

Werk

Titel: Bemerkung zu einer Differentialungleichung von Carleman

Autor: DINGHAS, A.

Ort: Berlin

Jahr: 1936

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0041 | log73

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

✉ info@digizeitschriften.de

Bemerkung zu einer Differentialungleichung von Carleman.

Von

Alexander Dinghas in Berlin.

1. In einer interessanten Note¹⁾ aus dem Jahre 1933 zeigte Carleman, wie die von Ahlfors²⁾ zuerst bewiesene Denjoysche Vermutung aus einer leicht beweisbaren Differentialungleichung folgt.

Fast gleichzeitig gab Milloux³⁾ in einer größeren Arbeit eine allgemeine Ungleichung an, deren Beweis ihm durch eine Kombination des Maximumprinzips und der ersten Ahlforsschen Ungleichung⁴⁾ gelang. Diese Ungleichung kann nicht nur zum Beweis des Denjoy-Ahlforsschen Satzes benutzt werden, sondern auch zur Verallgemeinerung einiger klassischer Sätze von Lindelöf.

Wir zeigen in dieser Note, daß Carlemans Methode zu einer mit der Millouxschen im wesentlichen übereinstimmenden Ungleichung führt, wenn man abweichend von Carleman nicht Cartesische, sondern Polarkoordinaten benutzt, die Integration in etwas modifizierter Form durchführt und dabei ein Integral geeignet nach unten abschätzt.

Es ist bemerkenswert, daß aus der Ungleichung (2.7), die sich ohne Benutzung des tieferen Ahlforsschen Lemmas beweisen läßt, die Millouxsche Ungleichung (3.1) folgt.

2. B sei ein einfach zusammenhängender Bereich, der von zwei sich ins Unendliche erstreckenden und sich nicht schneidenden analytischen Kurven C_1, C_2 begrenzt ist. S_r sei der Teil der Peripherie von $|z| = r$, der im Innern von B liegt und $S(r)$ seine Länge. Die ganze transzendente Funktion $f(z)$ sei auf den Kurven C_1, C_2 absolut kleiner als Eins und auf S_r kleiner als $M(r)$. Diese Voraussetzung bedeutet keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn $|f(z)|$ auf C_1 und C_2 unter einer festen endlichen Schranke liegt.

¹⁾ Carleman, Sur une inégalité différentielle dans la théorie des fonctions analytiques, Comp. Rend. 196, (1933), S. 995—997.

²⁾ Ahlfors, Untersuchungen zur Theorie der konformen Abbildung und der ganzen Funktionen, Acta Soc. Sc. Fenn. Nova Series A, 1, Nr. 9.

³⁾ Milloux, Sur les domaines de détermination infinies des fonctions entières, Acta Math. 61 (1933), S. 105—134.

⁴⁾ l. c., S. 10.

Mit $m(r)$ bezeichnen wir wie Carleman die Funktion

$$m(r) = \int_{S_r}^+ (\log |f(re^{i\varphi})|)^2 d\varphi$$

und setzen

$$(2.1) \quad m(r) = \psi(\xi) = \int_{S_r}^+ (\log |f(e^{\xi+i\varphi})|)^2 d\varphi$$

mit

$$\xi = \log r.$$

Die positive Potentialfunktion $\log |f(re^{i\varphi})|$ bezeichnen wir im folgenden mit $u(\xi, \varphi)$.

Dann folgt aus (2.1)

$$\psi'(\xi) = 2 \int_{S_r} u u_{\xi} d\varphi,$$

$$\psi''(\xi) = 2 \int_{S_r} (u u_{\xi\xi} + u_{\xi}^2) d\varphi,$$

also wegen $u_{\xi\xi} + u_{\varphi\varphi} = 0$ durch partielle Integration

$$\psi''(\xi) = 2 \int_{S_r} (u_{\xi}^2 + u_{\varphi}^2) d\varphi.$$

Nun ist

$$(2.2) \quad \int_{S_r} u_{\xi}^2 d\varphi \geq \frac{1}{4} \frac{\psi'^2(\xi)}{\psi(\xi)} \quad ^5)$$

und

$$(2.3) \quad \int_{S_r} u_{\varphi}^2 d\varphi \geq \frac{\pi^2 r^2}{S^2(r)} \int_{S_r} u^2 d\varphi, \quad ^6)$$

also

$$(2.4) \quad \frac{1}{2} \frac{\psi''(\xi)}{\psi(\xi)} - \frac{1}{4} \left\{ \frac{\psi'(\xi)}{\psi(\xi)} \right\}^2 \geq \frac{\pi^2 r^2}{S^2(r)}.$$

Diese Ungleichung, der die Carlemansche Differentialungleichung (8)⁷⁾ entspricht, geht durch die Substitution

$$\omega(\xi) = \log \psi(\xi) = \log m(r)$$

in

$$2\omega''(\xi) + \omega'^2(\xi) \geq \frac{4\pi^2 r^2}{S^2(r)}$$

⁵⁾ Dies folgt aus der Schwarzschen Ungleichung.

⁶⁾ Bekannte Aufgabe der Variationsrechnung. Wenn $y(x)$ in $0 \leq x \leq a$ stetig und stückweise differenzierbar ist mit $y(0) = y(a) = 0$, so gilt

$$\int_0^a y'^2 dx \geq \frac{\pi^2}{a^2} \int_0^a y^2 dx.$$

⁷⁾ l. c., S. 996.

ber. Wegen

$$1 + 2 \frac{\omega''(\xi)}{\omega'^2(\xi)} < \left(1 + \frac{\omega''(\xi)}{\omega'^2(\xi)}\right)^2$$

erhalten wir daraus

$$(2.5) \quad \omega'(\xi) + \frac{\omega''(\xi)}{\omega'(\xi)} \geq 2\pi \frac{r}{S(r)}.$$

Die linke Seite dieser Ungleichung ist nun gleich

$$\frac{d}{d\xi} \left(\log \frac{d}{d\xi} e^{\omega(\xi)} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\log \frac{d}{d\xi} \psi(\xi) \right),$$

wir haben also

$$(2.6) \quad \frac{d}{dr} \log \left(r \frac{dm(r)}{dr} \right) \geq \frac{2\pi}{S(r)}$$

und daraus durch zweimalige Integration von $r_0 = e^{\xi_0}$ bis r

$$(2.7) \quad m(r) \geq m(r_0) + C_0 \int_{r_0}^r \frac{dt}{t} e^{2\pi\varphi(t)}$$

oder da $m(r_0) \geq 0$

$$(2.71) \quad m(r) \geq C_0 \int_{r_0}^r \frac{e^{2\pi\varphi(t)}}{t} dt,$$

wobei

$$\varphi(r) = \int_{r_0}^r \frac{dt}{S(t)}$$

und

$$C_0 = \psi'(\xi_0).$$

3. Die Ungleichung (2.71) leistet uns dieselben Dienste wie die Milloux'sche Ungleichung nur mit dem Unterschied, daß sie bei Funktionen unendlicher Ordnung ein wenig schlechtere Abschätzungen liefert.

Es sei nun $\alpha > 1$. Dann haben wir wegen der Monotonität von $\varphi(r)$

$$\int_{r_0}^{\alpha r} \frac{dt}{t} e^{2\pi\varphi(t)} > \int_r^{\alpha r} \frac{dt}{t} e^{2\pi\varphi(t)} > e^{2\pi\varphi(r)} \log \alpha,$$

also

$$m(\alpha r) > C_0 e^{2\pi\varphi(r)} \log \alpha.$$

Wegen

$$m(\alpha r) < 2\pi \{\log M(\alpha r)\}^2$$

wird also

$$(3.1) \quad \log \log M(\alpha r) > \pi \int_{r_0}^r \frac{dt}{S(t)} + C_1(\alpha),$$

wobei $C_1(\alpha)$, ebenso wie später $C_2(\alpha)$, $C_3(\alpha)$, ..., eine nur von α und von dem betreffenden Bereich abhängige Konstante bedeutet.

Setzt man voraus, daß $f(z)$ von der endlichen Ordnung $\varrho > \frac{1}{2}$ ist, so ergeben sich aus (3.1) ohne weiteres die wichtigsten Milloux'schen Sätze für diese Funktionenklasse.

Aus derselben Ungleichung folgt übrigens der Denjoy-Ahlfors'sche Satz ohne jede Schwierigkeit. Wenn die ganze Funktion $f(z)$ n asymptotische Werte hat, so ist, wenn man (3.1) in jedem von je zwei aufeinander folgenden Kurven begrenzten anwendet, dann summiert und sich außerdem noch der elementaren Ungleichung

$$\frac{1}{n} \sum_{v=1}^n \frac{1}{a_v} \geq \frac{n}{\sum_{v=1}^n a_v}$$

bedient,

$$n \log \log M(r) > \pi \frac{n^2}{2\pi} \log r + \sum_{v=1}^n C_v(\alpha) - \frac{n^2}{2} \log \alpha r_0$$

mit

$$M(r) = \max |f(re^{i\varphi})|$$

für $|z| = r$, oder

$$\log \log M(r) > \frac{n}{2} \log r + C_{n+1}(\alpha).$$

Daraus folgt der Denjoy-Ahlfors'sche Satz

$$n \leq 2\varrho$$

unmittelbar.

(Eingegangen am 11. Mai 1936.)