungen ansehen, wenn sie sich so einander isomorph zuordnen lassen, daß $\mathfrak{G}$ dabei in Ruhe

[4]) E. Witt, Konstruktion von galoisschen Körpern der Charakteristik $p$ zu vorgegebener Gruppe der Ordnung $p^f$. Crelle Journ. **174** (1936), S. 237—245.

[5]) W. Krull, Math. Zeitschr. **23** (1925), S. 169.

(elementweise ungeändert) bleibt. $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ heißen dann $\mathfrak{G}$-Aufspaltungen vom „gleichen Typus" [6]).

Der Richtersche Einbettungssatz ($p$-adische Fassung) besagt nun für unsere $l$-Gruppe, daß die der Aufspaltung $\mathfrak{G}_{\mu-1} -\!\!< \mathfrak{G}_\mu$ entsprechende Einbettung $K_{\mu-1} -\!\!< K_\mu$ unter der Voraussetzung, daß $K_0$ die $l$-ten Einheitswurzeln enthält, dann möglich ist, wenn für jede Primstelle $p$ aus $K_0$ ein entsprechendes $p$-adisches Einbettungsproblem lösbar ist. Das bedeutet, wenn $P_\nu$ allgemein die $p$-adische Erweiterung von $K_\nu$ ist, deren Galoisgruppe isomorph zur Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}_\nu$ eines $p$-Primteilers $\mathfrak{p}_\nu$ in $K_\nu$ ist: Einbettung von $P_{\mu-1}$ in einen $P_\mu$ mit einer Galoisgruppe, isomorph zu irgendeiner Untergruppe $\mathfrak{Z}_\mu$ von $\mathfrak{G}_\mu$ der Eigenschaft

$$(2) \qquad \mathfrak{Z}_\mu \mathfrak{C}_\mu / \mathfrak{C}_\mu = \mathfrak{Z}_{\mu-1}.$$

Dabei gibt es beim Übergang von $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ zu $\mathfrak{G}_\mu$ folgende zwei Möglichkeiten:

$\alpha$) $\mathfrak{Z}_{\mu-1}$ besitzt in $\mathfrak{G}_\mu$ ein Repräsentantensystem $\mathfrak{Z}_\mu$, das selbst eine Gruppe ist, so daß die Aufspaltung $\mathfrak{Z}_\mu \mathfrak{C}_\mu$ von $\mathfrak{Z}_{\mu-1}$ in $\mathfrak{G}_\mu$ das schiefdirekte Produkt von $\mathfrak{Z}_\mu$ und $\mathfrak{C}_\mu$ wird. (Weil $\mathfrak{C}_\mu$ im Zentrum liegt, gilt sogar $\mathfrak{Z}_\mu \mathfrak{C}_\mu = \mathfrak{Z}_\mu \times \mathfrak{C}_\mu$.) Dann darf man dieses $\mathfrak{Z}_\mu$ in (2) wählen, und wegen der Isomorphie von $\mathfrak{Z}_\mu$ mit $\mathfrak{Z}_{\mu-1}$ bleibt $P_\mu = P_{\mu-1}$. In diesem Falle besteht also für $p$ kein Einbettungsproblem.

$\beta$) Jedes Repräsentantensystem für $\mathfrak{Z}_{\mu-1}$ in $\mathfrak{G}_\mu$ erzeugt bereits $\mathfrak{G}_\mu$. Das bedeutet $\mathfrak{C}_\mu < \mathfrak{Z}_\mu = \mathfrak{Z}_\mu \mathfrak{C}_\mu$; $\mathfrak{Z}_\mu / \mathfrak{C}_\mu = \mathfrak{Z}_{\mu-1}$. Es ist „das" entsprechende Einbettungsproblem zu lösen. $\mathfrak{Z}_\mu$ heißt dann im Sinne von R. Brauer [7]) eine „reduzierte" Aufspaltung von $\mathfrak{Z}_{\mu-1}$, $\mathfrak{C}_\mu$ nach Burnside [8]) eine zur Erzeugung „entbehrliche Untergruppe" von $\mathfrak{Z}_\mu$.

Die Zurückführung der Einbettung $K_{\mu-1} -\!\!< K_\mu$ auf diesen $p$-adischen Sachverhalt läßt sich zahlkörpertheoretisch wieder so ausdrücken:

Zahlentheoretische Fassung des Einbettungssatzes: *Die Einbettung $K_{\mu-1} -\!\!\overset{*}{<} K_\mu$ gelingt mit $K_0 > \zeta$ als Grundkörper, wenn sie über allen Zerlegungskörpern von $K_{\mu-1}/K_0$ gelingt.*

Dies ist nach der vorangesetzten Erörterung klar. Dabei ist die Einbettung trivialer Weise für die Zerlegungsgruppen möglich, bei denen $\mathfrak{C}_\mu$ als direkter Faktor auftritt. Aber auch für die anderen $p$ vereinfacht sich im allgemeinen die Einbettungsaufgabe. Ist insbesondere $p$ in $K_{\mu-1}$ nicht verzweigt, also seine Trägheitsgruppe $\mathfrak{T} = 1$ und etwa Ord $\mathfrak{Z} = f$,

---

[6]) A. Scholz, Über die Bildung algebraischer Zahlkörper mit auflösbarer Galoisscher Gruppe. Math. Zeitschr. **30** (1929), S. 332—356, insbes. 337—340.

[7]) R. Brauer, Konstruktion der Schiefkörper von endlichem Rang, Crelle Journ. **168** (1932). S. 44—64.

[8]) Vgl. H. Wielandt, Eine Kennzeichnung der direkten Produkte von $p$-Gruppen. Math. Zeitschr. **41** (1936), S. 281—282.

so ist die Einbettungsaufgabe für $p$ stets lösbar; denn dann handelt es sich unter $\beta$) nur darum, den Kongruenzkörper mod $p$ vom Grade $f$ in den vom Grade $fl$ einzubetten. Also braucht man nur die verzweigten $p$ zu betrachten. — Da wir ferner nur mit *einfach verzweigten* Körpern (Verzweigungsgruppe $\mathfrak{V} = 1$) operieren, d. h. hier $p \neq l$, sind alle Trägheitsgruppen zyklisch.

(Für die Gültigkeit der Richterschen Einbettungssatzes ist übrigens nur wesentlich, daß die Erweiterung $\mathfrak{G}_\mu >\!\!- \mathfrak{G}_{\mu-1}$ zentral ist. Hat $K_{\mu-1}$ irgendeine Gruppe, und setzt sich $\mathfrak{C}_\mu$ aus irgend welchen zentralen zyklischen Bestandteilen zusammen, so muß nur $K_0$ die entsprechenden Einheitswurzeln enthalten, wie Satz 1 b in [1]) sagt.) — Es gilt nun ein

Spezieller Einbettungssatz: *Ist $K/K_0$ ein Normalkörper, in dem alle in $K$ verzweigten Primideale* $\mathfrak{p}$ *aus $K_0$ Normen sind (in Primideale vom Relativgrad 1 zerfallen), und gilt $N(\mathfrak{p}) \equiv 1\,(l^h)$, $h = h(\mathfrak{p})$, so sind alle zentralen Erweiterungen von $K$ möglich, in denen die Trägheitssubstitution $T = T(\mathfrak{p})$ höchstens die Ordnung $l^h$ erreicht — vorausgesetzt, daß $K_0$ wieder die entsprechenden Einheitswurzeln enthält; für unsere Konstruktion* (1) *also die $l$-ten Einheitswurzeln, die nachher allerdings entbehrlich werden.*

Dabei soll $N(\mathfrak{p}_\infty) = -1$ für unendliche Primstellen gesetzt werden; diese scheiden also für zyklische Verlängerungen aus.

Zusatz[8a]): Die Erweiterungen können wieder *einfach verzweigt* gewählt werden, wie in 5. hinter (18) gezeigt wird.

Um die bisherigen Bezeichnungen zu verwenden, führen wir den *Beweis* für $K = K_{\mu-1} -\!\!< K_\mu$, wo wir den Satz wirklich brauchen. Da nach Voraussetzung Zerlegungs- und Trägheitsgruppe für die Verzweigten zusammenfallen, so ist nur die Einbettung ihrer zyklischen Trägheitskörper zu untersuchen, und zwar nur, soweit sie ihre Ordnung beim Übergang von $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ zu $\mathfrak{G}_\mu$ „verlängern" (Fall $\mathfrak{C}_\mu < \mathfrak{Z}_\mu = \mathfrak{T}_\mu = \{T_\mu\}$; $\mathfrak{T}_{\mu-1} = \{T_{\mu-1}\}$; $T_{\mu-1} = T_\mu \mathfrak{C}_\mu$; $\operatorname{Ord} T_{\mu-1} = l^{k-1}$; $\operatorname{Ord} T_\mu = l^k$; $k \leqq h$). Es bleibt dann also nur die Behauptung, daß sich ein einfach verzweigter zyklischer Körper $K_{h-1}$ vom Grade $l^{h-1}$ in einen solchen vom Grade $l^h$ einbetten läßt, wenn $N(\mathfrak{p}) \equiv 1\ (l^h)$ für die verzweigten $\mathfrak{p}$. (Für die nicht voll verzweigten $\mathfrak{p}$ genügt ein entsprechend niederer Exponent.) Diese nachher unter 6. als Aufgabe L formulierte Einbettungsmöglichkeit folgt z. B. klassenkörpertheoretisch aus meiner Lösung[9]) der D.M.V.-Aufgabe 169 und $p$-adisch aus der Richterschen Arbeit „Über Abelsche Körpereinbettungen"[10]), deren Voranzeige dies Ergebnis unter 1. bis 3.

---

8a) Einfügung vom Juni 1936.

9) A. Scholz, Jb. D.M.V. **45** (1935), S. *35—38*; Berichtigung S. *112*.

10) H. Richter, Math. Annalen **112** (1936), S. 700—726; Voranzeige: Jb.D.M.V. **45**, S. 235.

enthält. Es darf dabei nach 3. die Einbettung, wie oben im speziellen Einbettungssatz, einen $l$-Potenzschritt vollziehen, oder es dürfen auch Einheitswurzeln im Grundkörper fehlen; nur für $l = 2$ darf man nicht beide Verallgemeinerungen beliebig verbinden.

Wir brauchten also zur Fortführung unserer Konstruktion jedesmal die Erweiterung $K_\mu$ nur so zu wählen, daß die Bedingungen des speziellen Einbettungssatzes erfüllt sind. Da sich ferner die Erweiterungen, wenn überhaupt, immer so durchführen lassen werden, daß die jeweiligen Führer zu einem vorgegebenen Ideal, insbesondere zu $l$, teilerfremd sind, so gelingt dann die Konstruktion bei beliebigem Grundkörper, wenn der spezielle Einbettungssatz auch für den rationalen Grundkörper richtig ist. Um beides zu erreichen, brauchen wir die folgenden Sätze, die uns die Frage beantworten:

Wie erhält man alle Erweiterungen $K_\mu$ von $K_{\mu-1}$ mit der Gruppe $\mathfrak{G}_\mu$ aus einer solchen?

2. Durchkreuzungssatz: *Es seien $K'$ und $K''$ zwei Normalkörper über $K_0$, die Erweiterungen gleichen Typus' über ihrem Durchschnitt $K$ seien, d. h. ihre Galoisgruppen lassen sich so einander isomorph zuordnen, daß die Galoisgruppe von $K$ dabei keine Permutation erleidet. Ferner möge die Gruppe von $K'/K$ im* Zentrum *der Gruppe von $K'/K_0$ liegen (also auch bei $K''$). Dann gibt es einen Körper $K^0/K_0$, dessen Gruppe isomorph zu der von $K'/K$ ist, und für den*

$$K'K'' = K' \times K^0 = K'' \times K^0.$$

*Umgekehrt erhält man aus einem $K'$ alle $K''$ mit einer Gruppe gleichen Typus' und $[K', K''] = K$, indem man $K'$ mit einem zu $K'$ fremden Körper $K^0$ beliebig „durchkreuzt“, d. h. $K' \times K^0$ bildet, irgendeine isomorphe Zuordnung $S^0 \sim S'$ der Gruppen von $K'K^0/K'$ und $K^0K'/K^0K$ wählt und den zur Gleichung $S^0 = S'$ gehörigen Unterkörper $K''$ von $K'K^0$ nimmt (in dem $S'$ dieselbe Substitution bewirkt wie $S^0$).*

Indem man dabei $K$ sämtliche zu einer Untergruppe des Zentrums der Gruppe von $K'$ gehörigen Unterkörper von $K'$ durchlaufen läßt, erhält man sämtliche ‚mit $K'$ verwandten‘ $K''$, die aus irgendeiner Abelschen Durchkreuzung von $K'$ entstehen[11]).

Relativierung: *Sollen im Durchkreuzungssatz $K_0$, $K^0$, $K'$, $K''$ Normalkörper über einem niederen $K_{00}$ sein, so muß nur die obengenannte isomorphe Zuordnung $S^0 \sim S'$ eine Operatorisomorphie nach der Gruppe von $K_0/K_{00}$ ergeben, d. h. der Transformation von $S^0$ mit einer Substitution $R$ von $K_0/K_{00}$ muß auch die Transformation von $S'$ mit $R$ entsprechen. Besteht eine solche operatorisomorphe Zuordnung zwischen den Gruppen von*

---

[11]) Vgl. E. Witt, a. a. O.[4]), S. 241, Z. 25—29.

*$K^0/K_0$ und $K'/K$, so läßt sich auch wirklich $K'$ über $K$ so mit $K^0$ durchkreuzen, daß wieder ein Normalkörper $K''$ über $K_{00}$ entsteht.*

Wohlgemerkt braucht in diesem Falle die Gruppe von $K'/K$ nicht dem Zentrum von $K'/K_{00}$ anzugehören.

Die Gültigkeit dieses Durchkreuzungssatzes ist eine rein gruppentheoretische Angelegenheit der Galoisgruppen der angeführten Körper, also nicht von der Eigenart der Körper abhängig. Er läßt sich gruppentheoretisch so formulieren:

Satz vom relativen Quadrat: *Gegeben seien zwei isomorphe zentrale Aufspaltungen $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ ($\mathfrak{G} = \mathfrak{H}_1/\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{H}_2/\mathfrak{A}_2$; $\mathfrak{A}_1 < \mathfrak{Z}(\mathfrak{H}_1)$, $\mathfrak{A}_2 < \mathfrak{Z}(\mathfrak{H}_2)$; $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ isomorph so zuordenbar, daß dabei jedes Element von $\mathfrak{G}$ in sich übergeht). Dann läßt sich das relative Produkt $\mathfrak{H}^2$ von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$, d. h. die kleinste Aufspaltung von $\mathfrak{G}$, die $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ als Faktorgruppen besitzt, — abstrakt das relative Quadrat des Aufspaltungstypus $\mathfrak{H} >\!\!- \mathfrak{G}$ — als direktes Produkt zweier Gruppen vom Typus $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{A}$ darstellen.*

Dasselbe gilt für Gruppen mit Operatoren bei Operatorisomorphie und Operatorinvarianz der einzelnen Gruppen.

Die Umkehrung, daß alle $\mathfrak{H}_2$ aus $\mathfrak{H}_1$ auf dem Wege

$$\begin{array}{c} \mathfrak{H}_1 -\!\!< \mathfrak{H} \times \mathfrak{A} >\!\!- \mathfrak{H}_2 \\ \curlyvee \\ \mathfrak{G} \end{array}$$

entstehen, ist bereits im Durchkreuzungssatz ausreichend formuliert.

Beweis: Das relative Produkt zweier Aufspaltungen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ von $\mathfrak{G}$ hat nach [6]) folgende Gestalt: Ist $\mathfrak{G} = \Sigma S$, $\mathfrak{H}_1 = \Sigma S' \mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{H}_2 = \Sigma S'' \mathfrak{A}_2$ und dabei $S'$ der Repräsentant für $S$ in $\mathfrak{H}_1$, $S''$ für $S$ in $\mathfrak{H}_2$, so haben im relativen Produkt $\overline{\mathfrak{H}}$ zwei Elemente $S' A_1$ und $S'' A_2$ als Stücke (Komplexe) von $\overline{\mathfrak{H}}$ dann einen Durchschnitt $[S' A_1, S'' A_2] = \overline{S}\,\overline{A}_1 \overline{A}_2$, wenn $S'$ und $S''$ aus demselben $S$ von $\mathfrak{G}$ hervorgegangen sind. Insbesondere gilt dabei

$$[S', S''] = \overline{S}; \quad [A_1, E_2] = \overline{A}_1; \quad [E_1, A_2] = \overline{A}_2, \tag{4}$$

wenn $E_1$ und $E_2$ die Einheitselemente von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ sind. Die Komposition der Elemente in $\overline{\mathfrak{H}}$ läßt sich aus ihren Komponenten in $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ ablesen:

$$S\,T = V -\!\!\!<\begin{matrix} S' A_1 \cdot T' B_1 = V' C_1 \\ S'' A_2 \cdot T'' B_2 = V'' C_2 \end{matrix} \tag{5}$$

liefert

$$\overline{S}\,\overline{A}_1 \overline{A}_2 \cdot \overline{T}\,\overline{B}_1 \overline{B}_2 = \overline{V}\,\overline{C}_1 \overline{C}_2. \tag{6}$$

Insbesondere ergibt eine definierende Relation $f(S) = 1$ in $\mathfrak{G}$, die $f(S') = H_1$ in $\mathfrak{H}_1$ $(H_1 < \mathfrak{A}_1)$ und $f(S'') = H_2$ in $\mathfrak{H}_2$ $(H_2 < \mathfrak{A}_2)$ lautet,

$$f(\overline{S}) = \overline{H}_1 \overline{H}_2 \text{ in } \overline{\mathfrak{H}}. \tag{7}$$

Sind $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ die Galoisgruppen der Normalkörper $K_1$ und $K_2$, $\mathfrak{G}$ die Gruppe ihres Durchschnitts, so ist $\overline{\mathfrak{H}}$ die Gruppe von $K_1 K_2$. Die Struktur von $\overline{\mathfrak{H}}$ ist durch den Typus von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ bekannt, noch nicht dagegen durch die Struktur der Gruppen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{H}_2$ allein[6]).

Der körpertheoretische Durchkreuzungssatz ist dann eine unmittelbare Anwendung des gruppentheoretischen Satzes vom relativen Quadrat, wobei gegebenenfalls die Operatoren der Gruppe als die Substitutionen von $K_0/K_{00}$ zu deuten sind. Wir brauchen daher nur noch den gruppentheoretischen Satz zu beweisen.

Wir gehen dabei von einem festen Isomorphismus $S' A_1 \sim S'' A_2$ zwischen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ aus, und zwar treffen wir die Repräsentuntenwahl $S''$ für $S$ so, daß $S'' \sim S'$ wird. Führt der Isomorphismus allgemein $A_1, B_1 \ldots$ aus $\mathfrak{A}_1$ in $A_2, B_2, \ldots$ aus $\mathfrak{A}_2$ über, so liefert bei dieser Festlegung der Bezeichnungen schon eine in $\mathfrak{H}_1$ gültige Gleichung (5) die darunterstehende in $\mathfrak{H}_2$ und damit die resultierende (6) in $\mathfrak{H}^2$. Die Elemente $\overline{S}\overline{A}_1\overline{A}_2$ in $\mathfrak{H}^2$, die dem Isomorphismus $A_1 \sim A_2$ genügen, bilden daher eine Gruppe $\mathfrak{H}_{12}$. Wir behaupten nun, es ist

$$\mathfrak{H}^2 = \mathfrak{H}_{12} \times \overline{\mathfrak{A}}_2. \tag{8}$$

Jedenfalls liefert $\overline{S}\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{C}_2$ alle Elemente von $\mathfrak{H}^2$ genau einmal, wenn $S$, $A_1$, $C_2$ die Gruppen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ unabhängig einmal durchlaufen. Ferner ist $\overline{C}_2$ mit $\overline{S}\overline{A}_1\overline{A}_2$ vertauschbar, nämlich erstens mit den Elementen $\overline{A}_2$ derselben Abelschen Gruppe $\mathfrak{A}_2$, mit $\overline{A}_1$ wegen $\overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{A}}_1 \times \overline{\mathfrak{A}}_2$, schließlich mit $\overline{S}$ aus folgendem zentralen Grunde: weil $C_2$ dem Zentrum von $\mathfrak{H}_2$ angehört, gilt dort $C_2 S'' = S'' C_2$, also $\overline{C}_2\overline{S} = \overline{S}\,\overline{C}_2\overline{C}_1$ in $\mathfrak{H}^2$ und dann $S' = S' C_1$ in $\mathfrak{H}_1$. Also ist $\overline{C}_1 = 1$. Damit ist (8) bewiesen.

Ist weiter $\mathfrak{H}_1$ mit Operatoren $R$ versehen, $\mathfrak{G}$ eine $R$-invariante Faktorgruppe von $\mathfrak{H}_1$, und $\mathfrak{H}_2$ eine zu $\mathfrak{H}_1$ $R$-isomorphe Aufspaltung von $\mathfrak{G}$, so ist mit $\mathfrak{A}_2$ auch $\overline{\mathfrak{A}}_2$ $R$-invariant, ebenfalls $\mathfrak{H}_{12}$, weil $(\overline{S}\overline{A}_1\overline{A}_2)^R = \overline{T}\overline{B}_1\overline{C}_2$ mit $B_1 \not\sim C_2$ auch

$$(S' A_1)^R = T' B_1 \not\sim T'' C_2 = (S'' A_2)^R$$

zur Folge hätte. — Damit besteht aber auch Operatorisomorphie zwischen $\mathfrak{H}_{12}$ und $\mathfrak{H}_1$ und, w. z. b. w., zwischen $\mathfrak{H}^2/\mathfrak{H}_{12}$ und $\mathfrak{A}_2$ oder $\mathfrak{A}_1$.

Umgekehrt: Ist $\mathfrak{G} = \Sigma S$, $\mathfrak{H} = \Sigma S' A$ gegeben und $\mathfrak{C} = \Sigma C$ eine zu $\mathfrak{A} = \Sigma A$ isomorphe Gruppe, so bilde man das absolute Produkt von $\mathfrak{H}$

und $\mathfrak{C}$ (Galoisgruppe zweier teilerfremder Normalkörper mit $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{C}$ als Gruppe), das sich $\overline{\mathfrak{H}} \times \overline{\mathfrak{C}}$ darstellt mit

(9) $\quad \mathfrak{H} = \overline{\mathfrak{H}} \times \overline{\mathfrak{C}}/\overline{\mathfrak{C}}, \quad \mathfrak{C} = \overline{\mathfrak{H}} \times \overline{\mathfrak{C}}/\overline{\mathfrak{H}}; \quad \overline{\mathfrak{H}} = \Sigma \overline{S} \overline{A}, \quad \overline{\mathfrak{C}} = \Sigma \overline{C}.$

Jede (operator-) isomorphe Zuordnung von $\overline{\mathfrak{A}}$ und $\overline{\mathfrak{C}}$ liefert dann durch Identifizierung entsprechender Elemente $\overline{A} = \overline{C}$ eine zu $\mathfrak{H}$ isomorphe Aufspaltung $\Sigma S'' B$ von $\mathfrak{G}$, und jede Durchkreuzung bestimmt eindeutig eine isomorphe Zuordnung. Die Anzahl der Durchkreuzungsmöglichkeiten mit einer einzigen zu $\mathfrak{A}$ isomorphen Gruppe $\mathfrak{C}$ ist also gleich der Anzahl der Automorphismen von $\mathfrak{A}$. Deutet man alle Gruppen entsprechendermaßen als Galoisgruppen der im Durchkreuzungssatz genannten Körper, so erhält man auf diese Weise die Anzahl der Körper $K''$, die aus $K'$ bei Durchkreuzung mit einem festen $K^0$ hervorgehen und dabei mit $K'$ genau den Durchschnitt $K$ haben. (Ist nur $K'' > K$, $K'' K^0 = K' K^0$ gefordert, so muß man die Anzahl der *homomorphen* Zuordnungen von $\mathfrak{A}$ *in sich* nehmen)

Wir werden im folgenden ($l \neq 2$) ohne Operatoren auskommen. Wichtig ist aber noch die

Bemerkung: Innerhalb der Kommutatorgruppe zweier $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ gleichen Typus ist die Zuordnung $A_1 \sim A_2$ unabhängig von der Durchkreuzung: Jedes erzeugende $S''$ könnte statt $S'$ allenfalls einem $S' A_1$ zugeordnet werden. Bei Abänderung $S' \to S' A_1$, $T' \to T' B_1$ geht aber der Kommutator $(S', T')$ in sich über.

Ist speziell $\mathfrak{A}$ eine Gruppe $\{A_1, \ldots, A_r\}$ von $r$ Erzeugenden der Ordnung $l$, während $\mathfrak{H} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ eine Gruppe von $l$-Potenzordnung mit genau $n$ Erzeugenden ist, so hat man die $l^{nr}$ Automorphismen

(10) $\quad S_\nu \to S_\nu \Pi A_\varrho^{t_{\nu\varrho}} \; (1 \leqq \nu \leqq n; \;\; 1 \leqq \varrho \leqq r; \;\; 0 \leqq t_{\nu\varrho} < l),$

die die Faktorgruppe $\mathfrak{G} = \mathfrak{H}/\mathfrak{A}$ in Ruhe lassen; vgl. Witt[4]), S. 238. Bereits die Wittsche Untergruppe $\mathfrak{H}^* = \{S_1^l, \ldots, S_n^l\}$ geht hier elementweise in sich über.

Wir können uns im folgenden auf Kommutatoraufspaltungen

$$\mathfrak{G} -\!\!< \mathfrak{G} \cup \mathfrak{A} = \mathfrak{H};$$

$\mathfrak{A} < \mathfrak{H}'$ beschränken, indem wir in der Hauptreihe (1) die maximale Abelsche Faktorgruppe auftreten lassen und dementsprechend die Konstruktion des Abelschen Teilkörpers von $\mathfrak{G}_m$ nach Vorschrift des speziellen Einbettungssatzes an die Spitze stellen.

**3.** Aufgabe: *Gegeben ein absolut normaler, einfach verzweigter Körper $\Gamma$ mit $l$-Gruppe $\mathfrak{G}$. $\mathfrak{H}$ sei eine zentrale Kommutatoraufspaltung $l$-ter Ordnung von $\mathfrak{G}$, d. i. Faktor einer Schurschen Darstellungsgruppe*[12]) *von* $\mathfrak{G}$.

[12]) J. Schur, Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen, Crelle Journ. **127** (1904), S. 20—50; **132** (1907), S. 85—137; vgl. hier **132**, S. 85.

*In $\Gamma$ seien alle Diskriminantenteiler $p$ Idealnormen, und es gelte $p \equiv 1\,(l^h)$, wo $l^h$ etwa gleich die höchste in einer gegebenen Gruppe $\mathfrak{K} >\!\!- \mathfrak{H}$ vorkommende Ordnung sei. Es soll $\Gamma$ in einen $\Gamma'$ mit der Gruppe $\mathfrak{H}$ eingebettet werden.*

Lösung: Wir adjungieren $\zeta$ und betten $K = \Gamma(\zeta)$ in einen $K'$ mit der Gruppe $\mathfrak{H}$ über $K_0 = \mathsf{P}(\zeta)$ ein. Das geht, weil auch in $K/K_0$ die Bedingungen des speziellen Einbettungssatzes erfüllt sind. Nun bilden wir den absoluten Normalkörper $\overline{K} = K'K'' \ldots K^{(l-1)}$, dessen Teilkörper $K'', \ldots, K^{(l-1)}$ aus $K'$ durch die Substitutionen $R, \ldots, R^{l-2}$ $(R^{l-1} = 1)$ von $\mathsf{P}(\zeta)$ hervorgehen. Dann zentrieren wir $\overline{K}$, d. h. wir bilden den zur Gruppe der $(R-1)$-ten Potenzen der Substitutionen von $\overline{K}/K$ gehörigen Unterkörper $\widetilde{K}$, dessen Gruppe über $K$ im Zentrum seiner absoluten Gruppe liegt. Wir behaupten: *der absolut normale Körper $\widetilde{K}$ hat gleich $K'$ eine Gruppe $\mathfrak{H}$ über $K_0$, und es gilt $\widetilde{K} = K_0 \times \Gamma'$, wo $\Gamma'$ ein Körper mit absoluter Gruppe $\mathfrak{H}$ ist,* und zwar ist $\Gamma'$ *einfach verzweigt*, wenn man $K'/K_0$ nach dem Zusatz des Speziellen Einbettungssatzes einfach verzweigt wählt[8a]).

Seien nämlich etwa $K', K'', \ldots, K^{(r)}$ noch voneinander unabhängige Erweiterungen von $K$, während der durch $R^r$ aus $K'$ hervorgehende $K^{(r+1)}$ in $K'K'', \ldots, K^{(r)}$ liegt, so liegt auch $K^{(r+2)}$ in $K'' \ldots K^{(r)}K^{(r+1)} < K' \ldots K^{(r)}$ u. s. f. Also ist $K'K'' \ldots K^{(r)} = NK' = \overline{K}$. War $A$ die erzeugende Substitution von $K'/K$, so sei jetzt $\overline{A}$ diejenige Substitution von $\overline{K}$, die $A$ in $K'$ bewirkt, $K''$ bis $K^{(r)}$ aber in Ruhe läßt. $\overline{A}^R$ permutiert dann $K''$ und läßt $K'''$ bis $K^{(r)}$ in Ruhe; allgemein permutiert $\overline{A}^{R^\varrho}$ $(\varrho = 0, \ldots, r-1)$ den Körper $K^{(\varrho+1)}$ und läßt $K^{(\varrho+2)}$ bis $K^{(r)}$ in Ruhe. Daraus folgt aber, daß $\overline{A}, \overline{A}^R, \ldots, \overline{A}^{R^{r-1}}$ linear unabhängig sind; denn $\overline{A}^{R^\sigma}$ ist keine Linearverbindung der $\overline{A}^{R^\varrho}$ $(0 \leqq \varrho < \sigma)$, weil es $K^{(\sigma+1)}$ permutiert, während die $\overline{A}^{R^\varrho}$ es in Ruhe lassen. Also bilden $\overline{A}, \overline{A}^R, \ldots, \overline{A}^{R^{r-1}}$ eine Basis für die Abelsche Gruppe $\overline{\mathfrak{A}}$ von $\overline{K}/K$, die sich daher aus $\overline{A}$ symbolisch erzeugen läßt: $\overline{\mathfrak{A}} = \Sigma \overline{A}^{F(R)}$. Ist dabei $\overline{A}^{R^r} = \prod\limits_{\varrho=0}^{r-1} A^{R^\varrho h_\varrho}$, so hat $\overline{A}$ als symbolische Ordnung das Ideal $(l, H(R))$ mit

$$H(R) = R^r - h_{r-1}R^{r-1} - \ldots - h_1 R - h_0 \equiv (R - a_1) \ldots (R - a_r)$$

mod $l$, weil $\overline{A}^{R^{l-1}-1} = 1$, also $H \mid R^{l-1} - 1$ mod $l$.

Die Zentrierung von $\overline{\mathfrak{A}}$ bedeutet nun: Bildung der Faktorgruppe mit der Relation $\overline{A}^{R-1} = 1$. Dann bleibt von $\overline{\mathfrak{A}}$ nur was übrig, wenn $R - 1 \mid H$, also 1 eine der Wurzeln $a_1, \ldots, a_r$ ist. Wir zeigen nun: es fällt wirklich ein $a_\varrho = 1$ aus, wenn $A$ im Kommutator von $\mathfrak{H}$ liegt.

Man kann $\overline{\mathfrak{A}} = \{\overline{A}_1\} \times \{\overline{A}_2\} \times \ldots \times \{A_r\}$ in absolut invariante zyklische Faktoren der Ordnungen $(l, R - a_\varrho)$ zerlegen. Sei nun $a_r \neq 1$, und bildet man die Faktorgruppe $\mathfrak{A}_r = \overline{\mathfrak{A}} / \prod\limits_{\varrho < r} \{\overline{A}_\varrho\}$, so ist $\mathfrak{A}_r$ ein direkter Faktor von $\mathfrak{H}_r = \mathfrak{G} \cup \mathfrak{A}_r$, was so folgt: $\overline{K}$ ist eine zentrale Erweiterung von $K$ über $K_0$; $\mathfrak{A}_r$ liegt daher im Zentrum von $\mathfrak{H}_r$, und unsere Behauptung ist richtig, wenn wir ein vollständiges Restsystem mod $\mathfrak{A}_r$ in $\mathfrak{H}_r$ angeben können, das eine Gruppe bildet. Nun sind die Substitutionen von $\mathfrak{G}$ im Gegensatz zu denen von $\mathfrak{A}_r$ gegenüber $R$ invariant, und daher gilt für jedes $S$ in $\mathfrak{H}_r$ eine Transformation $S^R = S A_r^c$. Löst dann $x$ die Kongruenz $(a_r - 1)\, x \equiv c \bmod l$, so ist $S A_r^{-x}$ gegen $R$ invariant. Da die Lösung $x$ eindeutig ist, so bilden die gegen $R$ invarianten Elemente von $\mathfrak{H}_r$ gerade eine vollständige Restgruppe mod $\mathfrak{A}_r$. Somit gilt $\mathfrak{H}_r = \overline{\mathfrak{G}} \times \mathfrak{A}_r$, und der Körper $K_r$ mit der Gruppe $\mathfrak{H}_r$ ist daher eine $K_0$-Klassenkörpererweiterung von $K$, d. h. $K_r = K(\sqrt[l]{\alpha_r})$ mit $\alpha_r$ aus $K_0$. Wären nun alle $a_1, \ldots, a_r \neq 1$, so wäre damit auch $\overline{K}$ eine solche Klassenkörpererweiterung $K(\sqrt[l]{\alpha_1}, \ldots, \sqrt[l]{\alpha_r})$, während doch der darin enthaltene Körper $K'$ eine Kommutatorerweiterung sein sollte. Also muß etwa $a_1 = 1$ sein.

Nun haben wir nur noch zu zeigen, daß der zu $\widetilde{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H}_1$ gehörige Körper $\widetilde{K} = K_0 \times \Gamma'$ zerfällt, daß also $\mathfrak{H}_1$ direkter Faktor von $\{R\} \cup \mathfrak{H}_1$ und eine zu $\mathfrak{H}$ isomorphe Aufspaltung von $\mathfrak{G}$ ist. Das erste ist bei einfacher Verzweigtheit von $\widetilde{K}/K_0$ und wegen Ord $R = l - 1$ auch sonst richtig wenn $\mathfrak{H}_1$ bei $R$ in Ruhe bleibt. Das ist diesmal jedenfalls für $\mathfrak{A}_1$ der Fall, und daher hängt die Transformation $S^R = S A_1^c$ nur von der Restklasse mod $\mathfrak{A}_1$ ab, liefert dann aber $S^{R^\lambda} = S A_1^{c\lambda}$, und es ist wegen $R^{l-1} = 1$ auch $c \equiv 0\,(l)$. Zweitens ist $\widetilde{K}$ mit $K'$ verwandt $(\mathfrak{H}_1 \sim \mathfrak{H})$; nämlich es geht $K'$ in $\widetilde{K}$ bei einer passenden Durchkreuzung mit den Körpern $K(\sqrt[l]{\alpha_2}), \ldots, K(\sqrt[l]{\alpha_r})$ über, deren Gruppen $\mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_r$ über $K$ vom oben erörterten Typus $\mathfrak{A}_r$ sind; denn es gilt

$$\widetilde{K} \times \prod_{\varrho > 1} K(\sqrt[l]{\alpha_\varrho}) = K' \times \prod_{\varrho > 1} K(\sqrt[l]{\alpha_\varrho}) = \overline{K}. \tag{11}$$

$\widetilde{K}$ geht also aus $K'$ jedenfalls bei iterierter Durchkreuzung hervor, die sich natürlich durch eine mit einem $K(\sqrt[l]{\alpha})$ ersetzen läßt. (Bei $r = 1$ ist $\widetilde{K} = K'$.) — Damit ist alles bewiesen.

Bemerkung: Im Falle $h > 1$, $l \neq 2$ kann man entsprechend schließen, daß die Gruppe der $(R - 1)$-ten Potenzen in $\overline{\mathfrak{A}}$ den vollen

Index $l^h$ besitzt, und daß der zugehörige zentrierte Körper $\widetilde{K}$ ein absolut normaler Körper mit der Gruppe $\mathfrak{H}$ über $K_0$ ist. Man kann aber nicht mehr $\widetilde{K} = K_0 \times \Gamma'$ behaupten; denn eine erzeugende Substitution $S$ von $\widetilde{K}/K_0$ kann mit der Trägheitssubstitution $R$ von $l$ einen Kommutator $A^{la}$ haben. Ist dieser $\neq 1$, so erhält man entweder nur ein $l$-verzweigtes $\Gamma'$ oder gar kein $\Gamma'$. In beiden Fällen würde aber auch bei der Abspaltung $K = K_0 \times \Gamma$ die einfach verzweigte Lösung $\Gamma$ die Eigenschaft lokaler Erweiterbarkeit verlieren, der Richtersche Satz infolgedessen nicht in $\mathsf{P}$ ungültig werden. — Für $l = 2$ müßte man sich, um mit der erzeugenden Substitution $R$ des reellen Unterkörpers der $2^h$-ten Einheitswurzeln ebenso operieren zu können, auf total reelle $K'$ beschränken.

Herstellung einer Minimalverzweigung: Hat man ein $\Gamma' > \Gamma$ gefunden, dessen Gruppe die zentrale Kommutatoraufspaltung $\mathfrak{H} >\!\!- \mathfrak{G}$ ist, und hat $\Gamma'/\Gamma$ vom Relativgrad $l \neq 2$ einen Führer $\mathfrak{f} = \mathfrak{f}' q$ mit einem in $\Gamma$ noch nicht verzweigten Primzahlteiler $q \neq l$, so läßt sich $\Gamma'$ so mit $K_q^l$, dem Unterkörper $l$-ten Grades der $q$-ten Einheitswurzeln durchkreuzen, daß sich der Führer auf $\mathfrak{f}'$ reduziert. (Der Führer $\mathfrak{f}$ ist ein invariantes Ideal, also ein Primzahlpotenzprodukt mit rationalen Exponenten, die ganz sind, soweit die Primzahlen in $\Gamma$ unverzweigt sind, insbesondere eins für $q \neq l$.)

Beweis[12a]: Jedenfalls muß $q \equiv 1\,(l)$ gelten, weil $N(\mathfrak{q}) \equiv q\,(l)$ im Körper von $l$-Potenzgrad. Also existiert der Körpex $K_q^l$, mit dem wir die Durchkreuzung ausführen wollen. Wir schließen nun so: Weil $\Gamma'$ Zentralkörper ist, hängt die Idealklasse eines $(\alpha)$ in $\Gamma$ bezüglich $\Gamma'$ nur von seiner Norm $a$ ab; alle $\alpha^{S-1}$, sogar alle $\mathfrak{j}^{S-1}$, $S$ Substitution von $\Gamma$, gehören der Idealgruppe von $\Gamma'$ an. Ist nun, wie wir annehmen, $q$ noch nicht in $\Gamma$ verzweigt, so ist jede zu $q$ prime rationale Zahl Normenrest $\operatorname{mod} q$ einer Zahl aus $\Gamma$. Durchläuft daher $\varrho$ alle zu $q$ primen Reste in $\Gamma$ und $r$ in $\mathsf{P}$, so gilt Faktorgruppenisomorphie

$$\{r\}/\{r^l\} \sim \{\varrho\}/\{\varrho^{S-1}, \varrho^l\}. \tag{13}$$

Also können sich speziell die $\alpha \equiv 1\,(\mathfrak{f}')$ für jeden Klassenkörper $\widetilde{\Gamma}/\Gamma \operatorname{mod} \mathfrak{f}$, der absoluter Normalkörper ist, auf höchstens $l$ Idealklassen verteilen, müssen es aber auch, wenn $\mathfrak{f}$ der genaue Führer ist. Erweitert man jetzt $\Gamma'$ mit $K_q^l$, so liegt nach dem Ebengesagten wieder nur eine Verteilung der $\alpha \equiv 1\,(\mathfrak{f}')$ auf $l$ Idealklassen für $\Gamma' K_q^l/\Gamma$ vor. Diejenigen Idealklassen von $\Gamma' K_q^l/\Gamma$, die Zahlideale $(\alpha)$ mit $\alpha \equiv 1\,(\mathfrak{f}')$ enthalten, bilden daher eine Untergruppe der Ordnung $l$, zu der ein Klassenkörper

---

[12a]) Abänderung und Einfügung vom Juni 1936.

$\Gamma'''/\Gamma \bmod \mathfrak{f}'$ gehört, der der Gleichung $\Gamma''' K_q^l = \Gamma' K_q^l$ genügt; $\Gamma''$ geht also aus $\Gamma'$ mittels Kreiskörperdurchkreuzung hervor und hat nur noch den Führer $\mathfrak{f}'$.

Ebenso läßt sich mit einem etwaigen Teiler $l^z/\mathfrak{f}$ statt $q$ verfahren, da $l$ nach Voraussetzung in $\Gamma$ unverzweigt ist. Es gilt dann (13) auch $\bmod\, l^z$, d. h. aber $\bmod\, l^2$, da (13) eine Isomorphie zwischen Gruppen der Ordnung $l$ ist und aus $\xi \equiv 1\,(l^2)$ schon $\xi \equiv \alpha^l\,(l^z)$ folgt. Also ist $z = 2$, und es ist in den auf (13) folgenden Ausführungen nur $K_q^l$ durch $K_{l^2}^l$ zu ersetzen. Bei passender Durchkreuzung mit $K_{l^2}^l$ wird dann $\mathfrak{f}$ von $l$ befreit.

Wir können daher auch darauf verzichten, $K'/\Gamma(\zeta)$ von vornherein einfach verzweigt zu konstruieren — dann münden wir auf den Reichardtschen Konstruktionsweg [13]), brauchen 5. hier nicht heranzuziehen, und die Konstruktion ist mit 4. abgeschlossen — indem wir nach der Zentrierung $K' \to \widetilde{K} = K_0 \times \Gamma'$ gegebenenfalls $\Gamma'$ mit $K_{l^2}^l$ durchkreuzen; etwaige höhere $l$-Faktoren des $K'/K$-Führers sind nach dem obigen Beweis schon bei der Zentrierung herausgefallen.

Insgesamt kann man also mittels passender Kreiskörperdurchkreuzung von $\Gamma'$ alle Primteiler des Führers von $\Gamma'/\Gamma$ beseitigen, die nicht schon in $\Gamma$ verzweigt sind. Insbesondere kann man einen absoluten Klassenkörper $K'/K$ erhalten, wenn die erzeugende Substitution von $\Gamma'/\Gamma$ nicht Potenz einer Trägheitssubstitution von $\Gamma$ wird, aber auch nur dann; denn der in $\Gamma$ verzweigte Bestandteil des Führers liegt fest als Produkt der Primideale, die in $\Gamma'$ ihre Trägheitsgruppe verlängern (vgl. 5.).

**4. Endgültige Konstruktion.** Gegeben eine $l$-Gruppe $\mathfrak{G}_m$ in der Gestalt (1). $l \neq 2$. Zu konstruieren ein absoluter Normalkörper mit dieser Gruppe. Es liege bereits ein einfach verzweigter Körper $K_{\mu-1}$ mit der Gruppe $\mathfrak{G}_{\mu-1}$ vor, dessen Diskriminantenteiler $p$ voll zerfallen sind und einzeln $\equiv 1\,(l^h)$ ausfallen, wenn die zugehörigen Trägheitssubstitutionen in $\mathfrak{G}_m$ maximal die Ordnung $l^h$ erreichen. Es gibt dann nach 1. und 3. bestimmt einen Körper $K_\mu$ mit der Gruppe $\mathfrak{G}_\mu$.

Behauptung: *$K_\mu$ läßt sich so durchkreuzen, daß wieder alle Diskriminantenteiler voll zerfallen und $\equiv 1\,(l^h)$ ausfallen.*

Beweis: Zunächst wissen wir nach dem Letztbewiesenen, daß wir $K_\mu$ so durchkreuzen können, daß sein Führer in $K_{\mu-1}$ höchstens aus dort

[13]) Wie mir H. Reichardt mitteilt, erhält er die Gültigkeit des Einbettungssatzes für den rationalen Grundkörper durch eigene hyperkomplexe Betrachtungen ohne Heranziehung des Richterschen Satzes. Seine Darstellung wird im Crelle Journ. 176 erscheinen.

schon verzweigten Primidealen besteht. Diese behalten von $K_{\mu-1}$ her in $K_\mu$ die behaupteten Zerfallseigenschaften. Die übrigen in $K_{\mu-1}$ verzweigten $p_\tau = N(\mathfrak{p}_\tau)$; $\tau = 1, \ldots, t$, können freilich in $K_\mu$ teils unzerfallen bleiben. Ist dabei $C_\mu^{a_\tau}$ die Frobenius-Substitution von $\mathfrak{p}_\tau$ (sowie von allen Konjugierten zu $\mathfrak{p}_\tau$, da ja $C_\mu$ im Zentrum von $\mathfrak{G}_\mu$ liegt), so durchkreuzen wir $K_\mu/K_{\mu-1}$ mit einem Kreiskörper $K_q^l$ folgender Eigenschaft:

$\alpha$) $q$ zerfalle voll in $M = K_{\mu-1}(\zeta_{l^h})$, wenn $C_\mu$ in $\mathfrak{G}_m$ maximal die Ordnung $l^h$ erreicht.

$\beta$) Darüber hinaus zerfalle $q$ voll in $M(\sqrt[l]{P})$, wo $P$ diejenigen Potenzprodukte $\Pi p_\tau^{x_\tau}$ durchläuft, deren Exponenten der Kongruenz $\Sigma a_\tau x_\tau \equiv 0\,(l)$ genügen, für die also die Artin-Substitution

$$\left(\frac{K_\mu/K_{\mu-1}}{\Pi\, \mathfrak{p}_\tau^{x_\tau}}\right) = 1$$

ist,

$\gamma$) zerfalle aber nicht weiter im vollen $M(\sqrt[l]{p_1}, \ldots, \sqrt[l]{p_t})$, wenn irgendein $a_\tau \not\equiv 0\,(l)$.

(Sind alle $a_\tau = 0$, kann die Durchkreuzung unterbleiben.)

$q$ kann diese Bedingungen erfüllen, wenn $M(\sqrt[l]{p_1}), \ldots, M(\sqrt[l]{p_t})$ unabhängig sind. Dies ist aber der Fall: Andernfalls müßte nämlich irgendein $\sqrt[l]{P_0}$, $P_0 = \Pi p_\tau^{c_\tau}$, in $M$ liegen. Nun liegt aber die erzeugende Substitution $R$ von $\mathrm{P}(\zeta_{l^h})$ im Zentrum der Gruppe von $M$, während sie die Substitution $(\sqrt[l]{P_0} \to \zeta \sqrt[l]{P_0})$ in $(\sqrt[l]{P_0} \to \zeta^v \sqrt[l]{P_0})$, $v$ Primitivwurzel mod $l^2$, transformiert. Also liegt kein $\sqrt[l]{P_0}$ in $M$ (überhaupt nicht in einem Körper, der ein Produkt von Normalkörpern vom Primzahlpotenzgrad ist!).

Ist jetzt $a_1 \not\equiv 0\,(l)$, $p_1$ also nach $\beta$) und $\gamma$) unzerfallen in $K_q^l$, und ist $T^{a_1}$ die zu $p_1$ gehörige Substitution in $K_q^l$, so erfüllt die in der Bezeichnungsweise von (9) zu $\overline{T}\,\overline{C} = 1$ gehörige Durchkreuzung $K'_\mu < K_\mu K_q^l$ unsere Bedingungen: Da $q$ unter $\beta$) so gewählt ist, daß mit $p_1 \to T^{a_1}$ auch $p_\tau \to T^{a_\tau}$ zugeordnet ist (in Kongruenzen: $p_\tau \equiv v^{a_\tau} w_\tau^l$; $v$ Primitivrest mod $q$), so gehört ein Primteiler von $\mathfrak{p}_\tau$ in $K_{\mu-1}$ zur Substitution $(\overline{T}\,\overline{C})^{a_\tau}$ von $K_\mu K_q^l$, zerfällt also voll in $K'_\mu/K_{\mu+1}$. Schließlich ist $q$ selbst so gewählt, daß es in $K'_\mu$ voll zerfällt und $\equiv 1\,(l^h)$ ist. Damit ist alles bewiesen!

**5.** Der Charakter $\psi$. Die Möglichkeit bei der oben gelieferten Konstruktion, die im vorletzten Körper $K_{m-1}$ noch unverzweigten Primteiler des Führers von $K_m/K_{m-1}$ durchweg zu beseitigen, den Führer also auf das Produkt $\mathfrak{v}$ der eigenen in $K_{m-1}$ verzweigten Primteiler zu reduzieren, liegt am Nichtvorhandensein von Einheiten und Idealklassen der Ordnung $l$ in $\mathsf{P}$. Bei beliebigem Grundkörper, überhaupt bei $l = 2$, definiert hingegen bei gegebenem $K/K_0$ mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ jede realisierbare zentrale Aufspaltung $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} \cup \mathfrak{A}$ mit zyklischem $\mathfrak{A}$ der Ordnung $l^h$ in $K_0$ einen Charakter $\psi$, der jeder Zahl $\gamma_0$ in $K_0$, die dort eine $l^h$-te Idealpotenz ist und außerdem Normenrest mod $\mathfrak{v}$ (in $K$ verzweigtem Ideal, das sich in $\mathfrak{H}$ weiter verzweigen muß), eindeutig eine Substitution $\psi(\gamma_0) = A$ aus $\mathfrak{A}$ zuordnet, die für $l^h$-te Zahlpotenzen 1 ist:

Es sei $K'$ irgendein Körper mit $\mathfrak{H} >\!\!- \mathfrak{G}(K)$ als Gruppe. Wir betrachten die zum Klassenkörper $K'/K$ gehörige Idealklasseneinteilung in $K$ und setzen $\chi(\alpha) = A$, wenn $A$ die zum Hauptideal $(\alpha)$ gehörige Artin-Substitution ist. Dieser Charakter $\chi$, der für alle zum Führer $\mathfrak{f}(K'/K)$ fremden Zahlen definiert ist, hat die Ordnung $l^{h_1}$, wenn $K'$ über dem Trägheitskörper von $K'/K$ den Grad $l^{h_1}$ hat; der Trägheitskörper ist dabei der absolute Klassenkörperteil von $K'/K_0$, der bei $h = h_0 + h_1$ den Grad $h_0$ hat.

Ferner gilt

$$\chi(\alpha^S) = \chi(\alpha)$$

für beliebig in $K$ konjugierte Zahlen, weil $K'$ zentral über $K$ ist. Wegen der eindeutigen Primidealzerlegung hängt dann $\chi$ nur von $N(\alpha)$ ab. — Jetzt definieren wir für die Zahlen

$$\alpha_0 \equiv N(\alpha) \bmod \mathfrak{f},$$

das sind unter den zu $\mathfrak{f}$ fremden Resten die Normenreste mod $\mathfrak{v}$, den Charakter

$$\psi(\alpha_0) = \chi(\alpha). \tag{15}$$

Für beliebige Normenreste $\alpha_0$ wird der Charakter von der Wahl von $K'$ abhängen, nicht dagegen für die $l^h$-ten Idealpotenzen $\gamma_0$ unter den Normenresten mod $\mathfrak{v}$ [soweit der Charakter definiert, d. h. $(\gamma_0, \mathfrak{f}) = 1$ ist], unter die vor allem die Einheiten-Normenreste mod $\mathfrak{v}$ gehören:

Es seien $K'$ und $K''$ zwei verwandte Körper mit den Gruppen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$, die also zwei zur abstrakten Aufspaltung $\mathfrak{H} >\!\!- \mathfrak{G}$ isomorphe Aufspaltungen sind. Die isomorphe Zuordnung von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ zu $\mathfrak{H}$ liege fest. Die zu $K'$ und $K''$ gehörigen Charaktere $\chi'(\alpha)$ und $\chi''(\alpha)$ bezeichnen wir mit bezug auf diese Zuordnung einfach durch die Elemente $A$ der abstrakten Gruppe $\mathfrak{A}$. Ebenso $\psi'(\alpha_0) = \chi'(\alpha)$, $\psi''(\alpha_0) = \chi''(\alpha)$ bei $\alpha_0 \equiv N(\alpha) \bmod \mathfrak{v}$. (Unabhängig von der Zuordnung $A_1 \sim A_2 \sim A$ sind diese Charaktere bestimmt für $\mathfrak{A} < \mathfrak{H}'$, welcher Fall uns ja hauptsächlich interessiert.) Nach 2. entsteht nun $K''$ aus $K'$ bei Durchkreuzung über $K$

mit einem $K^0/K_0$, dessen Gruppe $\mathfrak{C}$ zu $\mathfrak{A}$ isomorph ist. Bei passender isomorpher Zuordnung $C \to A$ liefert dann die Durchkreuzung

$$(16) \qquad \begin{aligned} \chi'(\alpha) \cdot \chi^0(\alpha) &= \chi''(\alpha) \quad \text{in } K, \\ \psi'(\alpha_0) \cdot \psi^0(\alpha_0) &= \psi''(\alpha_0) \quad \text{in } K_0, \end{aligned}$$

wobei $\alpha_0$ in $K_0$ zur Substitution $C$ von $K^0/K_0$ und dann $\alpha$ in $K$ zur entsprechenden Substitution $\overline{C}$ von $KK^0/K$ gehöre, während $\chi^0$ und $\psi^0$ das nach der obigen Zuordnung $C \to A$ zugehörige Element $A$ von $\mathfrak{A}$ bedeute. Nun muß aber $\psi^0(\gamma_0) = 1$ gelten, weil $K^0$ Klassenkörper vom Grade $l^h$ über $K_0$ ist, in dessen Klassengruppe alle $l^h$-ten Idealpotenzen liegen müssen. Also gilt

$$(17) \qquad \psi''(\gamma_0) = \psi'(\gamma_0).$$

Die Beschränkung $(\gamma_0, \mathfrak{f}') = (\gamma_0, \mathfrak{f}'') = 1$ kann dabei für die Führer von $K', K''$ unter Beibehaltung von $\gamma_0 \equiv N(\gamma) \bmod \mathfrak{v}$ wegfallen, wenn man bloß $\psi(\tau_0^{l^h}) = 1$ für jedes $\tau_0 \equiv 1\ (\mathfrak{v})$ definiert. — Kam man in 3. am Schluß mit der Altverzweigung $\mathfrak{v}$ des Führers aus, so gilt hier wenigstens

$$(18) \qquad (\mathfrak{f}', \mathfrak{f}'', \ldots) = \mathfrak{v},$$

wenn man alle Körper $K', K'', \ldots > K$ zur Gruppe $\mathfrak{H}$ durchläuft, d. h. man kann schon ein Paar solcher Körper finden, deren Führer nur $\mathfrak{v}$ gemein haben.

Diese letzte Behauptung, die die in 1. am Schluß gemachte Aussage einschließt, daß die Konstruktion einfach verzweigt fortgesetzt werden kann, wenn bisher nur einfache Verzweigungen aufgetreten sind (überhaupt verzweigungsfremd zu vorgegebenem bisher unverzweigtem Ideal), folgt[8a]) ähnlich wie der Zusatz von 3.:

Gegeben sei $K'/K$ mit dem Führer $\mathfrak{f}' = \mathfrak{w}\mathfrak{q}'$; $\mathfrak{w} \equiv 0\ (\mathfrak{v})$. Gesucht ein $K''$ mit Führer $\mathfrak{f}'' = \mathfrak{w}\mathfrak{q}''$; $(\mathfrak{q}'', \mathfrak{q}'\mathfrak{k}) = 1$. Dabei sei $\mathfrak{q}'$ Primideal in $K_0$ oder eine Potenz $\mathfrak{l}^z$ eines $l$-Primteilers in $K_0$. Da wir die Durchkreuzung nur über dem Trägheitskörper der Primteiler von $\mathfrak{q}'$ ausführen, dürfen wir $K$ als Trägheitskörper, also $l^h$ als Verzweigungsordnung von $\mathfrak{q}'$ annehmen. Jetzt sei $\chi_0'$ ein $l^h$-ter Potenzrestcharakter mod $\mathfrak{q}'$ in $K_0$, und zwar für $\mathfrak{q}' = \mathfrak{l}^z$ genau ein solcher, der $\chi_0'(\alpha_0) = 1$ für jedes $\alpha_0 \equiv N(\alpha)$ mit $\alpha \equiv 1\ (\mathfrak{w})$ liefert, wenn $(\alpha)$ in $K$ zur Idealgruppe von $K'$ gehört; also $\chi_0'(\alpha_0) \neq 1$ für alle nicht zur Idealgruppe von $K'/K$ gehörigen $\alpha \equiv 1\ (\mathfrak{w})$. Aus der unendlichen Menge der Primideale $\mathfrak{q}''$ in $K_0$ mit einem $l^h$-ten Potenzrestcharakter $\chi_0''$, der für $l^h$-te Idealpotenzen $\gamma_0$ mit $\chi_0'$ übereinstimmt, greifen wir jetzt irgendein zu $\mathfrak{q}'\mathfrak{k}$ fremdes Primideal $\mathfrak{q}''$ heraus. Dann gibt es in $K_0$ einen zyklischen Klassenkörper $l^h$-ten Grades $K^0$ mit dem Führer $\mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$, dessen Zahlidealgruppe der Gleichung $\chi_0''(\xi) = \chi_0'(\xi)$ genügt, die wegen Gültigkeit dieser Gleichung für alle $\xi = \gamma_0$ zu einer vollständigen Idealgruppe ergänzt werden kann.

Jetzt bilden wir $K' K^0$. Dann gibt es diesmal genau $l^h$ Idealklassen des Klassenkörpers $K' K^0/K$, die Zahlideale $(\beta)$ mit $\beta \equiv 1$ $(\mathfrak{w}\,\mathfrak{q}'')$ enthalten; denn wenn für ein solches $\beta$ und seine Norm $\beta_0$ in $K_0$ nur $\chi_0' (\beta_0) = 1$ gilt, gehört $\beta$ zur Idealgruppe von $K' K^0/K$; auch für $\mathfrak{q}' = \mathfrak{l}^z$! Zur zyklischen Untergruppe dieser $l^h$ Idealklassen gehört aber ein Klassenkörper $K''/K$ mit dem Führer $\mathfrak{w}\,\mathfrak{q}''$, und es gilt $K'' < K'' K^0 < K' K^0$ wegen $K'', K^0 < K' K^0$; aber $[K'', K^0] = K_0$ wegen $(\mathfrak{q}', \mathfrak{f}(K''/K)) = 1$ und Vollverzweigtheit von $\mathfrak{q}'$ in $K^0/K_0$. Also $K'' K^0 = K' K^0$, w. z. z. w.

Bemerkung 1: Der zu $\mathfrak{H}$ gehörige Charakter $\psi(\gamma_0)$ liegt auch dann fest, wenn $\mathfrak{H}$ einen Automorphismus $A \sim A^{1+l^k}$ besitzt, der $\mathfrak{G}$ in Ruhe läßt. Dann hat aber der Durchschnitt $[\mathfrak{A}, \mathfrak{H}']$, der mit $\mathfrak{H}'$ in Ruhe bleiben muß, höchstens die Ordnung $l^k$; $[\mathfrak{A}, \mathfrak{H}'] < \{A'\}$, $A'$ die $l^{h-k}$-te Potenz von $A$. Gleichzeitig fällt aber auch $\psi(\gamma_0)$ in die $\mathfrak{H}(\mathfrak{G})$-automorphismenfreie Gruppe $\{A'\}$, d. h. $\psi$ ist für die $\gamma_0$ nur ein Charakter der Ordnung $l^k$, weil der Nichtabelsche Abschnitt der Erweiterung $K'/K$ nur den Relativgrad $l^k$ hat.

Bemerkung 2: Man könnte den Charakter $\psi$, wie es sonst üblich ist, wohl als $l^h$-te Einheitswurzel definieren, indem man einen festen primitiven Charakter der Gruppe $\mathfrak{A}$ wählt. (Bei Richter[1]) ist diese Gruppe sogar durch Einheitswurzeln bezeichnet.) Für Ord $\mathfrak{A} = 2$ ist das zwar empfehlenswert, für $l^h > 2$ aber gerade dann nicht, wenn $l$-te (vierte) Einheitswurzeln im Grundkörper liegen. Nimmt man z. B. die unter 3. behandelten konjugierten Körper $K'$ und $K''$ mit dem normalen Durchschnitt $K$, so fallen die zugehörigen Charaktere $\chi'$ und $\chi''$ für absolut konjugierte $\alpha'$ und $\alpha''$ gleich, nicht absolut konjugiert aus. Sie sind Potenzrestcharaktere $\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{m}}\right)$, deren Nenner $\mathfrak{m}$ eine gegen die Substitution $R$ von $K = \mathsf{P}(\zeta)$ nicht invariante Gruppe erzeugen. Freilich fällt hier für alle $\gamma_0$ in $K_0$ das $\psi = 1$ aus, wie aus 3. folgt.

Beispiel für $\psi(\gamma_0) = -1$ bei $l = 2$:

$K_0 = \mathsf{P}$. $K = (\sqrt{13}, \sqrt{17})$ soll in einen Diederkörper achten Grades so eingebettet werden, daß die Trägheitssubstitutionen $S_1$ und $S_2$ von 13 und 17 die Ordnung 2 behalten. Also $S_1^2 = S_2^2 = (S_1, S_2)^2 = 1$. Wobei $(S_1, S_2)$ den Kommutator $S_1^{-1} S_2^{-1} S_1 S_2$ bezeichnet.

Lösung 1:

$$K' = \mathsf{P}\left(\sqrt{-9-2\sqrt{17}} + \sqrt{-9+2\sqrt{17}}\right) \text{ imaginär; } \mathfrak{f} = p_\infty .$$

Lösung 2:

$$K'' = \mathsf{P}\left(\sqrt{27+6\sqrt{17}} + \sqrt{27-6\sqrt{17}}\right) \text{ reell; } \mathfrak{f} = 3.$$

Es ist $\psi(-1) = -1$, und es geht $K'$ in $K''$ bei Durchkreuzung mit $\mathsf{P}(\sqrt{-3})$ über.

Ebenfalls hat man $\psi(-1) = -1$ bei einem $K$ enthaltenden Diederkörper $K'''$ mit $S_1^4 = S_2^2 = 1$; $S_1^2 = (S_1, S_2)$. Einen $K'''$ erhält man, indem man $K'/K$ oben mit $K^4_{13}/\mathsf{P}(\sqrt{13})$ durchkreuzt; $K^4_q$ biquadratischer Unterkörper der $q$-ten Einheitswurzeln.

Ebenfalls gilt aber auch $\psi(-1) = -1$ für einen Quaternionenkörper $K^{\mathrm{IV}} > K$; Gruppe: $S_1^2 = S_2^2 = (S_1, S_2)$; $(S_1, S_2)^2 = 1$. Einen $K^{\mathrm{IV}}$ erhält man aus dem letzten $K'''$ bei nochmaliger Durchkreuzung von $K'''/K$ mit $K^4_{17}/\mathsf{P}(\sqrt{17})$.

Weitere Beispiele für $\psi(\gamma_0) \neq 1$ finden sich in meiner Note: Totale Normenreste, die keine Normen sind, als Erzeuger nichtabelscher Körpererweiterungen (Crelle Journ. 175 (1936), S. 100–107).

Die hier bei $K'''$ und $K^{\mathrm{IV}}$ angewandte *indirekte Durchkreuzung mit zyklischen Verlängerungen der Teilklassenkörper* von $K$ liefert eine „*weitere Verwandtschaft*" *der Körper* $K'$, verbunden mit „*verwandten Gruppenaufspaltungen*", auf die ich in einer späteren Abhandlung eingehen will. — Aufgabe M in 6. besitzt auch verwandte Lösungen zu Aufgabe K in 6.

**6.** Wir untersuchen jetzt, wieweit für den Fall von Körpererweiterungen $l$-ten Grades im Bereiche der $l$-Körper die in 1. genannten hinreichenden Zerfallsbedingungen für ein verzweigtes $\mathfrak{p}$ notwendig sind. Da wir nur einfache Verzweigungen betrachten, wird die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}(\mathfrak{p})$ aus zwei Elementen $Z$ und $T$ erzeugt, wo $T$ die Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}$ erzeugt und $Z$ dann ein Repräsentant der Erzeugenden von $\mathfrak{Z}/\mathfrak{T}$ ist. Allgemein ist in der $l$-Gruppe $\mathfrak{Z} = \{Z, T\}$ definiert durch

$$Z^{l^h} = T^{l^a}; \quad T^{l^k} = 1; \quad (T, Z) = T^{r \cdot l^c}. \tag{19}$$
$$(T^Z = T^{1 + r \cdot l^c}; \quad (1 + r \cdot l^c)^{l^h} \equiv 1 \bmod l^k.)$$

Wir können uns aber im folgenden bei der Einbettung des Körpers $K$ mit der Gruppe $\mathfrak{G}$ in einen mit der Gruppe $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} \cup \mathfrak{C}$, wobei $\mathfrak{Z} \cup \mathfrak{C} = \mathfrak{Y}$ ausfalle (neue Zerlegungsgruppe nach 1. eine Untergruppe von $\mathfrak{Y}$, di[e] alle Restklassen mod $\mathfrak{C}$ durchläuft!), auf $Z^{l^h} = 1$ in $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Y}$ beschränken. Denn für den allgemeinen Fall läßt sich der zum Trägheitskörper $K_t$ ge[-] hörige $p$-adische Körper $P_t$ vom Grade $l^h$ in einen solchen des Grade[s] $l^{h+k-a}$ einbetten (Primkörpereinbettung!), und im Produkt mit dem zu[-] gehörigen $P$ ist dann $Z^{l^{h+k-a}} = 1$ und $[\{Z\}, \{T\}] = 1$. — Auch oh[ne] Übergang zu den $p$-adischen Körpern läßt sich dies leicht zeigen.

Bei der Aufspaltung $\mathfrak{Z} \prec \mathfrak{Y}$ können folgende Fälle und Unterfä[lle] auftreten:

I. Es bleibt $T^{l^k} = 1$ in $\mathfrak{Y}$.

II. Es wird Ord $T = l^{k+1}$ in $\mathfrak{Y}$.

a) In $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z} \cup \mathfrak{C}$ ist $\mathfrak{C}$ direkter Faktor.

b) $\mathfrak{C}$ ist kein direkter Faktor, liegt aber außerhalb des Kommutators $\mathfrak{Y}'$.

c) $\mathfrak{C}$ liegt im Kommutator.

I a) Es liegt Fall $\alpha$) aus 1. vor; Erweiterung also ohne weiteres möglich.

b) $C = Z^{l^h}$ liefert nur eine zyklische Verlängerung der Zerlegungsgruppe ohne eine solche der Trägheitsgruppe, ist also durch Primkörpererweiterung möglich.

c) $C = (T, Z)$. Einbettung unmöglich, da der Kommutator $C$ zur Trägheitsgruppe gehören müßte, was gegen I. verstößt. — Losgelöst vom $p$-adischen Sachverhalt kann man dies, indem man gleich die mit der Erweiterung sich direkt multiplizierenden invarianten Teile $\{S_1^l\}$ und $\{S_2^l\}$ abschneidet, formulieren als

Verknotungsaufgabe K. *Einen Abelschen Körper mit* $S_1^l = S_2^l \doteq 1$, $S_2$ *Trägheitssubstitution von* $\mathfrak{p}$, *in einen solchen mit* $S_1^l = S_2^l = (S_1, S_2)^l = 1$, $(S_1, S_2)$ *im Zentrum, einzubetten.*

*Lösungsbedingung*: Es darf $S_1$ nicht Zerlegungssubstitution von $\mathfrak{p}$ in $K$ sein, weil sonst in der Erweiterung $K'$ auch der Kommutator $(S_2, S_1)$ zur in der Zerlegungsgruppe invariant liegenden Trägheitsgruppe von $\mathfrak{p}$ gehören müßte und dann diese nicht zyklisch wäre. $\mathfrak{p}$ muß also vom Grade 1 in $K$ sein, ebenso jedes in $K$ verzweigte $\mathfrak{q}$, dessen Trägheitssubstitution in der Aufspaltung die Ordnung $l$ behält, d. h. alle $\mathfrak{q}$ für ungerades $l$, für $l = 2$ nur die $\mathfrak{q}$ mit Trägheitssubstitution $S_1$ oder $S_2$, nicht aber $S_1 S_2$.

(Die Bezeichnungsweise ist hier, wie teils schon früher, bei Aufspaltungen $\mathfrak{H} \succ\!\!- \mathfrak{G}$ so gewählt, daß $S_1$ und $S_2$ in $\mathfrak{H}$ wieder Elemente bezeichnen, die Repräsentanten für $S_1$ und $S_2$ in $\mathfrak{G}$ sind, und zwar wieder Zerlegungs- und Trägheitssubstitutionen eines Primteilers von $\mathfrak{p}$, wenn sie vorher bei $\mathfrak{p}$ in dieser Eigenschaft auftraten.)

Daß zur Lösung der Verknotungsaufgabe diese Bedingungen ebenfalls hinreichend sind, folgt ohne Heranziehung des Richterschen Satzes bei rein verzweigtem $K$ schon aus[3]).

II a) —.

b) Wenn schon $T^{l^k}$ außerhalb des Kommutators liegt, so auch $T$ und $Z$. $\mathfrak{Y}$ ist also eine Abelsche Gruppe $\{Z\} \times \{T\}$. Das Einbettungsproblem reduziert sich auf die Einbettung der Trägheitsgruppe:

Verlängerungsaufgabe L. *Einen zyklischen Körper* $K$ *mit einer Gruppe* $\{T\}$ *der Ordnung* $l^k$ *in einen solchen mit einer Gruppe* $\{T\}$ der *Ordnung* $l^{k+1}$ *einzubetten.*

Lösungsbedingung: Für ein in $K$ voll verzweigtes $\mathfrak{p}$ aus $K_0$ muß $N(\mathfrak{p}) \equiv 1\ (l^{k+1})$ von $K_0$ aus, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_\infty$ gelten, für später verzweigte entsprechende Reduktion.

II c) $Z^{l^h} = T^{l^{k+1}} = 1$ in $\mathfrak{Y}$; $T^{l^k} < \mathfrak{Y}'$. Wenn etwa $Z^{l^f}$ in $\mathfrak{Y}$ schon mit $T^1$ vertauschbar ist, multipliziert sich $\{Z^{l^f}\}$ mit $\{T\}$ direkt und liegt invariant in $\mathfrak{Y}$; die Einbettung läßt sich dann auf $Z^{l^f} = 1$ zurückführen. Wir dürfen also

$$(20) \qquad (T, Z^{l^{h-1}}) \neq 1 \text{ in } \mathfrak{Y}$$

annehmen, und zwar muß

$$(20) \qquad T^{Z^{l^{h-1}}} = T^{\pm 1 + r l^k} \quad \text{oder} \quad = T^{-1}$$

ausfallen, damit $T$ bei $Z^{l^h}$ in sich übergeht. Dabei kommt für $l^h > 2$ nur $T^{+1+rl^k}$ in Frage. Es ist dann

$$(20) \qquad T^Z = T^{\pm 1 + l'}; \quad T^{Z^l} = T^{1 + ll'}, \ldots$$

oder

$$T^Z = T^{-1} \text{ auch für } l^h = 2.$$

Dabei bedeute $l'$ eine genau durch $l^{k+1-h}$ teilbare Zahl. Elementare Rechnung ergibt $k \geqq h$; für $l = 2$ und $h > 1$ sogar $k > h$. Es bleiben dann folgende Aufgaben:

Einmündungsaufgabe M. *Einen Körper mit der Gruppe* $S_1^{l^h} = S_2^{l^k} = 1$; $(S_2, S_1) = S_2^{l'}$ *in einen solchen mit* $S_1^{l^h} = S_2^{l^{k+1}} = 1$ *einzubetten bei* $l' = r l^{k+1-h}$, $h \leqq k$ *für* $l > 2$, $h < k$ *für* $l = 2$.

M′. *Dasselbe bei* $l = 2$ *mit* $(S_2, S_1) = S_2^{2^{k+1-h}-2}$, $h < k$.

M″. *Dasselbe bei* $l^h = 2$ *mit* $(S_2, S_1) = S_2^{-2}$. *(Diedergruppe.)* $S_2$ *Trägheitssubstitution von* $\mathfrak{p}$.

Unsere hinreichenden Lösungsbedingungen: Vollzerfall von $\mathfrak{p}$ im Unterkörper $K_1 < K$ mit $S_2 = 1$ und $N_{K_0}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod l^{k+1}$, sind hier nicht mehr notwendig, weil jetzt, im Gegensatz zu I c), der Kommutator in der Trägheitsgruppe liegt. Ist im Gegenteil $\mathfrak{p}$ in $K_1$ unzerfallen — dann ist also für $\mathfrak{p}$ Aufgabe M ohne $\mathfrak{p}$-adische Reduktion zu lösen — so darf aber auch gerade nur noch $N_{K_0}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod l^{k+1-h}$ gelten. Dann gilt nämlich $N_{K_1}(\mathfrak{p}) \equiv 1 \bmod l^{k+1}$, und die Aufgabe ist $\mathfrak{p}$-adisch lösbar: Die teilerfremden Restklassen mod $\mathfrak{p}$ bilden eine Gruppe der Ordnung $l^{k+1}$, liefern also einen zyklischen Klassenkörper $\overline{P}$ zur Gruppe $\{S_2\}$ in $P_1$, der über $P_0$ normal ist. Da aber die Restklassengruppe mod $\mathfrak{p}$ in $P_0$ nur die Ordnung $l' = l^{k+1-h}$ hat, ist gerade noch der Teilkörper $l'$-ten Grades von $\overline{P}/P_1$ Klassenkörper über $K_0$, d. h. $\{S_2^{l'}\}$ ist Kommutator. Also muß $l'$ die genaue in $N_{K_0}(\mathfrak{p}) - 1$ aufgehende Potenz von $l$ sein; denn sonst verschöbe sich der Kommutator. — Für Aufgabe M′ erhält man bei voller Zerlegungsgruppe $\{S_1, S_2\}$ von $\mathfrak{p}$ die Lösungsbedingung:

$N(\mathfrak{p}) \equiv -1$ genau mod $2^{k-h}$, dagegen $N(\mathfrak{p}) \equiv -1\ (2^k)$ für M''; Normbildung von $K_0$ aus.

Die Lösungsbedingungen zeigen, daß man sich in M bei der lokalen Einbettung auf $h = 1$ beschränken kann ($l^h \to l$; $l^k \to l'$); sie sind allgemein erfüllt, wenn für $Z^l = T^{l'} = 1$; $\mathfrak{Z}$ dabei Abelsche Gruppe vom Typ $(l, l')$. — Bei M' liefert nur noch $h = 2$ neue Bedingungen.

Wie weit allerdings eine *Zahl*körpereinbettung auf diese Weise möglich ist, hängt davon ab, ob die anderen Verzweigten passend zu $\mathfrak{p}$ gewählt werden können. Bei Aufgabe M' mit $h = 2$ und rationalem Grundkörper scheitert das z. B. am quadratischen Reziprozitätsgesetz. Dagegen ist Aufgabe M'' mit imaginärem $K_1$ und unzerfallenem $p$ als Führer in $K_1$ lösbar, wenn obendrein $p \equiv -1\ (2^{k+1})$; und für $l > 2$, $h = k = 1$ habe ich ein allgemeines Beispiel in der D. M. V.-Aufgabe 194 mit rationalem Grundkörper angegeben, das sich auf beliebiges $k$ erweitern läßt. Ist nämlich die Zerlegungssubstitution $S_1$ von $p$ Trägheitssubstitution von $q$ und $S_2$ wie oben Trägheitssubstitution von $p$, $K = K_q^l K_p^{l^k}$, $p \not\equiv x^l\ (q)$, $\equiv 1\ (l^k)$, $\not\equiv 1\ (l^{k+1})$, $q \equiv y^{l^k}\ (p)$, was sich miteinander verträgt, so ist Aufgabe M lösbar; denn die für $q$ hinzukommende Verknotungsbedingung des Vollzerfalls in $K_p^{l^k}$ ist erfüllt. — Diese Konstruktionsmethode ist allerdings nicht sehr fruchtbar; denn wenn bei einer weiteren Aufspaltung Trägheitssubstitutionen $T^{l^k}$ und $(T, Z)$ eines $\mathfrak{p}$ auseinanderfallen, müssen Verknotungs- und Verlängerungsbedingung für $\mathfrak{p}$ doch beide erfüllt sein.

Zurückkehrend von der Lokalisierung erhalten wir im ganzen folgende notwendigen Einbettungsbedingungen:

*Soll ein Körper $K$ mit $l$-Gruppe $\mathfrak{G}$ in einen $K'$ mit $l$-Gruppe $\mathfrak{H}$ einbettbar sein, so darf ein in $K$ verzweigtes $\mathfrak{p}$ mit Trägheitsgruppe $\{T\}$ nicht eine Substitution $S$ von $K$ als Zerlegungssubstitution besitzen, die mit $T$ in $\mathfrak{H}$ einen Kommutator außerhalb $\{T\}$ hat.* (Verknotungsbedingung.)

*Ferner muß für ein in $K$ verzweigtes $\mathfrak{p}$ mit kommutativer Zerlegungsgruppe die absolute Norm von $K_0$ aus $\equiv 1\ (l^t)$ sein, wenn die Trägheitsgruppen $\{T\}$ der $\mathfrak{p}$-Primteiler in $\mathfrak{H}$ ihre Ordnung auf $l^t$ verlängern und ihre Zerlegungsgruppen kommutativ bleiben.* (Verlängerungsbedingung.)

*Wenn hingegen unter gleichen Umständen die Kommutativität der Zerlegungsgruppen verloren geht, indem $C = T^{l^{t-1}} = (T, Z)$ bei $\mathfrak{H} = \mathfrak{G} \cup \{C\}$ wird, darf nicht $N(\mathfrak{p}) \equiv 1\ (l^t)$ bestehen.* (Einmündungsbedingung.)

Im Falle, daß die Zerlegungsgruppe eines $\mathfrak{p}$ in $K$ bereits nichtkommutativ ist, besteht bei $l \neq 2$ keine Bedingung für $\mathfrak{p}$, weil M. auf $h = 1$ zurückführbar war; doch kann bei $l = 2$ noch eine Aufgabe M'' für $\mathfrak{p}$ durch $N(\mathfrak{p}) \equiv -1\ (2^{t-1})$ zu lösen bleiben oder M'. durch $N(\mathfrak{p}) \not\equiv -1\ (2^{t-1})$. — So wie sich aber sonst die Normbedingungen für p statt in $K_0$ im Zerlegungskörper aufstellen lassen, so kann man sich merken, daß hier der überm Zerlegungskörper quadratische Teilkörper des Trägheitskörpers ausschlaggebend ist und sich in diesem M″. auf M. und M′. auf *M*. reduziert. (Zusatz-Einmündungsbedingungen für $l = 2$).

Wir betrachten jetzt die in der Einleitung erwähnten

$l$-Entwicklungen der freien Gruppe

$\mathfrak{F}_n$ von $n \geqq 2$ Erzeugenden, mit denen wir alle $l$-Gruppen von $n$ Erzeugenden einfangen.

**7.** Die Magnussche 0-Entwicklung und die zugehörige $l$-Entwicklung. Wir betten nach Magnus[14]) die freie Gruppe $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_n = \{S_1, \ldots, S_n\}$ in einen freien Gruppenring $\mathfrak{R}$ von Potenzreihen ein, indem wir setzen

$$(21) \qquad S_\nu = 1 + \Delta_\nu; \quad S_\nu^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \Delta_\nu^k$$

und alle so entstehenden Potenzreihen nach homogenen Bestandteilen in den $\Delta$ ordnen. Jetzt heiße ein Gruppenelement $P$ (gleichzeitig das Ringelement $P - 1$) von der Dimension $\delta(P) = m$, wenn die Entwicklung von $P - 1$ in eine Potenzreihe genau mit Gliedern $m$-ter Dimension in den $\Delta$ beginnt, wenn also

$$(22) \qquad P - 1 \equiv 0 \; (\mathfrak{D}^m), \; \not\equiv 0 \; (\mathfrak{D}^{m+1}), \quad \text{wo } \mathfrak{D} = (\Delta_1, \ldots, \Delta_n).$$

Insbesondere gilt $\delta(S) = 1$ für $S = S_\nu$ und alle außerhalb der Kommutatorgruppe liegenden $S$. Der Kommutator $(S, T) = S^{-1} T^{-1} S\, T$ zweier beliebiger Elemente $S$ und $T$ hat nach Magnus eine Dimension

$$(23) \qquad \delta(S, T) \geqq \delta(S) + \delta(T).$$

Sind nämlich $S \equiv 1 + \Delta^{(s)} \bmod \mathfrak{D}^{s+1}$ und $T \equiv 1 + \Delta^{(t)} \bmod \mathfrak{D}^{t+1}$, $\delta(S) = s$, $\delta(T) = t$, so wird

$$(24) \qquad (S, T) \equiv 1 + \Delta^{(s)} \Delta^{(t)} - \Delta^{(t)} \Delta^{(s)} \bmod \mathfrak{D}^{s+t+1}.$$

Die Elemente von $\mathfrak{F}$, deren Dimension $\delta \geqq m$ ist, bilden für jedes $m$ eine charakteristische Untergruppe $\mathfrak{F}^m$, wobei $\mathfrak{F}^1 = \mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}^2$ die Kommutatorgruppe (erste Ableitung) ist, während die höheren Ableitungen nicht unter den $\mathfrak{F}^m$ hervortreten. Die Faktorgruppe $\mathfrak{G}^m = \mathfrak{F}/\mathfrak{F}^{m+1}$ erhält man auch, indem man mit $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{R}$ mod $\mathfrak{D}^{m+1}$ additiv rechnet. — Wir entwickeln nun $\mathfrak{F}$ in die für $n > 1$ unendliche Reihe

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{C}^1 \cup \mathfrak{C}^2 \cup \mathfrak{C}^3 \cup \ldots \cup \mathfrak{C}^m \cup \ldots,$$

in der jedesmal $\mathfrak{C}^m$ die Gruppe der Elemente $m$-ter Dimension mod $\mathfrak{D}^{m+1}$ sei, d. h.

$$\mathfrak{C}^m = \mathfrak{F}^m/\mathfrak{F}^{m+1} = \mathfrak{G}^m - \mathfrak{G}^{m-1}.$$

---

[14]) W. Magnus, Beziehungen zwischen Gruppen und Idealen in einem speziellen Ring, Math. Annalen 111 (1935), S. 259—280.

(Schreibweise für die aus der Identität von $\mathfrak{G}^{m-1}$ hervorgehenden Elemente von $\mathfrak{G}^m$.) Die $\mathfrak{G}^m$ und $\mathfrak{F}^m$ drücken sich dann wieder aus:

$$\mathfrak{G}^m = \coprod_{\mu \leqq m} \mathfrak{C}^\mu = \mathfrak{C}^1 \cup \ldots \cup \mathfrak{C}^m; \quad \mathfrak{F}^{m+1} = \coprod_{\mu > m} \mathfrak{C}^\mu = \mathfrak{C}^{m+1} \cup \ldots.$$

Neben der 0-Dimension $\delta$ und 0-Entwicklung $\coprod \mathfrak{C}^m$ führen wir eine $l$-Dimension $\lambda$ und $l$-Entwicklung $\coprod \mathfrak{A}^m$ ein: Wir ersetzen $\mathfrak{D}$ durch $\mathfrak{L} = (l, \mathfrak{D}) = (l, \Delta_1, \ldots, \Delta_n)$, definieren $\lambda(Q) = r$ für $Q \equiv 1\ (\mathfrak{L}^r),\ \not\equiv 1\ (\mathfrak{L}^{r+1})$ und entwickeln

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{A}^1 \cup \mathfrak{A}^2 \cup \ldots \cup \mathfrak{A}^m \cup \ldots$$

mit den Faktorgruppen $\mathfrak{H}^m = \coprod_{\mu \leqq m} \mathfrak{A}^\mu$ und Untergruppen $\mathfrak{S}^{m+1} = \coprod_{\mu > m} \mathfrak{A}^\mu = \Sigma Q$ mit $\lambda(Q) > m$.

Die $l$-Entwicklung verhält sich so zur 0-Entwicklung, daß $\mathfrak{H}^m$ Faktorgruppe von $\mathfrak{G}^m$, $\mathfrak{F}^m$ also Untergruppe von $\mathfrak{S}^m$ ist. Insbesondere ist $\delta(A^h) = \delta(A)$, wie aus der Potenzreihenentwicklung sofort hervorgeht, während $\lambda(A^h) = \lambda(A)$ nur für $(h, l) = 1$ gilt. Dagegen ist

$$\lambda(A^l) = \lambda(A) + 1: \tag{25}$$

Setzen wir $A = 1 + \alpha$, so wird $A^l = 1 + l\alpha + \binom{l}{2}\alpha^2 + \ldots + \alpha^l$. Es hat hier $l\alpha$ die Dimension $\lambda + 1$, alle folgenden Glieder aber eine höhere Dimension außer für $l = 2$, $\lambda(A) = 1$. In diesem Falle hat man aber $A^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2$, und da $2 + \alpha \not\equiv 0\ (\mathfrak{L}^2)$ wegen $\alpha \equiv 0\ (\mathfrak{D}) \equiv 0\ (4, \mathfrak{D})$ und $2 \not\equiv 0\ (4, \mathfrak{D})$, ist auch $2\alpha + \alpha^2 \not\equiv 0\ (\mathfrak{L}^3)$. Also ist auch hier $\lambda(A^2) = 2$ und daher in jedem Falle $\lambda(A^l) = \lambda + 1$.

Die 0- und $l$-Entwicklung besitzen, die erste nach Magnus, folgende drei einander entsprechenden Eigenschaften:

$\alpha$) Jedes von der Identität verschiedene Element von $\mathfrak{F}$ weicht bereits in je einer Faktorgruppe $\mathfrak{G}^m$ und $\mathfrak{H}^r$ von der Identität ab. Der Durchschnitt der $\mathfrak{F}^m$ sowie der $\mathfrak{S}^r$ ist also Eins.

$\beta$) Während jede endliche Gruppe von $n$ Erzeugenden als Faktorgruppe von $\mathfrak{F}$ darstellbar ist, läßt sich unter diesen durch ein *endliches* absteigendes Produkt $\coprod_{\mu \leqq m}$ in der 0-Entwicklung nur jedes direkte Produkt von $l$-Gruppen und in der $l$-Entwicklung nur jede $l$-Gruppe einfangen; d. h. dies sind die als Faktorgruppe eines $\mathfrak{G}^m$, eines $\mathfrak{H}^r$ darstellbaren Gruppen.

$\gamma$) $\mathfrak{C}^m$ ist das Zentrum von $\mathfrak{G}^m$, $\mathfrak{A}^m$ das Zentrum von $\mathfrak{H}^m$, $\mathfrak{C}^m$ eine Abelsche Gruppe von endlich vielen Erzeugenden der Ordnung 0, $\mathfrak{A}^m$ eine solche vom Exponenten $l$.

Der Inhalt von $\alpha$) ist im wesentlichen, daß sich $\mathfrak{F}$ als Grenzgruppe sowohl der $\mathfrak{G}^m$ als der $\mathfrak{H}^m$ darstellen läßt. Sie ist allerdings nicht die einzige unendliche Gruppe dieser Eigenschaft, schon deswegen nicht, weil sie als abzählbare Gruppe nicht Galoisgruppe eines Körpers unendlichen Grades sein kann; sondern sie ist lediglich minimale Grenzgruppe: einer Untergruppe jeder Grenzgruppe isomorph. Realisieren wir die Folge $\mathfrak{H}^1, \mathfrak{H}^2, \ldots, \mathfrak{H}^m, \ldots$ durch ineinandergeschachtelte Funktionenkörper $K^\mu$ der Charakteristik $l$, was nach Witt[4]) möglich ist, wenn man einen Körper mit der Gruppe $\mathfrak{H}^1$ hat, so hat der Vereinigungskörper $\Sigma K^m$ eine kontinuierliche Galoisgruppe $\mathfrak{K}$ (stetig auf Grund ihrer natürlichen Krullschen Topologisierung[15])), für die ebenfalls $\alpha$) erfüllt ist, und die nur eine zu $\mathfrak{F}$ isomorphe Untergruppe besitzt. (Ein solches $\mathfrak{F}$ entsteht, indem man die Erzeugenden $S_1, \ldots, S_n$ beim Übergang von $\mathfrak{H}^m$ zu $\mathfrak{H}^{m+1}$ jedesmal wieder durch irgendwelche Repräsentanten ersetzt. Dann ist ihre Bedeutung in $\mathfrak{K}$ als Durchschnittsoperation festgelegt, und die aus ihnen erzeugte unabgeschlossene Gruppe $\{S_1, \ldots, S_n\} < \mathfrak{K}$ ist isomorph zu $\mathfrak{F}$.) Die Gruppe $\mathfrak{K}$ ist aus den $\mathfrak{H}^m$ auch abstrakt definierbar; die Existenz irgendgearteter Körper mit dieser Gruppe $\mathfrak{K}$ ist jedoch erst durch die Wittsche Konstruktion gesichert, vielleicht auch für Körper der Charakteristik $l$ charakteristisch.

$\alpha$) folgt bereits daraus, daß jedes Element $\neq 1$ eine feste Dimension besitzt.

$\gamma$) Daß $\mathfrak{A}^m$ und $\mathfrak{C}^m$ eine endliche Basis besitzt, folgt daraus, daß es nur endlich viele ($\leqq n^m$) Glieder $m$-ter Dimension in den $\Delta_\nu$ gibt und ebenfalls in $l$ und den $\Delta_\nu$. Aus $\delta(A^h) = \delta(A)$ und $\lambda(A^h) > \lambda(A)$ nur für $l|h$ folgt die Aussage über die Ordnungen 0 und $l$ der Basiselemente. Daß $\mathfrak{C}^m$ und $\mathfrak{A}^m$ im Zentrum von $\mathfrak{G}^m$ und $\mathfrak{H}^m$ liegen, folgt aus

$$\delta(A, S_\nu) > \delta(A) \quad \text{und} \quad \lambda(A, S_\nu) > \lambda(A).$$

Daß sie sogar das genaue Zentrum liefern, folgt so: Hat man zwei Elemente $P \equiv 1 + \Delta^{(m-1)} \bmod \mathfrak{D}^m$ und $Q \equiv 1 + \Lambda^{(m-1)} \bmod \mathfrak{L}^m$, also außerhalb $\mathfrak{C}^m$ und $\mathfrak{A}^m$, so können sie deswegen nicht im Zentrum von $\mathfrak{G}^m$ und $\mathfrak{H}^m$ liegen, weil zumindest einer der Kommutatoren $(P, S_1)$ und $(P, S_2)$ die genaue 0-Dimension $m$ hat und ebenso $\lambda(Q, S_1)$ oder $\lambda(Q, S_2) = m$ ist. Nämlich in

$$(Q, S_1) \equiv 1 + \Lambda^{(m-1)} \Delta_1 - \Delta_1 \Lambda^{(m-1)} \bmod \mathfrak{L}^{m+1}$$

ist $\Delta_1$ nur dann mit $\Lambda^{(m-1)}$ vertauschbar, wenn $\Lambda^{(m-1)}$ nur eine Form in $l$ und $\Delta_1$ ist, nicht gleichzeitig also eine Form in $l$ und $\Delta_2$.

$\beta$) Daß höchstens die genannten endlichen Gruppen eingefangen werden, ist für die $l$-Entwicklung klar und folgt für die 0-Entwicklung nach Magnus aus dem entsprechenden Burnsideschen Satze über die maximal-zentrale Entwicklung (absteigende Zentralreihe), die in 8. kurz

---

[15]) W. Krull, Galoissche Theorie der unendlichen algebraischen Erweiterungen, Math. Annalen **100** (1928), S. 687—698.

besprochen ist. Daß die 0-Entwicklung aber auch alle direkten Produkte von $l$-Gruppen einfängt, folgt nicht so einfach wie bei der absteigenden Zentralreihe; ich muß hier auf Magnus [14]), Satz IX und Beweis verweisen. Verhältnismäßig einfach folgt aber hieraus jetzt, daß die $l$-Entwicklung alle $l$-Gruppen einfängt, und zwar gilt folgendes: Wird eine Gruppe $\mathfrak{G}$ vom Exponenten $l^h$ durch $\mathfrak{G}^m$ eingefangen, so wird sie in der $\mathfrak{H}$-Reihe spätestens durch $\mathfrak{H}^{m+h-1}$ eingefangen. Wir holen hier weiter aus:

Wir dürfen in der 0-Entwicklung die Basis für $\mathfrak{C}^r$ (für $\mathfrak{F}^r \bmod \mathfrak{F}^{r+1}$) so wählen, daß ein Glied $\Delta_{\varkappa_1} \Delta_{\varkappa_2} \ldots \Delta_{\varkappa_r}$ als Leitglied (lexikographisch erstes Glied niederster positiver Dimension) höchstens eines Basiselements auftritt, das wir dann $S_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_r}$ nennen. Dies läßt sich durch lineare Transformation erreichen. Der Koeffizient von $\Delta_{\varkappa_1} \ldots \Delta_{\varkappa_r}$ in $S_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_r}$ ist dabei, positiv genommen, der größte gemeinsame Teiler aller Koeffizienten, die bei irgendeinem Element $S$ von $\mathfrak{F}$ mit dem Leitglied $\Delta_{\varkappa_1} \ldots \Delta_{\varkappa_r}$ auftauchen. Welche Indizeskombinationen $(\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_r)$ dabei in der Basis wirklich auftreten, d. h. welche $\Delta$-Produkte überhaupt Leitglieder von Gruppenelementen sind, bleibe dahingestellt (keinesfalls kommen für $r > 1$ reine Potenzen eines $\Delta_\nu$ vor); wir wollen hier lediglich eine geeignete Bezeichnungsweise für die Basis haben, die uns später von Nutzen sein kann. $\mathfrak{F}$ erhält dann eine „fortlaufende Basis"

$$(26)\qquad S_1, S_2, \ldots, S_n;\ S_{12}, S_{13}, \ldots, S_{n-1,\,n};\ S_{112}, \ldots;\ \ldots, S_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_r}, \ldots,$$

in der jedes Element von $\mathfrak{F}$ eindeutig als endliches geordnetes Potenzprodukt der so geordneten $S_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_r}$ dargestellt werden kann.

Dementsprechend erhalten wir, wie wir zeigen werden, in der $l$-Entwicklung folgendes Basisschema:

$$(27)\qquad \begin{array}{ccccccc} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ S_\nu^{l^3} & & S_{\mu\nu}^{l^2} & & S_{\lambda\mu\nu}^{l} & & S_{\varkappa\lambda\mu\nu} \\ & S_\nu^{l^2} & & S_{\mu\nu}^{l} & & S_{\lambda\mu\nu} & \\ & & S_\nu^{l} & & S_{\mu\nu} & & \\ & & & S_\nu & & & \end{array}$$

Dabei weist die Dimension $\lambda = r$ ($\mathfrak{A}^r$-Basis) ebensoviel Basiselemente $S^{(r)}$ auf, wie die 0-Dimensionen $\delta = 1, 2, \ldots, r$ zusammen (geordnete $\mathfrak{G}^r$-Basis), und zwar jedes einzelne $\delta \leqq r$ gerade die $l^{r-\delta}$-ten Potenzen der Basiselemente von $\mathfrak{C}^\delta$.

Wäre nämlich ein nichtidentisches Produkt der genannten $S^{(r)}$ schon von höherer Dimension $\lambda > r$, $\Pi S^{(r)} = T$, $\lambda(T) > r$, so müßten die Faktoren niederster 0-Dimension $m$ auf beiden Seiten übereinstimmen, während diese doch links nur in $l^{r-m}$-ter Potenz, rechts aber mindestens in $l^{r-m+1}$-ter Potenz auftreten. Das Schema (27) liefert daher, nach Zeilen geordnet, wieder eine fortlaufende Basis für $\mathfrak{F}$, wo nur diesmal die Darstellung mit Exponenten $|e| < \frac{l}{2}$ für $l > 2$ und etwa $e = 0, (-1)^\delta$ für $l = 2$ eindeutig wird:

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ vom Exponenten $l^h$, für die $\mathfrak{F}^m = 1$ ist, liegt daher im Schema (27) ganz im Rechteck mit den Seitenlängen $h$ und $m$, also ganz im Dreieck unterhalb der $(h + m - 1)$-ten Zeile, und damit ist $\beta$) für die $l$-Entwicklung bewiesen.

Selten füllt hierbei $\mathfrak{G}$ das ganze Rechteck aus, da die $l^h$-ten Elementepotenzen einer Gruppe im allgemeinen keine Untergruppe bilden.

Es wäre überhaupt interessant zu wissen, welche Schnitte durch das Schema (27) eine Gruppe liefern und eine Körperkonstruktionsfolge. Jedenfalls müssen mit einem Basisvertreter auch die rechts und links darunterstehenden Vertreter $\neq 1$ ausfallen, und jedenfalls liefert ein beliebiger Schnitt durch die $r$-te Schicht (Zeile) eine Gruppe $\mathfrak{H}$, die zwischen $\mathfrak{H}^{r-1} \prec \mathfrak{H} \prec \mathfrak{H}^r$ eingebettet ist. $\mathfrak{H}$ darf man dann zwar nicht nach Potenzen (⫽), wohl aber nach der 0-Entwicklung (⧵) aufschneiden und erhält so brauchbare Konstruktionsfolgen. Z. B. kann man so eine Konstruktion liefern, in der die Erzeugenden eine vorgegebene Ordnung $l$ haben, ebenfalls deren Kommutatoren, während von der nächsten 0-Dimension ab die Ordnung der Basiselemente jedesmal einen Faktor $l$ verliert und schließlich $\mathfrak{F}^{m+2} = 1$ ist. Ein solches Konstruktionsschema hat den Vorteil, daß für jedes neue $S_{\varkappa \ldots \nu}$, das ja möglicherweise als Trägheitssubstitution herangezogen werden muß, die Ordnung, die es in $\mathfrak{H}$ erreicht, von vornherein festliegt, und daß man leicht abzählen kann, wie weit hinauf die einzelnen an den Stellen $S^{l^h}_{\varkappa \ldots \nu}$ verzweigten Primideale innerhalb des Schemas von $\mathfrak{H}$ voll zerfallen müssen. Die bei einer Erzeugenden $S_\nu$ Verzweigten müssen z. B. außerhalb des Zentrums (der obersten Schicht) von $\mathfrak{H}$ voll zerfallen.

8. In Frage steht noch die Magnussche Vermutung: ob $\mathfrak{G}^m$ jedesmal die *maximale zentrale Aufspaltung* von $\mathfrak{G}^{m-1}$ sei, ob also die $\mathfrak{F}^m$ die Reidemeistersche Kommutatorreihe [16]), die absteigende Zentralreihe in der Bezeichnung von Hall [17]) sei. (Daß $\mathfrak{C}^m$ das Zentrum von $\mathfrak{G}^m$ ist, besagt lediglich, daß $\mathfrak{C}^m \frown \mathfrak{C}^{m-1} \frown \ldots \frown \mathfrak{C}^1$ (in aufsteigender Aneinanderreihung) eine aufsteigende Zentralreihe ist wie ja auch $\mathfrak{A}^m \frown \mathfrak{A}^{m-1} \frown \ldots \frown \mathfrak{A}^1$,

---

[16]) K. Reidemeister, Über unendliche diskrete Gruppen, Hamburger Abh. 5 (1927), S. 33–39.

[17]) P. Hall, Proc. L. M. S. 36 (1933), S. 29–95.

obwohl die $\mathfrak{H}^m$ bestimmt nicht die absteigende Zentralreihe liefern.) Für die Magnussche Vermutung spricht entschieden sein Satz III in [14]). Man kann daraus in Verbindung mit Satz IX entnehmen, worauf mich Magnus auch brieflich hinwies, daß die Reidemeisterschen $\mathfrak{C}_m$ dort, wo sie Faktoren höherer als $m$-ter Dimension schluckten, nicht mehr wie die $\mathfrak{C}^m$ freie Abelsche Gruppen sein könnten. Bestätigt sich hingegen die Magnussche Vermutung, so liefert die in 7. gegebene $l$-Entwicklung gleichzeitig die *maximal zentralen Aufspaltungsschritte vom Exponenten* $l$, wie aus $\lambda(A^l) = \lambda(A) + 1$ folgt. Diese Entwicklung liegt etwa dem Wittschen Konstruktionsplan zugrunde.

Bezeichnet man in der maximal-zentralen 0- und $l$-Entwicklung die Gruppen entsprechend mit unteren Indizes, so wird $\mathfrak{C}_m$ durch die Kommutatoren $(A_\varrho, S_\nu)$ erzeugt, wenn $A_\varrho$ eine Basis für $\mathfrak{C}_{m-1}$ bildet. Bei Übereinstimmung der Entwicklungen $\mathfrak{F}^m$ und $\mathfrak{F}_m$ würde dann das Basisschema (27) folgende Bedeutung erhalten: Wenn man jetzt

$$S_{\varkappa\lambda\ldots\nu} = (S_{\lambda\ldots\nu}, S_\varkappa) \tag{28}$$

setzt und jedesmal in die Basis Kommutatoren $S_{\varkappa\lambda\ldots\nu}$ wählt und in deren Auswahl lexikographisch vorgeht, was innerhalb der zweiten Ableitung $\mathfrak{F}''$ von $\mathfrak{F}$ eine Abänderung der Basis von 7. bewirkt, so stehen jetzt in der $m$-ten Zeile von $\mathfrak{H}_m = \mathfrak{F}/\mathfrak{S}_{m+1}$, der Basis von $\mathfrak{A}_m$, außer am linken Ende in (27) lauter Kommutatoren der links darunter stehenden Basiselemente mit den Erzeugenden; denn innerhalb $\mathfrak{H}_m$ gilt $(A, S)^l = (A^l, S)$, wenn $A$ noch der $(m-2)$-ten Schicht angehört. Die Anzahl der Basiselemente ist jeweils die Maximalzahl der symbolisch unabhängigen Elemente von $\mathfrak{S}_m$ und für den Fall $\mathfrak{F}_m = \mathfrak{F}^m$ gleich der Elementezahl der fortlaufenden Basis von $\mathfrak{G}_m$.

Im Falle $\mathfrak{F}^m \neq \mathfrak{F}_m$ gäbe es hingegen für wenigstens ein $l$ und ein $m$ Elemente $Q$ der Eigenschaft $Q \nless \mathfrak{F}_m$; $Q^l < \mathfrak{F}_m$, und dann entstünden für gewisse Faktoren $\mathfrak{A}_r$ der $l$-Entwicklung auch Einmündungsaufgaben bei der Körperkonstruktion, die bei der Entwicklung in 7. nicht auftraten. Dafür böte der Aufbau nach maximal-zentralen Schritten den Vorteil, daß man jedes neu gewonnene $C = (A, S)$ als Kommutator eines zuletzt gewonnenen $A$ mit einer Erzeugenden darstellen und verhältnismäßig einfache Relativdurchkreuzungen, die bei Kummerschen Körpererweiterungen nötig werden, zur Fortsetzung der Konstruktion vornehmen kann. Ein abgerundetes kanonisches Lösungsverfahren hätte man erst bei Übereinstimmung der Entwicklungen $\mathfrak{F}^m$ und $\mathfrak{F}_m$.

9. Der zweistufige Teil $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}''$, insbesondere der Kommutator $\mathfrak{F}'/\mathfrak{F}''$, hat eine Basis von Elementen $S_{\mu_1\ldots\mu_r}$ mit

$$\mu_1 \leqq \mu_2 \leqq \cdots \leqq \mu_{k-1} < \mu_{k+1} \leqq \cdots \leqq \mu_r \leqq \mu_k \tag{29}$$

für irgend ein $k > 1$. Nämlich die Kommutatorgruppe der „freien zweistufigen Gruppe“ ist eine freie Abelsche Gruppe $\mathfrak{F}'/\mathfrak{F}'' = \{S_{\varkappa\lambda}\}_{\mathfrak{S}}$; $1 \leqq \varkappa < \lambda \leqq n$, mit freier Abelscher Operatorengruppe $\mathfrak{S} = \{S_1, \ldots, S_n\}$ und den Operatorrelationen [18], [19])

$$(30) \qquad S_{\varkappa\lambda}^{\Delta_\mu \Delta_\nu} = S_{\varkappa\lambda}^{\Delta_\nu \Delta_\mu}; \quad S_{\lambda\mu}^{\Delta_\varkappa} S_{\mu\varkappa}^{\Delta_\lambda} S_{\varkappa\lambda}^{\Delta_\mu} = 1.$$

Auf Grund dessen und wegen $S_{\lambda\varkappa} = S_{\varkappa\lambda}^{-1}$ läßt sich ein beliebiger Kommutator in der Form

$$(31) \quad S_{\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_r} = (S_{\varkappa_2 \ldots \varkappa_r}, S_{\varkappa_1}) = \Pi\, S_{\varkappa_v \varkappa_w}^{\pm \Pi \Delta_{\varkappa_\varrho}} \qquad (\varrho \neq v, w;\, \varkappa_\varrho \leqq \varkappa_w)$$

wie in [2]) Kap. II eindeutig darstellen. Man ordne nun die $\Delta_{\varkappa_\varrho}$ im Exponenten eines $S_{\varkappa_v \varkappa_w}$ nach der Größe der $\varkappa$ und ordne $\varkappa_v$ unter die $\varkappa_\varrho$ ein. Die $\varkappa_\varrho \leqq \varkappa_v$ mögen aufsteigend $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{k-2}$, heißen, wodurch $k$ festliegt; ferner sei $\varkappa_v = \mu_{k-1}$, und die $\varkappa_\varrho > \varkappa_v$ sollen aufsteigend $\mu_{k+1}, \ldots, \mu_r$, schließlich $\varkappa_w = \mu_k$ heißen. Dann hat

$$(32) \qquad S^{(r)} = S_{\varkappa_v \varkappa_w}^{\Pi \Delta_{\varkappa_\varrho}} = S_{\mu_{k-1} \mu_k}^{\Pi \Delta_{\mu_\varrho}} \qquad (\varrho \neq k-1, k)$$

tatsächlich das Leitglied $\pm \Delta_{\mu_1} \Delta_{\mu_2} \ldots \Delta_{\mu_r}$; denn $S^{(r)}$ entsteht aus

$$S_{\varkappa_v \varkappa_w} \equiv 1 - \Delta_{\varkappa_v} \Delta_{\varkappa_w} + \Delta_{\varkappa_w} \Delta_{\varkappa_v} \bmod \mathfrak{D}^3$$

durch Kommutatorbildung nacheinander mit allen $\Delta_{\varkappa_\varrho}$, und jedesmal ist unter Einsetzen von (24) das Leitglied zu ermitteln. Umgekehrt kommt $\Delta_{\mu_1} \ldots \Delta_{\mu_r}$ als Leitglied nur bei dem einen $S^{(r)}$ der Gestalt (32) vor; denn die Stelle $k$ ist dadurch ausgezeichnet, daß $\mu_k > \mu_\varrho$ für $\varrho < k$ und $\geqq \mu_\varrho$ für $\varrho > k$, und bestimmt die Darstellung (32). Infolge Eindeutigkeit der Darstellung (31) bilden aber die $S^{(r)}$ in (32) eine Basis für $\mathfrak{C}_r$. Diese hat also linear unabhängige Glieder der Dimension $r$, und daher ist

$$(33) \qquad \mathfrak{F}_r\, \mathfrak{F}''/\mathfrak{F}_{r+1}\, \mathfrak{F}'' = \mathfrak{F}^r\, \mathfrak{F}''/\mathfrak{F}^{r+1}\, \mathfrak{F}'',$$

d. h. die Magnussche Vermutung ist innerhalb $\mathfrak{F}/\mathfrak{F}''$ richtig.

Für $n = 2$ entsteht bei Ordnungsbeschränkung $S_1^{l^{h_1}} = S_2^{l^{h_2}} = S_{12}^{l^k} = 1$ die Zweiggruppe [2]) vom Typ $(l^{h_1}, l^{h_2}; l^k)$, für die ich in [3]) eine Körperkonstruktion lieferte, bei der ich den Kommutator, also alle Dimensionen von der zweiten an, in einem Schritt nahm. Es zeigte sich schon dort, daß im Abelschen Teilkörper die Zerfallsbedingungen für die Vollendung der Konstruktion dieselben waren wie überhaupt zur Bildung der zweiten Dimension, wenn nur der Grundkörper nicht die $l$-ten Einheitswurzeln

---

[18]) Vgl. Ph. Furtwängler, Beweis des Hauptidealsatzes. Hamburger Abh. 7 (1929), S. 14–36; Formel (7) und (10) auf S. 22. Diese Bedingungen sind nach [19]) auch hinreichend für die Bildbarkeit einer zweistufigen Gruppe, also (10) allein für die freie zweistufige Gruppe.

[19]) O. Schreier, Erweiterung von Gruppen II, Hamburger Abh. 4 (1926), S. 322.

enthielt. Und dies stimmt damit überein, daß man den ganzen Zweigkörper von Schicht zu Schicht konstruieren und dabei wie in 4. jede in zyklische Bestandteile zerlegbare Schicht so wählen kann, daß auch die nächste Schicht noch konstruierbar ist.

Im Falle $l = 2$ (oder $\zeta_l < K_0$) lagen dagegen schon bei Zweigkörpern bisweilen höhere Zerfallsbedingungen vor, und das äußert sich im allgemeinen Fall beim Fortschreiten in zentralen Schritten so, daß infolge des quadratischen Reziprozitätsgesetzes die Potenzrestbedingungen in 4. nicht voneinander unabhängig sind und sich daher die Durchkreuzung der letztgewonnenen Schicht nicht immer so vornehmen läßt, daß noch die nächste Schicht konstruierbar ist. Es muß hierfür zumindest in der vorletztgewonnenen Schicht durch eine passende Durchkreuzung Vorsorge getroffen werden. Dies bleibt also für $l = 2$ noch übrig, um überhaupt zu jeder $l$-Gruppe bei gegebenem Grundkörper eine Körperkonstruktion zu erhalten.

(Eingegangen am 4. und 27. Mai 1936.)