Werk

Titel: Abschnittsverhalten bei trigonometrischen, und insbesondere Fourierschein Reihen

Autor: Rogosinski, W.

Ort: Berlin

Jahr: 1936

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0041|log9

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Abschnittsverhalten bei trigonometrischen und insbesondere Fourierschen Reihen.

Von

Werner Rogosinski in Königsberg.

Es handelt sich in dieser Arbeit um trigonometrische Reihen

$$T(x) \equiv \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(x) \tag{1}$$

und deren konjugierte Reihen

$$\overline{T}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k \cos kx - \alpha_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k(x). \tag{$\overline{1}$}$$

Und zwar werden die Abschnitte dieser Reihen an solchen Stellen $x = \xi$ untersucht, wo eine der beiden Reihen oder auch beide von einer gewissen Ordnung Cesàro-summierbar sind. Dabei interessiert uns in erster Linie das Verhalten dieser Abschnitte als Kurven, so daß wir sie und ihre Ableitungen nicht nur in ξ, sondern auch „um ξ", d. i. in genügend kleinen Umgebungen von ξ, zu betrachten haben.

Die folgenden Untersuchungen beruhen im wesentlichen auf einem einfachen und allgemeinen reihentheoretischen Satze über lineare Mittelbildungen der Form

$$\gamma_m = \sum_{k=0}^{m} c_k \varphi(k P_m), \tag{2}$$

wobei $\varphi(P)$ eine gewisse, einfachen Differenzierbarkeitsbedingungen genügende Funktion des n-dimensionalen Punktes $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ist und die P_m eine Nullfolge durchlaufen; im allgemeinen wird noch die Konvergenzgeschwindigkeit $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ zu verlangen sein.

Wir formulieren hier diesen Satz für den Fall, daß die Reihe $\sum_0^{\infty} c_k$ (C, 1)-summierbar ist[1]):

Satz Ib: *$\varphi(P)$ sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$. Ist dann die $\sum_0^{\infty} c_k$ (C, 1)-summierbar zum Werte s, so gilt mit $m \to \infty$ die Relation*

$$\gamma_m - (s_m - s)\, \varphi(m P_m) \to s \cdot \varphi(0). \tag{3b}$$

[1]) Der zu den „Abschnittskoppelungen" führende Spezialfall $\varphi(P) = \cos x$, $x_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ dieses Satzes wurde zuerst von Fejér ausgesprochen; vgl. Rogosinski 1, S. 119; 4, S. 106; Zygmund, S. 181. — *Die Nummern hinter den zitierten Arbeiten beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.*

Hier ist $s_m = \sum_0^m c_k$ gesetzt. *Man sieht, daß insbesondere diejenigen Folgen* (P_m), *für die* $m P_m$ *eine Nullstelle von* $\varphi(P)$ *ist, zu Summierungsverfahren Anlaß geben, die mindestens so stark wie das* (C, 1)-*Verfahren sind*[2]).

Im § 1 dieser Arbeit wird der allgemeine Satz (Satz I) formuliert, der sich auf die Voraussetzung der $(C, \varkappa)$-Summierbarkeit der $\sum_0^\infty c_k$ bezieht. ($\varkappa \geqq 0$, ganz). Genauer wird noch untersucht, wann P_m eine beliebige Nullfolge durchlaufen darf, und schließlich wird auch kurz auf die zugehörigen „unverkürzten" Mittelbildungen

$$\Gamma_m = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi(k P_m) \tag{4}$$

eingegangen. Der Inhalt dieses Paragraphen ist durchaus reihentheoretischer Natur und benutzt im wesentlichen nur das Hilfsmittel der Abelschen partiellen Summierung und den Toeplitzschen Satz über lineare Mittelbildungen[27]).

Im § 2 werden die allgemeinen Sätze auf die trigonometrische Reihe (1) angewandt, indem $c_k = \alpha_k(\xi)$ gesetzt und die Funktion $\varphi(P)$ geeignet spezialisiert wird. Dabei lassen wir uns von dem Gesichtspunkte leiten, möglichst einfache, das Abschnittsverhalten anschaulich wiedergebende Ergebnisse zu erzielen. Eine ganze Anzahl so gewonnener Formeln werden in diesem Paragraphen kurz zusammengestellt.

Wir geben hier zur Illustration einige von ihnen wieder, *die sämtlich unter der Voraussetzung der* (C, 1)-*Summierbarkeit von* $T(\xi)$ *zum Werte* A *gelten.* Es sei noch bemerkt, daß *diese Formeln, mit* $A = A(\xi)$, *gleichmäßig in jeder Menge gelten, in der* $T(\xi)$ *gleichmäßig gegen* $A(\xi)$ (C, 1)-*summierbar ist:*

Die Formel

$$s_m(\xi) + (-1)^{r-1} \frac{s_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to A(\xi), \qquad r \geqq 1 \text{ ganz}, \tag{5b}$$

gibt ein eigenartiges Summierungsverfahren, bei dem der Konvergenzdefekt des m-ten Abschnitts $s_m(\xi)$ durch eine seiner Ableitungen gerader Ordnung ausgeglichen wird. *In einem Intervall gleichmäßiger* (C, 1)-*Summierbarkeit von* $T(\xi)$ *wird also die Abschnittskurve z. B. an ihren Wendestellen* ($s_m''(\xi) = 0$) *die zugehörige Summenfunktion gut approximieren.*

Die Formeln

$$\frac{s_m\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right)}{2} \to A(\xi), \qquad u \text{ ungerade}, \tag{6b}[3])$$

[2]) Äquivalenzfragen für gewisse solche Mittelbildungen γ_m sind behandelt in Rogosinski 2; vgl. auch Rogosinski 1, S. 120.

[3]) Rogosinski 1, S. 120; 4, S. 106; Zygmund, S. 182.

und

$$\text{(7 b)} \qquad \frac{m}{2k\pi}\int_{\xi-\frac{k\pi}{m}}^{\xi+\frac{k\pi}{m}} s_m(x)\,dx \to A(\xi), \qquad k > 0 \text{ ganz},$$

geben weitere einfache Summierungsverfahren. *Sie zeigen, daß eine trigonometrische Reihe, in einem Intervall gleichmäßiger* (C, 1)*-Summierbarkeit, in ihren m-ten Abschnitten* $s_m(\xi)$ *für große m ein schwingungsartiges Verhalten um die Summenfunktion* $A(\xi)$ *als Mittellage aufweist, wobei* $\frac{2\pi}{m}$*, also die Periode des letzten Gliedes* $\alpha_m(\xi)$*, die Periode dieser „Schwingung" ist.*

Die Formeln

$$\text{(8 b)} \quad (-1)^{k+r-1}\frac{s_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)+s_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2m^{2r}}+s_m(\xi)\to A(\xi);$$

$$\frac{s_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)+s_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r}}\to 0$$

und

$$\text{(9 b)} \quad (-1)^{\frac{u+1}{2}+r}\frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)-s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r-1}}+s_m(\xi)\to A(\xi);$$

$$\frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{m^{2r-1}}\to 0$$

zeigen eine analoge Schwingungserscheinung der geraden Ableitungen $\frac{s_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}}$ um 0 als Mittellage, bzw. eine „ungefähre" Periodizität der Periode $\frac{2\pi}{m}$ bei den ungeraden Ableitungen $\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}}$.

Der § 3 bringt analoge Anwendungen auf die konjugierte Reihe $(\overline{1})$, indem $c_k = \beta_k(\xi)$ gesetzt wird. So gelten z. B. die folgenden Formeln unter der Voraussetzung der (C, 1)-Summierbarkeit von $\overline{T}(\xi)$ zum Werte $\bar{A}(\xi)$, und zwar gleichmäßig in jeder Menge gleichmäßiger (C, 1)-Summierbarkeit: Die Formel

$$\text{(}\overline{5\text{ b}}\text{)}^{4}) \qquad \bar{s}_m(\xi)+(-1)^r\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}}\to\bar{A}(\xi), \qquad r\geqq 1 \text{ ganz},$$

das Gegenstück zu (5 b), zeigt die ungeraden Abschnittsableitungen in Verbindung mit den Abschnitten $\bar{s}_m(\xi)$ der konjugierten Reihe. Vertauscht man beide Reihen, so sieht man z. B., *daß in den Intervallen gleichmäßiger*

---

[4]) Man beachte, daß für $r=1$ das m-te (C, 1)-Mittel $\bar{\sigma}_m(\xi)=\sum_1^m \beta_k(\xi)\left(1-\frac{k}{m+1}\right)$ $\equiv \bar{s}_m(\xi)-\frac{s_m'(\xi)}{m+1}$ ist.

(C, 1)-*Summierbarkeit von* $T(\xi)$, *die Abschnittskurve an den Extremstellen des konjugierten Abschnittes* ($\bar{s}'_m(\xi) = 0$) *die Summenfunktion gut approximiert.*

Die Formeln

$$\overline{(8\,b)}^{5}) \quad (-1)^{\frac{u-1}{2}+r} \frac{s_m^{(2(r-1))}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)-s_m^{(2(r-1))}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2(r-1)}} + \bar{s}_m(\xi) \to A(\xi);$$

$$\frac{s_m^{(2(r-1))}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-s_m^{(2(r-1))}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{m^{2(r-1)}} \to 0$$

und

$$\overline{(9\,b)} \qquad (-1)^{k+r} \frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2m^{2r-1}} + \bar{s}_m(\xi) \to \bar{A}(\xi);$$

$$\frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r-1}} \to 0$$

sind die Gegenstücke zu (6 b) und (8 b) bzw. (9 b) und lassen eine entsprechende Interpretation zu. Die Kombination beider Formelgruppen zeigt, daß das Abschnittsverhalten besonders einfach wird, wenn beide Reihen, (1) und $(\overline{1})$, gleichzeitig (C, 1)-summierbar sind.

Im § 4 werden die Ergebnisse des § 2 unter der Zusatzvoraussetzung diskutiert, daß die Reihe (1) die Fourierreihe einer Lebesgue-integrierbaren Funktion $f(x)$ der Periode 2π ist. Für diese wird an der Stelle ξ zumeist eine der drei Voraussetzungen

(10) (a) $s_m(\xi) \to A$; (b) $\sigma_m(\xi) \to A$; (c) $\tau_m(\xi) \to A$

gemacht. Hier bedeutet $s_m(\xi)$, $\sigma_m(\xi)$ bzw. $\tau_m(\xi)$ den m-ten Abschnitt, das m-te Cesàrosche Mittel erster bzw. zweiter Ordnung von $T(\xi)$. Auf höhere Cesàromittel gehen wir im allgemeinen nicht ein.

Für die Voraussetzung (10 a) gibt die Theorie der Fourierschen Reihen verschiedenartige hinreichende Eigenschaften von $f(x)$ „um ξ" an[6]). An Stetigkeits- und allgemeiner „gewöhnlichen" Sprungstellen von $f(x)$ (Existenz von $f(\xi+0)$ und $f(\xi-0)$) braucht die Fourierreihe nicht zu konvergieren, wohl gilt dort aber nach Fejér[7]) die Voraussetzung (10 b) mit $A = \frac{f(\xi+0)+f(\xi-0)}{2}$. Nach Lebesgue[8]) gilt (10 b) allgemeiner an allen den Stellen ξ, wo

$$(11\,b) \quad \frac{1}{t}\int_0^t |\varphi(\tau)-A|\,d\tau \to 0,\ t \to 0; \quad \varphi(t) = \varphi_\xi(t) = \frac{f(\xi+t)+f(\xi-t)}{2}$$

[5]) Man beachte den Fall $r = 1$; vgl. Rogosinski **1**, S. 122.

[6]) Vgl. am besten Zygmund, Kap. II.

[7]) Fejér 1; Zygmund S. 45.

[8]) Lebesgue; Zygmund, S. 49; die Reihe ist dann sogar für jedes $r > 0$ (C,r)-summierbar.

ist. Diese Bedingung ist für „*fast alle* ξ" (*sogar mit* $A = f(\xi)$) erfüllt[9]). *Das Gleiche gilt also bei Fourierreihen für die aus* (10b) *folgenden Formeln des* § 2. Die Voraussetzung (10c) ist an denjenigen Stellen ξ erfüllt, wo

$$\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau \to A, \quad t \to 0, \tag{11c}$$

gilt[10]).

In jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall von $f(x)$ ist die Fourierreihe gleichmäßig zum Werte $f(x)$ (C, 1)-summierbar[11]), so daß dort die eben genannten Schwingungserscheinungen der Abschnitte auftreten. (Vgl. auch § 6).

Im wesentlichen kommt bei Fourierreihen zu den allgemeinen Formeln aus § 2 über trigonometrische Reihen nur insofern etwas Neues hinzu, als die Tatsache, daß die Fourierkoeffizienten eine Nullfolge bilden[12]), und daß z. B. an den Stellen (11b), also fast überall, die Abschätzung $s_m(\xi) = o(\log m)$ gilt[13]), gewisse Verschärfungen zuläßt.

Ganz anders steht es dagegen bei der Behandlung der zur Fourierreihe von $f(x)$ konjugierten trigonometrischen Reihe, die wir im § 5 untersuchen. In der Tat ist bei dieser Reihe, die ja bekanntlich z. B. an gewöhnlichen Sprungstellen eigentlich divergiert[14]), die Voraussetzung der Konvergenz oder einer Cesàrosummierbarkeit (selbst an Stetigkeitsstellen) nicht zweckvoll. Daher sind die allgemeinen Formeln des § 3 nicht ohne weiteres anwendbar.

Bedeutet $\bar{s}_m(\xi)$, $\bar{\sigma}_m(\xi)$ bzw. $\bar{\tau}_m(\xi)$ den m-ten Abschnitt, das m-te Cesàrosche Mittel erster bzw. zweiter Ordnung der konjugierten Reihe $\overline{T}(\xi)$, und wird

$$\psi_m = \psi_m(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{1/m}^{\pi} \psi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt; \quad \psi(t) = \psi_\xi(t) = f(\xi + t) - f(\xi - t) \tag{12}$$

gesetzt, so sind jetzt vielmehr die Voraussetzungen

$$\text{(a) } \bar{s}_m^*(\xi) = \bar{s}_m(\xi) - \psi_m \to \bar{A}; \quad \text{(b) } \bar{\sigma}_m^*(\xi) = \bar{\sigma}_m(\xi) - \psi_m \to \bar{A}; \quad \text{(c) } \bar{\tau}_m^*(\xi) = \bar{\tau}_m(\xi) - \psi_m \to \bar{A} \tag{13}$$

die sinnvollen Gegenstücke zu den Annahmen von (10).

---

[9]) Lebesgue; Zygmund, S. 30.

[10]) Lebesgue; Zygmund, S. 56; Die Reihe ist dort sogar für jedes $r > 1$ (C, r)-summierbar.

[11]) Fejér 1; Zygmund, S. 45.

[12]) Vgl. Zygmund, S. 18.

[13]) Hardy 2; Zygmund, S. 32.

[14]) Pringsheim; Zygmund, S. 28.

Für die Voraussetzung $\overline{(13\,a)}$ gibt die „Konvergenztheorie" der konjugierten „Fourierreihe"[15]) verschiedene hinreichende Eigenschaften von $f(x)$ um ξ an. $\overline{(13\,b)}$ ist an denjenigen Stellen ξ erfüllt[16]), wo

$$\overline{(14\,b)} \qquad \frac{1}{t}\int_0^t |\psi(\tau) - D|\, d\tau, \quad t \to +0$$

gilt. Das ist wieder (*sogar mit* $D = 0$) *für fast alle* ξ der Fall[16]). $\overline{(13\,c)}$ ist erfüllt, wenn wenigstens

$$\overline{(14\,c)} \qquad \frac{1}{t}\int_0^t \psi(\tau)\, d\tau \to D, \qquad t \to +0$$

gilt[17]). An den Stetigkeitsstellen ist $\overline{(14\,b)}$ mit $D = 0$, an den gewöhnlichen Sprungstellen mit $D = f(\xi + 0) - f(\xi - 0)$ erfüllt. *Wir wollen allgemeiner alle Stellen* $\overline{(14\,c)}$ *„Sprungstellen" und* D *den „Sprung" daselbst nennen, auch wenn* $D = 0$ *(Verallgemeinerung der Stetigkeit) ist.* An solchen Sprungstellen ist in $\overline{(13)}$, entsprechend den drei Fällen,

$\overline{(15)}$[18]) (a) $\bar{A} = \frac{D}{\pi} C$; (b) $\bar{A} = \frac{D}{\pi}(C - 1)$; (c) $\bar{A} = \frac{D}{\pi}\left(C - \frac{3}{2}\right)$

zu setzen, wobei C die Eulersche Konstante bedeutet. In einem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall von $f(x)$ gilt $\overline{(13\,b)}$ mit $\bar{A} = 0$ gleichmäßig.

Wir beweisen nun an diesen Sprungstellen ein dem allgemeinen Reihensatze aus § 1 ähnliches Theorem. So entspricht dem oben formulierten Satze I b der

Satz IVb: *$\varphi(P)$ sei eine zweimal stetig differenzierbare Funktion und* $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$. Wird dann

$$(16) \qquad G_m = \sum_1^m \frac{1}{u}\varphi(u P_m), \qquad u \text{ ungerade},$$

---

[15]) Vgl. am besten Zygmund, Kap. II. Aus $\overline{(13\,a)}$ folgt die Konvergenz der konjugierten Reihe genau dann, wenn die „konjugierte Funktion" $\bar{f}(\xi) = \lim_{\eta \to 0} \frac{1}{2\pi}\int_\eta^\pi \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt$ existiert. $\bar{f}(\xi)$ existiert übrigens fast überall, braucht aber weder L-integrierbar zu sein, noch braucht $\bar{T}(\xi)$ eine Fourierreihe zu sein. (Vgl. Zygmund, Kap. VII.)

[16]) Plessner 1; Zygmund, S. 49.

[17]) Plessner 2, S. 1346; Zygmund, S. 56. Der dort gegebene Beweis für $1 < \alpha < 2$ läßt sich leicht auf $\alpha = 2$ ausdehnen!

[18]) Vgl. etwa Plessner 2, S. 1341, Formel (7); wegen der Bestimmung von $\bar{A}$ siehe auch § 5, 5 und 6, Fußnote [66]), dieser Arbeit.

gesetzt, so gilt an den Stellen $\overline{(14\,\mathrm{b})}$, *also fast überall, die Relation*

$$\overline{(17\,\mathrm{b})}\quad \left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right)\varphi(0) - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}C\right)\varphi(m P_m) \to 0,$$

wobei C *die Eulersche Konstante bezeichnet.*

Man beachte, daß G_m die zur konjugierten Reihe der speziellen Fourierentwicklung[19])

$$(18)\qquad \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\sin u\,x}{u} = (\operatorname{sign} x)\cdot\frac{\pi}{4}, \qquad |x| < \pi,$$

in $x = 0$ gehörige Mittelbildung γ_m ist.

Insbesondere folgt also, wenn $\varphi(0) = 0$ *und* $\varphi(m P_m)$ *eine Nullstelle von* $\varphi(P)$ *ist, aus der dann gültigen Relation*

$$\overline{(17\,\mathrm{b}^*)}\qquad \gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m \to 0,$$

daß für diese Mittelbildungen an allen Stellen $\overline{(14\,\mathrm{b})}$ *das Verhalten der speziellen Reihe* (18) *charakteristisch ist.*

Zieht man noch die an den Stellen $\overline{(14\,\mathrm{b})}$ gültige Abschätzung $s_m^*(\xi) = o(\log m)$[20]) heran, so ergibt sich weiter eine *sehr allgemeine Methode der „Sprungbestimmung“*:

Satz Vb: *Unter den Voraussetzungen von Satz* IVb *gilt die Relation*

$$\overline{(19\,\mathrm{b})}\qquad \frac{\gamma_m}{\log m} \to \frac{D}{\pi}\varphi(0).$$

Durch Spezialisierung der Funktion $\varphi(P)$ ergeben sich jetzt wieder eine ganze Reihe von Formeln, die das Abschnittsverhalten an Sprungstellen beleuchten, und insbesondere neben neuen auch wohl alle bisher bekannten Formeln zur „Sprungbestimmung“. Wir geben zur Illustration einige hier an, die sämtlich an den Stellen $\overline{(14\,\mathrm{b})}$, also fast überall (sogar mit $D = 0$) gültig sind:

$$\overline{(20\,\mathrm{b})}\qquad \frac{\bar{s}_m(\xi)}{\log m} \to \frac{D}{\pi}.$$

Diese elegante Formel stammt von Lukàcs[21]). Es gelten aber auch die Formeln

$$\overline{(21\,\mathrm{b})}\quad \frac{\bar{s}_m(\xi + h_m) + \bar{s}_m(\xi - h_m)}{2\log m} \to \frac{D}{\pi};\quad \frac{1}{2h_m \log m}\int_{\xi - h_m}^{\xi + h_m} \bar{s}_m(x)\,dx \to \frac{D}{\pi};\quad h_m = O\left(\frac{1}{m}\right).$$

[19]) Vgl. etwa Rogosinski 4, S. 31.

[20]) Young, Lukàcs; Zygmund S. 32.

[21]) Lukàcs, vgl. Zygmund, S. 28.

Die erstere gilt mit $h_m = \frac{u\pi}{2m}$, *die zweite mit* $h_m = \frac{k\pi}{m}$ *sogar an den Stellen* (14 c). *Ferner gelten die Formeln*

$$\overline{(22\,b)}\quad \begin{cases} \dfrac{s_m\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-s_m\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2} \to \dfrac{D}{\pi}\displaystyle\int_0^{k\pi}\frac{\sin t}{t}\,dt\ ^{22}), \\ \dfrac{s_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-s_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2m^{2r}} \to \dfrac{D}{\pi}\dfrac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\tau=k\pi}, \\ \dfrac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r-1}} \to \dfrac{D}{\pi}\dfrac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{u\pi}{2}}; \end{cases}$$

$$\overline{(23\,b)}\quad \begin{cases} \dfrac{\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r}} \to -\dfrac{D}{\pi}\cdot\dfrac{1}{2^{2r-1}}\dfrac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\dfrac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{u\pi}{4}}, \\ \dfrac{\bar{s}_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-\bar{s}_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2m^{2r-1}} \to -\dfrac{D}{\pi}\cdot\dfrac{1}{2^{2(r-1)}}\dfrac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\dfrac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{k\pi}{2}}; \end{cases}$$

$$\overline{(24\,b)}\quad \begin{cases} (-1)^r\ \dfrac{\bar{\sigma}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to \dfrac{D}{\pi\,2r\,(2r+1)}, \\ (-1)^{r-1}\dfrac{\sigma_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} \to \dfrac{D}{\pi\,2r\,(2r-1)}\ ^{23}). \end{cases}$$

An den Stellen $\overline{(14\,c)}$ gilt das Gegenstück zur Formel von Lukàcs

$$\overline{(20\,c)}\qquad \frac{\bar{\sigma}_m(\xi)}{\log m} \to \frac{D}{\pi},$$

während an denjenigen Sprungstellen, wo die „Konvergenz" (14 a) statthat, die Formeln

$$\overline{(24\,a)}\qquad (-1)^r\frac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to \frac{D}{\pi\cdot 2r};\quad (-1)^{r-1}\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} \to \frac{D}{\pi\,(2r-1)}\ ^{24})$$

gelten.

Der § 6 ist im wesentlichen der sogenannten Gibbsschen Erscheinung gewidmet. Es ist wohlbekannt, daß etwa für die spezielle Reihe (18) und jede Nullfolge (h_m) an ihrer Sprungstelle $\xi = 0$ mit $A = \frac{f(+0)+f(-0)}{2} = 0$, $D = f(+0) - f(-0) = \frac{\pi}{2}$, die Formel

$$(25)\qquad s_m(\xi + h_m) = A + \frac{D}{\pi}\int_0^{mh_m}\frac{\sin t}{t}\,dt + o(1)$$

---

[22]) Rogosinski 1, S. 134 [unter der Voraussetzung $\psi(t) \to D$].

[23]) Für $r = 1$ Szidon, Fejér 2, Jacob 2.

[24]) Für $r = 1$ Fejér 2, Czillag, Szidon.

gilt. Und hieraus folgt, daß die Abschnittskurven $y_m = s_m(x)$ auf der Geraden $x = \xi$ genau die „Gibbssche Strecke“

$$|y - A| \leqq \frac{D}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt \sim \frac{D}{2} \cdot 1{,}089\,490 \ldots \tag{26}$$

approximieren. Diese Strecke übertrifft die Sprungstrecke $|y - A| \leqq \frac{D}{2}$ um etwa 9 % beidendig[25]).

Wenn allgemeiner an einer Sprungstelle ξ die Formel (25), also auch die Gibbssche Erscheinung, gilt, so wollen wir sagen, daß die Fourierreihe in ξ das *„Gibbssche Verhalten“* zeigt. Es ist klar, daß das Gibbssche Verhalten jedenfalls an solchen Sprungstellen auftritt, „um“ die die Fourierreihe nach „Elimination des Sprunges“ gleichmäßig konvergent wird. Wenn die Formel (25) *wenigstens für Nullfolgen* $h_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ gilt, sprechen wir von *„Gibbsschen Verhalten im Nahen“*.

Um von den in den § 4 und 5 betrachteten „Abschnittskoppelungen“ auf „Abschnittsnäherungen“ wie in (25) zu kommen, muß man ersichtlich die Voraussetzungen (10) und ($\overline{13}$) für Fourierreihe und konjugierte Reihe kombinieren. Es handelt sich also um solche „Sprungstellen“, an denen

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(\xi + \tau)\, d\tau \to A_+; \quad \frac{1}{t} \int_0^t f(\xi - \tau)\, d\tau \to A_-, \quad t \to +0; \tag{27 c}$$

$$A = \frac{A_+ + A_-}{2}, \quad D = A_+ - A_-$$

existiert (was (10 c) und ($\overline{13\,c}$) sichert).

Es zeigt sich nun, *daß das Gibbssche Verhalten im Nahen dann und nur dann auftritt, wenn die Konvergenzbedingungen* (10 a) *und* ($\overline{13\,a}$) *gleichzeitig erfüllt sind.* Aus diesem Verhalten folgt insbesondere, daß an solchen Sprungstellen *die Abschnittskurven mindestens die Gibbssche Strecke approximieren*[26]). *Dieser letztere Schluß erweist sich aber bereits an den Stellen, wo* (10 c) *und* ($\overline{13\,b}$) *gleichzeitig gelten, als richtig.*

Eine feinere Diskussion des Abschnittsverhaltens zeigt ferner, daß *die oben geschilderten Oszillationserscheinungen der Abschnitte bereits „um“ Stetigkeitsstellen*[26]) *und allgemeiner um Stellen, wo*

$$\frac{1}{t} \int_{-t}^{t} |f(\xi + \tau) - A|\, d\tau \to 0 \tag{27 b*}$$

ist, auftreten. Sie sind also fast überall vorhanden. Endlich zeigen sich Schwingungserscheinungen ähnlicher Art bereits an Stellen, wo etwa nur die Existenz von $f(\xi + 0)$ vorausgesetzt ist.

[25]) Vgl. etwa Rogosinski **4**, S. 109; Zygmund, S. 179.

[26]) Rogosinski 1 und 4, S. 106 u. 112.

§ 1.

Ein Satz über lineare Mittelbildungen.

1. Gegeben sei formal eine Reihe $\sum_0^\infty c_k$, und wir betrachten lineare Mittelbildungen von der Form

$$\gamma_m = \sum_0^m c_k \varphi(k P_m). \tag{2}$$

Dabei ist $\varphi(P) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ eine für alle Punkte des n-dimensionalen Raumes erklärte Funktion und P_m durchläuft eine gegen den Nullpunkt 0 des Raumes konvergierende Punktfolge.

Die Untersuchung der γ_m beruht natürlich auf dem allgemeinen Toeplitzschen Satze über lineare Mittelbildungen[27]), von dem hier der folgende Teil benutzt wird:

Für die Matrix $\mathfrak{B} = (b_{m,k})$, $m, k = 0, 1, 2 \ldots$ *gelte*

$$\lim_{m \to 0} b_{m,k} = 0; \quad Z_m = \sum_{k=0}^\infty |b_{m,k}| \leqq Z. \tag{α}$$

Wird dann

$$t_m = \sum_{k=0}^\infty b_{m,k} s_k; \quad \mathfrak{Z}_m = \sum_{k=0}^\infty b_{m,k} \tag{β}$$

gesetzt, so folgt aus $s_k \to s$ *die Relation*

$$t_m - s\,\mathfrak{Z}_m \to 0. \tag{28}$$

Wir benötigen noch für später den folgenden einfachen Zusatz, den der übliche Beweis[27]) mitliefert:

Aus $|s_k - s| < \varepsilon$ *für* $k > K(\varepsilon)$ *folgt*

$$|t_m - s\,\mathfrak{Z}_m| < 2\,\varepsilon Z \tag{28*}$$

für $m > M(\varepsilon)$. *Sind insbesondere die* $s_k = s_k(x)$ *gleichmäßig in einer* x*-Menge* $\mathfrak{M}$ *gegen* $s = s(x)$ *konvergent, so gilt auch* (28) *gleichmäßig in* $\mathfrak{M}$.

2. Die m-ten Cesàroschen Mittel $\varkappa$-ter Ordnung ($\varkappa \geqq$ ganz) der Reihe $\sum_0^\infty c_k$ sind durch

$$\mu_m^{(\varkappa)} = \frac{S_m^{(\varkappa)}}{\binom{m+\varkappa}{\varkappa}}; \quad S_m^{(\varkappa)} = \sum_{k=0}^m S_k^{(\varkappa-1)}; \quad S_m^{(-1)} = c_m \tag{29}$$

erklärt; wir bezeichnen noch speziell

$$\mu_m^{(0)} = s_m = \sum_0^m c_k; \quad \mu_m^{(1)} = \sigma_m = \sum_0^m c_k \Big(1 - \frac{k}{m+1}\Big); \quad \mu_m^{(2)} = \tau_m. \tag{29*}$$

[27]) Toeplitz; vgl. Knopp, S. 403; Rogosinski 4, S. 86.

Ferner sei das Differenzschema von $\varphi(k P_m)$ durch

$$\Delta^{(i)}_{m,k} = \Delta^{(i-1)}_{m,k} - \Delta^{(i-1)}_{m,k+1}; \quad \Delta^{(0)}_{m,k} = \varphi(k P_m); \quad i \geqq 1 \tag{30}$$

bezeichnet. Dann gilt der folgende Satz:

Satz I: *Es sei* $\varkappa \geqq 0$ *ganz, die Funktion* $\varphi(P)$ *sei* $(\varkappa+1)$*-mal stetig differenzierbar und* $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$[28].

Aus $\mu^{(\varkappa)}_m \to s$ *folgt dann*

$$\gamma_m - \sum_{i=0}^{\varkappa-1} \binom{m}{i} (\mu^{(i)}_{m-i} - s)\, \Delta^{(i)}_{m,m-i} \to s \cdot \varphi(0). \tag{3}$$

Es genügt, den Beweis etwa für $\varkappa = 2$ und $n = 2$ zu führen. Zweimalige partielle Summierung ergibt

$$\begin{gathered} \gamma_m - s_m \varphi(m P_m) = \sum_0^{m-1} s_k \Delta^{(1)}_{m,k}; \\ \gamma_m - s_m \varphi(m P_m) - S^{(1)}_{m-1} \Delta^{(1)}_{m,m-1} = \sum_0^{m-2} S^{(1)}_k \Delta^{(2)}_{m,k}. \end{gathered} \tag{α}$$

Und nach nochmaliger partieller Summierung ist

$$t_m = \gamma_m - s_m \varphi(m P_m) - m \sigma_{m-1} \Delta^{(1)}_{m,m-1} \tag{β}$$

$$= \sum_0^{m-3} S^{(2)}_k \Delta^{(3)}_{m,k} + S^{(2)}_{m-2} \Delta^{(2)}_{m,m-2} = \sum_0^{m-3} \tau_k \binom{k+2}{2} \Delta^{(3)}_{m,k} + \tau_{m-2} \binom{m}{2} \Delta^{(2)}_{m,m-2}$$

eine lineare Mittelbildung aus den τ_k.

Nun ist nach dem Mittelwertsatze[29]

$$\begin{aligned} \Delta^{(1)}_{m,k} &= \varphi(k x_m, k y_m) - \varphi((k+1) x_m, (k+1) y_m) \\ &= -(x_m \varphi_x + y_m \varphi_y)_{\vartheta_k x_m, \vartheta_k y_m}; \quad k < \vartheta_k < k+1 \end{aligned} \tag{γ}$$

und allgemeiner ($i \leqq 3$)[30]

$$\Delta^{(i)}_{m,k} = (-1)^i (x_m \varphi_x + y_m \varphi_y)^{\{i\}}_{\vartheta^{(i)}_k x_m, \vartheta^{(i)}_k y_m}; \quad k < \vartheta^{(i)}_k < k+i, \tag{δ}$$

woraus wegen $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ noch

$$\Delta^{(i)}_{m,k} = O\left(\frac{1}{m^i}\right); \quad 0 \leqq k \leqq m \tag{ε}$$

---

[28]) D. h. alle Koordinaten $x^{(m)}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sind $O\left(\frac{1}{m}\right)$.

[29]) Wir bezeichnen die Koordinaten von P mit x und y.

[30]) Die bei der Taylorschen Formel übliche symbolische Schreibweise, z. B. $(x\varphi_x + y\varphi_y)^{\{2\}} \equiv x^2 \varphi_{xx} + 2xy\varphi_{xy} + y^2 \varphi_{yy}$.

folgt. Mit den Bezeichnungen des Toeplitzschen Satzes aus 1., angewandt auf die Mittelbildung t_m aus (β), ist also $(k \leqq m-3)$:

$$b_{m,k} = \binom{k+2}{2} \Delta^{(3)}_{m,k} = \binom{k+2}{2} \cdot O\left(\frac{1}{m^3}\right); \quad \lim_{m \to \infty} b_{m,k} = 0,$$

$$(\zeta) \qquad Z_m = \sum_0^{m-3} \binom{k+2}{2} |\Delta^{(3)}_{m,k}| + \binom{m}{2} |\Delta^{(2)}_{m,m-2}|$$

$$= O\left(\frac{1}{m^3}\right) \cdot \sum_{k=0}^{m-3} \binom{k+2}{2} + \binom{m}{2} O\left(\frac{1}{m^2}\right) = O(1).$$

Ferner ist (man setze $c_0 = 1$, $c_k = 0$ für $k \geqq 1$, also $s_k = \sigma_k = \tau_k \equiv 1$)

$$(\eta) \quad 3_m = \sum_0^{m-3} \binom{k+2}{2} \Delta^{(3)}_{m,k} + \binom{m}{2} \Delta^{(2)}_{m,m-2} = \varphi(0) - \varphi(mP_m) - m\Delta^{(1)}_{m,m-1}.$$

Nach dem Toeplitzschen Satze gilt also

$$(\vartheta) \quad (\gamma_m - s\,\varphi(0)) - (s_m - s)\,\varphi(m P_m) - m(\sigma_{m-1} - s)\,\Delta^{(1)}_{m,m-1} \to 0,$$

wie behauptet.

Zusatz: *Wenn unter den Voraussetzungen von Satz* I *die* $c_k = c_k(x)$ *Funktionen sind, für die* $\mu^{(x)}_m(x) \rightrightarrows s(x)$ *gleichmäßig in einer* x*-Menge* $\mathfrak{M}$ *gilt, so ist auch die Relation* (3) *gleichmäßig in* $\mathfrak{M}$ *gültig.*

3. Der Satz Ib der Einleitung ist der Fall $\varkappa = 1$ unseres Satzes. Wir formulieren noch den Fall $\varkappa = 0$:

Satz Ia: $\varphi(P)$ *sei stetig differenzierbar und* $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$. *Ist dann die* $\sum_0^\infty c_k$ *konvergent mit der Summe* s, *so gilt die Relation*

$$(3a) \qquad \gamma_m \to s \cdot \varphi(0).$$

Der Fall $\varkappa = 2$ gestattet noch eine übersichtlichere Formulierung:

Satz Ic: $\varphi(P)$ *sei dreimal stetig differenzierbar und* $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$. *Ist dann die* $\sum_0^\infty c_k$ (C, 2)*-summierbar zum Werte* s, *so gilt die Relation*[31])

$$(3c) \quad \gamma_m - (s_m - s)\,\varphi(m P_m) + (\sigma_{m-1} - s)\,(m P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m P_m)) \to s \cdot \varphi(0).$$

Zum Beweise beachte man, daß

$$(\alpha) \qquad m(\sigma_{m-1} - s) = \binom{m+1}{2}(\tau_{m-1} - s) - \binom{m}{2}(\tau_{m-2} - s) = o(m^2)$$

ist. Da ferner nach $2(\gamma)$ und dem Mittelwertsatze

$$(\beta) \qquad \Delta^{(1)}_{m,m-1} = -(x_m \varphi_x + y_m \varphi_m)_{m x_m,\, m y_m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

---

[31]) $P \cdot \operatorname{grad} \varphi(P)$ bedeutet das skalare Produkt $x_1 \varphi_{x_1} + x_2 \varphi_{x_2} + \ldots + x_n \varphi_{x_n}$.

ist, darf $m\,\Delta^{(1)}_{m,m-1}$ in $2(\vartheta)$ durch $-(x\,\varphi_x + y\,\varphi_y)_{m x_m,\, m y_m}$ ersetzt werden. *Der Zusatz über die gleichmäßige Gültigkeit von* (3c) *bleibt richtig.* Von Wichtigkeit ist auch, z. B. für die Anwendung auf Fourierreihen, die folgende

Bemerkung: *Wenn die* c_k *eine Nullfolge bilden, darf* σ_{m-1} *in* (3c) *durch* σ_m *ersetzt werden.*

In der Tat ist dann

$$(\gamma) \qquad \sigma_m - \sigma_{m-1} = \frac{c_m}{m+1} + \sum_0^{m-1} c_k \frac{k}{m(m+1)} = o(1),$$

während $m P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m P_m)$ beschränkt bleibt.

Für $\varkappa > 2$ werden entsprechende Formulierungen des Satzes I weniger übersichtlich. Wenn aber die c_k eine Nullfolge bilden, erhält man den

Satz I*: *Unter den Voraussetzungen von Satz* I *gilt, wenn die* c_k *eine Nullfolge bilden, die Relation*[32])

$$(3^*) \qquad \gamma_m - \sum_{i=0}^{\varkappa-1} (-1)^i (\mu_m^{(i)} - s) \frac{(m P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m P_m))^{\{i\}}}{i!} \to s \cdot \varphi(0).$$

In der Tat folgt aus $2(\delta)$ nach dem Mittelwertsatze

$$(\delta) \qquad \Delta^{(i)}_{m,m-i} = (-1)^i (P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m P))^{\{i\}} + O\left(\frac{1}{m^{i+1}}\right)$$

und also

$$(\varepsilon) \qquad \binom{m}{i} \Delta^{(i)}_{m,m-i} = (-1)^i \frac{(m P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m P_m))^{\{i\}}}{i!} + O\left(\frac{1}{m}\right); \quad 1 \leqq i \leqq \varkappa.$$

Wenn nun die c_k eine Nullfolge bilden, so ist ersichtlich

$$(\zeta) \qquad S_m^{(i)} = o(m^{i+1}); \quad \mu_m^{(i)} = o(m)$$

und ferner $\mu_m^{(i)} - \mu_{m-i}^{(i)} = o(1)$, was man ähnlich wie (γ) zeigt.

Hieraus folgt nun, daß $\binom{m}{i} (\mu_{m-i}^{(i)} - s)\, \Delta^{(i)}_{m,m-i}$ in (3) durch $(-1)^i (\mu_m^{(i)} - s) \frac{(m P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m P_m))^{\{i\}}}{i!}$ ersetzt werden darf.

4. Für die Anwendung der obigen Sätze ist eine Reihe von Bemerkungen von Bedeutung.

I. Unter der *Voraussetzung von Satz* Ib ist $s_m = o(m)$. Ist nun

$$(\alpha) \qquad m P_m = Q + O\left(\frac{1}{m}\right),$$

so wird (3b) zu

$$(3b^*) \qquad \gamma_m - (s_m - s)\, \varphi(Q) \to s\, \varphi(0).$$

[32]) Vgl. Fußnoten [30]) u. [31]); $(m P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m P_m))^{\{0\}}$ *ist formal* $= \varphi(m P_m)$ *zu setzen.*

Ist insbesondere $\varphi(Q) = 0$, *so gilt*

$$(3\,b^{**}) \qquad \gamma_m \to s\,\varphi(0),$$

und man erhält ein Summierungsverfahren, das mindestens so stark wie das (C, 1)*-Verfahren ist.*

Konvergiert umgekehrt γ_m *und ist* $\varphi(Q) \neq 0$, *so ist die* $\sum_0^\infty c_k$ *sicher sogar konvergent*[33]).

Man beachte ferner die Abschätzung $\gamma_m = o(m)$.

II. Unter der *Voraussetzung von Satz* I c ist $s_m = o(m^2)$ und $\sigma_m = o(m)$. Aus (α) folgt also

$$(3\,c^{*}) \quad \gamma_m - (s_m - s)\,\varphi(m\,P_m) + (\sigma_{m-1} - s)\,(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q)) \to s\,\varphi(0).$$

Ist insbesondere $Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q) = 0$, *so erhält man*

$$(3\,c^{**}) \qquad \gamma_m - (s_m - s)\,\varphi(m\,P_m) \to s \cdot \varphi(0).$$

Konvergiert umgekehrt die linke Seite von (3 c**) *und ist* $Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q) \neq 0$, *so ist die* $\sum_0^\infty c_k$ *bereits* (C, 1)*-summierbar.*

Um (3 c) in der Form

$$(3\,c^{***}) \quad \gamma_m - (s_m - s)\,\varphi(Q) + (\sigma_{m-1} - s)\,(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q)) \to s\,\varphi(0)$$

zu schreiben, muß man

$$(\beta) \qquad m\,P_m = Q + O\left(\frac{1}{m^2}\right)$$

voraussetzen[34]). (Wenn die c_k eine Nullfolge bilden, ist auch $s_m = o(m)$ und es genügt (α)).

Ist nun $\varphi(Q) = 0$, *so wird*

$$(3\,c^{****}) \qquad \gamma_m + (\sigma_{m-1} - s)\,(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q)) \to s\,\varphi(0).$$

Konvergiert umgekehrt die linke Seite von (3 c****) *und ist* $\varphi(Q) \neq 0$, *so ist die Reihe sogar konvergent, und es folgt*

$$(3\,c^{*****}) \qquad \gamma_m \to s\,\varphi(0).$$

Diese letztere Relation gilt insbesondere auch, wenn $\varphi(Q) = 0$ *und* $Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q) = 0$ *ist. Man erhält so Summierungsverfahren, die mindestens so stark wie das* (C, 2)*-Verfahren sind.*

Wenn umgekehrt γ_m *konvergiert,* $\varphi(Q) = 0$ *aber* $Q \operatorname{grad} \varphi(Q) \neq 0$ *ist, so ist die* $\sum_0^\infty c_k$ *bereits* (C, 1)*-summierbar. Ist aber* $\varphi(Q) \neq 0$, *so ist die Reihe sogar konvergent*[33]).

---

[33]) Vgl. Rogosinski 2.

[34]) Wenn grad $\varphi(Q) = 0$ ist, genügt (α).

Denn aus (3c***) folgt in diesem letzteren Falle zunächst die Konvergenz von $s_m\varphi(Q) - \sigma_{m-1}(Q\cdot\operatorname{grad}\varphi(Q))$. Geht man zu den arithmetischen Mitteln über, so konvergiert auch

$$(\gamma)\qquad \sigma_m\varphi(Q) - \frac{\sigma_0+\sigma_1+\dots\sigma_{m-1}}{m+1}\cdot(Q\cdot\operatorname{grad}\varphi(Q)).$$

Aus der Konvergenz der τ_m folgt aber bekanntlich[35]) die der $\frac{\sigma_0+\sigma_1+\dots+\sigma_{m-1}}{m+1}$, so daß jetzt weiter auf die Konvergenz der σ_m und schließlich auf die der s_m geschlossen werden kann.

Man beachte endlich die Abschätzung $\gamma_m = o(m^2)$, *die, wenn die* c_k *eine Nullfolge bilden, zu* $\gamma_m = o(m)$ *verbessert werden kann.* $\gamma_m = o(m)$ *ist auch unter der Voraussetzung* (β) *und* $\varphi(Q) = 0$ *richtig.*

III. *Die* c_k *mögen eine Nullfolge bilden.* Unter den *Voraussetzungen von Satz* I* und unter der Annahme (α) wird wegen 3 (ζ)

$$(3^{**})\qquad \gamma_m - \sum_{i=0}^{\varkappa-1}(-1)^i(\mu_m^{(i)} - s)\frac{(Q\cdot\operatorname{grad}\varphi(Q))^{\{i\}}}{i!} \to s\cdot\varphi(0).$$

Sind insbesondere alle $(Q\cdot\operatorname{grad}\varphi(Q))^{\{i\}} = 0$, $0 \leqq i \leqq \varkappa - 1$, *so wird*

$$(3^{***})\qquad \gamma_m \to s\,\varphi(0),$$

und man erhält Summierungsverfahren, die mindestens so stark wie das $(C,\varkappa)$*-Verfahren sind.*

Ist umgekehrt γ_m *konvergent und zuerst* $(Q\cdot\operatorname{grad}\varphi(Q))^{\{j\}} \neq 0$, $0 \leqq j \leqq \varkappa - 1$, *so ist die* $\sum_0^\infty c_k$ *bereits* (C,j)*-summierbar*[33]).

In der Tat ist dann zunächst die

$$(\delta)\qquad \sum_{i=j}^{\varkappa-1}(-1)^i\mu_m^{(i)}\frac{(Q\cdot\operatorname{grad}\varphi(Q))^{\{i\}}}{i!}$$

konvergent. Geht man zu den arithmetischen Mitteln $(\varkappa - 1 - j)$-ter Ordnung über, so folgt zunächst (ähnlich wie unter II) die $(C,\varkappa-1)$-Summierbarkeit der Reihe. Iterierung der Schlußweise gibt die Behauptung.

IV. *Die Relation* (3***) *gilt auch, ohne daß die* c_k *eine Nullfolge zu bilden brauchen, wenn etwa* $mP_m = Q$ *gesetzt wird und alle* $(Q\cdot\operatorname{grad}\varphi(Q))^{\{i\}} = 0$, $0 \leqq i \leqq \varkappa - 1$, *sind*[33]).

In diesem Falle ist nämlich nach 2 (δ) und der Taylorschen Formel

$$(\varepsilon)\qquad \Delta^{(i)}_{m,\,m-i} = (-1)^i\frac{(\vartheta^{(i)}_{m-i} - m)^{\varkappa-i}}{(\varkappa-i)!}(P_m\cdot\operatorname{grad}\varphi(\tau^{(i)}_m P_m))^{\{\varkappa\}} = O\left(\frac{1}{m^\varkappa}\right);$$

$$m - i < \vartheta^{(i)}_{m-i} < \tau^{(i)}_m < m;\ 1 \leqq i \leqq \varkappa - 1,$$

so daß wegen $\mu^{(i)}_{m-i} = o(m^{\varkappa-i})$ die Summe links in (3) gegen 0 geht.

[35]) Vgl. Knopp, S. 498.

V. *Allgemein gilt* $\gamma_m = o(m^\varkappa)$, *wenn* $\varkappa \geqq 1$ *ist. Bilden die* c_k *eine Nullfolge, so ist* $\gamma_m = o(m)$.

5. Die Frage, wann in den obigen Sätzen die P_m eine beliebige Nullfolge durchlaufen dürfen, wird durch den folgenden Satz beantwortet:

Satz II: *In Satz* I *darf* P_m *eine beliebige Nullfolge durchlaufen, wenn* $\varphi(P)$ *überdies für ein* $\delta > 0$ *und große* $|P|$ *den Bedingungen*

$$(31) \quad (P \cdot \operatorname{grad} \varphi(P))^{\{\varkappa\}} = O(1); \quad (P \cdot \operatorname{grad} \varphi(P))^{\{\varkappa+1\}} = O\left(\frac{1}{|P|^\delta}\right)$$

genügt[36]).

Mit den Bezeichnungen des Beweises von Satz I ist in der Tat nach 2 (δ) und (ζ), wegen $P_m \to 0$, zunächst wieder $\lim_{m\to\infty} b_{m\,k} = 0$.

Wird

$$(\alpha)^{37}) \qquad k_m = \operatorname{Min}\left\{\left[\frac{1}{|P_m|}\right], m\right\}$$

gesetzt, so folgt aus 2 (δ) und (ζ)

$$(\beta) \quad Z_m = O\left\{\sum_{k=1}^{k_m} + \sum_{k>k_m}^{m} k^2 \left|(x_m \varphi_x + y_m \varphi_y)^{\{3\}}_{\vartheta_k^{(3)} x_m,\, \vartheta_k^{(3)} y_m}\right|\right\}$$
$$+ O\left(m^2 \left|(x_m \varphi_x + y_m \varphi_y)^{\{2\}}_{\vartheta_{m-2}^{(2)} x_m,\, \vartheta_{m-2}^{(2)} y_m}\right|\right).$$

In der ersten Summe ist $|k P_m| \leqq 1$ und $|x_m|, |y_m| \leqq \frac{1}{k_m}$. Daher wird weiter

$$(\gamma) \quad Z_m = O\left\{\frac{1}{k_m^3}\sum_{1}^{k_m} k^2 + \sum_{k>k_m}^{m} \frac{\left|(x\varphi_x + y\varphi_y)^{\{3\}}_{\vartheta_k^{(3)} x_m,\, \vartheta_k^{(3)} y_m}\right|}{k}\right\}$$
$$+ O\left(\left|(x\varphi_x + y\varphi_y)^{\{2\}}_{\vartheta_{m-2}^{(2)} x_m,\, \vartheta_{m-2}^{(2)} y_m}\right|\right),$$
$$= O(1) + O\left(\frac{1}{|P_m|^\delta}\sum_{k_m}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\delta}}\right) + O(1) = O(1) + O\left(\frac{1}{|k_m P_m|^\delta}\right) = O(1),$$

womit wieder der Toeplitzsche Satz auf t_m anwendbar wird.

---

[36]) $|P| = \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}$; $(P \cdot \operatorname{grad} \varphi(P))^{\{\varkappa\}} = (x_1 \varphi_{x_1} + \ldots + x_n \varphi_{x_n})^{\{\varkappa\}}$ [Fußnote [30]]. *Wenn die Bedingungen* (31) *nur in einem (Kegel-)Winkelraum mit dem Scheitel* 0 *erfüllt sind, so sind die* P_m *auf diesen Winkelraum zu beschränken.* Die zweite Voraussetzung (31) kann leicht verbessert werden. Ist $\varphi = \varphi(x)$, $x > 0$, so genügt z. B. die Existenz von $\int_0^\infty x^\varkappa |\varphi^{(\varkappa+1)}(x)|\, dx$.

[37]) $k_m = m$ für große m bedeutet $|P_m| \leqq \frac{1}{m}$; die $\sum_{k>k_m}^{m}$ in (γ) und die ihr entsprechenden O-Glieder fallen dann fort.

Anmerkung: *Wenn für große* $|P|$

$$(31^*) \qquad (P\cdot \operatorname{grad}\varphi(P))^{\{\varkappa+1\}} \geqq 0$$

erfüllt ist, gilt Satz II *unter den Voraussetzungen*[38])

$$(31^{**}) \quad \varphi(P)=O(1); \qquad (P\cdot\operatorname{grad}\varphi(P))^{\{i\}}=O(1), \qquad 1\leqq i\leqq \varkappa.$$

In der Tat ist dann ersichtlich $Z_m=\mathfrak{Z}_m+O(1)$, und man beachte die Formel 2 (η).

Auch die *Formulierung des Satzes* Ic *bleibt* unter den Voraussetzungen des Satzes II bzw. der Anmerkung ($\varkappa=2$) für beliebige Nullfolgen *richtig.*

Dies folgt daraus, daß nach 2 (γ)

$$(\delta) \qquad \Delta^{(1)}_{m,\,m-1} = -(x_m\varphi_x+y_m\varphi_y)_{\vartheta_{m-1}x_m,\,\vartheta_{m-1}y_m}$$

$$= -(x_m\varphi_x+y_m\varphi_y)_{m\,x_m,\,m\,y_m}+(m-\vartheta_{m-1})\,(x_m\varphi_x+y_m\varphi_y)^{\{2\}}_{\tau_m x_m,\,\tau_m y_m},$$

$$m-1<\vartheta_{m-1}<\tau_m<m$$

ist. Also wird nach der ersten Voraussetzung (31)

$$(\varepsilon) \qquad \Delta^{(1)}_{m,\,m-1} = -(x_m\varphi_x+y_m\varphi_y)_{m\,x_m,\,m\,y_m}+O\left(\frac{1}{m^2}\right),$$

womit, wegen $\sigma_m=o(m)$, die Formel (3c) aufs neue bewiesen ist.

6. Wir wollen noch kurz auf die Mittelbildungen der Form

$$(4) \qquad \Gamma_m=\sum_{k=0}^{\infty} c_k\,\varphi(k\,P_m)$$

eingehen. Unsere γ_m sind als „verkürzte" Formen dieser unverkürzten Bildungen anzusehen.

Satz III: *Es sei* $\varkappa\geqq 0$ *ganz und die Funktion* $\varphi(P)$ *sei* $(\varkappa+1)$*-mal stetig differenzierbar. Überdies genüge* $\varphi(P)$ *für ein* $\delta>0$ *und große* $|P|$[39]) *den Bedingungen*

$$(32) \quad \varphi(P)=O\left(\frac{1}{|P|^{\varkappa}}\right); \quad (P\cdot\operatorname{grad}\varphi(P))^{\{i\}}=O\left(\frac{1}{|P|^{\varkappa-i}}\right), \quad 1\leqq i\leqq\varkappa;$$

$$(P\cdot\operatorname{grad}\varphi(P))^{\{\varkappa+1\}}=O\left(\frac{1}{|P|^{\delta}}\right).$$

Aus $\mu_m^{(\varkappa)}\to s$ *folgt dann für beliebige Nullfolgen* $P_m\neq 0$ *die Konvergenz von* Γ_m *und die Relation*

$$(33) \qquad \Gamma_m\to s\cdot\varphi(0).$$

Zum Beweise sei wieder $\varkappa=2$ und $n=2$ gewählt.

---

[38]) Man beachte die Winkelraum-Bemerkung in Fußnote [36]).

[39]) Man beachte die Fußnote [36]).

Genau wie Formel 2 (β) findet man für beliebiges ganzes $\varrho > 0$

$$(\alpha)\quad \Big(\sum_{k=0}^{\varrho} c_k\,\varphi(k\,P_m) - s\cdot\varphi(0)\Big) - (s_\varrho - s)\,\varphi(\varrho\,P) - \varrho\,(\sigma_{\varrho-1} - s)\,\Delta^{(1)}_{m,\varrho-1}$$
$$= \sum_{k=0}^{\varrho-3} (\tau_k - s)\binom{k+2}{2}\Delta^{(3)}_{m,k} + (\tau_{\varrho-2} - s)\binom{\varrho}{2}\Delta^{(2)}_{m,\varrho-2}.$$

Nach 5 (γ) folgt aus der letzten Voraussetzung (32) die (sogar absolute) Konvergenz der Summe rechts mit $\varrho \to \infty$.

Beachtet man die Formeln 2 (δ) und daß $s_\varrho = o(\varrho^2)$, $\sigma_\varrho = o(\varrho)$, $\tau_\varrho - s \to 0$ ist, so folgt aus den übrigen Voraussetzungen (32), daß das zweite und dritte Glied links in (α) und das zweite Glied rechts mit $\varrho \to \infty$ gegen 0 gehen[40]). Daher konvergiert Γ_m und es ist

$$(\beta)\qquad \Gamma_m - s\cdot\varphi(0) = \sum_{k=0}^{\infty} (\tau_k - s)\binom{k+2}{2}\Delta^{(3)}_{m,k}.$$

Wieder nach 5 (γ) ist nun auf diese Mittelbildung aus den $(\tau_k - s)$ der Toeplitzsche Satz anwendbar.

Anmerkungen: A. *Die letzte Bedingung* (32) *darf durch*

$$(32^*)\qquad (P\cdot\operatorname{grad}\varphi(P))^{\{\varkappa+1\}} \geqq 0$$

ersetzt werden. (Vgl. Anmerkung zu Satz II.)

B. *Wenn die* c_k *eine Nullfolge bilden,* sind alle $\mu^{(i)}_m = o(m)$, (vgl. 3 (ζ)), und daher *können die Voraussetzungen* (32) *durch*

$$(32^{**})\quad \varphi(P) = O\Big(\frac{1}{|P|}\Big);\quad (P\cdot\operatorname{grad}\varphi(P))^{\{i\}} = O\Big(\frac{1}{|P|}\Big),\quad 1 \leqq i \leqq \varkappa - 1;$$
$$(P\cdot\operatorname{grad}\varphi(P))^{\{\varkappa\}} = O(1);\quad (P\cdot\operatorname{grad}\varphi(P))^{\{\varkappa+1\}} = O\Big(\frac{1}{|P|^{\delta}}\Big)$$

ersetzt werden. An Stelle der letzten dieser Bedingungen kann (32*) *treten.*

C. *Auch die Formel* (33) *gilt gleichmäßig in jeder x-Menge, in der die* $\mu^{(\varkappa)}_m(x) \rightrightarrows s(x)$ *gleichmäßig konvergieren.*

7. Die Bedeutung der vorstehenden Sätze ist allgemeiner reihentheoretischer Natur und sie sind vieler Anwendungen fähig. Durch geeignete Auswahl der Funktionen φ können sie überdies, wie wir in den folgenden Paragraphen an dem Beispiel der trigonometrischen Reihen sehen werden, speziellen Reihentypen noch besonders angepaßt werden.

Wir geben hier noch als eine Anwendung einen besonders einfachen *Beweis des folgenden bekannten Umkehrsatzes des* $(C,\varkappa)$*-Verfahrens*[41]): *Ist die Reihe* $\sum_0^\infty c_k$ $(C,\varkappa)$*-summierbar und ist* $c_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$, *so ist die Reihe sogar konvergent.*

---

[40]) Man beachte die Voraussetzung $P_m \neq 0$, die hier wesentlich ist.

[41]) Hardy 1; vgl. Rogosinski 2, S. 148.

Wir wenden die Bemerkung in 4, IV auf

$$(\alpha) \qquad \varphi(x) = (1 - x^{\varrho})^{\varkappa}, \quad x_m = \frac{1}{m},$$

an. $\varphi(x)$ hat in $x = 1$ eine Nullstelle $\varkappa$-ter Ordnung. Daher folgt aus $\mu_m^{(\varkappa)} \to s$ zunächst

$$(\beta) \qquad \sum_{k=0}^{m} c_k \left(1 - \left(\frac{k}{m}\right)^{\varrho}\right)^{\varkappa} \equiv s_m + \sum_{i=1}^{\varkappa} (-1)^i \binom{\varkappa}{i} \sum_{k=0}^{m} c_k \left(\frac{k}{m}\right)^{\varrho i} \to s.$$

Da wegen $c_k = O\left(\frac{1}{k}\right)$, gleichmäßig in den m

$$(\gamma) \qquad \sum_{k=0}^{m} c_k \left(\frac{k}{m}\right)^{\varrho i} = O\left(\frac{1}{\varrho i}\right) = O\left(\frac{1}{\varrho}\right)$$

ist, wird also bei festem ϱ

$$(\delta) \qquad s_m = s + O\left(\frac{1}{\varrho}\right) + o(1),$$

woraus mit $\varrho \to \infty$ die Behauptung folgt.

Zusatz: *Aus* $\mu_m^{(\varkappa)}(x) \rightrightarrows s(x)$ *und* $c_k(x) = O\left(\frac{1}{k}\right)$ *gleichmäßig in den* x *einer* x*-Menge* $\mathfrak{M}$ *folgt* $s_m(x) \rightrightarrows s(x)$ *gleichmäßig in* $\mathfrak{M}$.

§ 2.

Anwendung auf trigonometrische Reihen [$c_k = \alpha_k(\xi)$].

1. Wir wenden die Sätze des vorigen Paragraphen (insbesondere die Sätze I) auf die trigonometrische Reihe $T(x)$ aus (1) in $x = \xi$ an, indem wir die $c_k = \alpha_k(\xi)$ setzen. Wir werden in der Hauptsache eine der drei Annahmen

$$(10) \qquad \text{(a)} \quad s_m(\xi) \to A; \qquad \text{(b)} \quad \sigma_m(\xi) \to A; \qquad \text{(c)} \quad \tau_m(\xi) \to A$$

und nur mitunter die allgemeinere Annahme

$$(10\varkappa) \qquad \mu_m^{(\varkappa)}(\xi) \to A$$

machen.

Im folgenden bezeichnet durch die ganze Arbeit hindurch (wenn es nicht ausdrücklich anders gesagt wird) k *eine ganze Zahl* $\geqq 0$, r *eine ganze Zahl* > 0, g *eine gerade und* u *eine ungerade Zahl* $\geqq 0$; *und für die Nullfolge* $\{h_m\}$ *ist*

$$(34) \qquad h_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$$

vorausgesetzt.

Die Auswahl der Funktionen φ ist durch den Gesichtspunkt der Einfachheit der Aussagen bedingt. Einfache Rechnungen sind übergangen und die Ergebnisse tabellarisch zusammengestellt. *Die Buchstaben* (a), (b), (c) *und* ($\varkappa$) *beziehen sich stets auf die entsprechenden Voraussetzungen* (10). *Ein* (*) *bezieht sich auf die Zusatzvoraussetzung, daß die* $\alpha_k(\xi)$ *eine Nullfolge bilden.*

2. **Abschnittsableitungen gerader Ordnung:**

I. $\varphi(x) = x^{2r}; \quad x_m = \frac{1}{m}; \quad \gamma_m = (-1)^r \frac{s_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}}.$

(a) $s_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r});$

(b) $s_m(\xi) + (-1)^{r-1} \frac{s_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to A; \qquad s_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r+1});$

(c) $(-1)^r \frac{s_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} - s_m(\xi) + 2r\,\sigma_{m-1}(\xi) \to A(2r-1);$

($\varkappa$) $s_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r+\varkappa}); \qquad (*) \qquad s_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r+1}).$

II. $\varphi(x) = \sum_{r=0}^{k} a_r x^{2r}; \quad x_m = \frac{X}{m}; \quad \varphi(X) = \varphi'(X) = \ldots = \varphi^{(\varkappa-1)}(X) = 0.$

($\varkappa$) $\sum_{r=0}^{k} (-1)^r a_r X^{2r} \frac{s_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to s \cdot a_0.$

z. B. $\varphi(x) = (1-x^2)^\varkappa; \quad X = 1;$

($\varkappa$) $\sum_{r=0}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{r} \frac{s_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to s.$

3. **Abschnittskoppelungen**[42]**:**

I. $\varphi(x) = \cos x; \quad x_m = h_m; \quad \gamma_m = \frac{s_m(\xi+h_m) + s_m(\xi-h_m)}{2}.$

(a) $\frac{s_m(\xi+h_m) + s_m(\xi-h_m)}{2} \to A;$

(b)
$$\begin{cases} \frac{s_m(\xi+h_m) + s_m(\xi-h_m)}{2} - (s_m(\xi) - A)\cos m h_m \to A; \\ \frac{s_m\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right)}{2} \to A; \\ \frac{s_m(\xi+h_m) + s_m(\xi-h_m)}{2} = o(m); \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} \frac{s_m(\xi+h_m) + s_m(\xi-h_m)}{2} - (s_m(\xi) - A)\cos m h_m \\ \qquad - (\sigma_{m-1}(\xi) - A)\, m h_m \cdot \sin m h_m \to A^{43}); \\ \frac{s_m(\xi+h_m) + s_m(\xi-h_m)}{2} = \begin{cases} o(m^2) \\ o(m) \end{cases}; \\ \frac{s_m\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right)}{2} \overset{(*)}{=} o(m). \end{cases}$$

[42]) Vgl. Rogosinski **1** u. **2**; siehe auch 4, III. dieses Paragraphen.

[43]) Man beachte $h_m = \frac{k\pi}{m}$ und $h_m = \frac{u\pi}{2m}$.

II. $\varphi(x) = (\cos x)^{\varkappa}; \quad x_m = \frac{u\pi}{2m}.$

$$(\varkappa) \quad \frac{1}{2^{\varkappa}} \sum_{\nu=0}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{\nu} s_m\left(\xi + (\varkappa - 2\nu)\frac{u\pi}{2m}\right) \to A.$$

III. $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}; \qquad x_m = h_m \neq 0; \qquad \gamma_m = \frac{1}{2h_m}\int_{\xi-h_m}^{\xi+h_m} s_m(x)\,dx.$

(a) $$\frac{1}{2h_m}\int_{\xi-h_m}^{\xi+h_m} s_m(x)\,dx \to A;$$

(b)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2h_m}\displaystyle\int_{\xi-h_m}^{\xi+h_m} s_m(x)\,dx - (s_m(\xi) - A)\frac{\sin m h_m}{m h_m} \to A; \\ \dfrac{m}{2k\pi}\displaystyle\int_{\xi-\frac{k\pi}{m}}^{\xi+\frac{k\pi}{m}} s_m(x)\,dx \to A \qquad (k > 0); \\ \dfrac{1}{2h_m}\displaystyle\int_{\xi-h_m}^{\xi+h_m} s_m(x)\,dx = o(m); \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2h_m}\displaystyle\int_{\xi-h_m}^{\xi+h_m} s_m(x)\,dx - (s_m(\xi) - A)\frac{\sin m h_m}{m h_m} \\ \qquad + (\sigma_{m-1}(\xi) - A)\dfrac{m h_m \cos m h_m - \sin m h_m}{m h_m} \to A^{44}); \\ \dfrac{1}{2h_m}\displaystyle\int_{\xi-h_m}^{\xi+h_m} s_m(x)\,dx = \underset{(*)}{\begin{cases} o(m^2) \\ o(m) \end{cases}}; \qquad \displaystyle\int_{\xi-\frac{k\pi}{m}}^{\xi+\frac{k\pi}{m}} s_m(x)\,dx = o(1). \end{cases}$$

Die zugehörige unverkürzte Mittelbildung Γ_m führt auf das (bekanntlich bei Fourierreihen nützliche) sogenannte Lebesguesche Summierungsverfahren[45]). Dieses ist aber nicht regulär (konvergenzerhaltend); vergleiche Satz III, $\varkappa = 0$.

---

[44]) Man beachte $h_m = \frac{k\pi}{m}$ und $h_m = \frac{\varrho}{m}$, $\operatorname{tg}\varrho = \varrho$.

[45]) Vgl. Zygmund S. 272, Rogosinski 4, S. 99.

IV. $\varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$; $\quad x_m = \frac{h_m}{2} \neq 0$; $\quad \gamma_m = \frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} \int_{\xi-t}^{\xi+t} s_m(x)\, dx\, dt$.

(a) $$\frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} \int_{\xi-t}^{\xi+t} s_m(x)\, dx\, dt \to A, \qquad h_m \to 0 \text{ beliebig.}$$

(b) $$\begin{cases} \frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} \int_{\xi-t}^{\xi+t} s_m(x)\, dx\, dt - (s_m(\xi) - A) \left(\frac{\sin \frac{m h_m}{2}}{\frac{m h_m}{2}}\right)^2 \to A; \\ \frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} \int_{\xi-t}^{\xi+t} s_m(x)\, dx\, dt = o(m); \end{cases}$$

(c) $$\begin{cases} \frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} \int_{\xi-t}^{\xi+t} s_m(x)\, dx\, dt - (s_m(\xi) - A) \left(\frac{\sin \frac{m h_m}{2}}{\frac{m h_m}{2}}\right)^2 \\ \qquad + (\sigma_{m-1}(\xi) - A) \frac{m h_m}{2} \frac{d}{d\tau} \left(\frac{\sin \tau}{\tau}\right)^2_{\tau = \frac{m h_m}{2}} \to A^{46}); \\ \left(\frac{m}{g\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{g\pi}{m}} \int_{\xi-t}^{\xi+t} s_m(x)\, dx\, dt \to A; \quad \frac{1}{h_m^2} \int_0^{h_m} \int_{\xi-t}^{\xi+t} s_m(x)\, dx\, dt = \begin{cases} o(m^2) \\ o(m) \end{cases}_*. \end{cases}$$

Die zugehörige unverkürzte Mittelbildung Γ_m führt auf das bekannte Riemannsche Summierungsverfahren[47]). Dieses ist regulär; vgl. Satz III, $\varkappa = 0$. Daß h_m in der obigen Formel (a) eine beliebige Nullfolge durchlaufen darf, folgt aus Satz II, $\varkappa = 0$.

Allgemeiner sind die zu $\varphi(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^\alpha$, $\alpha > \varkappa + 1$, $x_m = h_m$, *gehörigen unverkürzten Mittelbildungen mindestens so stark wie das* (C, $\varkappa$)*-Verfahren. Bei den verkürzten Bildungen ist dies schon für* $\alpha = \varkappa$, $h_m = \frac{k\pi}{m}$, *der Fall. Ferner darf, für* $\alpha > \varkappa + 1$, h_m *in den Formeln* ($\varkappa$) *eine* beliebige *Nullfolge durchlaufen.*

---

[46]) Man beachte $h_m = \frac{u\pi}{m}$ und $h_m = \frac{2\varrho}{m}$, $\operatorname{tg} \varrho = \varrho$.

[47]) Vgl. Zygmund S. 270; Rogosinski 4, S. 100.

4. Koppelungen der Abschnittsableitungen gerader Ordnung:

I. $\varphi(x, y) = x^{2r} \cos y; \qquad x_m = \frac{1}{m}, \; y_m = h_m;$

$$\gamma_m = (-1)^r \frac{s_m^{(2r)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r)}(\xi - h_m)}{2 m^{2r}}.$$

(a) $s_m^{(2r)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r)}(\xi - h_m) = o(m^{2r})$;

(b)
$$\begin{cases} (-1)^r \dfrac{s_m^{(2r)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r)}(\xi - h_m)}{2 m^{2r}} - (s_m(\xi) - A)\cos m h_m \to 0; \\ (-1)^{k+r-1} \dfrac{s_m^{(2r)}\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) + s_m^{(2r)}\left(\xi - \frac{k\pi}{m}\right)}{2 m^{2r}} + s_m(\xi) \to A; \\ s_m^{(2r)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r)}(\xi - h_m) = o(m^{2r+1}); \\ s_m^{(2r)}\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m^{(2r)}\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right) = o(m^{2r}). \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} (-1)^r \dfrac{s_m^{(2r)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r)}(\xi - h_m)}{2 m^{2r}} - (s_m(\xi) - A)\cos m h_m \\ \quad + (\sigma_{m-1}(\xi) - A)\{2r \cos m h_m - m h_m \cdot \sin m h_m\} \to 0^{48}); \\ s_m^{(2r)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r)}(\xi - h_m) = \underset{(*)}{\begin{cases} o(m^{2(r+1)}) \\ o(m^{2r+1}) \end{cases}}; \\ s_m^{(2r)}\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m^{(2r)}\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) = o(m^{2r+1}). \end{cases}$$

II. $\varphi(x, y) = x^{2r}(\cos y)^{\varkappa}; \qquad x_m = \frac{1}{m}, \qquad y_m = \frac{u\pi}{2m}.$

($\varkappa$) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{\nu} s_m^{(2r)}\left(\xi + (\varkappa - 2\nu)\frac{u\pi}{2m}\right) = o(m^{2r}).$

III. $\varphi(x, y) = x^{2r}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{2\varrho}, \quad r \geqq \varrho \geqq 1$ ganz[49]), $x_m = \frac{1}{m}, \quad y_m = h_m.$

($\varkappa$) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2\varrho} (-1)^{\nu} \binom{2\varrho}{\nu} s_m^{2(r-\varrho)}(\xi + 2(\varrho - \nu) h_m)$

$$= \underset{(*)}{\begin{cases} o(m^{2r+\varkappa} h_m^{2\varrho}) = o(m^{2(r-\varrho)+\varkappa})^{50}) \\ o(m^{2r+1} h_m^{2\varrho}) = o(m^{2(r-\varrho)+1}) \end{cases}}.$$

($2\varkappa$) $\displaystyle\sum_{\nu=0}^{2\varkappa} (-1)^{\nu} \binom{2\varkappa}{\nu} s_m^{2(r-\varkappa)}\left(\xi + (\varkappa - \nu)\frac{g\pi}{m}\right) = o(m^{2(r-\varkappa)}).$

---

[48]) Man beachte auch $h_m = \frac{\sigma}{m}$; $\operatorname{tg}\sigma = \frac{2r}{\sigma}$.

[49]) Man beachte $r = \varrho$. In Formel $(2\varkappa)$ ist $\varrho = \varkappa$ gesetzt.

[50]) Wenn $2\varrho > \varkappa + 1$, darf h_m eine beliebige Nullfolge durchlaufen.

5. Koppelungen der Abschnittsableitungen ungerader Ordnung:

I. $\varphi(x,y) = x^{2r}\left(\frac{\sin y}{y}\right)$; $\quad x_m = \frac{1}{m}$, $\quad y_m = h_m \neq 0$;

$$\gamma_m = (-1)^r \frac{s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m)}{2 h_m m^{2r}}.$$

(a) $$s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m) = o(m^{2r}|h_m|) = o(m^{2r-1}).$$

(b)
$$\begin{cases} (-1)^r \dfrac{s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m)}{2 m^{2r-1}} - (s_m(\xi) - A)\sin m h_m \\ \qquad = o(m|h_m|) = o(1); \\ (-1)^{\frac{u+1}{2}+r} \dfrac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) - s_m^{(2r-1)}\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right)}{2 m^{2r-1}} + s_m(\xi) \to A; \\ s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m) = o(m^{2r+1}|h_m|) = o(m^{2r}); \\ s_m^{(2r-1)}\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) - s_m^{(2r-1)}\left(\xi - \frac{k\pi}{m}\right) = o(m^{2r-1}). \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} (-1)^r \dfrac{s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m)}{2 m^{2r-1}} - (s_m(\xi) - A)\sin m h_m \\ \quad + (\sigma_{m-1}(\xi) - A)\{(2r-1)\sin m h_m + m h_m \cos m h_m\} \\ \quad = o(m|h_m|) = o(1)^{51}); \\ s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m) \\ \qquad = \underset{(*)}{\begin{cases} o(m^{2(r+1)}|h_m|) = o(m^{2r+1}) \\ o(m^{2r+1}|h_m|) = o(m^{2r}) \end{cases}}; \\ s_m^{(2r-1)}\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) - s_m^{(2r-1)}\left(\xi - \frac{k\pi}{m}\right) = o(m^{2r}). \end{cases}$$

II. $\varphi(x,y) = x^{2r}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^{2\varrho-1}$, $\quad r \geqq \varrho \geqq 1$ ganz, $\quad x_m = \frac{1}{m}$, $\quad y_m = h_m$.

($\varkappa$)[52] $$\sum_{\nu=0}^{2\varrho-1} (-1)^\nu \binom{2\varrho-1}{\nu} s_m^{2(r-\varrho)+1}(\xi + \{2(\varrho-\nu)-1\}h_m)$$
$$= \underset{(*)}{\begin{cases} o(m^{2r+\varkappa}|h_m|^{2\varrho-1}) = o(m^{2(r-\varrho)+1+\varkappa}) \\ o(m^{2r+1}|h_m|^{2\varrho-1}) = o(m^{2(r-\varrho+1)}) \end{cases}}.$$

($2\varkappa-1$) $$\sum_{\nu=0}^{2\varkappa-1} (-1)^\nu \binom{2\varkappa-1}{\nu} s_m^{2(r-\varkappa)+1}\left(\xi + \{2(\varkappa-\nu)-1\}\frac{k\pi}{m}\right)$$
$$= o(m^{2(r-\varkappa)+1}).$$

---

[51]) Man beachte $h_m = \frac{k\pi}{m}$ und $m h_m = \tau$, $\operatorname{tg}\tau = -\frac{\tau}{2r-1}$.

[52]) Wenn $2\varrho > \varkappa + 2$, darf h_m eine beliebige Nullfolge durchlaufen. In Formel ($2\varkappa-1$) ist $\varrho = \varkappa$ gesetzt.

6. **Bildungen aus den $\sigma_m(x)$:**
Wenn

$$(\alpha) \qquad \varphi(P) = \varphi(x, P^*) = (1 - x)\,\psi(P^*), \qquad x_m = \frac{1}{m}$$

ist, so ergibt der Satz Ic die Formel

$$(3\,c') \qquad \gamma_m - (\sigma_{m-1} - s)\,\psi(m\,P_m^*) \to s \cdot \psi(0).$$

Im Falle

$$(\beta) \qquad m\,P_m^* = Q^* + O\left(\frac{1}{m}\right), \qquad \psi(Q^*) = 0,$$

folgt also, wegen $\sigma_m = o(m)$, die Relation

$$(3\,c'') \qquad \gamma_m \to s \cdot \psi(0).$$

Bildet man nun γ_{m+1}, indem man für $\psi(P)$ und (P_{m+1}) die Funktionen und Folgen aus 2. bis 5. einsetzt, so erhält man es aus den dortigen Ausdrücken γ_m, wenn man die s_m durch σ_m ersetzt. Daraus folgt:

Die Formeln (a) *bzw.* (b) *aus* 2. *bis* 5. *bleiben in den Fällen* (b) *bzw.* (c) *richtig, wenn man in ihnen s_m durch σ_m ersetzt.*

Ähnliche Bemerkungen kann man bei den Bildungen aus allgemeineren $\mu_m^{(\varkappa)}(x)$ machen[53]).

7. Zum Schluß sei noch einmal darauf aufmerksam gemacht, daß alle Formeln dieses Paragraphen (und ebenso des folgenden) gleichmäßig in jeder ξ-Menge gelten, wo die zugehörigen Voraussetzungen gleichmäßig erfüllt sind. Hieraus sind dann die in der Einleitung erwähnten „Schwingungserscheinungen" der Abschnitte unmittelbar zu ersehen.

§ 3.

Anwendung auf die konjugierte trigonometrische Reihe $[c_k = \beta_k(\xi)]$.

1. Die Sätze des § 1 werden in diesem Paragraphen auf die zu $T(x)$ konjugierte trigonometrische Reihe $\overline{T}(x)$ aus $(\overline{1})$ in $x = \xi$ angewandt, indem wir die $c_k = \beta_k(\xi)$ setzen.

Die respektive unter den Voraussetzungen

$$(\overline{10}) \quad (a)\ \bar{s}_m(\xi) \to \bar{A}; \quad (b)\ \bar{\sigma}_m(\xi) \to \bar{A}; \quad (c)\ \bar{\tau}_m(\xi) \to \bar{A}; \quad (\varkappa)\ \bar{\mu}_m^{(\varkappa)}(\xi) \to \bar{A}$$

gültigen Ergebnisse bezeichnen wir respektive durch $(\overline{a})$, $(\overline{b})$, $(\overline{c})$ *und* $(\overline{\varkappa})$. *Ein* (*) *bedeutet die Zusatzvoraussetzung, daß die $\beta_k(\xi)$ eine Nullfolge bilden.*

Es versteht sich von selbst, daß alle Formeln aus § 2, wenn man überall die konjugierten (überstrichenen) Größen einsetzt, unter den entsprechenden (überstrichenen) Voraussetzungen richtig bleiben.

---

[53]) Man setze $\varphi(P) = (1-x)^{\varkappa}\,\psi(P^*), \quad x_m = \frac{1}{m}$.

2. **Abschnittsableitungen ungerader Ordnung:**

I. $$\varphi(x) = x^{2r-1}; \quad x_m = \frac{1}{m}; \quad \gamma_m = (-1)^{r-1} \frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}}.$$

$(\bar{a})$ $$s_m^{(2r-1)}(\xi) = o\left(m^{2r-1}\right).$$

$(\bar{b})$ $$\bar{s}_m(\xi) + (-1)^r \frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} \to \bar{A}; \quad s_m^{(2r-1)}(\xi) = o\left(m^{2r}\right).$$

$(\bar{c})$ $$(-1)^{r-1} \frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} - \bar{s}_m(\xi) + (2r-1)\,\bar{\sigma}_{m-1}(\xi) \to 2\bar{A}\,(r-1).$$

$(\bar{\varkappa})$ $$\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi) = o\left(m^{2r-1+\varkappa}\right); \quad (*)\ \bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi) = o\left(m^{2r}\right).$$

II. $$\varphi(x) = \sum_{r=1}^{k} b_r x^{2r-1}; \quad x_m = \frac{X}{m}; \quad \varphi(X) = \varphi'(X) = \ldots \varphi^{(\varkappa-1)}(X) = 0.$$

$(\bar{\varkappa})$ $$\sum_{r=1}^{k} (-1)^{r-1} b_r X^{2r-1} \frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} \to 0,$$

z. B. $\varphi(r) = x(1-x^2)^{\varkappa}; \quad X = 1.$

$(\bar{\varkappa})$ $$\sum_{r=0}^{\varkappa} \binom{\varkappa}{r} \frac{s_m^{(2r+1)}(\xi)}{m^{2r+1}} \to 0.$$

3. **Koppelungen der Abschnitte und Abschnittsableitungen gerader Ordnung:**

I. $$\varphi(x,y) = x^{2r-1} \frac{\sin y}{y}; \quad x_m = \frac{1}{m}, \quad y_m = h_m \neq 0;$$

$$\gamma_m = (-1)^{r-1} \frac{s_m^{2(r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi - h_m)}{2 h_m m^{2r-1}}.$$ [54]

$(\bar{a})$ $$s_m^{2(r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi - h_m) = o\left(m^{2r-1}|h_m|\right) = o\left(m^{2(r-1)}\right).$$

$(\bar{b})$
$$(-1)^{r-1} \frac{s_m^{2(r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi - h_m)}{2m^{2(r-1)}} - \left(\bar{s}_m(\xi) - \bar{A}\right) \sin m h_m = o\left(m|h_m|\right) = o(1)$$ [55];

$$(-1)^{\frac{u-1}{2}+r} \frac{s_m^{2(r-1)}\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) - s_m^{2(r-1)}\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2(r-1)}} + \bar{s}_m(\xi) \to \bar{A}$$ [56];

$$s_m^{2(r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi - h_m) = o\left(m^{2r}|h_m|\right) = o\left(m^{2r-1}\right);$$

$$s_m^{2(r-1)}\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) - s_m^{2(r-1)}\left(\xi - \frac{k\pi}{m}\right) = o\left(m^{2(r-1)}\right).$$

---

[54]) Man beachte $r = 1$!

[55]) Für $r = 1$ vgl. Rogosinski 1.

[56]) Für $r = 1$ gilt diese Formel schon im Falle $(\bar{c})$; vgl. [57]).

$$(\bar{c})\quad \begin{cases} (-1)^{r-1}\dfrac{s_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-s_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)}{2m^{2(r-1)}}-(\bar{s}_m(\xi)-\bar{A})\sin m h_m \\ \quad +(\bar{\sigma}_{m-1}(\xi)-\bar{A})\{2(r-1)\sin m h_m+m h_m\cdot\cos m h_m\}=o(m|h_m|)=o(1)^{57}); \\ s_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-s_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)=\underset{(*)}{\begin{cases} o(m^{2r+1}|h_m|)=o(m^{2r}) \\ o(m^{2r}|h_m|)=o(m^{2r-1}) \end{cases}}; \\ s_m^{2(r-1)}\left(\xi+\dfrac{k\pi}{m}\right)-s_m^{2(r-1)}\left(\xi-\dfrac{k\pi}{m}\right)=o(m^{2r-1}). \end{cases}$$

II. $\varphi(x,y)=x^{2r-1}\left(\dfrac{\sin y}{y}\right)^{2\varrho-1}$; $r\geqq\varrho\geqq 1$ ganz; $x_m=\dfrac{1}{m}$, $y_m=h_m\neq 0$ [58],

$$(\bar{\varkappa})\ [59]\quad \sum_{\nu=0}^{2\varrho-1}(-1)^\nu\binom{2\varrho-1}{\nu}s_m^{2(r-\varrho)}(\xi+\{2(\varrho-\nu)-1\}h_m)$$
$$=\underset{(*)}{\begin{cases} o(m^{2r+\varkappa-1}|h_m|^{2\varrho-1})=o(m^{2(r-\varrho)+\varkappa}) \\ o(m^{2r}|h_m|^{2\varrho-1})=o(m^{2(r-\varrho)+1}) \end{cases}}.$$

$$(\overline{2\varkappa-1})\quad \sum_{\nu=0}^{2\varkappa-1}(-1)^\nu\binom{2\varkappa-1}{\nu}s_m^{2(r-\varkappa)}\left(\xi+\{2(\varkappa-\nu)-1\}\frac{k\pi}{m}\right)=o(m^{2(r-\varkappa)}).$$

4. Koppelungen der Abschnittsableitungen ungerader Ordnung:

I. $\varphi(x,y)=x^{2r-1}\cos y$; $x_m=\dfrac{1}{m}$, $y_m=h_m$;

$$\gamma_m=(-1)^{r-1}\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2m^{2r-1}},$$

$$(\bar{a})\quad s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)=o(m^{2r-1}).$$

$$(\bar{b})\quad \begin{cases} (-1)^{r-1}\dfrac{s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2m^{2r-1}}-(\bar{s}_m(\xi)-\bar{A})\cos m h_m\to 0; \\ (-1)^{k+r}\dfrac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2m^{2r-1}}+\bar{s}_m(\xi)\to\bar{A}; \\ s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)=o(m^{2r}); \\ s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\dfrac{u\pi}{2m}\right)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\dfrac{u\pi}{2m}\right)=o(m^{2r-1}); \end{cases}$$

---

[57] Man beachte auch $h_m=\dfrac{k\pi}{2m}$ und $h_m=\dfrac{\tau}{m}$, $\operatorname{tg}\tau=-\dfrac{\tau}{2(r-1)}$; vgl. [56] für $r=1$.

[58] Man beachte $r=\varrho$. In Formel $(\overline{2\varkappa-1})$ ist $\varrho=\varkappa$ gesetzt.

[59] Wenn $2\varrho>\varkappa+2$ darf h_m eine beliebige Nullfolge durchlaufen.

$$(\bar{c})\quad \begin{cases} (-1)^{r-1}\dfrac{s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2m^{2r-1}} - (\bar{s}_m(\xi)-\bar{A})\cos m h_m \\ \qquad + (\bar{\sigma}_{m-1}(\xi)-\bar{A})\{(2r-1)\cos m h_m - m h_m \sin m h_m\} \to 0\ ^{60}); \\ s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) = \underset{(*)}{\begin{cases} o(m^{2r+1}) \\ o(m^{2r}) \end{cases}}; \\ s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\dfrac{u\pi}{2m}\right)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\dfrac{u\pi}{2m}\right) = o(m^{2r}). \end{cases}$$

II. $\varphi(x,y) = x^{2r-1}(\cos y)^{\varkappa};\ x_m = \dfrac{1}{m},\ y_m = \dfrac{u\pi}{2m}.$

$$(\bar{\varkappa})\qquad \sum_{\nu=0}^{\varkappa}\binom{\varkappa}{\nu} s_m^{(2r-1)}\left(\xi+(\varkappa-2\nu)\frac{u\pi}{2m}\right) = o(m^{2r-1}).$$

III. $\varphi(x,y) = x^{2r+1}\left(\dfrac{\sin y}{y}\right)^{2\varrho};\ r \geqq \varrho \geqq 1$ ganz; $x_m = \dfrac{1}{m},\ y_m = h_m \neq 0.$

$$(\bar{\varkappa})^{61})\qquad \sum_{\nu=0}^{2\varrho}(-1)^{\nu}\binom{2\varrho}{\nu} s_m^{2(r-\varrho)+1}(\xi+2(\varrho-\nu)h_m) = \underset{(*)}{\begin{cases} o(m^{2r+\varkappa+1}h_m^{2\varrho}) = o(m^{2(r-\varrho)+\varkappa+1}) \\ o(m^{2(r+1)}h_m^{2\varrho}) = o(m^{2(r-\varrho+1)}) \end{cases}}.$$

$$(\overline{2\varkappa})\qquad \sum_{\nu=0}^{2\varkappa}(-1)^{\nu}\binom{2\varkappa}{\nu} s_m^{2(r-\varkappa)+1}\left(\xi+(\varkappa-\nu)\frac{g\pi}{m}\right) = o(m^{2(r-\varkappa)+1}).$$

5. Bildungen aus den $\sigma_m(x)$:

Die Formeln (ā) *bzw.* (b̄) *aus* 2. *bis* 4. *bleiben in den Fällen* (b̄) *bzw.* (c̄) *richtig, wenn man ihnen die* s_m *durch die* σ_m *ersetzt* (vgl. § 2, 6.).

§ 4.

Anwendung auf Fouriersche Reihen.

1. Die Ergebnisse des § 1 und 2 lassen sich in mancher Hinsicht verbessern, wenn man spezieller voraussetzt, daß die trigonometrische Reihe $T(x)$ aus (1) die Fouriersche Reihe einer Lebesgue-integrierbaren Funktion $f(x)$ der Periode 2π ist.

---

[60]) Man beachte $h_m = \dfrac{u\pi}{2m}$ und $h_m = \dfrac{\sigma}{m}$, $\operatorname{tg}\sigma = \dfrac{2r-1}{\sigma}$.

[61]) Wenn $2\varrho > \varkappa+1$ ist, darf h_m eine beliebige Nullfolge durchlaufen. In Formel $(\overline{2\varkappa})$ ist $\varrho = \varkappa$ gesetzt.

Hinreichende Bedingungen für die Konvergenzvoraussetzung (10 a) gibt die Konvergenztheorie der Fourierschen Reihen[6]). Für die Voraussetzungen (10 b) bzw. (10 c) sind bekanntlich die Bedingungen

$$\text{(11)}\qquad \text{(b) } \frac{1}{t}\int_0^t |\varphi(\tau)-A|\,d\tau \to 0; \quad \text{(c) } \frac{1}{t}\int_0^t \varphi(\tau)\,d\tau \to A,$$
$$t \to 0, \quad \varphi(t) = \varphi_\xi(t) = \frac{f(\xi+t)+f(\xi-t)}{2}$$

hinreichend[8])[10]). (11 b) ist für „fast alle ξ" (sogar mit $A = f(\xi)$) erfüllt[9]), *so daß alle Formeln* (b) *des* § 2 (*und erst recht die für* $\varkappa \geqq 1$) *für fast alle* ξ *mit* $A = f(\xi)$ *gelten.*

Allgemeiner folgt aus

$$\text{(11 }(\varkappa+1)\text{)}\qquad \frac{\varkappa}{t^\varkappa}\int_0^t \varphi(\tau)\,(t-\tau)^{\varkappa-1}\,d\tau \to A, \qquad t \to 0, \qquad \varkappa \geqq 1$$

die (C, $\varkappa+1$)-Summierbarkeit der Fourierreihe in $x = \xi$ zum Werte A[62]).

2. *Die Fourierkoeffizienten bilden Nullfolgen*[12]). *Daher sind bei Fourierreihen der Satz* I* *und aus dem* § 2 *die Formeln* (*) *anwendbar.*

3. *Unter der Voraussetzung* (11 b) *ist* $s_m(\xi) = o(\log m)$[13]).

Die Formeln (3 b*) und (3 b**) aus § 1, 4 gelten daher, wenn (11 b) erfüllt ist, schon unter der Annahme

$$(\alpha)\qquad m P_m = Q + O\left(\frac{1}{\log m}\right).$$

Ebenso kann in Satz III ($\varkappa = 1$) die erste Bedingung (32**) durch

$$(\beta)\qquad \varphi(P) = O\left(\frac{1}{\log|P|}\right)$$

ersetzt werden.

Weiter ist unter der Voraussetzung (11 b), *also fast überall,* $\gamma_m = o(\log m)$. Es ist also z. B. in Verschärfung gewisser Formeln des § 2, immer unter der Voraussetzung (11 b):

$$s_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r}\log m); \quad s_m^{(2r)}(\xi+h_m) + s_m^{(2r)}(\xi-h_m) = o(m^{2r}\log m);$$

$$\text{(b)}\qquad \frac{s_m(\xi+h_m)+s_m(\xi-h_m)}{2} = o(\log m); \quad \frac{1}{2h_m}\int_{\xi-h_m}^{\xi+h_m} s_m(x)\,dx = o(\log m);$$

$$s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) = o(m^{2r}\log m|h_m|) = o(m^{2r-1}\log m).$$

---

[62]) Plessner, S. 1362; Jacob 1. Aus (11 ($\varkappa+1$)) folgt sogar die (C, $\varkappa+\delta$)-Summierbarkeit, $\delta > 0$. Wegen Verschärfungen von (11) siehe Jacob 1.

4. *Unter der Voraussetzung* (11 c) *ist*[63])

(35) $$s_m(\xi) = o(\sqrt{m}); \qquad \sigma_m(\xi) = o(\log m).$$

Die Formeln (3 c*) und (3 c**) aus § 1, 4 gelten dann also, wenn 3 (c erfüllt ist; und (3 c***) gilt, wenn

(α) $$m P_m = Q + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

erfüllt ist.

Ebenso können in Satz III ($\varkappa = 2$) die beiden ersten Bedingungen (32**) durch

(β) $$\varphi(P) = O\left(\frac{1}{\sqrt{|P|}}\right); \qquad P \cdot \operatorname{grad} \varphi(P) = O\left(\frac{1}{\log |P|}\right)$$

ersetzt werden.

Wetter ist unter der Voraussetzung (11 c) *stets* $\gamma_m = o(\sqrt{m})$. *Ist aber*

(γ) $$m P_m = Q + O\left(\frac{\log m}{\sqrt{m}}\right); \qquad \varphi(Q) = 0$$

so ist sogar $\gamma_m = o(\log m)$.

Es ist also z. B. in Verschärfung gewisser Formeln des § 2, immer unter der Voraussetzung (11 c):

$$s_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r}\sqrt{m}); \quad s_m^{(2r)}(\xi + h_m) + s_m^{(2r)}(\xi - h_m) = o(m^{2r}\sqrt{m});$$

$$s_m^{(2r)}\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m^{(2r)}\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right) = o(m^{2r}\log m);$$

$$s_m(\xi + h_m) + s_m(\xi - h_m) = o(\sqrt{m});$$

$$s_m\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) + s_m\left(\xi - \frac{u\pi}{2m}\right) = o(\log m);$$

3) $$\frac{1}{2h_m}\int_{\xi - h_m}^{\xi + h_m} s_m(x)\,dx = o(\sqrt{m}); \qquad \int_{\xi - \frac{k\pi}{m}}^{\xi + \frac{k\pi}{m}} s_m(x)\,dx = o\left(\frac{\log m}{m}\right);$$

$$s_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{(2r-1)}(\xi - h_m) = o(m^{2r}\sqrt{m}\,|h_m|) = o(m^{2r-1}\sqrt{m});$$

$$s_m^{(2r-1)}\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) - s_m^{(2r-1)}\left(\xi - \frac{k\pi}{m}\right) = o(m^{2r-1}\log m);$$

$$\sigma_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r}\log m); \quad \sigma_m^{(2r)}(\xi + h_m) + \sigma_m^{(2r)}(\xi - h_m) = o(m^{2r}\log m);$$

$$\sigma_m(\xi + h_m) + \sigma_m(\xi - h_m) = o(\log m);$$

$$\sigma_m^{(2r-1)}(\xi + h_m) - \sigma_m^{(2r-1)}(\xi - h_m) = o(m^{2r}\log m\,|h_m|) = o(m^{2r-1}\log m).$$

[63]) Wang, S. 95. Aus (11 ($\varkappa + 1$)) folgt nach Jacob 1 $\mu_m^{(\varkappa)}(\xi) = o(\log m)$, rend Abschätzungen für die $\mu_m^{(i)}(\xi)$, $i < \varkappa$, in der Literatur anscheinend noch gegeben sind.

5. Zum Schluß sei noch einmal darauf aufmerksam gemacht, das alle Formeln (b) des § 2 mit $A(\xi) = f(\xi)$ gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall von f gelten. Denn dort ist die Fourierreihe gleichmäßig gegen $f(\xi)$ (C, 1)-summierbar[11]).

§ 5.

Anwendung auf die zur Fourierreihe konjugierte Reihe.

1. Es sei jetzt $\overline{T}(x)$ aus $(\overline{1})$ die zur Fourierreihe $T(x)$ von $x = \xi$ konjugierte trigonometrische Reihe.

Die Voraussetzungen $(\overline{10})$ des § 3 sind in der Theorie der konjugierten Fourierreihe nicht immer zweckmäßig. Vielmehr sind, wie schon in der Einleitung vermerkt wurde, jetzt die Annahmen

$$(\overline{13})\quad \text{(a)}\ \bar{s}_m^*(\xi) = \bar{s}_m(\xi) - \psi_m \to \bar{A};\quad \text{(b)}\ \bar{\sigma}_m^*(\xi) = \bar{\sigma}_m(\xi) - \psi_m \to \bar{A};$$
$$\text{(c)}\ \bar{\tau}_m^*(\xi) = \bar{\tau}_m(\xi) - \psi_m \to \bar{A}$$

vorzuziehen, wobei

$$(12)\quad \psi_m = \psi_m(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{m}}^{\pi} \psi(t)\operatorname{ctg}\frac{t}{2}\,dt;\quad \psi(t) = \psi_\xi(t) = f(\xi + t) - f(\xi - t)$$

gesetzt ist.

Für $(\overline{13\,a})$ gibt die „Konvergenztheorie" der konjugierten Fourierreihe hinreichende Bedingungen[15]). Für $(\overline{13\,b})$ bzw. $(\overline{13\,c})$ sind

$$(\overline{14})\quad \text{(b)}\ \frac{1}{t}\int_0^t |\psi(\tau) - D|\,d\tau \to 0;\quad \text{(c)}\ \frac{1}{t}\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau \to D,\quad t \to +0$$

hinreichend[16])[17]), und zwar ist dann resp.

$$(\overline{15})\quad \text{(a)}\ \bar{A} = \frac{D}{\pi}C;\quad \text{(b)}\ \bar{A} = \frac{D}{\pi}(C - 1);\quad \text{(c)}\ \bar{A} = \frac{D}{\pi}\left(C - \frac{3}{2}\right)$$

zu setzen[18]), wobei C die Eulersche Konstante bedeutet. Die Bestimmung $(\overline{15\,a})$ ist an solchen „Sprungstellen" zu nehmen, wo die Konvergenzbedingung $(\overline{13\,a})$ erfüllt ist. *Die Bedingungen* $(\overline{14})$ *sind wieder für fast alle* ξ (*sogar mit* $D = 0$) *erfüllt*[16]). Auf Summierung höherer Ordnung werden wir, wegen der dann eintretenden rechnerischen Komplikationen, nicht eingehen[64]).

---

[64]) Wegen $(C, \varkappa)$-Summierbarkeit der konjugierten Fourierreihe siehe Paley, Verblunsky; vgl. Plessner **2**, S. 1362.

Man beachte noch, daß aus ($\overline{13}$) dann und nur dann die entsprechenden Summierungsbedingungen ($\overline{10}$) des § 3 folgen, wenn in ξ die „konjugierte Funktion“

$$(36) \qquad \bar{f}(\xi) = \lim_{\eta \to +0} \frac{1}{2\pi} \int_{\eta}^{\pi} \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{0}^{\pi} \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt$$

existiert[65]). Unter den Voraussetzungen ($\overline{14}$) ist dazu jedenfalls $D = 0$ notwendig, während für $D \neq 0$ die konjugierte Fourierreihe stets eigentlich divergiert[14]). Da $\bar{f}(\xi)$ für fast alle ξ existiert, ist *die konjugierte Fourierreihe fast überall* $(C, 1)$*-summierbar zum Werte* $\bar{f}(\xi)$[15]).

Da die Fourierkoeffizienten Nullfolgen bilden, sind bei Anwendung der Ergebnisse des § 3 *die Formeln* (*) *anwendbar.*

2. Um unter den Voraussetzungen ($\overline{14}$) die allgemeinen Sätze des § 1 auf die konjugierte Fourierreihe anwenden zu können, müssen wir, bei Anwendung auf die Größen in ($\overline{13}$), zunächst den Beitrag, den die ψ_m liefern, gesondert betrachten.

Hierzu sei vorerst bemerkt, daß aus ($\overline{14\,c}$) mit $D = 0$, also aus

$$(\overline{14\,c^*}) \qquad \int_{0}^{t} \psi(\tau)\, d\tau = \Psi(t) = o(t)$$

die Abschätzung

$$(\alpha) \qquad \int_{1/m}^{\pi} \psi(t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt = -\Psi\left(\frac{1}{m}\right) \operatorname{ctg} \frac{1}{2m} + \frac{1}{2} \int_{1/m}^{\pi} \frac{\Psi(t)}{\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt$$

$$= o(1) + o\left(\int_{1/m}^{\pi} \frac{dt}{t} \right) = o(\log m)$$

und allgemeiner aus ($\overline{14\,c}$) die asymptotische Relation

$$(37) \qquad \psi_m = \frac{D}{2\pi} \int_{1/m}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{1/m}^{\pi} (\psi(t) - D) \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt$$

$$= -\frac{D}{\pi} \log\left(\sin \frac{1}{2m}\right) + o(\log m) \simeq \frac{D}{\pi} \log m$$

folgt.

3. In dieser Nummer fassen wir die ψ_k aus (12) als die (C, 2)-Mittel einer $\sum_{0}^{\infty} c_k$ auf, während die s_k, σ_k resp. die zu diesen $\tau_k = \psi_k$ gehörigen Abschnitte bzw. (C, 1)-Mittel der Reihe sind.

Ferner machen wir zunächst die Voraussetzung ($\overline{14\,c^*}$), also $D = 0$.

---

[65]) Unter den Voraussetzungen ($\overline{14}$) folgt aus $\lim_{m \to \infty} \int_{1/m}^{\pi}$ leicht $\lim_{\eta \to 0} \int_{\eta}^{\pi}$. Das Integral rechts in (36) ist ein Cauchy-Lebesguesches Integral.

Hilfssatz 1c: *Unter den Voraussetzungen von Satz* I c *über* $\varphi(P)$ *und* P_m *folgt aus* $(\overline{14\,c^*})$ *für die zu den* $\tau_k = \psi_k$ *gehörigen Mittelbildungen* g_m *die Relation*

$$(38c)\qquad (g_m - \psi_m \varphi(0)) - (s_m - \psi_m)\,\varphi(m P_m) + (\sigma_{m-1} - \psi_m)\,(m P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m P_m)) \to 0.$$

Beweis: Wir setzen $\tau_0 = 0$. Nach 2 (α) ist

$$(\alpha)\qquad \tau_k = \frac{1}{4\pi} \int_{1/k}^{\pi} \frac{\Psi(t)}{\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt + o(1) \equiv \tau_k^* + o(1); \qquad \tau_0^* = 0.$$

Mit den Bezeichnungen des Beweises von Satz I (§ 1, 2), aber $\gamma_m = g_m$ gesetzt, wird also nach § 1, 2 (β) und (ζ)

$$(\beta)\qquad t_m = \gamma_m - s_m \varphi(m P_m) - m \sigma_{m-1} \Delta^{(1)}_{m,\,m-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{m-3} \tau_k^* \binom{k+2}{2} \Delta^{(3)}_{m,\,k} + \tau^*_{m-2} \binom{m}{2} \Delta^{(2)}_{m,\,m-2} + o(1).$$

Wird

$$(\gamma)\qquad S_k^* = \tau_k^* \binom{k+2}{2} - \tau^*_{k-1} \binom{k+1}{2}$$

$$= (\tau_k^* - \tau^*_{k-1}) \binom{k+1}{2} + (k+1)\,\tau_k^*; \quad \tau^*_{-1} = 0,$$

gesetzt, so ist weiter nach § 1, 2 (α)

$$(\delta)\qquad t_m = \sum_{k=0}^{m-2} S_k^* \Delta^{(2)}_{m,\,k} + o(1).$$

Hier ist, unter Beachtung von § 1, 2 (ε), da aus $(\overline{14\,c^*})$

$$(\varepsilon)\qquad \int_{1/m}^{1} \frac{|\Psi(t)|}{t^4}\, dt = o\Big(\int_{1/m}^{1} \frac{dt}{t^3}\Big) = o(m^2)$$

folgt,

$$(\zeta)\qquad \sum_{k=0}^{m-2} (\tau_k^* - \tau^*_{k-1}) \binom{k+1}{2} \Delta^{(2)}_{m,\,k}$$

$$= \tau_1^* \Delta^{(2)}_{m,\,1} + \frac{1}{4\pi} \sum_{k=2}^{m-2} \Delta^{(2)}_{m,\,k} \binom{k+1}{2} \int_{1/k}^{1/k-1} \frac{\Psi(t)}{\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt$$

$$= O\Big(\frac{1}{m^2}\Big) + O\Big(\frac{1}{m^2} \sum_{2}^{m-2} k^2 \int_{1/k}^{1/k-1} \frac{|\Psi(t)|}{t^2}\, dt\Big)$$

$$= o(1) + O\Big(\frac{1}{m^2} \int_{1/m-2}^{1} \frac{|\Psi(t)|}{t^4}\, dt\Big) = o(1).$$

Wir finden also

$$(\eta) \qquad t_m = \sum_{k=0}^{m-2} \tau_k^* (k+1)\, \Delta_{m,k}^{(2)} + o(1).$$

Jetzt werde weiter

$$(\vartheta) \qquad s_k^* = \tau_k^* (k+1) - \tau_{k-1}^* k = (\tau_k^* - \tau_{k-1}^*) k + \tau_k^*$$

gesetzt, so daß nach § 1, 2 (α)

$$(\iota) \qquad t_m = \sum_{k=0}^{m-1} s_k^* \Delta_{m,k}^{(1)} - m \tau_{m-1}^* \Delta_{m,m-1}^{(1)} + o(1)$$

wird. Hier ist wieder, wegen ($\overline{14\,c^*}$) und § 1, 2 (ε),

$$(\varkappa) \qquad \sum_{k=0}^{m-1} (\tau_k^* - \tau_{k-1}^*) k \Delta_{m,k}^{(1)} = \tau_1^* \Delta_{m,1}^{(1)} + O\Big(\frac{1}{m} \sum_{2}^{m-1} k \int_{1/k}^{1/k-} \frac{|\Psi(t)|}{t^2}\, dt\Big)$$

$$= O\Big(\frac{1}{m}\Big) + O\Big(\frac{1}{m} \int_{1/m-1}^{1} \frac{|\Psi(t)|}{t^3}\, dt\Big) = o(1),$$

also

$$(\lambda) \qquad t_m = \sum_{k=0}^{m-1} \tau_k^* \Delta_{m,k}^{(1)} - m \tau_{m-1}^* \Delta_{m,m-1}^{(1)} + o(1).$$

Weiter wird wegen

$$(\mu) \qquad \Delta_{m,k}^{(1)} = \varphi(k P_m) - \varphi((k+1) P_m); \quad \varphi(k P_m) = \varphi(0) + O\Big(\frac{k}{m}\Big)$$

und unter Beachtung von ($\varkappa$)

$$(\nu) \qquad \begin{aligned} \sum_{k=0}^{m-1} \tau_k^* \Delta_{m,k}^{(1)} &= \sum_{k=0}^{m-1} (\tau_k^* - \tau_{k-1}^*)\, \varphi(k P_m) - \tau_{m-1}^* \varphi(m P_m) \\ &= \tau_{m-1}^* (\varphi(0) - \varphi(m P_m)) + O\Big(\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} |\tau_k^* - \tau_{k-1}^*|\, k\Big) \\ &= \tau_{m-1}^* (\varphi(0) - \varphi(m P_m)) + o(1), \end{aligned}$$

so daß

$$(o) \qquad t_m = \tau_{m-1}^* (\varphi(0) - \varphi(m P_m) - m \Delta_{m,m-1}^{(1)}) + o(1)$$

folgt. Wegen

$$(\pi) \qquad \tau_m^* - \tau_{m-1}^* = \frac{1}{4\pi} \int_{1/m}^{1/m-1} \frac{\Psi(t)}{\sin^2 \frac{t}{2}}\, dt = o\Big(\int_{1/m}^{1/m-1} \frac{dt}{t}\Big) = o(1)$$

und (α) wird weiter

$$(\varrho) \qquad t_m = \psi_m (\varphi(0) - \varphi(m P_m)) - m \psi_m \Delta_{m,m-1}^{(1)} + o(1).$$

Schließlich ist nach (π) und 2 (α)

$$\psi_{m-1} - \psi_{m-2} = (\tau_{m-1}^* - \tau_{m-2}^*) + o(1) = o(1); \quad m \psi_m = o(m \log m);$$

$$(\sigma) \qquad \begin{aligned} m \sigma_{m-1} = S_{m-1} &= S_{m-1}^{(2)} - S_{m-2}^{(2)} = \binom{m+1}{2} \psi_{m-1} - \binom{m}{2} \psi_{m-2} \\ &= \binom{m}{2} (\psi_{m-1} - \psi_{m-2}) + m \psi_{m-1} = o(m^2), \end{aligned}$$

so daß $\Delta^{(1)}_{m,\,m-1}$ in (β) und (ϱ) wegen § 1, 3 (β) durch $-(P_m \cdot \operatorname{grad} \varphi(m P_m))$ ersetzt werden darf. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

4. Entsprechend beweist man die beiden folgenden Sätze:

Hilfssatz 1a: *Unter den Voraussetzungen von Satz* Ia *über* $\varphi(P)$ *und* P_m *folgt aus* $(\overline{14\,c^*})$ *für die zu den* $s_k = \psi_k$ *gehörigen Mittelbildungen* g_m *die Relation*

(38a) $$g_m - \psi_m \varphi \cdot (0) \to 0.$$

Hilfssatz 1b: *Unter den Voraussetzungen von Satz* Ib *über* $\varphi(P)$ *und* P_m *folgt aus* $(\overline{14\,c^*})$ *für die zu den* $\sigma_k = \psi_k$ *gehörigen Mittelbildungen* g_m *die Relation*

(38b) $$(g_m - \psi_m \varphi(0)) - (s_m - \psi_m)\, \varphi(m P_m) \to 0.$$

5. Die allgemeine Voraussetzung $(\overline{14\,c})$ läßt sich in bekannter Weise durch „Elimination des Sprunges" auf die speziellere $(\overline{14\,c^*})$ zurückführen. Für die Funktion

(39) $$F(x) = F_\xi(x) \equiv \operatorname{sign}(x - \xi) \cdot \frac{D}{2}$$

gilt in $|x - \xi| < \pi$ die Fouriersche Entwicklung[19])

(40) $$F(x) = \frac{2D}{\pi} \sum_{u=1}^{\infty} \frac{\sin u\,(x - \xi)}{u}.$$

Für $F_\xi(x)$ ist $\psi_\xi(t) \equiv D$, also

(41) $$\Psi_m = \frac{D}{2\pi} \int_{1/m}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{t}{2}\, dt = -\frac{D}{\pi} \log\left(\sin \frac{1}{2m}\right) = \frac{D}{\pi} \log 2m + o(1).$$

Ist also für $f(x)$ in $x = \xi$ die Voraussetzung $(\overline{14\,c})$ erfüllt, so für $f^*(x) = f(x) - F_\xi(x)$ die Voraussetzung $(\overline{14\,c^*})$.

Für die Abschnitte bzw. die (C, 1)- und (C, 2)-Mittel der konjugierten Reihe von $\sum_{u=1}^{\infty} \frac{\sin u\,x}{u}$, d. i. $\sum_{u=1}^{\infty} \frac{\cos u\,x}{u}$, in $x = 0$ ist

$$S_m = \sum_1^m \frac{1}{u} = \sum_1^m \frac{1}{n} - \sum_1^g \frac{1}{g} = \log m + C - \tfrac{1}{2}\left(\log \frac{m}{2} + C\right) + o(1)$$
$$= \tfrac{1}{2}(\log 2m + C) + o(1),$$

(42) $$\bar{\Sigma}_m = \sum_1^m \frac{1}{u}\left(1 - \frac{u}{m+1}\right) = \tfrac{1}{2}(\log 2m + C - 1) + o(1),$$

$$\bar{T}_m = \frac{\sum_1^m \frac{1}{u}\binom{m+2-u}{2}}{\binom{m+2}{2}} = \sum_1^m \frac{1}{u} - \frac{m+\frac{3}{2}}{\binom{m+2}{2}} \sum_{u=1}^m 1 + \frac{1}{2\binom{m+2}{2}} \sum_{u=1}^m u$$
$$= \tfrac{1}{2}(\log 2m + C - \tfrac{3}{2}) + o(1),$$

wo C die Eulersche Konstante bezeichnet. Endlich bedeute

$$G_m = \sum_1^m \frac{1}{u}\,\varphi(u P_m), \tag{16}$$

die zu den $c_u = \frac{1}{u}$, $c_0 = 0$ gehörige Mittelbildung γ_m.

6. An die Stelle des allgemeinen Satzes Ic tritt jetzt in der Theorie der konjugierten Fourierreihe der folgende

Satz IVc: *Ist unter den Voraussetzungen von Satz* Ic *über* $\varphi(P)$ *und* P_m *in* $x = \xi$ *die Bedingung*

$$\frac{1}{t}\int_0^t \psi(\tau)\,d\tau \to D, \qquad t \to +0 \tag{$\overline{14\,c}$}$$

erfüllt, so gilt für die aus den $c_k = \beta_k(\xi)$ *gebildeten Mittelbildungen* γ_m *die Relation*

$$\left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi}G_m\right) - \varphi(0)\left\{\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right\} - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}C\right)\varphi(m P_m) + \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right)(m P_m \cdot \operatorname{grad}\varphi(m P_m)) \to 0, \tag{$\overline{43\,c}$}$$

wo C *die Eulersche Konstante bezeichnet.*

Beweis: Es sei zunächst $D = 0$, so daß nach ($\overline{13\,c}$) und ($\overline{15\,c}$)

$$\bar{\tau}_m^*(\xi) = \bar{\tau}_m(\xi) - \psi_m(\xi) \to 0 \tag{$\overline{13\,c^*}$}$$

gilt. Nach Satz Ic wird also mit den g_m, s_m, σ_m des Hilfssatzes 1c

$$(\alpha)\quad (\gamma_m - g_m) - (\bar{s}_m(\xi) - s_m)\varphi(m P_m) + (\bar{\sigma}_{m-1}(\xi) - \sigma_{m-1})(m P_m \cdot \operatorname{grad}\varphi(m P_m)) \to 0.$$

Aus (38c) folgt jetzt (man darf, da die $\beta_k(\xi)$ eine Nullfolge bilden, nach § 1, 3 (γ), $\bar{\sigma}_{m-1}(\xi)$ durch $\bar{\sigma}_m(\xi)$ ersetzen)

$$\overline{(43\,c^*)}\quad (\gamma_m - \varphi(0)\,\psi_m(\xi)) - \bar{s}_m^*(\xi)\,\varphi(m P_m) + \bar{\sigma}_m^*(\xi)\,(m P_m \cdot \operatorname{grad}\varphi(m P_m)) \to 0$$

d. i. die Behauptung in diesem Falle.

Wenn $D \neq 0$ ist, wende man diese Formel (43c*) auf die Funktion $f^*(x) = f(x) - F_\xi(x)$ aus 5. an[66]). Dann wird

$$(\beta)\quad (\gamma_m - G_m) - \varphi(0)\{\psi_m(\xi) - \Psi(m)\} - \left\{\bar{s}_m^*(\xi) - \left(\frac{2D}{\pi}\bar{S}_m - \Psi_m\right)\right\}\varphi(m P_m) + \left\{\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \left(\frac{2D}{\pi}\bar{\Sigma}_m - \Psi_m\right)\right\}(m P_m \cdot \operatorname{grad}\varphi(m P_m)) \to 0,$$

und hieraus folgt wegen (41) und (42) die Behauptung.

---

[66]) Man beachte, daß aus ($\overline{13\,c^*}$) dabei $\bar{\tau}_m^*(\xi) - \left(\frac{2D}{\pi}\bar{T}_m - \Psi_m\right) \to 0$, also nach (41), (42) gerade ($\overline{13\,c}$), ($\overline{15\,c}$) folgt.

7. Entsprechend ergeben die Hilfssätze 1a und 1b die beiden folgenden Sätze

Satz IVa: *Ist unter den Voraussetzungen von Satz* Ia *über* $\varphi(P)$ *und* P_m *an der „Sprungstelle“* [67]) $x = \xi$ *die Bedingung*

$$\overline{(15\,a)} \qquad \bar{s}_m^*(\xi) \to \frac{D}{\pi} C$$

erfüllt, so gilt für die aus den $c_k = \beta_k(\xi)$ *gebildeten Mittelbildungen* γ_m *die Relation*

$$\overline{(43\,a)} \qquad \left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left\{\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right\} \to 0.$$

Satz IVb: *Ist unter den Voraussetzungen von Satz* Ib *über* $\varphi(P)$ *und* P_m *in* $x = \xi$ *die Bedingung*

$$\overline{(14\,b)} \qquad \frac{1}{t}\int_0^t |\psi(\tau) - D|\, d\tau \to 0, \quad t \to +0$$

erfüllt, so gilt für die aus den $c_k = \beta_k(\xi)$ *gebildeten Mittelbildungen* γ_m *die Relation*

$$\overline{(43\,b)} \left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left\{\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right\} - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C\right)\varphi(mP_m) \to 0,$$

wo C *die Eulersche Konstante bezeichnet.*

8. Die beiden folgenden Hilfssätze entsprechen den Abschätzungen aus § 4, 4 bei der Fourierreihe:

Hilfssatz 2b [20]): *Unter der Voraussetzung* $\overline{(14\,b)}$ *ist*

$$\overline{(44\,b)} \qquad \bar{s}_m^*(\xi) = o(\log m).$$

Hilfssatz 2c: *Unter der Voraussetzung* $\overline{(14\,c)}$ *ist*

$$\overline{(44\,c)} \qquad (\alpha)\ \bar{s}_m^*(\xi) = o(\sqrt{m}); \quad (\beta)\ \bar{\sigma}_m^*(\xi) = o(\log m).$$

Der Hilfssatz 2b ist bekannt [20]). Wegen (41), (42) darf ferner $D = 0$, also $\overline{(14\,c^*)}$ vorausgesetzt werden:

Beweis von (α): Es ist

$$(45)\quad \bar{s}_m(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(t)\Big(\sum_{k=1}^{m}{}' \sin kt\Big)\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \psi(t)\left\{\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{\cos(2m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right\} dt.$$

[67]) D. h. $\overline{(14\,c)}$ ist in $x = \xi$ erfüllt.

Hier ist

$$\int_0^{1/m} \psi(t)\Big(\sum_1^m \sin kt\Big)\,dt = \Psi\Big(\frac{1}{m}\Big)\sum_1^m \sin\frac{k}{m} - \int_0^{1/m} \Psi(t)\Big(\sum_1^m k\cos kt\Big)\,dt$$

$$= O\Big(m\Big|\Psi\Big(\frac{1}{m}\Big)\Big|\Big) + o\Big(m^2\int_0^{1/m} t\,dt\Big) = o(1),$$

$$(\gamma)\quad \int_{1/m}^{1/\sqrt{m}} \psi(t)\frac{\cos(2m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt = \Psi(t)\frac{\cos(2m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\Big|_{1/m}^{1/\sqrt{m}} - \int_{1/m}^{1/\sqrt{m}} \Psi(t)\left(\frac{\cos(2m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)'dt$$

$$= O\Big(m\Big|\Psi\Big(\frac{1}{m}\Big)\Big| + \sqrt{m}\,\Big|\Psi\Big(\frac{1}{\sqrt{m}}\Big)\Big|\Big) + o\Big(\int_{1/m}^{1/\sqrt{m}} t\Big(\frac{m}{t}+\frac{1}{t^2}\Big)dt\Big) = o(\sqrt{m}),$$

$$\int_{1/\sqrt{m}}^{\pi} \psi(t)\frac{\cos(2m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}dt = \frac{1}{\sin\frac{1}{2\sqrt{m}}}\int_{1/\sqrt{m}}^{\vartheta} \psi(t)\cos(2m+1)\frac{t}{2}\,dt = o(1\sqrt{m}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} < \vartheta < \pi,$$

woraus (α) folgt.

Beweis von (β): Es ist

$$(46)\quad \bar{\sigma}_m(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\Big(\sum_1^m \sin kt\Big(1-\frac{k}{m+1}\Big)\Big)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \psi(t)\Big\{\operatorname{ctg}\frac{t}{2} - \frac{1}{m+1}\cdot\frac{\sin(m+1)t}{2\sin^2\frac{t}{2}}\Big\}dt.$$

Hier ist

$$\int_0^{1/m} \psi(t)\Big(\sum_1^m \sin kt\Big(1-\frac{k}{m+1}\Big)\Big)dt$$

$$= \Psi\Big(\frac{1}{m}\Big)\cdot\sum_1^m \sin\frac{k}{m}\Big(1-\frac{k}{m+1}\Big) - \int_0^{1/m} \Psi(t)\Big(\sum_1^m k\cos kt\Big(1-\frac{k}{m+1}\Big)\Big)dt$$

$$(\delta)\qquad = O\Big(m\Big|\Psi\Big(\frac{1}{m}\Big)\Big|\Big) + o\Big(m^2\int_0^{1/m} t\,dt\Big) = o(1),$$

$$\frac{1}{m+1}\int_{1/m}^{\pi} \psi(t)\frac{\sin(m+1)t}{\sin^2\frac{t}{2}}dt = -\frac{\Psi\Big(\frac{1}{m}\Big)}{m+1}\cdot\frac{\sin\frac{m+1}{m}}{\sin^2\frac{1}{2m}} - \frac{1}{m+1}\int_{1/m}^{\pi} \Psi(t)\left(\frac{\sin(m+1)t}{\sin^2\frac{t}{2}}\right)'dt$$

$$= O\Big(m\Big|\Psi\Big(\frac{1}{m}\Big)\Big|\Big) + o\Big(\frac{1}{m}\int_{1/m}^{\pi} t\cdot\frac{m}{t^2}\,dt\Big) = o(\log m),$$

woraus (β) folgt.

9. Für die Anwendung der Sätze IV sind wieder Bemerkungen, analog denen in § 4, 4 bei Fourierreihen, von Bedeutung.

I: Unter der *Voraussetzung von Satz* IV a vereinfacht sich die Relation $\overline{(43\,a)}$ zu

$\overline{(43\,a^*)}$ [68])
$$\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m \to 0,$$
wenn entweder $\varphi(0) = 0$ *ist oder*

(α)
$$\psi_m(\xi) = \frac{D}{\pi} \log 2m + o(1)$$
gilt. Das Letztere ist z. B. unter der Voraussetzung $\Psi(t) = O(t^\alpha)$, $\alpha > 1$, richtig.

II: Unter der *Voraussetzung von Satz* IV b wird, wenn

(β)
$$m P_m = Q + O\left(\frac{1}{\log m}\right)$$
ist, $\overline{(43\,b)}$ zu

$\overline{(43\,b^*)}$ $\left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right) - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C\right)\varphi(Q) \to 0.$

Ist also $\varphi(Q) = 0$, *so erhält man*

$\overline{(43\,b^{**})}$ $\left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right) \to 0.$

Konvergiert umgekehrt die linke Seite von $\overline{(43\,b^{**})}$ *und ist* $\varphi(Q) \neq 0$, *so ist* $\bar{s}_m^*(\xi)$ *bereits konvergent. Man beachte den wichtigen Fall* $\varphi(0) = 0$ [68]).

III. Unter der *Voraussetzung von Satz* IV c wird, wenn (β) erfüllt ist, $\overline{(43\,c)}$ zu

$\overline{(43\,c^*)}$ $\left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right)$
$$- \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C\right)\varphi(m P_m) + \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right)(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q)) \to 0.$$

Ist insbesondere $Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q) = 0$, *so erhält man*

$\overline{(43\,c^{**})}$ $\left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right) - \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C\right)\varphi(m P_m) \to 0.$

Konvergiert umgekehrt die linke Seite von $\overline{(43\,c^{**})}$ *und ist* $Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q) \neq 0$, *so ist bereits* $\bar{s}_m^*(\xi)$ *konvergent.*

Um $\overline{(43\,c^*)}$ in der Form

$\overline{(43\,c^{***})}$ $\left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right)$
$$- \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C\right)\varphi(Q) + \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right)(Q \cdot \operatorname{grad} \varphi(Q)) \to 0$$

[68]) $\overline{(43\,a^*)}$ besagt die Äquikonvergenz der entsprechenden linearen Mittelbildung bei einer beliebigen konjugierten Fourierreihe mit der bei der speziellen Funktion $F(x)$ aus (40).

schreiben zu können, muß man

$$(\gamma) \qquad m P_m = Q + O\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right)$$

voraussetzen. *Ist nun* $\varphi(Q) = 0$, *so wird*

$$\overline{(43\,c^{****})} \quad \left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right) + \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right)(Q \cdot \operatorname{grad}\varphi(Q)) \to 0.$$

Konvergiert umgekehrt die linke Seite von $\overline{(43\,c^{****})}$, *und ist* $\varphi(Q) \neq 0$, *so ist bereits* $\bar{s}_m^*(\xi)$ *konvergent.*

Ist schließlich $\varphi(Q) = 0$ *und* $Q \cdot \operatorname{grad}\varphi(Q) = 0$, *so gilt*

$$\overline{(43\,c^{*****})} \quad \left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi} G_m\right) - \varphi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right) \to 0.$$

Wenn umgekehrt die linke Seite von $\overline{(43\,c^{*****})}$ *konvergiert,* $\varphi(Q) = 0$ *aber* $Q \cdot \operatorname{grad}\varphi(Q) \neq 0$ *ist, so ist bereits* $\bar{\sigma}_m^*(\xi)$ *konvergent. Ist aber* $\varphi(Q) \neq 0$, *so ist sogar* $\bar{s}_m^*(\xi)$ *konvergent* (vgl. § 1, 4, II). *Man beachte wieder den wichtigen Fall* $\varphi(0) = 0$[68]).

10. Von besonderem Interesse sind die beiden folgenden Bemerkungen zu den Sätzen IV:

Satz Vb: *Unter den Annahmen von Satz* IVb *gilt*

$$\overline{(19\,b)} \qquad \frac{\gamma_m}{\log m} \to \frac{D}{\pi}\varphi(0).$$

Satz Vc: *Unter den Annahmen von Satz* IVc *gilt*

$$\overline{(19\,c)} \qquad \frac{\gamma_m - \bar{s}_m(\xi)\,\varphi(m P_m)}{\log m} - \frac{D}{\pi}(\varphi(0) - \varphi(m P_m)) \to 0,$$

und insbesondere, wenn

$$(\alpha) \qquad m P_m = Q + O\left(\frac{\log m}{\sqrt{m}}\right); \quad \varphi(Q) = 0$$

ist, wieder

$$\overline{(19\,c^*)} \qquad \frac{\gamma_m}{\log m} \to \frac{D}{\pi}\varphi(0).$$

Der Beweis beruht auf den Hilfssätzen 2, der Formel (37) und der asymptotischen Gleichung

$$(\beta) \quad G_m = \sum_{u=1}^{m} \frac{1}{u}\varphi(u P_m) = \varphi(0)\sum_{u=1}^{m}\frac{1}{u} + O\left(\frac{1}{m}\sum_{u=1}^{m} 1\right) = \frac{\varphi(0)}{2}\log m + O(1).$$

Man beachte noch, daß aus $\overline{(19\,c)}$ $\gamma_m = o(\sqrt{m})$ *folgt.*

11. In den folgenden Nummern bringen wir wieder durch Spezialisierung von φ Anwendungen der obigen Sätze. Auf die Einzelheiten der

Rechnung wird nicht eingegangen. Die Buchstaben $(\overline{a})$, $(\overline{b})$, $(\overline{c})$ beziehen sich bzw. auf die Annahmen der Sätze IV und V gleichen Buchstabens.

Alle Formeln $(\overline{b})$ *und* $(\overline{c})$ *gelten, sogar mit* $D = 0$, *für fast alle* ξ.

12. **Konjugierte Abschnitte:**

$$\varphi(x) \equiv 1; \quad \gamma_m = \bar{s}_m(\xi).$$

$$(\overline{b}) \qquad \frac{\bar{s}_m(\xi)}{\log m} \to \frac{D}{\pi}.$$

Das ist die mit dem Hilfssatze 2b äquivalente Sprungformel von Lukàcs [21]). Aus ihr ist der Satz von Pringsheim [14]), daß *die konjugierte Fourierreihe an Sprungstellen (mit* $D \neq 0$*) eigentlich divergiert*, ersichtlich. Ferner folgt aus ihr, daß *eine Funktion mit Fourierkoeffizienten* $o\left(\frac{1}{n}\right)$ *keine Sprungstellen mit* $D \neq 0$ *besitzen kann.*

13. **Konjugierte Abschnittsableitungen gerader Ordnung:**

$$\varphi(x) = x^{2r}; \quad x_m = \frac{1}{m}; \quad \gamma_m = (-1)^r \frac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}}; \quad G_m = \frac{1}{m^{2r}} \sum_1^m u^{2r-1} \to \frac{1}{4r},$$

$$(\overline{a}) \qquad (-1)^r \frac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to \frac{D}{\pi \cdot 2r},$$

$$(\overline{b}) \qquad (-1)^r \frac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C\right) \to \frac{D}{\pi \cdot 2r}; \quad \bar{s}_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r} \log m),$$

$$(\overline{c}) \qquad \begin{cases} (-1)^r \dfrac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \dfrac{D}{\pi} C\right) + 2r\left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \dfrac{D}{\pi}(C-1)\right) \to \dfrac{D}{\pi \cdot 2r}, \\ \dfrac{(-1)^{r-1} \dfrac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} + \bar{s}_m(\xi)}{\log m} \to \dfrac{D}{\pi}; \quad \bar{s}_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r}\sqrt{m}). \end{cases}$$

Wir schließen zwei Bemerkungen an:

I. *Wenn die Fourierkoeffizienten* $O\left(\frac{1}{n}\right)$ *sind, folgt im Falle* $(\overline{14\,b})$, *bereits die Konvergenz der* $\bar{s}_m^*(\xi)$.

In der Tat ergibt dann $(\overline{b})$, bei festem r, die Relation [69])

$$(\alpha) \qquad \bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi} C = o(1) + O\left(\frac{1}{r}\right),$$

woraus mit $r \to \infty$ die Behauptung folgt (vgl. § 1, 7).

II. Genau so beweist man aus der zweiten Formel $(\overline{c})$:

Wenn die Fourierkoeffizienten $O\left(\frac{\log n}{n}\right)$ *sind, so gilt die Lukàcssche Formel* $(\overline{12\,b})$ *bereits im Falle* $(\overline{14\,c})$.

---

[69]) Das $O\left(\frac{1}{r}\right)$ in (α) gilt gleichmäßig in r.

14. Abschnittsableitungen ungerader Ordnung:

$$\varphi(x) = x^{2r-1}; \quad x_m = \frac{1}{m}; \quad \gamma_m = (-1)^{r-1}\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}};$$

$$G_m = \frac{1}{m^{2r-1}}\sum_1^m u^{2(r-1)} \to \frac{1}{2(2r-1)},$$

(a)[24] $$(-1)^{r-1}\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} \to \frac{D}{\pi(2r-1)},$$

(b) $$(-1)^{r-1}\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}C\right) \to \frac{D}{\pi(2r-1)};$$

$$s_m^{(2r-1)}(\xi) = o(m^{2r-1}\log m),$$

(c)
$$\begin{cases} (-1)^{r-1}\dfrac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} - \left(\bar{s}_m^*(\xi) - \dfrac{D}{\pi}C\right) + (2r-1)\left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \left(\dfrac{D}{\pi}C - 1\right)\right) \\ \qquad \to \dfrac{D}{\pi(2r-1)}, \\ \dfrac{(-1)^r\dfrac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} + \bar{s}_m(\xi)}{\log m} \to \dfrac{D}{\pi}; \quad s_m^{(2r-1)}(\xi) = o(m^{2r-1}\sqrt{m}). \end{cases}$$

Wir können jetzt die Bemerkung 13, I verschärfen:

Wenn die Fourierkoeffizienten $O\left(\frac{1}{n}\right)$ *sind, folgt im Falle* (14 c) *bereits die Konvergenz der* $\bar{s}_m^*(\xi)$.

In der Tat ergibt Subtraktion beider Formeln (c) aus 13 und 14

(α) $$(-1)^{r-1}\left\{\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} + \frac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}}\right\} - \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right) \to \frac{D}{\pi}\cdot\frac{1}{2r(2r-1)},$$

und hieraus folgt zunächst, wie oben, $\bar{\sigma}_m^*(\xi) \to \frac{D}{\pi}(C-1)$ und dann $\bar{s}_m^*(\xi) \to \frac{D}{\pi}C$.

15. Koppelung der konjugierten Abschnitte[70]**:**

I. $$\varphi(x) = \cos x; \quad x_m = h_m; \quad \gamma_m = \frac{\bar{s}_m(\xi+h_m) + \bar{s}_m(\xi-h_m)}{2}.$$

(b) $$\frac{\bar{s}_m(\xi+h_m) + \bar{s}_m(\xi-h_m)}{2\log m} \to \frac{D}{\pi},$$

(c)
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\log m}\left\{\dfrac{\bar{s}_m(\xi+h_m)+\bar{s}_m(\xi-h_m)}{2} - \bar{s}_m(\xi)\cos m h_m\right\} - \dfrac{D}{\pi}(1-\cos m h_m) \to 0, \\ \dfrac{\bar{s}_m\left(\xi+\dfrac{u\pi}{2m}\right)+\bar{s}_m\left(\xi-\dfrac{u\pi}{2m}\right)}{2\log m} \to \dfrac{D}{\pi}; \\ \dfrac{\bar{s}_m\left(\xi+\dfrac{k\pi}{m}\right)+2(-1)^{k-1}\bar{s}_m(\xi)+\bar{s}_m\left(\xi-\dfrac{k\pi}{m}\right)}{4\log m} \to \dfrac{D}{\pi}\dfrac{1+(-1)^{k-1}}{2}. \end{cases}$$

[70]) Vgl. auch 17, III, dieses Paragraphen.

II. $\varphi(x) = \frac{\sin x}{x}$; $x_m = h_m \neq 0$; $\gamma_m = \frac{1}{2h_m}\int_{\xi - h_m}^{\xi + h_m} \bar{s}_m(x)\,dx$,

$(\overline{b})$ $\frac{1}{2h_m \log m}\int_{\xi - h_m}^{\xi + h_m} \bar{s}_m(x)\,dx \to \frac{D}{\pi}$, $(\overline{c})$ $\frac{m}{2k\pi \log m}\int_{\xi - \frac{k\pi}{m}}^{\xi + \frac{k\pi}{m}} \bar{s}_m(x)\,dx \to \frac{D}{\pi}$.

16. **Koppelung der Abschnitte:**

$\varphi(x,y) = x \cdot \frac{\sin y}{y}$; $x_m = \frac{1}{m}$; $y_m = h_m \neq 0$; $\gamma_m = \frac{s_m(\xi + h_m) - s_m(\xi - h_m)}{2mh_m}$

$$G_m = \frac{1}{mh_m}\sum_1^m \frac{\sin u h_m}{u} = \frac{1}{2mh_m}\int_0^{mh_m} \frac{\sin t}{t}\,dt + o(1),$$

$(\overline{a})$ $\frac{s_m(\xi + h_m) - s_m(\xi - h_m)}{2} - \frac{D}{\pi}\int_0^{mh_m} \frac{\sin t}{t} = o(m|h_m|) = o(1)$,

$(\overline{b})$ $\frac{s_m\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) - s_m\left(\xi - \frac{k\pi}{m}\right)}{2} \to \frac{D}{\pi}\int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t}$ [22]);

$s_m(\xi + h_m) - s_m(\xi - h_m) = o(m \log m\,|h_m|) = o(\log m)$,

$(\overline{c})$
$$\begin{cases} \frac{1}{\log m}\left\{\frac{s_m(\xi + h_m) - s_m(\xi - h_m)}{2} - \bar{s}_m(\xi)\sin m h_m\right\} + \frac{D}{\pi}\sin m h_m \\ \qquad = o(m|h_m|) = o(1), \\ s_m(\xi + h_m) - s_m(\xi - h_m) = o(m\sqrt{m}\,|h_m|) = o(\sqrt{m}); \\ s_m\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) - s_m\left(\xi - \frac{k\pi}{m}\right) = o(\log m). \end{cases}$$

17. **Koppelung der konjugierten Abschnittsableitungen gerader Ordnung:**

I. $\varphi(x,y) = x^{2r}\cos y$; $x_m = \frac{1}{m}$, $y_m = h_m$;

$$\gamma_m = (-1)^r \frac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi + h_m) + \bar{s}_m^{(2r)}(\xi - h_m)}{2m^{2r}};$$

$$G_m = \frac{1}{m^{2r}}\sum_1^m u^{2r-1}\cos u h_m = \frac{(-1)^{r-1}}{2^{2r}}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau = \frac{mh_m}{2}} + o(1)$$ [71]).

---

[71]) Es sei m ungerade. Dann ist

$$\sum_1^m \sin u t = \frac{1 - \cos(m+1)t}{2\sin t} = \frac{\sin^2(m+1)\frac{t}{2}}{t} + \frac{1 - \cos(m+1)t}{2}\left\{\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right\}.$$

Wegen

$$\frac{d^k}{dt^k}\left\{\frac{1 - \cos(m+1)t}{2}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\right\} = O(m^k)$$

(a) $$\frac{\bar{s}_m^{(2r)}(\xi+h_m)+\bar{s}_m^{(2r)}(\xi-h_m)}{2m^{2r}}+\frac{D}{2^{2r-1}\pi}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{mh_m}{2}}\to 0.$$

(b) $$\bar{s}_m^{(2r)}(\xi+h_m)+\bar{s}_m^{(2r)}(\xi-h_m)=o(m^{2r}\log m);$$

$$\frac{\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r}}\to-\frac{D}{2^{2r-1}\pi}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{u\pi}{4}}.$$

(c) $$\bar{s}_m^{(2r)}(\xi+h_m)+\bar{s}_m^{(2r)}(\xi-h_m)=o(m^{2r}\sqrt{m});$$

$$\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)=o(m^{2r}\log m).$$

II. $\varphi(x,y)=x^{2r}\cos^2 y;\quad x_m=\frac{1}{m};\quad y_m=\frac{h_m}{2}.$

(c) $$\frac{\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{u\pi}{m}\right)+2\bar{s}_m^{(2r)}(\xi)+\bar{s}_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{u\pi}{m}\right)}{4m^{2r}}\to\frac{D}{\pi}\left\{\frac{(-1)^r}{4r}-\frac{1}{2^{2r}}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{u\pi}{2}}\right\}.$$

III. $\varphi(x,y)=x^{2r}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2;\quad x_m=\frac{1}{m};\quad y_m=\frac{h_m}{2}\neq 0;$

$$\gamma_m=(-1)^r\frac{\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-2\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)}{m^{2r}h_m^2}$$

$$G_m=\frac{2}{m^{2r}h_m^2}\sum_1^m u^{2(r-1)-1}(1-\cos u h_m)$$

$$=\frac{(-1)^{r-1}}{2^{2(r-1)+1}}\left\{\frac{1}{\tau^2}\left(\frac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_0^{\tau}\right\}_{\tau=\frac{mh_m}{2}}+o(1)\ ^{72}).$$

---

ist

$$G_m=\frac{(-1)^{r-1}}{m^{2r}}\frac{d^{2r-1}}{dt^{2r-1}}\left(\sum_1^m\sin ut\right)_{t=h_m}=\frac{(-1)^{r-1}}{m^{2r}}\frac{d^{2r-1}}{dt^{2r-1}}\left(\frac{\sin^2(m+1\frac{t}{2})}{t}\right)_{t=h_m}+o(1).$$

Mit $\tau=\frac{m+1}{2}t$ folgt die obige Formel.

[72]) Es ist

$$\frac{d^{2k}}{dt^{2k}}\left\{\frac{1-\cos(m+1)t}{2}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)\right\}=O(m^{2k}|t|)$$

und

$$G_m=\frac{2(-1)^{2r-1}}{m^{2r}h_m^2}\int_0^{h_m}\frac{d^{2(r-1)}}{dt^{2(r-1)}}\left(\sum_1^m\sin ut\right)dt$$

$$=\frac{2(-1)^{r-1}}{m^{2r}h_m^2}\frac{d^{2(r-1)-1}}{dt^{2(r-1)-1}}\left(\frac{\sin^2(m+1)\frac{t}{2}}{t}\right)_0^{h_m}+o(1).$$

(a) $$\frac{\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-2\,\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)}{4\,m^{2(r-1)}}$$
$$+\frac{D}{2^{2(r-1)}\pi}\left(\frac{d^{2(r-1)-1}}{d\,\tau^{2(r-1)-1}}\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_0^{\frac{m\,h_m}{2}}=o\,(m^2h_m^2)=o\,(1),$$

(b) $$\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-2\,\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)=o\,(m^{2r}\log m\cdot h_m^2)$$
$$=o\,(m^{2(r-1)}\log m),$$

(c) $$\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-2\,\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)=o\,(m^{2r}\sqrt{m}\cdot h_m^2)$$
$$=o\,(m^{2(r-1)}\sqrt{m}),$$

(c) $$\frac{\bar{s}_m^{2(r-1)}\left(\xi+\frac{2k\pi}{m}\right)-2\,\bar{s}_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar{s}_m^{2(r-1)}\left(\xi-\frac{2k\pi}{m}\right)}{4\,m^{2(r-1)}}$$
$$\to-\frac{D}{2^{2(r-1)}\pi}\left(\frac{d^{2(r-1)-1}}{d\,\tau^{2(r-1)-1}}\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_0^{k\pi}.$$

18. **Koppelung der konjugierten Abschnittsableitungen ungerader Ordnung:**

$$\varphi(x,y)=x^{2r}\frac{\sin y}{y};\quad x_m=\frac{1}{m},\quad y_m=h_m\neq 0;$$
$$\gamma_m=(-1)^r\frac{\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2\,m^{2r}h_m},$$

$$G_m=\frac{1}{m^{2r}h_m}\sum_1^m u^{2(r-1)}\sin u\,h_m=\frac{(-1)^{r-1}}{2^{2r}}\left\{\frac{1}{\tau}\frac{d^{2(r-1)}}{d\,\tau^{2(r-1)}}\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right\}_{\tau=\frac{m\,h_m}{2}}+o\,(1)^{73}).$$

(a) $$\frac{\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2\,m^{2r-1}}+\frac{D}{\pi\,2^{2(r-1)}}\left(\frac{d^{2(r-1)}}{d\,\tau^{2(r-1)}}\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{m\,h_m}{2}}$$
$$=o\,(m\,|\,h_m\,|)=o\,(1).$$

(b) $$\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)=o\,(m^{2r}\log m\,|h_m|)=o\,(m^{2r-1}\log m),$$

(b) $$\frac{\bar{s}_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-\bar{s}_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2\,m^{2r-1}}\to-\frac{D}{\pi\,2^{2(r-1)}}\left(\frac{d^{2(r-1)}}{d\,\tau^{2(r-1)}}\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_{\tau=\frac{k\pi}{2}}.$$

(c) $$\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-\bar{s}_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)=o\,(m^{2r}\sqrt{m}\,|h_m|)=o\,(m^{2r-1}\sqrt{m}),$$

(c) $$\bar{s}_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-\bar{s}_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)=o\,(m^{2r-1}\log m).$$

Mit $\tau=\frac{m+1}{2}t$ folgt die obige Formel.

Man beachte den Fall $r=1$; *hier bedeutet*

$$\frac{d^{-1}}{d\,\tau^{-1}}\left(\frac{\sin^2\tau}{\tau}\right)_0^{\tau}=\int_0^{\tau}\frac{\sin^2 t}{t}\,dt.$$

[73]) Vgl. Fußnoten [71]) und [72]).

19. **Koppelung der Abschnittsableitungen gerader Ordnung:**

$$\varphi(x, y) = x^{2r-1}\left(\frac{\sin y}{y}\right); \quad x_m = \frac{1}{m}, \; y_m = h_m \neq 0;$$

$$\gamma_m = (-1)^{r-1}\frac{s_m^{2(r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi - h_m)}{2\, m^{2r-1} h_m},$$

$$G_m = \frac{1}{m^{2r-1} h_m}\sum_0^m u^{2(r-1)-1} \sin u h_m$$

$$= \frac{(-1)^{r-1}}{2}\left\{\frac{1}{\tau}\frac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)\right\}_{\tau = m h_m} + o(1)\ ^{74}).$$

(a) $$\frac{s_m^{2(r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi - h_m)}{2\, m^{2(r-1)}} - \frac{D}{\pi}\frac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\tau = m h_m}$$
$$= o(m\,|h_m|) = o(1).$$

(b)
$$\begin{cases} s_m^{2(r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi - h_m) = o(m^{2r-1}\log m\,|h_m|) \\ \qquad\qquad = o(m^{2(r-1)}\log m), \\ \dfrac{s_m^{2(r-1)}\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) - s_m^{2(r-1)}\left(\xi - \frac{k\pi}{m}\right)}{2\, m^{2(r-1)}} \to \dfrac{D}{\pi}\dfrac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\tau = k\pi}. \end{cases}$$

(c)
$$\begin{cases} s_m^{2(r-1)}(\xi + h_m) - s_m^{2(r-1)}(\xi - h_m) = o(m^{2r-1}\sqrt{m}\,|h_m|) \\ \qquad\qquad = o(m^{2(r-1)}\sqrt{m}), \\ s_m^{2(r-1)}\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) - s_m^{2(r-1)}\left(\xi - \frac{k\pi}{m}\right) = o(m^{2(r-1)}\log m). \end{cases}$$

---

74) Für $r = 1$ vgl. 16. Für ungerades m ist

$$\sum_1^m \cos u t = \frac{\sin(m+1)t}{2\sin t} = \frac{\sin(m+1)t}{2t} + \frac{\sin(m+1)t}{2}\left\{\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right\}.$$

Wegen

$$\frac{d^u}{dt^u}\left\{\frac{\sin(m+1)t}{2}\left(\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}\right)\right\} = O(m^u\,|t|)$$

ist

$$G_m = \frac{(-1)^{r-1}}{m^{2r-1}h_m}\frac{d^{2(r-1)-1}}{dt^{2(r-1)-1}}\left(\sum_1^m \cos u t\right)_{t = h_m}$$

$$= \frac{(-1)^{r-1}}{m^{2r-1}h_m}\frac{d^{2(r-1)-1}}{dt^{2(r-1)-1}}\left(\frac{\sin(m+1)t}{2t}\right)_{t = h_m} + o(1).$$

Mit $\tau = (m+1)t$ folgt die obige Formel.

20. Koppelung der Abschnittsableitungen ungerader Ordnung:

I. $\varphi(x,y) = x^{2r-1}\cos y; \quad x_m = \frac{1}{m},\ y_m = h_m;$

$$\gamma_m = (-1)^{r-1}\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2m^{2r-1}};$$

$$G_m = \frac{1}{m^{2r-1}}\sum_1^m u^{2(r-1)}\cos u h_m$$

$$= \frac{(-1)^{r-1}}{2}\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\tau=m h_m} + o(1)\ ^{75}).$$

(a) $$\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2m^{2r-1}} - \frac{D}{\pi}\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\tau=m h_m} \to 0.$$

(b) $$s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) = o(m^{2r-1}\log m);$$

$$\frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r-1}} \to \frac{D}{\pi}\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\frac{u\pi}{2}}.$$

(c) $$s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) = o(m^{2r-1}\sqrt{m});$$

$$s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right) = o(m^{2r-1}\log m).$$

II. $\varphi(x,y) = x^{2r-1}\cos^2 y; \quad x_m = \frac{1}{m},\ y_m = \frac{h_m}{2}.$

(c) $$\frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{u\pi}{m}\right)+2s_m^{(2r-1)}(\xi)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{u\pi}{m}\right)}{4m^{2r-1}}$$

$$\to \frac{D}{\pi}\left\{\frac{(-1)^{r-1}}{2(2r-1)}+\frac{1}{2}\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{u\pi}\right\}.$$

III. $\varphi(x,y) = x^{2r+1}\left(\frac{\sin y}{y}\right)^2; \quad x_m = \frac{1}{m},\ y_m = \frac{h_m}{2} \neq 0;$

$$\gamma_m = (-1)^r\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-2s_m^{(2r-1)}(\xi)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{m^{2r+1}h_m^2};$$

$$G_m = \frac{2}{m^{2r+1}h_m^2}\sum_1^m u^{2(r-1)}(1-\cos u h_m)$$

$$= \left\{\frac{(-1)^r}{\tau^2}\left(\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^{\tau}_0\right\}_{\tau=m h_m} + o(1)\ ^{76}).$$

---

[75]) Man beachte Fußnote [74]) und $\frac{d^k}{dt^k}\left\{\frac{\sin(m+1)t}{2}\left(\frac{1}{\sin t}-\frac{1}{t}\right)\right\} = O(m^k)$.

[76]) Es ist $G_m = \frac{2}{m^{2r+1}h_m^2}\int_0^{h_m}\left(\sum_1^m u^{2r-1}\sin ut\right)dt$; vgl. Fußnote [74]).

(a) $$\frac{s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-2s_m^{(2r-1)}(\xi)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{4m^{(2r-1)}} - \frac{D}{2\pi}\left(\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_0^{mh_m} = o(m^2h_m^2) = o(1$$

(b) $$s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-2s_m^{(2r-1)}(\xi)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) = o(m^{2r+1}\log m\, h_m^2) = o(m^{2r-1}\log m)$$

(c) $$\begin{cases} s_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-2s_m^{(2r-1)}(\xi)+s_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) \\ \qquad = o(m^{2r+1}\sqrt{m}\,h_m^2) = o(m^{2r-1}\sqrt{m}); \\ \dfrac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{2k\pi}{m}\right)-2s_m^{(2r-1)}(\xi)+s_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{2k\pi}{m}\right)}{4m^{2r-1}} \\ \qquad \to \frac{D}{\pi}\left(\frac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_0^{2k\pi}. \end{cases}$$

21. **Bildungen aus den $\sigma_m(x)$ und $\bar\sigma_m(x)$:** Wenn

(α) $$\varphi(P) = \varphi(x, P^*) = (1-x)\,\psi(P^*), \qquad x_m = \frac{1}{m}$$

ist, so wird (43c) zu

(43c′) $$\left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi}G_m\right) - \psi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right) + \left(\bar\sigma_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right)\psi(mP_m^*) \to 0,$$

woraus weiter

(19c′) $$\frac{\gamma_m}{\log m} \to \frac{D}{\pi}\psi(0)$$

folgt. Und wenn

(β) $$mP_m^* = Q + O\left(\frac{1}{\log m}\right); \qquad \psi(Q) = \psi(0) = 0$$

ist, so gilt

(43c″) $$\gamma_m - \frac{2D}{\pi}G_m \to 0.$$

Ebenso wird (43b) zu

(43b′) $$\left(\gamma_m - \frac{2D}{\pi}G_m\right) - \psi(0)\left(\psi_m(\xi) - \frac{D}{\pi}\log 2m\right) \to 0.$$

22. **Einige Beispiele:**

I. $\psi \equiv 1$; $\gamma_{m+1} = \bar\sigma_m(\xi)$.

c) $$\frac{\bar\sigma_m(\xi)}{\log m} \to \frac{D}{\pi}.$$

II. $\psi(y) = y^{2r}$; $y_{m+1} = \frac{1}{m}$; $\gamma_{m+1} = (-1)^r\frac{\bar\sigma_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}}$.

$$G_{m+1} = \frac{1}{m^{2r}}\sum_1^m u^{2r-1}\left(1-\frac{u}{m+1}\right) \to \frac{1}{4r(2r+1)}.$$

(b) $$(-1)^r \frac{\bar{\sigma}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} \to \frac{D}{2r(2r+1)\pi}.$$

(c) $$(-1)^r \frac{\bar{\sigma}_m^{(2r)}(\xi)}{m^{2r}} - \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right) \to \frac{D}{2r(2r+1)\pi};$$
$$\bar{\sigma}_m^{(2r)}(\xi) = o(m^{2r}\log m).$$

III. $$\psi(y) = y^{2r-1}; \quad y_{m+1} = \frac{1}{m}; \quad \gamma_{m+1} = (-1)^{r-1}\frac{\sigma_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}};$$
$$G_{m+1} = \frac{1}{m^{2r-1}}\sum_1^m u^{2(r-1)}\left(1 - \frac{u}{m+1}\right) \to \frac{1}{4r(2r-1)}.$$

(b)[23] $$(-1)^{r-1}\frac{\sigma_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} \to \frac{D}{2r(2r-1)\pi}.$$

(c) $$(-1)^{r-1}\frac{\sigma_m^{(2r-1)}(\xi)}{m^{2r-1}} - \left(\bar{\sigma}_m^*(\xi) - \frac{D}{\pi}(C-1)\right) \to \frac{D}{2r(2r-1)\pi};$$
$$\sigma_m^{(2r-1)}(\xi) = o(m^{2r-1}\log m).$$

IV. a: $$\psi(y) = \cos y; \quad y_{m+1} = h_m; \quad \gamma_{m+1} = \frac{\bar{\sigma}_m(\xi+h_m) + \bar{\sigma}_m(\xi-h_m)}{2}.$$

(c) $$\frac{\bar{\sigma}_m(\xi+h_m) + \bar{\sigma}_m(\xi-h_m)}{2\log m} \to \frac{D}{\pi}.$$

b: $$\psi(y) = \frac{\sin y}{y}; \quad y_{m+1} = h_m \neq 0; \quad \gamma_{m+1} = \frac{1}{2h_m}\int_{\xi-h_m}^{\xi+h_m}\bar{\sigma}_m(x)\,dx.$$

(c) $$\frac{1}{2h_m\log m}\int_{\xi-h_m}^{\xi+h_m}\bar{\sigma}_m(x)\,dx \to \frac{D}{\pi}.$$

V. $$\psi(y,z) = y\frac{\sin z}{z}; \quad y_{m+1} = \frac{1}{m}, \; z_{m+1} = h_m \neq 0;$$
$$\gamma_{m+1} = \frac{\sigma_m(\xi+h_m) - \sigma_m(\xi-h_m)}{2mh_m}.$$
$$G_{m+1} = \frac{1}{mh_m}\sum_1^m \frac{1}{u}\left(1 - \frac{u}{m+1}\right)\sin u h_m$$
$$= \frac{1}{2mh_m}\left\{\int_0^{mh_m}\frac{\sin t}{t}dt - \frac{\sin^2(m+1)\frac{h_m}{2}}{\frac{(m+1)h_m}{2}}\right\} + o(1)$$
$$= \frac{1}{2mh_m}\int_0^{\frac{mh_m}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt + o(1)\,[77].$$

[77] Vgl. 16. und die Identität
$$\int_0^{2\tau}\frac{\sin t}{t}dt = \frac{1-\cos 2\tau}{2\tau} + \int_0^{2\tau}\frac{1-\cos t}{t^2}dt = \frac{\sin^2\tau}{\tau} + \int_0^{\tau}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$

$$\overline{\text{b)}}\quad \frac{\sigma_m(\xi+h_m)-\sigma_m(\xi-h_m)}{2}-\frac{D}{\pi}\int_0^{\frac{m\,h_m}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt = o(m\,|h_m|) = o(1).$$

$$\overline{\text{c)}}\quad \begin{cases} \sigma_m(\xi+h_m)-\sigma_m(\xi-h_m) = o(m\log m\,|h_m|) = o(\log m), \\ \dfrac{\sigma_m\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-\sigma_m\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2} \to \dfrac{D}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{k\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt. \end{cases}$$

Die nun folgenden Formeln unter VI bis IX werden ähnlich bewiesen wie die unter 17 bis 20:

VI.

$$\overline{\text{b)}}\quad \begin{cases} \dfrac{\bar\sigma_m^{(2r)}(\xi+h_m)+\bar\sigma_m^{(2r)}(\xi-h_m)}{2\,m^{2r}}+\dfrac{D}{\pi}\dfrac{d^{2r-1}}{d\,\tau^{2r-1}}\left(\dfrac{\tau-\sin\tau}{\tau^2}\right)_{\tau=m\,h_m} \to 0, \\ \dfrac{\bar\sigma_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-2\,\bar\sigma_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar\sigma_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)}{4\,m^{2r-1}} \\ \qquad +\dfrac{D}{2\pi}\dfrac{d^{2(r-1)-1}}{d\,\tau^{2(r-1)-1}}\left(\dfrac{\tau-\sin\tau}{\tau^2}\right)_0^{m\,h_m} = o(m^2h_m^2) = o(1). \end{cases}$$

$$\overline{\text{c)}}\quad \begin{cases} \bar\sigma_m^{(2r)}(\xi+h_m)+\bar\sigma_m^{(2r)}(\xi-h_m) = o(m^{2r}\log m); \\ \dfrac{\bar\sigma_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+\bar\sigma_m^{(2r)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2\,m^{2r}} \to -\dfrac{D}{2\pi}\dfrac{d^{2r-1}}{d\,\tau^{2r-1}}\left(\dfrac{\tau-\sin\tau}{\tau^2}\right)_{\tau=\frac{u\pi}{2}}; \\ \bar\sigma_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-2\,\bar\sigma_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar\sigma_m^{2(r-1)}(\xi-h_m) \\ \qquad = o(m^{2r}\log m\,h_m^2) = o(m^{2(r-1)}\log m); \\ \dfrac{\bar\sigma_m^{2(r-1)}\left(\xi+\frac{2k\pi}{m}\right)-2\,\bar\sigma_m^{2(r-1)}(\xi)+\bar\sigma_m^{2(r-1)}\left(\xi-\frac{2k\pi}{m}\right)}{4\,m^{2(r-1)}} \\ \qquad \to -\dfrac{D}{2\pi}\dfrac{d^{2(r-1)-1}}{d\,\tau^{2(r-1)-1}}\left(\dfrac{\tau-\sin\tau}{\tau^2}\right)_0^{2k\pi}. \end{cases}$$

VII.

$$\overline{\text{b)}}\quad \frac{\bar\sigma_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-\bar\sigma_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2\,m^{2r-1}}+\frac{D}{\pi}\frac{d^{2(r-1)}}{d\,\tau^{2(r-1)}}\left(\frac{\tau-\sin\tau}{\tau^2}\right)_{\tau=m\,h_m} = o(m\,|h_m|) = o(1).$$

$$\overline{\text{c)}}\quad \begin{cases} \bar\sigma_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-\bar\sigma_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) = o(m^{2r}\log m\,|h_m|) \\ \qquad = o(m^{2r-1}\log m); \\ \dfrac{\bar\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-\bar\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2\,m^{2r-1}} \to -\dfrac{D}{\pi}\dfrac{d^{2(r-1)}}{d\,\tau^{2(r-1)}}\left(\dfrac{\tau-\sin\tau}{\tau^2}\right)_{\tau=k\pi}. \end{cases}$$

VIII.

$$\overline{(b)}\qquad \frac{\sigma_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-\sigma_m^{2(r-1)}(\xi-h_m)}{2m^{2(r-1)}} - \frac{D}{2^{2(r-1)}\pi}\frac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\tau=\frac{mh_m}{2}} = o(m|h_m|) = o(1).$$

$$\overline{(c)}\qquad \begin{cases} \sigma_m^{2(r-1)}(\xi+h_m)-\sigma_m^{2(r-1)}(\xi-h_m) = o(m^{2r-1}\log m|h_m|) \\ \qquad\qquad = o(m^{2(r-1)}\log m); \\ \dfrac{\sigma_m^{2(r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)-\sigma_m^{2(r-1)}\left(\xi-\frac{k\pi}{m}\right)}{2m^{2(r-1)}} \to \dfrac{D}{2^{2(r-1)}\pi}\dfrac{d^{2(r-1)-1}}{d\tau^{2(r-1)-1}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\tau=\frac{k\pi}{2}}. \end{cases}$$

IX.

$$\overline{(b)}\qquad \begin{cases} \dfrac{\sigma_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+\sigma_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{2m^{2r-1}} - \dfrac{D}{2^{2r-1}\pi}\dfrac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\tau=\frac{mh_m}{2}} \to 0; \\ \dfrac{\sigma_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-2\sigma_m^{(2r-1)}(\xi)+\sigma_m^{(2r-1)}(\xi-h_m)}{4m^{2r-1}} \\ \qquad - \dfrac{D}{2^{2r}\pi}\dfrac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)^2\Bigg|_0^{\frac{mh_m}{2}} = o(m^2h_m^2) = o(1). \end{cases}$$

$$\overline{(c)}\qquad \begin{cases} \sigma_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)+\sigma_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) = o(m^{2r-1}\log m); \\ \dfrac{\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2m^{2r-1}} \to \dfrac{D}{2^{2r-1}\pi}\dfrac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\tau=\frac{u\pi}{4}}; \\ \sigma_m^{(2r-1)}(\xi+h_m)-2\sigma_m^{(2r-1)}(\xi)+\sigma_m^{(2r-1)}(\xi-h_m) \\ \qquad = o(m^{2r+1}\log m h_m^2) = o(m^{2r-1}\log m); \\ \dfrac{\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{2k\pi}{m}\right)-2\sigma_m^{(2r-1)}(\xi)+\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi-\frac{2k\pi}{m}\right)}{4m^{2r-1}} \\ \qquad \to \dfrac{D}{2^{2r}\pi}\dfrac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)^2\Bigg|_0^{k\pi}. \end{cases}$$

§ 6.

Abschnittsnäherungen der Fourierreihe und Gibbssche Erscheinung.

1. Wir behandeln in diesem Paragraphen solche „regulären“ Sprungstellen ξ, in denen gleichzeitig mindestens die beiden Voraussetzungen (11 c) und ($\overline{14\,c}$) erfüllt sind. D. h. es sollen in ξ die Grenzwerte

$$(27\,c)\qquad \frac{1}{t}\int_0^t f(\xi+\tau)\,d\tau \to A_+;\ \frac{1}{t}\int_0^t f(\xi-\tau)\,d\tau \to A_-,\quad t \to +0;$$

$$A = \frac{A_+ + A_-}{2};\quad D = A_+ - A_-$$

existieren. Da an diesen Stellen mindestens (10 c) und ($\overline{13\ c}$) gleichzeitig erfüllt sind, können die Resultate aus § 2 (bzw. § 4) und aus § 5 kombiniert werden.

Man beachte ferner, daß nach dem früheren „*fast alle* ξ" *regulär* (sogar mit $A = f(\xi)$, $D = 0$, also „Stetigkeitspunkte") sind.

Wir geben zunächst im folgenden einige genügend einfache solche Kombinationsergebnisse an. Die Doppelbuchstaben vor den Formeln weisen auf die feineren jeweils gemachten Voraussetzungen (10) und ($\overline{13}$) hin.

2. **Abschnittsnäherungen:** (Kombination von § 2, 3 und § 5, 16).

$$(\mathrm{a}, \bar{\mathrm{a}}) \qquad s_m(\xi + h_m) = A + \frac{D}{\pi}\int_0^{m h_m} \frac{\sin t}{t}\, dt + o(1);$$

$$(\mathrm{b}, \bar{\mathrm{a}})\ s_m\left(\xi + \frac{u\pi}{2m}\right) \to A + \frac{D}{\pi}\int_0^{\frac{u\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt; \quad (\mathrm{a}, \bar{\mathrm{b}})\ s_m\left(\xi + \frac{k\pi}{m}\right) \to A + \frac{D}{\pi}\int_0^{k\pi} \frac{\sin t}{t} dt;$$

$$(\mathrm{c}, \bar{\mathrm{b}}) \qquad s_m\left(\xi + \frac{u\pi}{m}\right) + s_m(\xi) \to 2A + \frac{D}{\pi}\int_0^{u\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Die Formel (a, ā) besagt diejenige Erscheinung, die wir in der Einleitung als „Gibbssches Verhalten im Nahen" bezeichnet hatten. *Es findet sich z. B. nach* § 1, 7 *und* § 5, 14 *bei Funktionen, deren Fourierkoeffizienten* $O\left(\frac{1}{n}\right)$ *sind, fast überall.*

Aus (a, $\bar{\mathrm{b}}$) *aber auch schon aus* (c, $\bar{\mathrm{b}}$) *folgt* $\left(h_m = \pm\frac{\pi}{m}\right)$, *daß die Abschnittskurven in* $x = \xi$ *mindestens die Gibbssche Strecke approximieren**).

Um schließen zu können, daß genau die Gibbssche Strecke approximiert wird, muß h_m in (a, ā) (Formel (25) der Einleitung) eine beliebige Nullfolge durchlaufen dürfen. In diesem Falle werden wir vom „Gibbsschen Verhalten" schlechthin sprechen.

Es ist nun beachtenswert, daß an regulären Stellen das durch die obigen Formeln gegebene Abschnittsverhalten auch umgekehrt für die angegebenen Voraussetzungen hinreichend ist.

---

*) Es gibt eine Teilfolge m_ν mit $s_{m_\nu}(\xi) \to A$, also ist im Falle (c, $\bar{\mathrm{b}}$)

$$s_{m_\nu}\left(\xi \pm \frac{\pi}{m_\nu}\right) \to A \pm \frac{D}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t}\, dt.$$

Den entsprechenden Schluß für den allgemeinsten Fall (c, $\bar{\mathrm{c}}$) habe ich nicht beweisen können.

Es sei etwa die Formel (b, $\bar{a}$) für ein festes Paar $\pm u$ erfüllt, so daß

$$(\alpha)\quad \frac{s_m\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)+s_m\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2}\to A;\quad \frac{s_m\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)-s_m\left(\xi-\frac{u\pi}{2m}\right)}{2}\to\frac{D}{\pi}\int_0^{\frac{u\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}dt$$

gelten. Aus der ersten Relation folgt nach § 1, 4, II (es ist $\varphi=\cos x$), daß die $\sum_0^\infty \alpha_k(\xi)$ (C, 1)-summierbar ist. Und aus der zweiten Relation folgt nach § 5, 9, III (es ist $\varphi=\sin x$), daß $\bar{s}_m^*(\xi)$ konvergiert. *Man beachte noch, daß aus der Formel* (a, $\bar{a}$) *schon dann die Konvergenz von* $s_m(\xi)$ *und* $\bar{s}_m^*(\xi)$ *folgt, wenn sie für ein einziges Paar* $\pm h_m=\frac{\varrho}{m}$, $\varrho\neq\frac{k\pi}{2}$ *richtig ist.* Der Beweis ist analog dem obigen.

3. **Näherungen mit Abschnittsableitungen:** (Kombination von § 2, 4 und 5 mit § 5, 19 und 20).

$$(a, \bar{a})\quad \frac{s_m^{(k)}(\xi+h_m)}{m^k}=\frac{D}{\pi}\frac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\tau=mh_m}+o(1);$$

$$(b, \bar{a})\quad \frac{s_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)}{m^{2r}}\to\frac{D}{\pi}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\frac{u\pi}{2}};\quad \frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)}{m^{2r-1}}\to\frac{D}{\pi}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{k\pi};$$

$$(a, \bar{b})\quad \frac{s_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)}{m^{2r}}\to\frac{D}{\pi}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{k\pi};\quad \frac{s_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)}{m^{2r-1}}\to\frac{D}{\pi}\frac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\frac{\sin\tau}{\tau}\right)_{\frac{u\pi}{2}}.$$

Auch diese Formeln sind umgekehrt an regulären Stellen für die angegebenen Voraussetzungen hinreichend.

4. **Näherungen mit (C,1)-Mitteln:** (Kombination von § 2, 6 mit § 5, 22).

$$(b, \bar{b})\quad \begin{cases} \sigma_m(\xi+h_m)=A+\dfrac{D}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{mh_m}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt+o(1); \\ \dfrac{\sigma_m^{(k)}(\xi+h_m)}{m^k}\to\dfrac{D}{2^k\pi}\dfrac{d^{k-1}}{d\tau^{k-1}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\tau=\frac{mh_m}{2}}+o(1). \end{cases}$$

$$(\bar{b})\quad \begin{cases} \sigma_m\left(\xi+\dfrac{u\pi}{2m}\right)\to A+\dfrac{D}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{u\pi}{4}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2dt; \\ \dfrac{\sigma_m^{(2r)}\left(\xi+\frac{u\pi}{2m}\right)}{m^{2r}}\to\dfrac{D}{2^{2r}\pi}\dfrac{d^{2r-1}}{d\tau^{2r-1}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\frac{u\pi}{4}}; \\ \dfrac{\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi+\frac{k\pi}{m}\right)}{m^{2r-1}}\to\dfrac{D}{2^{2r-1}\pi}\dfrac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\frac{k\pi}{2}}. \end{cases}$$

$$(\mathrm{b},\bar{\mathrm{c}})\quad\begin{cases}\sigma_m\left(\xi+\dfrac{k\pi}{m}\right)\to A+\dfrac{D}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{k\pi}{2}}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt;\\[2ex]\dfrac{\sigma_m^{(2r)}\left(\xi+\dfrac{k\pi}{m}\right)}{m^{2r}}\to\dfrac{D}{2^{2r}\pi}\dfrac{d^{(2r-1)}}{d\tau^{(2r-1)}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\frac{k\pi}{2}};\\[2ex]\dfrac{\sigma_m^{(2r-1)}\left(\xi+\dfrac{u\pi}{2m}\right)}{m^{2r-1}}\to\dfrac{D}{2^{2r-1}\pi}\dfrac{d^{2(r-1)}}{d\tau^{2(r-1)}}\left(\dfrac{\sin\tau}{\tau}\right)^2_{\frac{u\pi}{4}}.\end{cases}$$

Wiederum sind alle diese Formeln an regulären Stellen hinreichend für die angegebenen Voraussetzungen.

Das in der ersten Formel $(\mathrm{b},\bar{\mathrm{b}})$ ausgedrückte Verhalten der (C, 1)-Mittel wollen wir als „Fejérsches Verhalten im Nahen“ bezeichnen[78]). Wenn es für beliebige Nullfolgen $\{h_m\}$ erfüllt ist, sprechen wir vom „Fejérschen Verhalten“ schlechthin.

Man beachte noch, daß die Formeln dieser Nummer für fast alle ξ (sogar mit $A=f(\xi)$, $D=0$) gelten.

5. Für die feinere Untersuchung des Abschnittsverhaltens an regulären Stellen sind die folgenden Hilfssätze von Bedeutung. In ihnen bedeutet $g(t)$ eine in $\langle 0,\pi\rangle$ Lebesgue-integrierbare Funktion, und es handelt sich bei gegebenem $\varepsilon>0$ um die Ungleichung

$$(47)\qquad |I_m(\eta)|=\left|\frac{1}{m}\int_0^{\pi} g(t)\left(\frac{\sin(m+1)\frac{\eta-t}{2}}{\sin\frac{\eta-t}{2}}\right)^2 dt\right|\leqq\varepsilon.$$

Hilfssatz 3[79]): *Aus*

$$(48\,\alpha)\qquad g(t)\to 0;\quad t\to+0$$

folgt (47) *für* $-\frac{\pi}{2}\leqq\eta\leqq\mathsf{H}(\varepsilon)$, $m\geqq M(\varepsilon)$.

Beweis: Für $0<\delta=\delta(\varepsilon)<\frac{\pi}{2}$ und alle m ist wegen

$$(\alpha)\qquad \frac{1}{\pi(m+1)}\int_0^{\pi}\left(\frac{\sin(m+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt=1$$

[78]) Fejér 2.
[79]) Fejér 2.

ersichtlich $\left|\frac{1}{m}\int_0^{\delta}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$. Bei festem $\delta(\varepsilon)$ und $-\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq \frac{\delta}{2} = \mathsf{H}(\varepsilon)$ ist sodann

$$(\beta) \qquad \left|\frac{1}{m}\int_{\delta}^{\pi}\right| = O\left(\frac{1}{m\,\delta^2}\int_0^{\pi}|g(t)|\,dt\right) \leqq \frac{\varepsilon}{2},$$

für $m \geqq M(\varepsilon)$.

Hilfssatz 4: *Aus*

$$(48\beta) \qquad \frac{1}{t}\int_0^{t}|g(\tau)|\,d\tau \to 0$$

folgt (47) *für* $-\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq \frac{K}{m}$, $K > 0$, $m \geqq M(\varepsilon)$.

Beweis: Es werde $G(t) = \int_0^{t}|g(\tau)|\,d\tau$ gesetzt. Es sei

$$\varrho_m = \mathrm{Max}\left(0, \eta + \frac{1}{m}\right).$$

Gleichmäßig in den $-\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq \frac{K}{m}$ ist dann

$$(\gamma) \qquad \left|\frac{1}{m}\int_0^{\varrho_m}\right| \leqq \frac{(m+1)^2}{m}\int_0^{\frac{K+1}{m}}|g(t)|\,dt = o(1);$$

$$(\delta) \qquad \left|\frac{1}{m}\int_{\varrho_m}^{\pi}\right| = O\left(\frac{1}{m}\int_{\varrho_m}^{\pi}\frac{|g(t)|}{(t-\eta)^2}dt\right) = O\left\{\frac{G(\pi)}{(\pi-\eta)^2 m} + \frac{2}{m}\int_{\varrho_m}^{\pi}\frac{G(t)}{(t-\eta)^3}dt\right\}$$

$$= O\left(\frac{1}{m}\right) + o\left(\frac{1}{m}\int_{\varrho_m}^{\pi}\frac{t}{(t-\eta)^3}dt\right) = o(1) + o\left(\frac{1}{m}\int_{\varrho_m}^{\pi}\frac{dt}{(t-\eta)^2} + \frac{K}{m^2}\int_{\varrho_m}^{\pi}\frac{dt}{(t-\eta)^3}\right) = o(1).$$

Hilfssatz 5[80]: *Ohne weitere Voraussetzungen über* $g(t)$ *gilt* (47) *für* $-\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq -\frac{K}{\sqrt{m}}$, $K > 0$, $m \geqq M(\varepsilon)$.

Beweis: Für $0 < \delta = \delta(\varepsilon) < \frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2} \leqq \eta \leqq -\frac{K}{\sqrt{m}}$ und alle m ist

$$(\varepsilon) \qquad \left|\frac{1}{m}\int_0^{\delta}\right| = O\left(\frac{1}{m\,\eta^2}\int_0^{\delta}|g(t)|\,dt\right) = O\left(\frac{1}{K^2}\int_0^{\delta}|g(t)|\,dt\right) \leqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Bei festem $\delta(\varepsilon)$ gilt sodann (β) für $m \geqq M(\varepsilon)$.

---

[80]) Rogosinski 3.

6. Wir wenden jetzt unsere Hilfssätze auf die Formel

$$(49)\qquad \sigma_m(\xi+\eta) = \frac{1}{2\pi(m+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(\xi+t)\left(\frac{\sin(m+1)\frac{\eta-t}{2}}{\sin\frac{\eta-t}{2}}\right)^2 dt$$

$$= \frac{1}{2\pi(m+1)}\left\{\int_0^{\pi} f(\xi+t)\left(\frac{\sin(m+1)\frac{\eta-t}{2}}{\sin\frac{\eta-t}{2}}\right)^2 dt + \int_0^{\pi} f(\xi-t)\left(\frac{\sin(m+1)\frac{\eta-t}{2}}{\sin\frac{\eta-t}{2}}\right)^2 dt\right\}$$

an:

I[79]). *$f(x)$ sei in $x=\xi$ stetig.* Aus Hilfssatz 3 (unter Beachtung von 5 (α)) folgt

$$(50)\qquad |\sigma_m(\xi+\eta) - f(\xi)| < \varepsilon$$

für $|\eta| \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $m \geqq M(\varepsilon)$. *Insbesondere gilt also für eine beliebige Nullfolge $\{\eta_m\}$ die Relation*

$$(50^*)\qquad \sigma_m(\xi+\eta_m) \to f(\xi).$$

Allgemeiner ergibt die Elimination des Sprunges, *daß die* (C, 1)-*Mittel an jeder „gewöhnlichen Sprungstelle" (Existenz von $f(\xi+0)$ und $f(\xi-0)$) das (in 4 erklärte) Fejérsche Verhalten zeigen. Insbesondere tritt bei den* (C, 1)-*Mitteln keine Gibbssche Erscheinung auf; sie approximieren genau die „Sprungstrecke". (Fejér[79]).*

II. *$f(x)$ sei in ξ im absoluten Mittel stetig*, d. h. es sei

$$(27\,b^*)\qquad \frac{1}{t}\int_{-t}^{t} |f(\xi+\tau) - A|\,d\tau \to 0, \quad t \to 0.$$

Dann gibt Hilfssatz 4 die Ungleichung

$$(50^*)\qquad |\sigma_m(\xi+\eta) - A| < \varepsilon,$$

für die $|\eta| \leqq \frac{K}{m}$, $K > 0$, $m \geqq M(\varepsilon)$.

Elimination des Sprunges liefert an den Sprungstellen, wo

$$(27\,b)\qquad \frac{1}{t}\int_0^t |f(\xi+\tau) - A_+|\,dt \to 0; \quad \frac{1}{t}\int_0^t |f(\xi-\tau) - A_-|\,d\tau \to 0, \quad t \to +0$$

ist, erneut für die (C, 1)-Mittel die uns schon bekannte Eigenschaft des „Fejérschen Verhaltens im Nahen" (Nr. 4, (b, $\bar{\text{b}}$)).

Es ist aber beachtenswert, daß, wenn etwa $f(\xi+0)$ existiert, während nach links nur die zweite Formel (27 b) *vorausgesetzt wird, dann die η_m*

nur nach unten durch $\eta_m \geqq -\frac{K}{m}$ *beschränkt zu sein brauchen, nach ob aber eine beliebige Nullfolge durchlaufen dürfen.* Entsprechendes gilt f die Ungleichung (50 *).

III. *Es existiere* $f(\xi + 0)$, *während links von* ξ *über* $f(x)$ *nichts vorau gesetzt wird.*

Aus den Hilfssätzen 3 und 5 folgt jetzt

(50 **) $$|\sigma_m(\xi + \eta) - f(\xi + 0)| < \varepsilon,$$

für die $\frac{K}{\sqrt{m}} \leqq \eta \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $K > 0$, $m \geqq M(\varepsilon)$. *Insbesondere gilt für all Nullfolgen* (η_m) *mit*

(51) $$\varliminf \sqrt{m}\ \eta_m > 0$$

die Relation[80])

(52) $$\sigma_m(\xi + \eta_m) \to f(\xi + 0).$$

7. Wir wenden 6, I und II noch auf die Funktionen $\varphi_\xi(t)$ und $\psi_\xi(t)$ in $t = 0$ an.

I: Aus $\varphi(t) \to A$, $t \to 0$, folgt

(53) $$\left|\frac{\sigma_m(\xi + \eta) + \sigma_m(\xi - \eta)}{2} - A\right| < \varepsilon$$

für $|\eta| \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $m \geqq M(\varepsilon)$. Für eine beliebige Nullfolge (η_m) wird also

(54) $$\frac{\sigma_m(\xi + \eta_m) + \sigma_m(\xi - \eta_m)}{2} \to A.$$

Unter der Voraussetzung (11 b) gilt (53) noch für $|\eta| \leqq \frac{K}{m}$, $m \geqq M(\varepsilon)$ und (54) für $\eta_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ (vgl. § 2, 6).

II: Aus $\psi(t) \to 0$, $t \to 0$, folgt

(55) $$|\sigma_m(\xi + \eta) - \sigma_m(\xi + \eta)| < \varepsilon$$

für $|\eta| \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $m \geqq M(\varepsilon)$. Und aus $\psi(t) \to D$, $t \to +0$, folgt für eine beliebige Nullfolge (η_m) die Relation

(56) $$\frac{\sigma_m(\xi + \eta_m) - \sigma_m(\xi - \eta_m)}{2} = \frac{D}{\pi} \int_0^{\frac{m\eta_m}{2}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt + o(1).$$

Unter der Voraussetzung (14 b) gilt (55) (wenn $D = 0$ ist) noch ür $|\eta| \leqq \frac{K}{m}$, $m \geqq M(\varepsilon)$, und (56) bleibt für $\eta_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ richtig (vgl. 5, 22, V).

8. Die vorstehenden Eigenschaften der $\sigma_m(x)$ gestatten nun bemerkens- erte Ergänzungen zu dem bisher festgestellten Verhalten der Mittel-

bildungen γ_m. Wir bezeichnen diese, angewandt auf die $c_k = \alpha_k(x)$, jetzt mit $\gamma_m(x)$. Satz I b und sein Beweis zusammen mit den Ungleichungen aus 6. und 7. liefern nämlich, wenn man den Zusatz in § 1, 1 zum Toeplitzschen Satze beachtet, unmittelbar die folgenden Sätze, in denen stets $\varphi(P)$ zweimal stetig differenzierbar und die Nullfolge $P_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ sein soll:

Satz VI b: *Ist $f(x)$ in $x = \xi$ stetig, $f(\xi) = A$, so gilt*

$$|\gamma_m(\xi+\eta) - (s_m(\xi+\eta) - A)\,\varphi(m P_m) - A\,\varphi(0)| < \varepsilon \tag{57 b}$$

für $|\eta| \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $m \geqq M(\varepsilon)$. Für eine beliebige Nullfolge (η_m) wird also

$$\gamma_m(\xi+\eta_m) - (s_m(\xi+\eta_m) - A)\,\varphi(m P_m) \to A\,\varphi(0). \tag{58 b}$$

Satz VI b*: *Aus*

$$\frac{1}{t}\int_{-t}^{t} |f(\xi+\tau) - A|\,d\tau \to 0, \quad t \to 0 \tag{27 b*}$$

folgt (57 b) *für* $|\eta| \leqq \frac{K}{m}$, $m \geqq M(\varepsilon)$, *und* (58 b) *für* $\eta_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$.

Man beachte auch die Schlußbemerkung in 6, II.

Satz VI b**: *Existiert $f(\xi+0)$, während links von ξ über $f(x)$ nichts vorausgesetzt wird, so gilt* (57 b) *mit $A = f(\xi+0)$ für $\frac{K}{\sqrt{m}} \leqq \eta \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $K > 0$, $m \geqq M(\varepsilon)$, und* (58 b) *für jede Nullfolge (η_m) mit $\lim \sqrt{m}\,\eta_m > 0$.*

Satz VII b: *Wenn $\varphi(t) \to A$, $t \to 0$, ist, so gilt*

$$\left|\frac{\gamma_m(\xi+\eta)+\gamma_m(\xi-\eta)}{2} - \left(\frac{s_m(\xi+\eta)+s_m(\xi-\eta)}{2} - A\right)\varphi(m P_m) - A\,\varphi(0)\right| < \varepsilon \tag{59 b}$$

für $|\eta| \leqq \frac{\mathsf{H}}{\varepsilon}$, $m \geqq M(\varepsilon)$. Für eine beliebige Nullfolge (η_m) ist also

$$\frac{\gamma_m(\xi+\eta_m)+\gamma_m(\xi-\eta_m)}{2} - \left(\frac{s_m(\xi+\eta_m)+s_m(\xi-\eta_m)}{2} - A\right)\varphi(m P_m) \to A\,\varphi(0). \tag{60 b}$$

Unter der Voraussetzung (11 b) *gilt* (59 b) *noch für $|\eta| \leqq \frac{K}{m}$, $m \geqq M(\varepsilon)$ und* (60 b) *für $\eta_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$.*

Satz VIII b: *Wenn $\psi(t) \to 0$, $t \to 0$ ist, so gilt*

$$|(\gamma_m(\xi+\eta) - \gamma_m(\xi-\eta)) - (s_m(\xi+\eta) - s_m(\xi-\eta))\,\varphi(m P_m)| < \varepsilon \tag{61 b}$$

für $|\eta| \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $m \geqq M(\varepsilon)$. Für eine beliebige Nullfolge (η_m) ist also

$$(\gamma_m(\xi+\eta_m) - \gamma_m(\xi-\eta_m)) - (s_m(\xi+\eta_m) - s_m(\xi-\eta_m))\,\varphi(m P_m) \to 0. \tag{62 b}$$

Unter der Voraussetzung (14 b) *mit* $D = 0$ *gilt* (61 b) *noch für* $|\eta| \leqq \frac{K}{m}$, $m \geqq M(\varepsilon)$, *und* (62 b) *für* $\eta_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$.

Die Behandlung von Sprungstellen mit $D \neq 0$ geschieht durch Elimination des Sprunges.

9. Die interessanteste Anwendung der obigen Sätze bezieht sich auf das in der Einleitung erwähnte „Schwingungsverhalten" der Abschnitte „um" Stetigkeitsstellen:

I: Mit $\varphi(x) = \cos x$, $x_m = h_m$ folgt aus (57 b)* an jeder Stetigkeitsstelle die für $|\eta| \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $m \geqq M(\varepsilon)$ gültige Ungleichung ($A = f(\xi)$)

$$(\alpha) \qquad \left| \frac{s_m(\xi+\eta+h_m) + s_m(\xi+\eta-h_m)}{2} - (s_m(\xi+\eta) - A)\cos m h_m - A \right| < \varepsilon$$

und insbesondere

$$(\beta) \qquad \left| \frac{s_m\left(\xi+\eta+\frac{\pi}{2m}\right) + s_m\left(\xi+\eta-\frac{\pi}{2m}\right)}{2} - A \right| < \varepsilon$$

Diese letztere Ungleichung zeigt deutlich, daß an den Endpunkten eines „nahe bei ξ" gelegenen Intervalls der Länge $\frac{\pi}{m}$ die Werte des m-ten Abschnitts für große m ungefähr gleichweit aber entgegengesetzt von dem Mittelwert $A = f(\xi)$ differieren. *Es tritt also in der Tat in der Nähe einer Stetigkeitsstelle ein schwingungsartiges Verhalten der Periode* $\frac{2\pi}{m}$ *um* $A = f(\xi)$ *als Mittellage ein*[81]).

Das gleiche Verhalten zeigt sich nach Satz VI b* *aber auch an den allgemeineren Stellen* (27 b*), *also fast überall.* Nur muß man sich hier beim m-ten Abschnitt auf *Umgebungen der Größenordnung* $O\left(\frac{1}{m}\right)$, das sind solche, die nur eine feste Zahl der obigen Perioden umspannen, beschränken.

Man schließt weiter leicht aus (β), daß *die von den Abschnittskurven an Stetigkeitsstellen approximierte Strecke* (auf $x = \xi$ in der x, y-Zahlenebene) *symmetrisch zu* $x = \xi$, $y = A$ *liegt*[82]). An den Stellen (27 b*) ist dieser Schluß nur für Approximationen $\eta_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ beim m-ten Abschnitt richtig.

Allgemeiner oszillieren in der Nähe jeder „gewöhnlichen" Sprungstelle, wie die Elimination des Sprunges zeigt, die m-ten Abschnittskurven mit den Perioden $\frac{2\pi}{m}$ um die m-ten Abschnittskurven der eliminierenden Funktion

$$(40^*) \qquad A + \frac{2D}{\pi} \sum_{u=1}^{\infty}{}' \frac{\sin u(x-\xi)}{u}.$$

---

[81]) Rogosinski 1; vgl. Rogosinski 4, S. 107.

[82]) Rogosinski 1; vgl. Rogosinski 4, S. 112.

Hieraus folgt dann wieder, daß an solchen Sprungstellen und (nach dem obigen) *allgemeiner an allen Sprungstellen* (27 b) *die Abschnittskurven mindestens die Gibbssche Strecke approximieren*[83]. (Vgl. Nr. 2.)

Es sei ausdrücklich darauf aufmerksam gemacht, daß an den obigen Sprungstellen mit $D \neq 0$ der Schluß auf eine zu A symmetrisch gelegene Approximationsstrecke nur für Annäherungen $\eta_m = O\left(\frac{1}{m}\right)$ richtig bleibt. Für beliebige Approximationen scheint diese Behauptung auch falsch zu sein.

II. Nach Satz VI b** gilt die Ungleichung (α) mit $A = f(\xi + 0)$ noch für $\frac{K}{\sqrt{m}} \leqq \eta \leqq \mathsf{H}(\varepsilon)$, $m \geqq M(\varepsilon)$, an solchen Stellen ξ, wo wenigstens $f(\xi + 0)$ existiert. *Das Schwingen der Abschnitte ist jetzt also um $f(\xi + 0)$ als Mittellage in „genügend entfernten" rechtsseitigen Umgebungsteilen von ξ noch festzustellen.*

An den Stellen, wo $\varphi(t) \to A$, $t \to 0$, gilt, oszillieren entsprechend die Abschnittssummen $\frac{s_m(\xi + \eta) + s_m(\xi - \eta)}{2}$ für kleine $|\eta|$ mit der Periode $\frac{2\pi}{m}$ um A als Mittellage (Satz VII b); an den Stellen (11 b), also fast überall, ist dies noch für Umgebungen der Größenordnung $O\left(\frac{1}{m}\right)$ der Fall.

An den Stellen, wo $\psi(t) \to 0$, $t \to 0$, gilt, oszillieren die Abschnittsdifferenzen $s_m(\xi + \eta) - s_m(\xi - \eta)$ für kleine $|\eta|$ mit der Periode $\frac{2\pi}{m}$ um 0 als Mittellage (Satz VIII b); an den Stellen (14 b) mit $D = 0$ ist dies noch für Umgebungen der Größenordnung $O\left(\frac{1}{m}\right)$ richtig. Das Verhalten dieser Differenzen an Sprungstellen mit $D \neq 0$ ist daraus leicht ersichtlich.

III. Entsprechend zeigt man, daß *die in der Einleitung erwähnten Schwingungs- bzw. Periodizitätserscheinungen der geraden bzw. ungeraden Abschnittsableitungen bereits um Stetigkeitsstellen im Sinne von* I *auftreten.*

10. Eine weitere interessante Folgerung unserer Sätze bezieht sich auf Fourierreihen, deren Koeffizienten $O\left(\frac{1}{n}\right)$ sind:

Mit $\varphi(x) = x^{2r}$, $x_m = \frac{1}{m}$, folgt nämlich nach (58 b) an einer Stetigkeitsstelle für eine beliebige Nullfolge (η_m) die Relation

$$(\alpha) \qquad s_m(\xi + \eta_m) + (-1)^{r-1} \frac{s_m^{(2r)}(\xi + \eta_m)}{m^{2r}} \to f(\xi).$$

Und hieraus ergibt sich (vgl. § 1, 7) weiter

$$(\beta) \qquad s_m(\xi + \eta_m) \to f(\xi).$$

Die Elimination des Sprunges ergibt nunmehr den Satz:

---

[83]) Vgl. Rogosinski **3** und Rogosinski **4**, S. 112.

Eine Fourierreihe, deren Koeffizienten $O\left(\frac{1}{n}\right)$ *sind, zeigt an jeder gewöhnlichen Sprungstelle der Funktion das Gibbssche Verhalten.*

Insbesondere haben die Fourierreihen der Funktionen beschränkter Schwankung überall das Gibbssche Verhalten[84]).

Daß Fourierreihen, deren Koeffizienten $O\left(\frac{1}{n}\right)$ sind, an den Stellen $(11\,\varkappa)$, also fast überall, konvergieren, wissen wir bereits. (Für die konjugierte Reihe gilt entsprechend $(\overline{13\,a})$ an den Stellen $(\overline{14\,c})$, also fast überall). Aus dem Zusatz in § 1, 7 folgt schließlich noch die Bemerkung, daß eine solche Fourierreihe in jedem abgeschlossenen Stetigkeitsintervall der Funktion gleichmäßig konvergiert (vgl. § 4, 5.).

Literaturverzeichnis.

P. Czillag: Über die Fourierschen Konstanten der Funktionen von beschränkter Schwankung, Math. és phys. lapok **27** (1918), S. 301—208.

L. Fejér: 1. Untersuchungen über Fouriersche Reihen, Math. Annalen 58 (1904), S. 501—569. — 2. Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe, Journ. f. Math. **142** (1913), S. 165—188.

G. H. Hardy: 1. Theorems relating to the convergence and summability of slowly oscillating series, Proc. Lond. Math. Soc. 8 (1909), S. 301—320. — 2. On the summability of Fourier series, Proc. Lond. Math. Soc. **12** (1913), S. 365—372.

M. Jacob: 1. Über die Verallgemeinerung einiger Theoreme von Hardy in der Theorie der Fourierschen Reihen, Proc. Lond. Math. Soc. **26** (1927), S. 470—492. — 2. Beitrag zur Darstellung der Ableitungen einer Funktion durch ihre Fouriersche Reihe, Bull. Acad. Pol. (1927), S. 287—294.

K. Knopp: Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, 3. Aufl., Berlin (1931).

H. Lebesgue: Recherches sur la convergence des series de Fourier, Math. Annalen **61** (1905), S. 251—280.

F. Lukàcs: Über die Bestimmung des Sprunges einer Funktion aus ihrer Fourierreihe, Journ. f. Math, **150** (1920), S. 107—112.

R. E. A. C. Paley: On the Cesàro summability of Fourier series and allied series, Proc. Cambr. **26** (1930), S. 173—203.

A. Plessner: 1. Zur Theorie der konjugierten trigonometrischen Reihen, Mitt. d. Math. Sem. Gießen **10** (1923), S. 1—36. — 2. Trigonometrische Reihen, Pascals Repertorium I 3, Leipzig-Berlin (1929).

A. Pringsheim: Über das Verhalten von Potenzreihen auf dem Konvergenzkreise, Münch. Sitzungsber. **30** (1900), S. 37—100.

---

[84]) Die Fourierkoeffizienten sind $O\left(\frac{1}{n}\right)$; vgl. Zygmund S. 18, Rogosinski 4, S. 24.

W. Rogosinski: 1. Über die Abschnitte trigonometrischer Reihen, Math. Annalen **95** (1925), S. 110—134. — 2. Reihensummierung durch Abschnittskoppelungen, Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 132—149. — 3. Über den Einfluß einseitiger Eigenschaften einer Funktion auf ihre Fourierreihe, Schrift. d. Königsberg. Gel. Ges. (1926), Heft 3. — 4. Fouriersche Reihen, Sammlung Göschen, Berlin-Leipzig (1930).

S. Szidon: Bestimmung des Sprunges der Funktion aus der Fourierreihe, Math. és phys. lapok **27** (1918), S. 309—311.

O. Toeplitz: Über allgemeine lineare Mittelbildungen, Prace Math.-Fiz. **22** (1911), S. 113—119.

S. Verblunsky: Note on the sum of an oscillating series, Proc. Cambr. **26** (1930), S. 152—157, 484—488.

F. T. Wang: On the convergence factor of Fourier series at a point, Tôhoku Math. Journ. **41** (1935), S. 91—108.

W. H. Young: On the mode of oscillation of a Fourier series and of its allied series, Proc. Lond. Math. Soc. **12** (1913), S. 433—452.

A. Zygmund: Trigonometrical series, Warschau-Lwów (1935).

(Eingegangen am 7. Oktober 1935.)