Werk

Titel: Die mehrfachen Punkte der Linearscharen auf einer algebraischen Kurve

Autor: Geppert, H.

Ort: Berlin

Jahr: 1936

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0040|log62

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Die mehrfachen Punkte der Linearscharen auf einer algebraischen Kurve.

Von

Harald Geppert in Gießen.

Eine umfangreiche Klasse geometrischer Fragen läßt sich auf die Aufgabe zurückführen, die mehrfachen Punkte einer Linearschar von Punktgruppen, die von einem linearen Kurvensystem auf einer algebraischen Kurve C ausgeschnitten werden, zu bestimmen. Diese Aufgabe zerfällt in zwei Teile, einmal die Ermittelung der Anzahl der gesuchten Punkte, und zweitens ihre geometrische Kennzeichnung, etwa durch Angabe einer Kurve, die sie auf C ausschneidet — man denke z. B. an die Wendepunkte und ihre Bestimmung mittels der Hesseschen Kurve; beide Teilfragen sind lange gelöst. Bei der Berechnung der Anzahl ist jeder Punkt, wie immer in der algebraischen Geometrie, mit einem gewissen Gewichte σ zu zählen; wir entwickeln ein rasches Verfahren, um die Formel für σ zu finden, und benutzen diese, um weiterhin festzustellen, wie groß die Anzahl N der *voneinander verschiedenen* mehrfachen Punkte ist. Über die leicht erkennbare Feststellung hinaus, daß auf nichtrationalen Kurven $N \geqq 2$ sein muß, lassen sich schärfere untere Schranken für N gewinnen, wenn die betrachtete Linearschar vollständig ist; dann erlaubt die Anwendung des Riemann-Rochschen und des verschärften Cliffordschen Satzes die Ableitung von Formeln, die besonders dann von Belang sind, wenn es sich um die kanonische Schar und ihre Vielfachen, also um die Weierstraßpunkte der Kurve und deren Verallgemeinerung handelt. Um die Darstellung geschlossen zu gestalten, behandeln wir den gesamten Fragenkreis.

1.

$f_0(x_1, x_2), f_1(x_1, x_2) \ldots f_r(x_1, x_2)$ seien linear unabhängige, homogene Polynome n-ten Grades von x_1, x_2. Dann gelten die Eulerschen Identitäten:

$$n(n-1)\ldots(n-r+1) f_i \equiv x_1^r \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r} + \binom{r}{1} x_1^{r-1} x_2 \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1} \partial x_2} + \ldots + \binom{r}{r} x_2^r \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r},$$

$$(n-1)\ldots(n-r+1) \frac{\partial f_i}{\partial x_1} \equiv x_1^{r-1} \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r} + \binom{r-1}{1} x_1^{r-2} x_2 \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1} \partial x_2} + \ldots$$
$$+ \binom{r-1}{r-1} x_2^{r-1} \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1 \partial x_2^{r-1}},$$

. . . . . .

$$(n-r+1) \frac{\partial^{r-1} f_i}{\partial x_1^{r-1}} \equiv x_1 \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r} + \binom{1}{1} x_2 \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1} \partial x_2}.$$

Daher folgt die Determinantenidentität[1]):

$$\left\| f_i; \frac{\partial f_i}{\partial x_1}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r} \right\| \equiv (-1)^{\frac{1}{2}r(r+1)}$$

$$\cdot \{n(n-1)^2(n-2)^3 \ldots (n-r+1)^r\}^{-1} \cdot x_2^{\frac{1}{2}r(r+1)} \left\| \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r}; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1}\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r} \right\|,$$

oder

$$\left\| \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r}; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1}\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r} \right\|$$

$$(1) \qquad \equiv (-1)^{\frac{1}{2}r(r+1)}\{n(n-1)^2(n-2)^3 \ldots (n-r+1)^r\}\, x_2^{-\frac{1}{2}r(r+1)} \left\| f_i; \frac{\partial f_i}{\partial x_1}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r} \right\|$$

$$\equiv \{n(n-1)^2(n-2)^3 \ldots (n-r+1)^r\}\, x_1^{-\frac{1}{2}r(r+1)} \left\| f_i; \frac{\partial f_i}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r} \right\|.$$

2.

Auf einer Geraden h mit den homogenen Koordinaten x_1, x_2 sei eine r-stufige lineare Schar von Gruppen zu je n Punkten, g_n^r, durch die Gleichung

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2) + \lambda_1 f_1(x_1, x_2) + \ldots + \lambda_r f_r(x_1, x_2) = 0$$

mit den veränderlichen Gruppenparametern $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ gegeben. Da je r beliebige Punkte von h stets einer Gruppe der g_n^r angehören, kann jeder Punkt r-facher Punkt in einer ihn enthaltenden Gruppe sein; dagegen gibt es, falls $r < n$ ist, besondere Punkte, die in einer sie enthaltenden Gruppe mindestens $(r+1)$-fach zu zählen sind; in ihnen gelten die Gleichungen:

$$\sum_{i=0}^{r} \lambda_i \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^k \partial x_2^{r-k}} = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, r);$$

sie bestimmen sich also aus der Gleichung $(r+1)\cdot(n-r)$-ten Grades

$$(2) \qquad \left\| \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r}; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1}\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r} \right\| = 0.$$

(2) kann unter unseren Voraussetzungen nicht identisch erfüllt sein; denn wäre dies der Fall, so müßte gemäß (1) gelten:

$$\left\| f_i; \frac{\partial f_i}{\partial x_1}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r} \right\| \equiv 0, \qquad \left\| f_i; \frac{\partial f_i}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r} \right\| \equiv 0,$$

woraus man Beziehungen der Form

$$f_0 = \sum_{i=1}^{r} c_i f_i; \quad \frac{\partial^k f_0}{\partial x_1^k} = \sum_{i=1}^{r} c_i \frac{\partial^k f_i}{\partial x_1^k}; \quad \frac{\partial^k f_0}{\partial x_2^k} = \sum_{i=1}^{r} c_i \frac{\partial^k f_i}{\partial x_2^k} \quad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

---

[1]) Wir schreiben von jeder $(r+1)$-reihigen Determinante die allgemeine Zeile des Zeigers i, der von 0 bis r läuft, hin.

entnimmt; daraus wiederum folgt durch schrittweise Ableitung:

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial c_i}{\partial x_1} f_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial c_i}{\partial x_1} \frac{\partial^k f_i}{\partial x_1^k} = 0,$$

und

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial c_i}{\partial x_2} f_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial c_i}{\partial x_2} \frac{\partial^k f_i}{\partial x_2^k} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, r-1),$$

also ist entweder

$$\left\| \frac{\partial^{r-1} f_i}{\partial x_1^{r-1}}; \frac{\partial^{r-1} f_i}{\partial x_1^{r-2} \partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^{r-1} f_i}{\partial x_2^{r-1}} \right\| \equiv 0 \quad (i = 1, \ldots, r),$$

und dann genau so weiter zu schließen, oder $\frac{\partial c_i}{\partial x_1} = \frac{\partial c_i}{\partial x_2} = 0$, c_i konstant. In beiden Fällen gelangt man zum Ergebnis, daß aus dem identischen Erfülltsein von (2) die lineare Abhängigkeit der $f_0 \ldots f_r$ mit konstanten Koeffizienten folgt.

Auf einer Geraden besitzt danach jede g_n^r $(r+1)(n-r)$ $r+1$-fache Punkte; diese bilden eine Punktgruppe γ. Nach den Grundsätzen der algebraischen Geometrie wird ein Punkt von γ mehrfach zu zählen sein; diese Vielfachheit wollen wir bestimmen. Wir legen jedem Punkte P von h eine Folge von Zeigern $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_r$ bezüglich der g_n^r zu, die folgende Bedeutung haben: P ist ein ν_0-facher Festpunkt der g_n^r, d. h. zählt in allen Gruppen derselben mit der Vielfachheit ν_0; P ist ν_1-facher Festpunkt einer in g_n^r enthaltenen Schar g_n^{r-1}; P ist ν_2-facher Festpunkt einer in dieser g_n^{r-1} enthaltenen $g_n^{r-2}, \ldots$; P ist ν_r-facher Punkt einer Gruppe g_n^0, und die Zahlen ν_i sind dabei die jeweils höchstmöglichen Zahlen. Nach dieser Erklärung ist

$$(3) \qquad 0 \leqq \nu_0 < \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_r \leqq n.$$

Man kann die Darstellung der g_n^r so wählen, daß die durch die Gleichung

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2) + \lambda_1 f_1(x_1, x_2) + \ldots + \lambda_{r-k} f_{r-k}(x_1, x_2) = 0 \quad (k = 0, 1, \ldots r)$$

dargestellte Schar g_n^{r-k} gerade diejenige ist, die P zum ν_k-fachen Festpunkt hat. Legt man P nach $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, so wird man setzen:

$$f_{r-k}(x_1, x_2) \equiv x_1^{\nu_k} \bar{f}_{r-k}(x_1, x_2) \qquad (k = 0, 1, \ldots, r),$$

wobei keine der Funktionen $\bar{f}_{r-k}$ den Faktor x_1 enthält. Aus (1) ergibt sich dann

$$\left\| \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r}; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1} \partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r} \right\| \equiv n(n-1)^2 (n-2)^3 \ldots (n-r+1)^r$$
$$\cdot\, x_1^{(\nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_r) - \frac{1}{2} r(r+1)} \left\| \bar{f}_i; \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r \bar{f}_i}{\partial x_2^r} \right\|, \quad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

d. h. der Punkt P ist in γ mit der Vielfachheit

$$\sigma = \nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_r - \tfrac{1}{2} r(r+1) = \sum_{i=0}^{r} (\nu_i - i) \tag{4}$$

zu zählen, sobald wir gezeigt haben, daß die Determinante

$$\left\| \bar{f}_i; \frac{\partial \bar{f}_i}{\partial x_2}; \ldots; \frac{\partial^r \bar{f}_i}{\partial x_2^r} \right\| \qquad (i = 0, 1, \ldots, r)$$

den Faktor x_1 nicht enthält; dies ist aber klar, denn nach Annahme können wir setzen

$$\bar{f}_i(x_1, x_2) = a_{i,0}\, x_2^{n-\nu_r-i} + a_{i-1,1}\, x_2^{n-\nu_r-i-1}\, x_1 + \ldots; \; a_{i,0} \neq 0,$$

und die Determinante

$$\left\| x_2^{n-\nu_i}; (n-\nu_i)\, x_2^{n-\nu_i-1}; \ldots; (n-\nu_i)(n-\nu_i-1)\ldots(n-\nu_i-r+1)\, x^{n-\nu_i-r} \right\|$$
$$= (-1)^{\frac{1}{2}r(r+1)} \cdot x_2^{(n-\frac{r}{2})(r+1)-(\nu_0+\ldots+\nu_r)} \cdot \prod_{i<j} (\nu_j - \nu_i)$$

verschwindet gemäß (3) für $x_2 \neq 0$ nicht. *Die genaue Vielfachheit eines Punktes von h in der Gruppe γ ist also stets durch* (4) *gegeben.*

In dieser Aussage sind einige Sonderfälle enthalten; ein „gewöhnlicher" Festpunkt von g_n^r der Vielfachheit ν_0 besitzt die Zeiger: $\nu_1 = \nu_0 + 1$, $\nu_2 = \nu_0 + 2, \ldots, \nu_r = \nu_0 + r$, und zählt daher in γ für $\nu_0(r+1)$ $(r+1)$-fache Punkte der g_n^r. Es kann ferner vorkommen, daß in g_n^r eine Gruppe enthalten ist, die einen Punkt der Vielfachheit $s > r+1$ besitzt; treten keine Besonderheiten ein, so hat dieser die Zeiger $\nu_0 = 0, \nu_1 = 1, \ldots, \nu_{r-1} = r-1$; $\nu_r = s$, und er zählt in γ mit der Vielfachheit $s - r$.

Nach (3) und (4) ist der Höchstwert, den σ erreichen kann: $\sigma = (n-r)(r+1)$; er entspricht den Zeigern: $\nu_0 = n-r$, $\nu_1 = n-r+1$, $\ldots, \nu_r = n$, d. h. dem Falle eines $n-r$-fachen Festpunktes der g_n^r. *Nur in diesem Falle eines $n-r$-fachen Festpunktes werden alle $(r+1)$-fachen Punkte der g_n^r von einem einzigen Punkte aufgesaugt; in jedem andern Falle, insbesondere bei festpunktfreien Scharen g_n^r $(r < n)$, gibt es mindestens zwei verschiedene $(r+1)$-fache Punkte.*

3.

Die angeführten Tatsachen gelten auch auf jeder rationalen Kurve, sofern man die Erklärung der Zeiger ν_i eines Punktes beibehält und die Vielfachheiten jeweils auf einem Zweige der Kurve zählt. Untersuchen wir die Verhältnisse auf beliebigen irreduziblen algebraischen Kurven, so dürfen wir daher im folgenden das Geschlecht $p \geqq 1$ voraussetzen. Auf einer irreduziblen Kurve C vom Geschlecht p hat eine Linearschar g_n^r $(r \geqq 1)$

$$\varrho = (r+1)\,[n + r(p-1)] \tag{5}$$

$(r+1)$-fache Punkte; diese Formel ist bekannt[2]), wir kommen auf ihren Beweis am Ende zurück. Denkt man sich die g_n^r auf C von einem linearen Kurvensystem ausgeschnitten, so erkennt man, daß die Vielfachheit, mit der ein Punkt P in der Gruppe γ der $(r+1)$-fachen Punkte zu zählen ist, lediglich von dem Verhalten der Schar und Kurve in der Umgebung von P abhängt; da man in einer Umgebung beliebiger Ordnung von P den Zweig von C durch eine rationale Kurve ersetzen kann; gilt die Vielfachheitsformel (4) in der gleichen Schärfe auch für C. Sie wurde mittels geometrischer Überlegungen in Überräumen von C. Segre[3]) aufgefunden. Wir wollen aus ihr einige Formeln über die *Anzahl N der wirklich verschiedenen* Punkte von γ ableiten.

Der höchste Wert, den σ annehmen kann, entspricht auch auf der allgemeinen C den Zeigern $\nu_0 = n - r$, $\nu_1 = n - r + 1, \ldots, \nu_r = n$, d. h. es ist stets

$$\sigma \leqq (r+1)(n-r),$$

mithin

$$N \geqq \frac{n + r(p-1)}{n-r}; \tag{6}$$

auf jeder nichtrationalen Kurve ist demnach $N \geqq 2$; die rationalen Kurven sind durch die Möglichkeit, daß $N = 1$ sein kann, gekennzeichnet. Aber auf nichtrationalen Kurven läßt sich (6) verschärfen; da es auf diesen keine g_n^n geben kann, muß

$$\nu_i \leqq n - r + i - 1, \quad (i = 0, \ldots, r-1), \quad \nu_r \leqq n,$$

also

$$\sigma \leqq (n-r-1)(r+1)+1, \quad N \geqq 1 + \frac{(r+1)(rp+1)-1}{(r+1)(n-r-1)+1} \tag{7}$$

sein. Diese Formel kann N genau liefern. Die Wendepunkte einer C_n sind die dreifachen Punkte der von den Geraden ausgeschnittenen g_n^2; ihre Zahl ist $3n + 6(p-1)$; die Mindestzahl der verschiedenen Wendepunkte einer C_n nach (7):

$$N \geqq 1 + \frac{6p+2}{3n-8};$$

für die C_3 mit $p = 1$ liefert sie $N \geqq 9$, während zugleich 9 die Gesamtzahl der Wendepunkte ist.

4.

Besonderes Interesse verdienen die Formeln, die sich ergeben, wenn die zugrunde gelegte g_n^r eine Vollschar ist; ist P ein Punkt von γ mit den Zeigern ν_i, so müssen die Scharen $|g_n^r - \nu_i \cdot P| = |g_{n-\nu_i}^{r-i}|$ $(i = 0, \ldots, r)$ Vollscharen sein, die P nicht zum Festpunkt haben. Behandeln wir

[2]) A. v. Brill, Math. Annalen 4, (1871), S. 530.

[3]) Annali di Mat. 21 (1894), S. 86—88.

zunächst den Fall, daß $|g_n^r|$ speziell, d. h. in der kanonischen Schar enthalten ist, und C eine nichthyperelliptische Kurve darstellt, also $p \geqq 3$ ist; dann ist entweder die Schar kanonisch, also frei von Festpunkten: $\nu_0 = 0$, oder $1 \leqq r \leqq p-2$. Im letzteren Falle sagt der verschärfte Cliffordsche Satz aus:

$$(8)\quad n - \nu_i \geqq 2r - 2i + 1,\ \nu_i - i \leqq n - 2r + i - 1,\ (i = 0, 1, \ldots, r-1),$$

$$(9)\qquad \sigma \leqq (n-2r)(r+1) + \tfrac{1}{2} r(r-1);$$

handelt es sich aber um die kanonische Schar $|g_{2p-2}^{p-1}| = |g_n^r|$, dann gelten die Beziehungen (8) erst von $i = 1$ an, während für $i = 0$: $\nu_0 = 0$, $n = 2r$ ist; an die Stelle von (9) tritt dann

$$(9')\quad \sigma \leqq \sum_{i=1}^{r} (i-1) + 1 = \tfrac{1}{2} r(r-1) + 1 = \tfrac{1}{2}(p-1)(p-2) + 1.$$

In (9) ist nun, da es sich um eine spezielle Schar handelt, zu setzen:

$$n - r \leqq p - 1,\quad n - 2r \leqq n - r - 1 \leqq p - 2,$$

$$\sigma \leqq \tfrac{1}{2}[(n - 2r + n - r - 2)(r+1) + 2] \leqq \tfrac{1}{2}[(2p-5)(r+1) + 2];$$

da andererseits, ebenfalls zufolge des Cliffordschen Satzes, $n \geqq 2r + 1$ ist, wird

$$(10)\qquad N \geqq \frac{2(r+1)[r(p+1)+1]}{(r+1)(2p-5)+2} = r + \frac{7r(r+1)+2}{(r+1)(2p-5)+2}.$$

Eine spezielle Vollschar $|g_n^r|$, die nicht mit der kanonischen Schar zusammenfällt, hat auf einer nichthyperelliptischen Kurve mindestens $r + 1 \geqq n - p + 2$ verschiedene $(r+1)$-fache Punkte. Diese Abschätzung läßt sich zu $N \geqq r + 2$ verschärfen im Falle, daß die $|g_n^r|$ keine Festpunkte besitzt. Denn dann ist

$$\sigma \leqq r(n-2r) + \tfrac{1}{2} r(r-1) + 1 \leqq r(p-2) + 1,$$

$$N \geqq \frac{(r+1)[r(p+1)+1]}{r(p-2)+1} = r + 1 + \frac{3r(r+1)}{r(p-2)+1}.$$

Hat man es hingegen mit der kanonischen Schar $|g_{2p-2}^{p-1}|$ auf einer nichthyperelliptischen C zu tun, so folgt aus (9'):

$$(10\,\mathrm{a})\qquad N \geqq \frac{2p(p^2-1)}{(p-1)(p-2)+2} = 2p + 6 + \frac{8(p-3)}{(p-1)(p-2)+2};$$

die p-fachen Punkte der kanonischen Schar sind die Weierstraß (W)-punkte der Kurve; *die Zahl der verschiedenen W-Punkte einer nichthyperelliptischen Kurve ist mindestens $2p + 6$*; diese untere Grenze wird für $p = 3$ bei der kanonischen ebenen C_4: $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0$, deren W-Punkte die 12 Wendepunkte sind, tatsächlich erreicht. Die Abschätzung (10 a) hat schon C. Segre mittels überräumlicher Betrachtungen gewonnen[4]); sie

[4]) Rendic. Accad. Lincei 8 (1899), S. 89; vgl. auch F. Severi, Trattato di geometria algebrica I, 1, Bologna 1926, S. 167.

verschärft die von Hurwitz[5]) durch die Methode der additiven Moduln gefundene Schranke $2p+2$.

Gehen wir nun zur Untersuchung der speziellen Vollscharen auf einer hyperelliptischen C über, die eine g_2^1 trägt, so können wir uns diese C in üblicher Weise in eine ebene Kurve $p+2$-ter Ordnung mit einem p-fachen Punkt O birational transformiert denken, auf der die g_2^1 von den Geraden durch O ausgeschnitten wird. Nehmen wir zunächst eine $|g_n^r|$ mit Festpunkten; ein ν_0-facher Festpunkt, der nicht Doppelpunkt der g_2^1 ist, hat die Zeiger: $\nu_1 = \nu_0 + 1, \ldots, \nu_r = \nu_0 + r$, für ihn ist also $\sigma = \nu_0(r+1)$; fällt hingegen ein Festpunkt in einen Doppelpunkt der g_2^1, so kommen ihm die Zeiger: $\nu_1 = \nu_0 + 2, \ldots, \nu_r = \nu_0 + 2r$ zu, so daß $\sigma = \left(\nu_0 + \frac{r}{2}\right)(r+1)$ wird. Jeder Punkt P von γ, der nicht Festpunkt ist, muß schließlich einer der Doppelpunkte der g_2^1 sein, denn sonst gäbe er und sein in g_2^1 Konjugierter, jeder $(r+1)$-fach gezählt, zusammen eine Gruppe der von den Festpunkten befreiten Vollschar, da jede solche mit der g_2^1 zusammengesetzt ist; die Ordnung dieser Gruppe wäre $2r+2$, während die jener Schar $2r$ ist; P hat dann die Zeiger $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = 2, \ldots, \nu_r = 2r$, führt also zu $\sigma = \frac{1}{2}r(r+1)$. Danach gilt für jeden der Punkte von γ:

$$\sigma \leqq \left(\nu_0 + \frac{r}{2}\right)(r+1);$$

auch hier ist: $n \geqq 2r$, und das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn $|g_n^r|$ frei von Festpunkten ist. Für eine mit Festpunkten versehene $|g_n^r|$ wird

$$n - \nu_0 \geqq 2r, \quad 2\nu_0 + r \leqq n - 2r + n - r \leqq 2p - 3,$$
$$\varrho \geqq (r+1)[r(p+1)+1)],$$
$$N \geqq \frac{2r(p+1)+2}{2p-3} = r + \frac{5r+2}{2p-3}, \tag{11}$$

d. h. *es gilt auch hier das Ergebnis, daß N mindestens den Wert $r+1$ hat.* Hat dagegen die $|g_n^r|$ keine Festpunkte, so ist $n = 2r$; die Punkte von γ können nur die Doppelpunkte der g_2^1 sein, und umgekehrt liefert jeder dieser Doppelpunkte, $2r$-fach gezählt, eine Gruppe der $|g_n^r|$, gehört also zu γ; für jeden Punkt von γ wird: $\sigma = \frac{1}{2}r(r+1)$, daher

$$N = \frac{2r(r+1)(p+1)}{r(r+1)} = 2(p+1), \tag{11 a}$$

und in der Tat gibt es $2p+2$ verschiedene Doppelpunkte der g_2^1.

---

[5]) Math. Annalen 41 (1892), S. 403—442; Math. Werke I, Basel 1932, S. 391—430. Vgl. Hensel-Landsberg, Theorie der algebr. Funktionen einer Variablen, Leipzig 1902, S. 493—498.

5.

Wir wenden uns nun der Untersuchung derjenigen Vollscharen $|g_n^r|$ zu, die nicht speziell — wir sagen: gewöhnlich — sind, für die also der Riemann-Rochsche Satz die Beziehung $n = r + p$ liefert; ein Analogon des Cliffordschen Satzes gibt es hier nicht. Jede gewöhnliche Vollschar, deren Stufe $r \geqq p$ ist, muß nach dem genannten Satz frei von Festpunkten sein. Nehmen wir also zunächst an, es sei $r \geqq p$, und P ein Punkt aus γ mit den Zeigern ν_i, so müssen die Scharen

$$|g_n^r - \nu_i \cdot P| = |g_{n-\nu_i}^{r-i}| \qquad (i = 0, 1, \ldots, r-p)$$

gewöhnliche Vollscharen sein, d. h.

$$\begin{aligned} n - \nu_i &= r + p - \nu_i = r - i + p, \\ \nu_i &= i \qquad (i = 0, 1, \ldots, r-p). \end{aligned} \tag{12}$$

Für alle Punkte von γ ist demnach die Vielfachheit

$$\sigma = \sum_{i=r-p+1}^{r} (\nu_i - i).$$

Die Schar $|g_n^r - \nu_{r-p+1} \cdot P| = |g_{n-\nu_{r-p+1}}^{p-1}|$ bietet zwei Möglichkeiten; sie ist entweder a) eine gewöhnliche Schar oder b) eine spezielle, und dann die kanonische Schar.

Im Falle a) ist dann

$$n - \nu_{r-p+1} = r + p - \nu_{r-p+1} = 2p - 1; \quad \nu_{r-p+1} = r - p + 1,$$

und

$$|g_{n-\nu_{r-p+1}}^{p-1} - P| = |g_{2p-2}^{p-2}|$$

wiederum eine gewöhnliche Schar; ist also $\nu_{r-p+2} = \nu_{r-p+1} + 1 = r - p - 2$, so gelangt man zu einer gewöhnlichen Schar $|g_{n-\nu_{r-p+2}}^{p-2}|$, bezüglich derer ebenso weiter zu schließen ist; ist hingegen $\nu_{r-p+2} > r - p + 2$, so muß die Schar $|g_{n-\nu_{r-p+2}}^{p-2}|$ speziell sein, und alle folgenden Scharen $|g_{n-\nu_i}^{r-i}|$ $(i = r - p + 2, \ldots, r)$ erst recht; dann gelten aber die Abschätzungen des Cliffordschen Satzes, denen zufolge auf nichthyperelliptischen Kurven:

$$\begin{aligned} n - \nu_i &\geqq 2r - 2i + 1 \qquad (i = r - p + 2, \ldots, r - 1), \\ \nu_{r-p+1+k} &\leqq (r - p + 1 + k) + k \qquad (k = 1, 2, \ldots, p - 2), \\ \nu_r &\leqq n = r + p, \end{aligned} \tag{13}$$

auf hyperelliptischen hingegen:

$$\begin{aligned} n - \nu_i &\geqq 2r - 2i \qquad (i = r - p + 2, \ldots, r), \\ \nu_{r-p+1+k} &\leqq (r - p + 1 + k) + (k + 1) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p - 1), \end{aligned} \tag{14}$$

ist. War nicht von vornherein $r \geqq p$, so beginnt die Folge dieser Ungleichungen schon für $i = 0$. Ein Punkt P, der zur Möglichkeit a) führt, bedingt in γ eine Vielfachheit:

$$(15) \qquad \sigma = \sum_{k=1}^{p-1} \{\nu_{r-p+1+k} - (r-p+1+k)\} \leqq \begin{matrix} \frac{1}{2}p(p+1) - 1, \\ \frac{1}{2}p(p-1) + 1, \end{matrix}$$

je nachdem ob die Kurve hyperelliptisch ist oder nicht.

Es bleibt noch die Möglichkeit b) zu erledigen, in der $|g^{p-1}_{n-\nu_{r-p+1}}| = |g^{p-1}_{2p-2}|$ die kanonische Schar, also $\nu_{r-p+1} = n - 2p + 2 = r - p + 2$ ist; hier sind alle folgenden Scharen $|g^{r-i}_{n-\nu_i}|$ speziell, es gelten also ebenfalls die Ungleichungen (13) bzw. (14), so daß

$$(15\,\text{a}) \qquad \sigma \leqq \begin{matrix} \frac{1}{2}p(p+1), \\ \frac{1}{2}p(p-1) + 2 \end{matrix}$$

wird. Nun ist für jede gewöhnliche Vollschar

$$\varrho = (r+1)[n + r(p-1)] = p(r+1)^2,$$

und daher wird die Zahl der verschiedenen Punkte von γ bei nicht hyperelliptischen Kurven:

$$(16) \quad N \geqq \frac{2p(r+1)^2}{p(p-1)+4} = \frac{2(r+1)^2}{p+1} + \frac{4(p-2)(r+1)^2}{(p+1)[p(p-1)+4]} > \frac{2}{p+1}(r+1)^2,$$

bei hyperelliptischen dagegen:

$$(16\,\text{a}) \qquad N \geqq \frac{2}{p+1}(r+1)^2.$$

Eine gewöhnliche Vollschar $|g^r_n|$ der Stufe $r \geqq p-1$ besitzt mindestens $\frac{2(r+1)^2}{p+1}$ verschiedene $(r+1)$-fache Punkte; diese Abschätzung erhöht sich um Eins, wenn die Kurve nichthyperelliptisch ist.

Hurwitz[6]) hat bemerkt, daß man, falls $p \geqq 1$ ist, den mit der Kurve birational-invariant verknüpften Weierstraßpunkten die entsprechenden Punkte an die Seite stellen kann, die mehrfache Punkte der Vielfachen der kanonischen Schar sind. Die k-fache ($k > 1$) kanonische Schar ist eine $|g^{2k(p-1)-p}_{2k(p-1)}|$, die gewöhnlich ist; ihre $(p-1)\cdot(2k-1)$-fachen Punkte bilden eine Gruppe γ der Ordnung $\varrho = p(p-1)^2(2k-1)^2$, die mit der Kurve invariant verbunden ist. Die Zahl der verschiedenen unter ihnen ist nach unseren Formeln bei nichthyperelliptischen Kurven ($p \geqq 3$) mindestens $2(2k-1)^2(p-2)$, bei hyperelliptischen hingegen $2(2k-1)^2(p-3)$, [für $p = 2$ mindestens $\frac{2}{3}(2k-1)^2$, für $p = 3$ mindestens $2(2k-1)^2$]; diese Angaben verallgemeinern die Formel (10 a). *In jedem Falle übersteigt*, sobald man $k \geqq 3$ wählt, und $p \geqq 2$ ist, *die Zahl dieser invarianten Punkte die Zahl* $2p + 2$, gleichgültig, ob es sich um eine hyperelliptische

[6]) a. a. O. [5]); Werke I, S. 400.

Kurve handelt oder nicht; woraus sich nach Hurwitz[7]) in bekannter Weise sofort der Satz von Schwarz und Klein ergibt, daß eine algebraische Kurve vom Geschlecht $p \geqq 2$ nicht unendlichviele birationale Transformationen in sich gestatten kann.

Der Vollständigkeit halber mögen noch die Abschätzungsformeln Platz finden, die für eine gewöhnliche Vollschar der Stufe $r \leqq p - 2$ gelten; dann ist im nichthyperelliptischen bzw. hyperelliptischen Falle

$$\nu_i \leqq p - r + 2i - 1, \qquad (i = 0, 1, \ldots, r-1)$$

bzw.

$$\nu_i \leqq p - r + 2i \qquad (i = 0, 1, \ldots, r),$$

$$\sigma \leqq (r+1)(p-r) + \tfrac{1}{2} r(r-1) \quad \text{bzw.} \quad \sigma \leqq \tfrac{1}{2}(r+1)(2p-r),$$

und daher

$$N \geqq \frac{2p(r+1)^2}{2(p-r)(r+1) + r(r-1)} > \frac{2p(r+1)}{2p-r-1} > r+1, \tag{17}$$

bzw.

$$N \geqq \frac{2p(r+1)}{2p-r} > r+1; \tag{17 a}$$

jedenfalls ist dann immer $N \geqq r+2$.

Überblickt man alle unsere Abschätzungen, so kann man sie zu folgender, vergröbernder Aussage zusammenfassen: *Auf jeder nichtrationalen Kurve hat eine Vollschar der Stufe r mindestens $r+1$ voneinander verschiedene $(r+1)$-fache Punkte.*

6.

Zum Schluß kommen wir auf die Formel (5) zu sprechen. Ihre wahre algebraische Begründung erfährt sie durch die Bemerkung, daß alle Scharen g_n^r, die zueinander äquivalent sind, d. h. in einer umfassenderen Linearschar gleicher Ordnung g_n^s $(s \geqq r)$ enthalten sind, zu äquivalenten Gruppen γ führen, die selbst einer Linearschar g_ϱ von der zu bestimmenden Ordnung ϱ angehören.

Wird die g_n^r auf C durch das Linearsystem

$$\lambda_0 f_0(x_1, x_2, x_3) + \ldots + \lambda_r f_r(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{18}$$

bestimmt, so ist γ zu finden, indem man C mit der Kurve (2) zum Schnitt bringt, wobei man in den f_i sich x_3 als algebraische Funktion von x_1, x_2 zu denken hat, die durch die Gleichung von C: $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ vermittelt wird. Wird die umfassendere g_n^s von dem (18) enthaltenden Kurvensystem

$$\lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_s f_s = 0$$

[7]) a. a. O., Werke I, S. 394—395; vgl. Hensel-Landsberg, a. a. O., S. 499—501.

ausgeschnitten, so liegen die zu den in ihr enthaltenen g_n^r gehörigen Gruppen γ in der Linearschar, die auf C von dem Linearsystem:

$$\sum_{i_0, \ldots, i_r} \lambda_{i_0 \ldots i_r} \cdot \left\| \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^r}; \quad \frac{\partial^r f_i}{\partial x_1^{r-1} \partial x_2}; \quad \ldots; \quad \frac{\partial^r f_i}{\partial x_2^r} \right\|_{(i = i_0, \ldots, i_r)} = 0,$$

worin $i_0 \ldots i_r$ alle Kombinationen von je $r+1$ Zeigern der Folge $0 \ldots s$ durchläuft, ausgeschnitten werden. Sie sind demnach äquivalent.

Man kann für diese Tatsache auch einen mehr begrifflichen Beweis geben. Es seien etwa ${}_0g_n^r$ und $\bar{g}_n^r$ in einer g_n^s enthalten und $f_0 \ldots f_r$, bzw. $\bar{f}_0 \ldots \bar{f}_r$ die in der Darstellung (18) verwandten Funktionen; wir können etwa annehmen, daß ${}_0g_n^r$ und $\bar{g}_n^r$ keine Gruppe gemein haben, Dann bilden wir die Linearsysteme aus $f_0, \ldots, f_{r-1}, \bar{f}_0$; $f_0, \ldots, f_{r-2}, \bar{f}_0, \bar{f}_1$; $\ldots$; $f_0, \bar{f}_0, \ldots, \bar{f}_{r-1}$, die auf C die Scharen ${}_1g_n^r, {}_2g_n^r, \ldots, {}_{r-1}g_n^r$ erzeugen. In der Kette der Scharen ${}_0g_n^r, {}_1g_n^r, \ldots, {}_{r-1}g_n^r, \bar{g}_n^r$ haben je zwei benachbarte eine Linearschar $(r-1)$-ter Stufe gemein; wegen der Transitivität der Äquivalenz ist diese für die zu ${}_0g_n^r$ und $\bar{g}_n^r$ gehörenden Gruppen ${}_0\gamma, \bar{\gamma}$ bewiesen, wenn wir sie unter der zusätzlichen Voraussetzung bewiesen haben, daß ${}_0g_n^r$ und $\bar{g}_n^r$ eine g_n^{r-1} gemein haben, also etwa

$$f_i = \bar{f}_i \quad (i = 0, 1, \ldots, r-1), \qquad f_r \neq \bar{f}_r$$

ist. Das Linearsystem

$$\lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_{r-1} f_{r-1} - \lambda_r (\mu_0 f_r + \mu_1 \bar{f}_r) = 0$$

schneidet bei festem $\mu_0 : \mu_1$ eine g_n^r aus, die in der vom System

$$\lambda_0 f_0 + \ldots + \lambda_r f_r + \lambda_{r+1} \bar{f}_r = 0$$

ausgeschnittenen g_n^{r+1} enthalten ist. Entsprechend den Werten von $\mu_0 : \mu_1$ erhält man eine rationale, einstufige Gesamtheit Γ solcher g_n^r, die für $\mu_1 = 0$ die ${}_0g_n^r$, für $\mu_0 = 0$ die $\bar{g}_n^r$ umfaßt, und zu deren jeder eine Gruppe γ gehört. Bezüglich jeder Schar, also insbesondere bezüglich der g_n^{r+1}, hat ein allgemeiner Punkt von C die Zeiger $\nu_i = i$, er gehört demnach, $r+1$-fach gezählt, nur einer ihrer Gruppen an, die etwa den Parametern $\lambda_0, \ldots, \lambda_{r+1}$ entspricht; aus $\lambda_r : \lambda_{r+1} = \mu_0 : \mu_1$ bestimmt sich eine einzige g_n^r aus Γ, die die genannte Gruppe enthält, für die also $P(r+1)$-facher Punkt ist; mithin hat man eine einstufige rationale Gesamtheit von Gruppen γ auf C von der Art, daß ein allgemeiner Punkt von C genau einer γ angehört; diese Gesamtheit muß also nach dem Lürothschen Satz eine Linearschar sein, d. h. ${}_0\gamma$ und $\bar{\gamma}$ sind äquivalent.

Nimmt man eine Vollschar $|g_n^s|$ und betrachtet alle in ihr enthaltenen g_n^r $(r \leqq s)$, so bestimmen nach dem Gesagten die zugehörigen Gruppen γ eine Vollschar $|(g_n)_{r+1}|$ der Ordnung ϱ, die sich bei birationalen Trans-

formationen der C kovariant zur $|g_n^s|$ verhält; sie erfüllt die wichtige Beziehung [8]):

$$|(g_n + g_m)_{r+1}| = |(g_n)_{r+1} + (r+1)\, g_m|; \tag{19}$$

denn um die rechte Seite zu finden, braucht man nur die Gruppe γ einer besonderen r-stufigen Schar, die in $|g_n + g_m|$ enthalten ist, aufzusuchen; als solche wählen wir eine g_n^r, zu der eine Gruppe G_m aus g_m als Gruppe von Festpunkten hinzugenommen ist; G_m werde dabei so gewählt, daß in ihr keiner der $r+1$-fachen Punkte der g_n^r vorkommt und alle m Punkte voneinander verschieden sind, so daß jeder ihrer Punkte bezüglich der Schar $g_n^r + G_m$ die Zeiger $\nu_0 = 1$, $\nu_1 = 2, \ldots, \nu_r = r+1$ hat. Nach (4) ist dann die Gruppe der $(r+1)$-fachen Punkte dieser Schar gleich der entsprechenden Gruppe bezüglich g_n^r, vermehrt um $(r+1)\cdot G_m$, so daß (19) folgt.

Um schließlich $|(g_n)_{r+1}|$ und damit ϱ zu finden, nimmt man eine in $|g_n^s|$ enthaltene g_n^1, die bekanntlich eine Gruppe J von $2n + 2p - 2$ Doppelpunkten besitzt; ist $|g_n^s|$ festpunktfrei, so kann man voraussetzen, daß alle Punkte von J verschieden seien; die g_n^1 werde durch die Gleichung $\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 = 0$ bestimmt. Das Linearsystem

$$\lambda_0 f_0^r + \lambda_1 f_0^{r-1} f_1 + \ldots + \lambda_r f_1 = 0$$

bestimmt auf C eine g_{nr}^r, deren jede Gruppe durch Zusammenfügen von r Gruppen der g_n^1 entsteht, und deren $(r+1)$-fache Punkte also nur in die Punkte von J fallen können; jeder Punkt von J besitzt gegenüber der g_{nr}^r die Zeiger $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = 2, \ldots, \nu_r = 2r$, d. h. es ist nach (19) und (4):

$$\begin{aligned} |(g_{nr}^r)_{r+1}| &= |\tfrac{1}{2} r(r+1)\cdot J| = |\tfrac{1}{2} r(r+1)\cdot (g_n)_2| \\ &= |(r g_n^1)_{r+1}| = |(g_n + (r-1)\, g_n)_{r+1}| = |(g_n)_{r+1} + (r^2 - 1)\, g_n|, \end{aligned}$$

$$|(g_n)_{r+1}| = |\tfrac{1}{2} r(r+1)\cdot (g_n)_2 - (r^2 - 1)\, g_n|. \tag{20}$$

Andererseits ist die invariante kanonische Schar $|g_{2p-2}^{p-1}|$ auf Kurven vom Geschlecht $p \geqq 1$ erklärt durch die Beziehung

$$|g_{2p-2}^{p-2}| = |(g_n)_2 - 2\, g_n|,$$

so daß sich ergibt [9]):

$$|(g_n)_{r+1}| = |(r+1)\, g_n + \tfrac{1}{2} r(r+1)\cdot g_{2p-2}^{p-1}|. \tag{21}$$

Daraus ergibt sich für die Ordnung ϱ der linken Seite die Formel (5). Nach unseren früheren Ausführungen ist sie auch für $p = 0$ richtig. Mittels (19) ist dann die Gültigkeit von (20) und (21) auch auf Scharen $|g_n^s|$, die Festpunkte besitzen, zu übertragen.

---

[8]) Vgl. F. Enriques, Rendic. Accad. Lincei 27, I (1919), S. 371.

[9]) De Franchis, Palermo Rend. 34 (1912), S. 168.

Die Beziehung (20) ist inhaltreicher als (5). Zur Verdeutlichung mögen einige bekannte Beispiele erwähnt werden. Die Wendepunkte einer ebenen C_n sind die dreifachen Punkte der von den Geraden ausgeschnittenen g_n^2, ihre Anzahl ist $3n + 6(p-1)$; sie werden nach (20) von einer Kurve der Ordnung $3n - 6$ ausgeschnitten, die sich in den singulären Punkten der C_n wie die dreifach-adjungierten Kurven verhält; das ist eben die Hessesche Kurve, die in der Tat in jedem gewöhnlichen i-fachen Punkt der C_n einen $3i - 4$-fachen Punkt besitzt, von dem i-Tangenten mit denen an C_n zusammenfallen.

Die sextaktischen Punkte einer ebenen Kurve C_n sind die sechsfachen Punkte der von den C_2 ausgeschnittenen g_{2n}^5; ihre Anzahl ist $12n + 30(p-1)$, und sie werden von einer Kurve der Ordnung $15n - 33$ ausgeschnitten, die sich in den singulären Punkten der C_n wie die 15-fach adjungierten Kurven verhält. Jeder gewöhnliche Wendepunkt besitzt gegenüber der g_{2n}^5 die Zeiger $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = 1, \ldots, \nu_4 = 4$, $\nu_5 = 6$, zählt also einmal als sextaktischer Punkt (in der Tat berührt die doppeltgezählte Wendetangente die C_n sechspunktig); jede gewöhnliche Spitze besitzt die Zeiger $\nu_0 = 0$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 3, \ldots, \nu_5 = 6$, zählt also für fünf sextaktische Punkte, und ähnlich ist die Zählung der anderen singulären Punkte der C_n nach (4) leicht zu bestimmen. Die Mindestzahl der verschiedenen sextaktischen Punkte ist nach (7) $N \geqq \frac{12n + 30(p-1)}{12n - 35}$; sie wird bei der elliptischen C_3 mit $N = 36$ wirklich erreicht. Hingegen gelangt man bezüglich der 108 sextaktischen Punkte der C_4 ohne Doppelpunkte auf Grund von (16) zur Aussage, daß mindestens 22 verschiedene darunter sein müssen. Als letztes Beispiel nehmen wir die kanonische Kurve vom Geschlechte 4, d. h. die C_6 des R_3, die als Schnitt zweier allgemeiner Flächen F_2^0 und F_3^0 entsteht. Ihre stationären Punkte mit vierpunktig berührender Schmiegebene sind die Weierstraßpunkte, deren Gesamtzahl 60 ist; sie werden von einer Fläche 10. Ordnung ausgeschnitten; es gibt mindestens 15 verschiedene unter ihnen. Den sextaktischen Punkten entsprechen im räumlichen Falle diejenigen, in denen es außer der F_2^0 eine neunpunktig anschmiegende F_2 gibt; ihre Gesamtzahl ist 324, die Mindestzahl der verschiedenen nach (16) größer als 40, sie werden von einer F_{54} ausgeschnitten.

(Eingegangen am 25. September 1935.)