Werk

Titel: Neue Beweise der Überkonvergenzsätze für Ptenzreihen und Dirichletsche Reihen

Autor: Lösch, F.

Ort: Berlin

Jahr: 1936

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0040|log63

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Neue Beweise der Überkonvergenzsätze für Potenzreihen und Dirichletsche Reihen.

Von

Friedrich Lösch in Stuttgart.

Im folgenden soll ein neuer Zugang zu den Überkonvergenzsätzen angegeben werden, der sowohl bei Potenzreihen als auch bei Dirichletschen Reihen sehr einfach zum Ziel führt. Die Beweise werden zuerst für Potenzreihen auseinandergesetzt, da bei ihnen die notwendigen Abschätzungen besonders kurz ausfallen. Sodann wird der Übergang zu allgemeinen Dirichletschen Reihen vollzogen.

I.

Verschwindet für eine Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

jeder Koeffizient a_n, dessen Index n zwischen zwei festen Indizes $\mu < \nu$ gelegen ist, also

$$a_n = 0 \quad \text{für} \quad \mu < n < \nu,$$

so sagen wir, die Reihe weise die *Lücke* (μ, ν) auf. Unter Verwendung dieser Ausdrucksweise läßt sich der *allgemeine Ostrowskische Überkonvergenzsatz*[1]) folgendermaßen formulieren:

1. Satz: *Die Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

von endlichem Konvergenzradius ϱ weise eine unendliche Folge von Lücken

$$(\mu_1, \nu_1), \ (\mu_2, \nu_2), \ \ldots, \ (\mu_\tau, \nu_\tau), \ \ldots$$

auf, die für eine von τ unabhängige Zahl $\vartheta > 0$ Relativbreiten

$$\frac{\nu_\tau - \mu_\tau}{\mu_\tau} \geqq \vartheta$$

besitzen. Setzt man dann

$$f_0(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{\mu_1} z^{\mu_1},$$

$$f_\tau(z) = a_{\nu_\tau} z^{\nu_\tau} + a_{\nu_\tau + 1} z^{\nu_\tau + 1} + \ldots + a_{\mu_\tau + 1} z^{\mu_\tau + 1} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots),$$

[1]) A. Ostrowski, Über eine Eigenschaft gewisser Potenzreihen mit unendlich vielen verschwindenden Koeffizienten, Berliner Sitzungsberichte 1921, S. 557—565.

so konvergiert die Polynomreihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(z)$$

gleichmäßig in einer gewissen Umgebung jedes regulären Punktes von $f(z)$ auf dem Rande des Konvergenzkreises.

Beweis: Wir nehmen an, a sei ein regulärer Punkt von $f(z)$ am Rande des Konvergenzkreises und wollen die gleichmäßige Konvergenz der Polynomreihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(z) \tag{1}$$

in einer vollen Umgebung von a beweisen.

Dazu wählen wir auf dem Radiusvektor $0a$ einen zwischen 0 und a gelegenen Punkt z_0, über den wir weiterhin noch verfügen werden, und entwickeln die einzelnen Polynome $f_\tau(z)$ nach Potenzen von $z - z_0$. Indem wir die so entwickelten Polynome $f_\tau(z)$ an der Stelle μ_τ zerlegen, schreiben wir

$$f_\tau(z) = \varphi_\tau(z) + \psi_\tau(z) = \sum_{\nu=0}^{\mu_\tau} \frac{(z-z_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(z_0) + \sum_{\nu=\mu_\tau+1}^{\mu_{\tau+1}} \frac{(z-z_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(z_0),$$

und behandeln nacheinander die Polynomreihen

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau(z) \tag{2}$$

und

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(z). \tag{3}$$

1. Wir beginnen mit einer Abschätzung der Polynome $\varphi_\tau(z)$. Dazu wählen wir einen Kreis $\mathfrak{K}$ von einem Radius $r < \varrho$ um den Nullpunkt und beschränken nun z_0 auf das Innere dieses Kreises. Die Koeffizienten a_n lassen für jede positive Zahl $\varrho' < \varrho$ eine Abschätzung

$$|a_n| \leqq \frac{C_1}{\varrho'^n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten C_1 zu. Denken wir uns weiterhin ϱ' so nahe an ϱ gewählt, daß auch $r < \varrho'$ gilt, so können wir längs $\mathfrak{K}$ für $\tau = 1, 2, \ldots$ abschätzen:

$$|f_\tau(z)| < C_1\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{\nu_\tau}\left[1 + \frac{r}{\varrho'} + \left(\frac{r}{\varrho'}\right)^2 + \ldots\right] = C_2\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{\nu_\tau},$$

wo C_2 eine von τ unabhängige Konstante bedeutet. Berücksichtigt man die Lückenbedingung $\nu_\tau \geqq (1+\vartheta)\mu_\tau$, so folgt hieraus weiter für $\nu \leqq \mu_\tau$:

$$\left|\frac{1}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(z_0)\right| < C_2 \frac{\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{\nu_\tau}}{(r-|z_0|)^\nu} = \frac{C_2}{\varrho^\nu} \frac{\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{\nu_\tau}}{\left(\frac{r-|z_0|}{\varrho}\right)^\nu} \leqq \frac{C_2}{\varrho^\nu}\left[\frac{\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{(1+\vartheta)}}{\frac{r-|z_0|}{\varrho}}\right]^{\mu_\tau}.$$

Da wir uns ϱ' so nahe an ϱ gewählt denken können, daß $\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{1+\vartheta} < \frac{r}{\varrho}$ gilt, so erkennt man, daß für hinreichend nahe am Nullpunkt gewähltes z_0 eine Abschätzung

$$\left|\frac{1}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(z_0)\right| \leqq \frac{C_2}{\varrho^\nu} q^{\mu_\tau} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots;\ \nu \leqq \mu_\tau)$$

mit einer positiven Zahl $q < 1$ und einer von τ unabhängigen Konstanten C_2 gilt. So denken wir uns z_0 gewählt und weiterhin festgehalten. Für jeden Radius $r_0 < \varrho$ hat man dann in $|z - z_0| \leqq r_0$ eine Abschätzung

$$|\varphi_\tau(z)| < C_2 q^{\mu_\tau}\left[1 + \frac{r_0}{\varrho} + \left(\frac{r_0}{\varrho}\right)^2 + \ldots\right] = C_3 q^{\mu_\tau} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots),$$

wo C_3 wieder eine von τ unabhängige Konstante bedeutet. Hieraus entnimmt man, daß die Polynomreihe (2) gewiß in einem den Punkt a im Innern enthaltenden Kreis um z_0 gleichmäßig konvergiert und daselbst eine analytische Funktion $\varphi(z)$ darstellt.

2. Sehr einfach ergibt sich nun weiter die gleichmäßige Konvergenz der Polynomreihe (3) in einer Umgebung des Punktes a. Da sowohl (1) als auch (2) in einer hinreichend kleinen Umgebung von z_0 gleichmäßig konvergieren, gilt dasselbe von der Reihe (3); sie stellt hier die analytische Funktion

$$\psi(z) = f(z) - \varphi(z)$$

dar. Die Funktionen $f(z)$ und $\varphi(z)$ sind beide in einem a im Innern enthaltenden Kreis $\mathfrak{K}_0$ um z_0 analytisch, also auch $\psi(z)$. Daher konvergiert die Potenzreihenentwicklung von $\psi(z)$ an der Stelle z_0 mindestens in $\mathfrak{K}_0$. Da aber jeweils das nach Potenzen von $z - z_0$ entwickelte Polynom $\psi_\tau(z)$ nur Glieder der Ordnungen $\leqq \mu_{\tau+1}$, das nach Potenzen von $z - z_0$ entwickelte Polynom $\psi_{\tau+1}(z)$ nur Glieder der Ordnungen $> \mu_{\tau+1}$ enthält, so erhält man nach dem Weierstraßschen Doppelreihensatz diese Potenzreihenentwicklung aus $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(z)$, indem man die nach Potenzen von $z - z_0$ entwickelten Polynome $\psi_\tau(z)$ in ihre einzelnen Glieder aufspaltet und dieselben in der entstehenden Anordnung zu einer Reihe zusammenfaßt. Hieraus erkennt man endlich, daß mit dieser Potenzreihe auch die Polynomreihe (3) gleichmäßig in einem a im Innern enthaltenden Kreis um z_0 konvergiert.

Mit (2) und (3) konvergiert auch (1) gleichmäßig in einer vollen Umgebung des Randpunktes a; damit ist der Beweis fertig.

Die geschilderte Methode liefert auch einen einfachen Beweis des *speziellen Ostrowskischen Überkonvergenzsatzes*[2]). Dieser Satz ist insofern

[2]) A. Ostrowski, Über vollständige Gebiete gleichmäßiger Konvergenz von Folgen analytischer Funktionen, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität 1 (1923), S. 327—350, insbesondere S. 335.

besonders interessant, als er eine Klasse analytischer Funktionen mit schlichtem, einfach zusammenhängendem Regularitätsgebiet liefert. Er lautet:

2. Satz: *Die Potenzreihe*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

von endlichem Konvergenzradius ϱ weise eine unendliche Folge von Lücken

$$(\mu_1, \nu_1), (\mu_2, \nu_2), \ldots, (\mu_\tau, \nu_\tau), \ldots$$

auf, deren Relativbreiten

$$\vartheta_\tau = \frac{\nu_\tau - \mu_\tau}{\mu_\tau} \to \infty$$

streben für $\tau \to \infty$. Setzt man dann

$$f_0(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_{\mu_1} z^{\mu_1},$$
$$f_\tau(z) = a_{\nu_\tau} z^{\nu_\tau} + a_{\nu_\tau + 1} z^{\nu_\tau + 1} + \ldots + a_{\mu_\tau + 1} z^{\mu_\tau + 1} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots),$$

so konvergiert die Polynomreihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(z)$$

im ganzen Regularitätsgebiet von $f(z)$ gegen $f(z)$, und zwar gleichmäßig in einer vollen Umgebung jedes Punktes dieses Gebiets.

Beweis: Es sei a ein Punkt des Regularitätsgebiets von $f(z)$. Die analytische Fortsetzung der Funktion $f(z)$ vom Nullpunkt zum Punkt a hin sei möglich durch die Kette der Kreise $\mathfrak{K}_0$ (= Konvergenzkreis von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$), $\mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$ mit den Mittelpunkten $z_0 = 0, z_1, \ldots, z_m$, wobei z_1 in $\mathfrak{K}_0$, z_2 in $\mathfrak{K}_1, \ldots, z_m$ in $\mathfrak{K}_{m-1}$ gelegen ist. Wir wollen die gleichmäßige Konvergenz der Polynomreihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(z)$$

in einer vollen Umgebung von a beweisen.

Dazu entwickeln wir zunächst die einzelnen Polynome $f_\tau(z)$ nach Potenzen von $z - z_1$. Indem wir sogleich eine passende Zerlegung der so entwickelten Polynome $f_\tau(z)$ vornehmen, schreiben wir

$$f_\tau(z) = \varphi_\tau^{(1)}(z) + \psi_\tau^{(1)}(z)$$
$$= \sum_{0 \leqq \nu \leqq (1+\sqrt{\vartheta_\tau})\,\mu_\tau} \frac{(z-z_1)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(z_1) + \sum_{(1+\sqrt{\vartheta_\tau})\,\mu_\tau < \nu \leqq \mu_\tau + 1} \frac{(z-z_1)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(z_1).$$

Wie beim Beweis des Satzes 1 schätzen wir nun die Polynome $\varphi_\tau^{(1)}(z)$ ab. Wir schlagen dazu einen z_1 im Innern enthaltenden Kreis $\mathfrak{K}$ von einem Radius $r < \varrho$ um den Nullpunkt, schätzen $|f_\tau(z)|$ längs $\mathfrak{K}$ ab und bekommen,

wenn $\varrho' < \varrho$ wieder so nahe an ϱ gewählt ist, daß noch $r < \varrho'$ gilt, wie beim Beweis des Satzes 1:

$$\left|\frac{1}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(z_1)\right| \leqq C_2 \frac{\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{\nu_\tau}}{(r-|z_1|)^\nu} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots;\ \nu = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo C_2 eine von τ unabhängige Konstante bedeutet. Liegt nun die Kette $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$ in dem Kreis $|z - z_1| \leqq R$ um z_1, so ergibt sich hieraus für alle Punkte z der Kreiskette die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\varphi_\tau^{(1)}(z)| &\leqq C_2 \left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{\nu_\tau} \sum_{0 \leqq \nu \leqq (1+\sqrt{\vartheta_\tau})\,\mu_\tau} \left(\frac{R}{r-|z_1|}\right)^\nu \\ &\leqq C_3 \left[\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{1+\vartheta_\tau} \left(\frac{R}{r-|z_1|}\right)^{1+\sqrt{\vartheta_\tau}}\right]^{\mu_\tau} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots), \end{aligned}$$

wo C_3 eine von τ unabhängige Konstante bedeutet. Für $\tau \to \infty$ strebt wegen $\vartheta_\tau \to \infty$ der in der eckigen Klammer stehende Ausdruck

$$\left(\frac{r}{\varrho'}\right)^{1+\vartheta_\tau} \left(\frac{R}{r-|z_1|}\right)^{1+\sqrt{\vartheta_\tau}} \to 0,$$

und damit erkennt man, daß die Polynomreihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau^{(1)}(z)$$

auf der ganzen Kreiskette gleichmäßig gegen eine Funktion $\varphi^{(1)}(z)$ konvergiert.

Wir brauchen uns also weiterhin nur noch mit der Polynomreihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau^{(1)}(z)$$

zu beschäftigen. Aus der Regularität von $f(z)$ und $\varphi^{(1)}(z)$ in $\mathfrak{K}_1$ schließt man zunächst wie im zweiten Teil des Beweises von Satz 1, daß $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau^{(1)}(z)$ auf jedem inneren Teil von $\mathfrak{K}_1$ gleichmäßig konvergiert. Weiter weist aber die in $\mathfrak{K}_1$ konvergente Potenzreihe, die aus $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau^{(1)}(z)$ durch Zerlegung der nach Potenzen von $z - z_1$ entwickelten Polynome $\psi_\tau^{(1)}(z)$ in ihre einzelnen Glieder entsteht, Lücken von Relativbreiten $> \sqrt{\vartheta_\tau}\,(\tau = 1, 2, \ldots)$ auf, denn $\psi_{\tau-1}^{(1)}(z)$ enthält nur Glieder der Ordnungen $\leqq \mu_\tau$ und $\psi_\tau^{(1)}(z)$ nur Glieder der Ordnungen $> (1 + \sqrt{\vartheta_\tau})\,\mu_\tau$. Man kann daher für die $\psi_\tau^{(1)}(z)$ in derselben Weise schließen wie für die $f_\tau(z)$: Entwickelt man jedes Polynom $\psi_\tau^{(1)}(z)$ nach Potenzen von $z - z_2$ und zerlegt das so entwickelte Polynom $\psi_\tau^{(1)}(z)$ an der Stelle $(1 + \sqrt[4]{\vartheta_\tau})\,\mu_\tau$ in

$$\psi_\tau^{(1)}(z) = \varphi_\tau^{(2)}(z) + \psi_\tau^{(2)}(z),$$

so konvergiert $\sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau^{(2)}(z)$ gleichmäßig auf der ganzen Kreiskette $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$, während $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau^{(2)}(z)$ wenigstens auf jedem inneren Teil von $\mathfrak{K}_2$ gleichmäßig konvergiert und überdies zwischen den nach Potenzen von $(z - z_2)$ entwickelten Polynomen $\psi_{\tau-1}^{(2)}(z)$ und $\psi_\tau^{(2)}(z)$ jeweils eine Lücke von einer Relativbreite $> \sqrt[4]{\vartheta_\tau}$ auftritt. Es ist klar, wie dieser Zerspaltungsprozeß fortzusetzen ist. Nach m Schritten ist $f_\tau(z)$ aufgespalten in $m+1$ Polynome

$$f_\tau(z) = \varphi_\tau^{(1)}(z) + \varphi_\tau^{(2)}(z) + \ldots + \varphi_\tau^{(m)}(z) + \psi_\tau^{(m)}(z),$$

wobei die Reihen

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau^{(1)}(z), \sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau^{(2)}(z), \ldots, \sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau^{(m)}(z)$$

auf der ganzen Kreiskette $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$ gleichmäßig konvergieren, während

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau^{(m)}(z)$$

jedenfalls in jedem inneren Teil von $\mathfrak{K}_m$ gleichmäßig konvergiert. Daraus folgt aber die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(z)$$

in einer vollen Umgebung von a und der Beweis ist fertig.

II.

Wir wenden uns nun zur Behandlung allgemeiner Dirichletscher Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots;\ \lambda_n \to +\infty).$$

In Anlehnung an die für Potenzreihen benutzte Sprechweise, sagen wir, eine solche Reihe weise die *Lücke* $(\lambda_\mu, \lambda_\nu)$ auf, wenn kein nichtverschwindendes Glied der Reihe zu einem Exponenten λ_n mit $\lambda_\mu < \lambda_n < \lambda_\nu$ gehört. Unter Verwendung dieser Ausdrucksweise läßt sich der *allgemeine Ostrowskische Überkonvergenzsatz für Dirichletsche Reihen* folgendermaßen formulieren:

3. Satz: *Die Dirichletsche Reihe*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots;\ \lambda_n \to +\infty)$$

mit der endlichen Konvergenzabszisse ϱ weise eine unendliche Folge von Lücken

$$(\lambda_{\mu_1}, \lambda_{\nu_1}), (\lambda_{\mu_2}, \lambda_{\nu_2}), \ldots, (\lambda_{\mu_\tau}, \lambda_{\nu_\tau}), \ldots$$

auf, die für eine von τ unabhängige Zahl $\vartheta > 0$ Relativbreiten

$$\frac{\lambda_{\nu_\tau} - \lambda_{\mu_\tau}}{\lambda_{u_\tau}} \geqq \vartheta$$

besitzen. Setzt man dann

$$f_0(s) = a_1 e^{-\lambda_1 s} + a_2 e^{-\lambda_2 s} + \ldots + a_{\mu_1} e^{-\lambda_{\mu_1} s},$$

$$f_\tau(s) = a_{\nu_\tau} e^{-\lambda_{\nu_\tau} s} + a_{\nu_\tau + 1} e^{-\lambda_{\nu_\tau + 1} s} + \ldots + a_{\mu_\tau + 1} e^{-\lambda_{\mu_\tau + 1} s} \quad (\tau = 1,2,\ldots),$$

so konvergiert die Reihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(s)$$

gleichmäßig in einer gewissen Umgebung jedes regulären Punktes von $f(s)$ auf der Konvergenzgeraden.

Beweis: Wir setzen die Konvergenzabszisse $\varrho = 0$ voraus, was keine Einschränkung bedeutet. Sodann nehmen wir an, a sei ein regulärer Punkt von $f(s)$ auf der Konvergenzgeraden und wollen die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(s) \tag{1}$$

in einer vollen Umgebung von a beweisen.

Dazu greifen wir im Innern der Konvergenzhalbebene $\Re(s) > 0$ einen Punkt s_0 mit $\Im(s_0) = \Im(a)$ beliebig heraus und entwickeln die einzelnen Exponentialpolynome $f_\tau(s)$ nach Potenzen von $s - s_0$. Indem wir die so entwickelten Exponentialpolynome $f_\tau(s)$ sogleich passend zerlegen, setzen wir

$$f_\tau(s) = \varphi_\tau(s) + \psi_\tau(s) + \chi_\tau(s)$$

mit

$$\varphi_\tau(s) = \sum_{0 \leqq \nu \leqq \lambda'_{\nu_\tau}} \frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0), \qquad \psi_\tau(s) = \sum_{\lambda'_{\nu_\tau} < \nu < \lambda'_{\mu_\tau + 1}} \frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0),$$

$$\chi_\tau(s) = \sum_{\lambda'_{\mu_\tau + 1} \leqq \nu < \infty} \frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0),$$

wobei $\lambda'_{\nu_\tau} = (1-\eta)\sigma_0 \lambda_{\nu_\tau}$, $\lambda'_{u_\tau} = (1+\eta)\sigma_0 \lambda_{\mu_\tau}$ mit $\sigma_0 = \Re(s_0)$ und einer Zahl η aus (0, 1), über die wir noch verfügen werden, sein sollen. Wir behandeln nun nacheinander die drei Funktionenreihen

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau(s), \tag{2}$$

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \chi_\tau(s). \tag{3}$$

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(s). \tag{4}$$

1. Dazu ist zunächst eine Abschätzung von $|f_\tau(s)|$ für eine beliebige Stelle $s\,(\Re(s) = \sigma)$ erforderlich. Setzen wir

$$A_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

so gilt wegen $\varrho = 0$ für jede Zahl $\varepsilon > 0$ eine Abschätzung

$$|A_n| \leqq C_1 e^{\varepsilon \lambda_n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

mit einer von n unabhängigen Konstanten C_1. Weiter ergibt sich durch partielle Summation für jedes $\tau = 1, 2, \ldots$

$$f_\tau(s) = -A_{\nu_\tau - 1} e^{-\lambda_{\nu_\tau} s} + A_{\mu_\tau + 1} e^{-\lambda_{\mu_\tau + 1} s} + \sum_{n=\nu_\tau}^{\mu_\tau + 1 - 1} A_n \left(e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}\right),$$

somit

$$|f_\tau(s)| \leqq C_1 e^{(\varepsilon - \sigma)\lambda_{\nu_\tau}} + C_1 e^{(\varepsilon - \sigma)\lambda_{\mu_\tau + 1}} + C_1 \sum_{n=\nu_\tau}^{\mu_\tau + 1 - 1} e^{\varepsilon \lambda_n} \left| e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s} \right|.$$

Vermöge

$$\sum_{n=\nu_\tau}^{\mu_\tau + 1 - 1} e^{\varepsilon \lambda_n} \left| e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s} \right| = \sum_{n=\nu_\tau}^{\mu_\tau + 1 - 1} e^{\varepsilon \lambda_n} \left| s \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\lambda s} \, d\lambda \right|$$

$$\leqq |s| \sum_{n=\nu_\tau}^{\mu_\tau + 1 - 1} e^{\varepsilon \lambda_n} \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\lambda \sigma} \, d\lambda \leqq |s| \int_{\lambda_{\nu_\tau}}^{\lambda_{\mu_\tau + 1}} e^{(\varepsilon - \sigma)\lambda} \, d\lambda$$

folgt hieraus schließlich

$$(5) \quad |f_\tau(s)| \leqq C_1 e^{(\varepsilon - \sigma)\lambda_{\nu_\tau}} + C_1 e^{(\varepsilon - \sigma)\lambda_{\mu_\tau + 1}} + C_1 |s| \int_{\lambda_{\nu_\tau}}^{\lambda_{\mu_\tau + 1}} e^{(\varepsilon - \sigma)\lambda} d\lambda \quad (\tau = 1, 2, \ldots).$$

2. Um nun eine Abschätzung für $|\varphi_\tau(s)|$ zu gewinnen, denken wir uns um s_0 einen Kreis $\mathfrak{K}'$ vom Radius $r' = \sigma_0(1 - \eta)$ geschlagen. Da wir $\varepsilon < \sigma_0 \eta$ voraussetzen dürfen, können wir nach (5) längs $\mathfrak{K}'$ abschätzen:

$$f_\tau(s)| \leqq 2 C_1 e^{(\varepsilon - \sigma_0 \eta)\lambda_{\nu_\tau}} + C_1 \frac{|s_0| + r'}{\sigma_0 \eta - \varepsilon} e^{(\varepsilon - \sigma_0 \eta)\lambda_{\nu_\tau}} = C_2 e^{(\varepsilon - \sigma_0 \eta)\lambda_{\nu_\tau}} \quad (\tau = 1, 2, \ldots),$$

wo C_2 eine von τ unabhängige Konstante bedeutet. Hieraus folgt weiter die Beziehung

$$\left| \frac{1}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0) \right| \leqq \frac{C_2}{r'^\nu} e^{(\varepsilon - \sigma_0 \eta)\lambda_{\nu_\tau}} = \frac{C_2}{[\sigma_0(1 - \eta)]^\nu} e^{(\varepsilon - \sigma_0 \eta)\lambda_{\nu_\tau}} \quad (\tau = 1, 2, \ldots).$$

Beschränken wir daher s auf einen Kreis $|s - s_0| \leqq R'$ mit einem hinreichend wenig von σ_0 verschiedenen Radius $R' > \sigma_0$, so erhalten wir für diese Punkte s die Abschätzung

$$(6) \quad |\varphi_\tau(s)| \leqq C_2 e^{(\varepsilon - \sigma_0 \eta)\lambda_{\nu_\tau}} \sum_{0 \leqq \nu \leqq \lambda'_{\nu_\tau}} \left[\frac{R'}{\sigma_0(1 - \eta)}\right]^\nu$$

$$= C_3 \left[\left(\frac{R'}{\sigma_0}\right)^{(1-\eta)\sigma_0} \frac{e^{\varepsilon - \sigma_0 \eta}}{(1 - \eta)^{(1-\eta)\sigma_0}}\right]^{\lambda_{\nu_\tau}} = C_3 q'^{\lambda_{\nu_\tau}}$$

mit einer von τ unabhängigen Konstanten C_3 und einer positiven Zahl $q' < 1$, da für η aus $(0, 1)$ gewiß $(1 - \eta)^{1-\eta} e^{\eta} > 1$ ist und ε beliebig

klein angenommen werden darf. Diese Abschätzung zeigt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (2) in einer vollen Umgebung des Punktes a.

3. Ebenso ist die Reihe (3) zu behandeln. Wir denken uns um s_0 einen Kreis $\mathfrak{K}''$ vom Radius $r'' = \sigma_0(1+\eta)$ geschlagen und können nach (5) längs $\mathfrak{K}''$ für jedes $\tau = 1, 2, \ldots$ abschätzen

$$|f_\tau(s)| \leqq 2C_1 e^{(\varepsilon+\sigma_0\eta)\lambda_{\mu_\tau+1}} + C_1 \frac{|s_0|+r''}{\sigma_0\eta+\varepsilon} e^{(\varepsilon+\sigma_0\eta)\lambda_{\mu_\tau+1}} = C_4 e^{(\varepsilon+\sigma_0\eta)\lambda_{\mu_\tau+1}},$$

wo C_4 eine von τ unabhängige Konstante bedeutet. Hieraus folgt die Beziehung

$$\left|\frac{1}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0)\right| \leqq \frac{C_4}{r''^\nu} e^{(\varepsilon+\sigma_0\eta)\lambda_{\mu_\tau+1}} = \frac{C_4}{[\sigma_0(1+\eta)]^\nu} e^{(\varepsilon+\sigma_0\eta)\lambda_{\mu_\tau+1}}.$$

Beschränken wir daher s auf einen Kreis $|s-s_0| \leqq R''$ mit einem hinreichend wenig von σ_0 verschiedenen Radius $R'' > \sigma_0$ (jedenfalls soll $R'' < \sigma_0(1+\eta)$ sein), so erhalten wir für diese Punkte s die Abschätzung

$$(7) \qquad |\chi_\tau(s)| \leqq C_4 e^{(\varepsilon+\sigma_0\eta)\lambda_{\mu_\tau+1}} \sum_{\lambda'_{\mu_\tau+1} \leqq \nu < \infty} \left[\frac{R''}{\sigma_0(1+\eta)}\right]^\nu$$

$$= C_5 \left[\left(\frac{R''}{\sigma_0}\right)^{(1+\eta)\sigma_0} \frac{e^{\varepsilon+\sigma_0\eta}}{(1+\eta)^{(1+\eta)\sigma_0}}\right]^{\lambda_{\mu_\tau+1}} = C_5 q''^{\lambda_{\mu_\tau+1}}$$

mit einer von τ unabhängigen Konstanten C_5 und einer positiven Zahl $q'' < 1$, da für η aus $(0, 1)$ gewiß $(1+\eta)^{1+\eta} e^{-\eta} > 1$ ist und ε beliebig klein angenommen werden darf. Diese Abschätzung zeigt die gleichmäßige Konvergenz der Reihe (3) in einer vollen Umgebung des Punktes a.

4. Schließlich haben wir jetzt noch die Reihe (4) zu betrachten. Hier überlegen wir genau wie beim zweiten Teil des Beweises von Satz 1: Da die Reihen (1), (2), (3) in einer hinreichend kleinen Umgebung von s_0 gleichmäßig konvergieren und analytische Funktionen $f(s)$, $\varphi(s)$, $\chi(s)$ darstellen, gilt dasselbe von der Reihe (4); sie stellt hier die analytische Funktion

$$\psi(s) = f(s) - \varphi(s) - \chi(s)$$

dar. Die Funktionen $f(s)$, $\varphi(s)$, $\chi(s)$ sind in einem a im Innern enthaltenden Kreis $\mathfrak{K}_0$ um s_0 analytisch, also auch $\psi(s)$. Daher konvergiert die Potenzreihenentwicklung von $\psi(s)$ an der Stelle s_0 mindestens in $\mathfrak{K}_0$. Diese Potenzreihe ergibt sich sehr einfach, wenn wir festsetzen, die Zahl η aus $(0, 1)$ soll so klein angenommen werden, daß jeweils $\lambda'_{\mu_\tau} < \lambda'_{\nu_\tau}$ gilt, was wegen der Lückenbedingung $\lambda_{\nu_\tau} > (1+\vartheta)\lambda_{\mu_\tau}$ möglich ist. Dann enthält das nach Potenzen von $s - s_0$ entwickelte Polynom $\psi_\tau(s)$ jeweils nur Glieder höherer Ordnung als das nach Potenzen von $(s-s_0)$ entwickelte Polynom $\psi_{\tau-1}(s)$ und man bekommt die Potenzreihenentwicklung von $\psi(s)$ an der Stelle s_0 aus der Polynomreihe $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(s)$, indem man

einfach die nach Potenzen von $(s - s_0)$ entwickelten Polynome $\psi_\tau(s)$ in ihre einzelnen Glieder aufspaltet und dieselben in der entstehenden Anordnung zu einer Reihe zusammenfaßt. Hieraus erkennt man unmittelbar, daß mit dieser Potenzreihe auch die Polynomreihe (4) in einem a im Innern enthaltenden Kreis um s_0 gleichmäßig konvergiert.

Mit den Reihen (2), (3) und (4) konvergiert auch (1) gleichmäßig in einer vollen Umgebung des Randpunktes a; damit ist der Beweis fertig.

Durch leichte Abänderungen der vorstehenden Überlegungen ergibt sich endlich der *spezielle Ostrowskische Überkonvergenzsatz für Dirichletsche Reihen:*

4. Satz: *Die Dirichletsche Reihe*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \qquad (0 \leqq \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots;\ \lambda_n \to \infty)$$

mit der endlichen Konvergenzabszisse ϱ weise eine unendliche Folge von Lücken

$$(\lambda_{\mu_1}, \lambda_{\nu_1}),\ (\lambda_{\mu_2}, \lambda_{\nu_2}),\ \ldots,\ (\lambda_{\mu_\tau}, \lambda_{\nu_\tau}),\ \ldots$$

auf, deren Relativbreiten

$$\vartheta_\tau = \frac{\lambda_{\nu_\tau} - \lambda_{\mu_\tau}}{\lambda_{\mu_\tau}} \to \infty$$

streben für $\tau \to \infty$. Setzt man dann

$$f_0(s) = a_1 e^{-\lambda_1 s} + a_2 e^{-\lambda_2 s} + \ldots + a_{\mu_1} e^{-\lambda_{\mu_1} s},$$

$$f_\tau(s) = a_{\nu_\tau} e^{-\lambda_{\nu_\tau} s} + a_{\nu_\tau + 1} e^{-\lambda_{\nu_\tau + 1} s} + \ldots + a_{\mu_{\tau+1}} e^{-\lambda_{\mu_\tau + 1} s} \quad (\tau = 1, 2, \ldots),$$

so konvergiert die Reihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(s)$$

im ganzen Regularitätsgebiet von $f(s)$ gegen $f(s)$ und zwar gleichmäßig in einer vollen Umgebung jedes Punktes dieses Gebietes.

Beweis: Wir setzen wieder die Konvergenzabszisse $\varrho = 0$ voraus, was keine Einschränkung bedeutet. Sodann sei a ein Punkt des Regularitätsgebietes von $f(s)$. Die analytische Fortsetzung der Funktion $f(s)$ von einem Punkt s_0 der Konvergenzhalbebene $\Re(s) > 0$ zum Punkt a hin sei möglich durch die Kette der Kreise $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$ mit den Mittelpunkten $s_0, s_1, \ldots, s_m$, wobei s_1 in $\mathfrak{K}_0$, s_2 in $\mathfrak{K}_1, \ldots, s_m$ in $\mathfrak{K}_{m-1}$ gelegen ist. Wir wollen die gleichmäßige Konvergenz der Reihe

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(s)$$

in einer vollen Umgebung von a beweisen.

Dazu entwickeln wir die Exponentialpolynome $f_\tau(s)$ nach Potenzen von $s - s_0$. Indem wir sogleich wieder eine passende Zerlegung der so entstehenden Potenzreihen vornehmen, setzen wir

$$f_\tau(s) = \varphi_\tau(s) + \psi_\tau(s) + \chi_\tau(s)$$

mit

$$\varphi_\tau(s) = \sum_{0 \leqq \nu \leqq \lambda'_{\nu_\tau}} \frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0), \quad \psi_\tau(s) = \sum_{\lambda'_{\nu_\tau} < \nu < \lambda'_{\mu_\tau + 1}} \frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0),$$

$$\chi_\tau(s) = \sum_{\lambda'_{\mu_\tau + 1} \leqq \nu < \infty} \frac{(s-s_0)^\nu}{\nu!} f_\tau^{(\nu)}(s_0),$$

wobei $\lambda'_{\nu_\tau} = (1 - \eta')\sigma_0 \lambda_{\nu_\tau}$, $\lambda'_{\mu_\tau} = (1 + \eta'')\sigma_0 \lambda_{\mu_\tau}$ mit $\sigma_0 = \Re(s_0)$ sowie positiven Zahlen $\eta' < 1$ und η'', über die wir noch verfügen werden, sein sollen.

Wie beim Beweis des Satzes 3 schätzen wir nun $\varphi_\tau(s)$ ab. Es sei $\mathfrak{K}$ ein Kreis um s_0 vom Radius $R > \sigma_0$, der die Kette $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$ im Innern enthält. Wir können dann für die Punkte s aus dem Innern von $\mathfrak{K}$ dem Beweis des Satzes 3 die Abschätzung entnehmen (vgl. (6)):

$$|\varphi_\tau(s)| \leqq C_3 \left[\left(\frac{R}{\sigma_0}\right)^{(1-\eta')\sigma_0} \frac{e^{\varepsilon - \sigma_0 \eta'}}{(1-\eta')^{(1-\eta')\sigma_0}} \right]^{\lambda_{\nu_\tau}} \qquad (\tau = 1, 2, \ldots).$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer hat einen Wert $q' < 1$, wenn man nur η' hinreichend nahe bei 1 wählt (und natürlich ε genügend klein angenommen denkt), da $\left(\frac{R}{\sigma_0}\right)^{1-\eta'} \to 1$ und $(1-\eta')^{1-\eta'} \cdot e^{\eta'} \to e$ für $\eta' \to 1$ gilt. So denken wir uns η' gewählt und wissen dann die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau(s) = \varphi(s)$$

in $\mathfrak{K}$ und damit auf der Kreiskette $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$.

Denken wir uns η'' zunächst so groß gewählt, daß $R < \sigma_0(1 + \eta'')$ ist, so können wir weiter dem Beweis des Satzes 3 für die Punkte s aus $\mathfrak{K}$ die Abschätzung entnehmen (vgl. (7)):

$$|\chi_\tau(s)| \leqq C_5 \left[\left(\frac{R}{\sigma_0}\right)^{(1+\eta'')\sigma_0} \frac{e^{\varepsilon + \sigma_0 \eta''}}{(1+\eta'')^{(1+\eta'')\sigma_0}} \right]^{\lambda_{\mu_\tau + 1}} \quad (\tau = 1, 2, \ldots).$$

Hier sieht man unmittelbar, daß der Ausdruck in der eckigen Klammer für hinreichend großes η'' einen Wert $q'' < 1$ besitzt. So denken wir uns η'' gewählt und wissen dann auch die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \chi_\tau(s) = \chi(s)$$

in $\mathfrak{K}$ und damit auf der Kreiskette $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1, \ldots, \mathfrak{K}_m$.

Zu behandeln bleibt also nur noch die Reihe $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(s)$. Da jeweils $\psi_{\tau-1}(s)$ nur Glieder der Ordnungen $< \lambda'_{\mu_\tau}$, $\psi_\tau(s)$ nur Glieder der Ordnungen $> \lambda'_{\nu_\tau}$ enthält, und wegen der Lückenbedingung $\lambda_{\nu_\tau} = (1 + \vartheta_\tau)\lambda_{\mu_\tau}$ mit $\vartheta_\tau \to \infty$ gewiß von einem Index τ ab $\lambda'_{\nu_\tau} > \lambda'_{\mu_\tau}$ gilt, so folgert man wie beim Beweis des Satzes 3 aus der Regularität von $f(s), \varphi(s), \chi(s)$ in $\mathfrak{R}_0$ zunächst die gleichmäßige Konvergenz von

$$\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(s) = \psi(s)$$

für jeden inneren Teil von $\mathfrak{R}_0$. Da aber für $\tau \to \infty$ sogar

$$\frac{\lambda'_{\nu_\tau} - \lambda'_{\mu_\tau}}{\lambda'_{u_\tau}} = \frac{(1-\eta')(1+\vartheta_\tau) - (1+\eta'')}{(1+\eta'')} \to \infty$$

gilt, so weist die Entwicklung von $\psi(s)$ nach Potenzen von $(s - s_0)$ zwischen den von den verschiedenen Polynomen $\psi_\tau(s)$ herrührenden Gliedern (von einem gewissen τ ab) Lücken auf, deren Relativbreiten über alle Grenzen wachsen. Nach Satz 2 konvergiert also $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(s)$ gleichmäßig in einer Umgebung jedes Punktes des Regularitätsgebietes von $\psi(s) = f(s) - \varphi(s) - \chi(s)$, also jedenfalls in einer Umgebung von a.

Mit $\sum_{\tau=0}^{\infty} \varphi_\tau(s)$, $\sum_{\tau=0}^{\infty} \psi_\tau(s)$, $\sum_{\tau=0}^{\infty} \chi_\tau(s)$ konvergiert auch $\sum_{\tau=0}^{\infty} f_\tau(s)$ gleichmäßig in einer vollen Umgebung des Punktes a; damit ist der Beweis fertig.

(Eingegangen am 13. Oktober 1935.)