Werk

Titel: Dreidimensionale wirbelgefaserte Räume

Autor: Wendt, H. und Ha; Hantzsche, W., W.

Ort: Berlin

Jahr: 1936

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0040|log60

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Dreidimensionale wirbelgefaserte Räume.

Von

W. Hantzsche und H. Wendt in Dresden.

Die folgenden Untersuchungen sind ein Beitrag zum Homöomorphieproblem dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten. Solange man das vollständige Invariantensystem dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten gegen topologische Abbildungen nicht kennt, muß man sich damit begnügen, einzelne Mannigfaltigkeiten aufzuzählen, zu klassifizieren und auf ihre Homöomorphie zu untersuchen. Ein wichtiges Hilfsmittel hierzu ist die Faserung der Mannigfaltigkeit. Läßt sich eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit fasern[1]), so beherrscht man sie damit ziemlich gut, da man das vollständige Invariantensystem gefaserter Räume gegen *fasertreue* topologische Abbildungen kennt und die nahezu stärkste bekannte Invariante, die Fundamentalgruppe, aus den Faserinvarianten ablesen kann.

Wir verallgemeinern hier die Faserung, indem wir „Wirbellinien" zulassen, und stellen das volle Invariantensystem solcher gefaserter Räume, die mit *mindestens einer* Wirbellinie gefasert sind, gegen fasertreue topologische Abbildungen auf. Das Ergebnis ist, daß die Wirbellinien enthaltenden gefaserten Räume eine sehr viel einfachere topologische Struktur haben als die wirbelfrei gefaserten Räume. Bohrt man aus einem wirbelfrei gefaserten Raume eine Faser aus, nimmt man also einen gefaserten Vollring heraus und schließt die Ausbohrung durch einen wirbelgefaserten Vollring, so daß Fasern der Randringfläche des Vollringes auf Fasern der Randringfläche der Ausbohrung fallen, so zerfällt der entstehende Raum in eine topologische Summe einfacher und wohlbekannter Räume.

§ 1.

Berandeter gefaserter Raum.

Wir gehen von einem berandeten gefaserten Raum aus. Darunter verstehen wir eine endliche dreidimensionale berandete Mannigfaltigkeit[2]), die folgende Eigenschaften hat:

[1]) H. Seifert, Topologie dreidimensionaler gefaserter Räume, Acta math. **60** (1933), S. 147—238. Im folgenden zitiert mit Fas. Die vorliegende Arbeit setzt die Kenntnis von Fas. nicht voraus. Wegen der Ausführung einiger Beweise wird jedoch darauf verwiesen.

[2]) Seifert-Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Teubner 1934, § 64.

I. Die Punkte der Mannigfaltigkeit verteilen sich auf geschlossene Kurven (Jordan-Kurven), sogenannte *Fasern*. Durch jeden Punkt geht genau eine Faser H hindurch.

II. Jede Faser besteht entweder ganz aus inneren Punkten oder ganz aus Randpunkten der Mannigfaltigkeit. Wir unterscheiden dementsprechend zwischen *inneren* und *Randfasern*. Da die orientierbare und die nichtorientierbare Ringfläche die einzigen geschlossenen faserbaren Flächen sind[3]), so kommen nur die beiden Ringflächen als Randflächen in Frage. Die nichtorientierbare Ringfläche schließen wir aus durch das Axiom

III. Ein berandeter gefaserter Raum hat nur orientierbare Ringflächen zu Randflächen[4]).

IV. Zu jeder inneren Faser H gibt es eine *Faserumgebung*, das ist eine solche H enthaltende Teilmenge von inneren Fasern, die sich fasertreu auf einen „gefaserten Vollring" abbilden läßt, wobei H in die „mittlere" Faser übergeht.

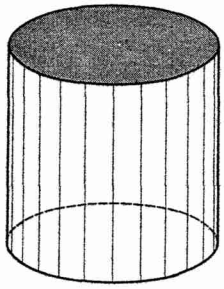

Fig. 1. Gefaserter Vollring.

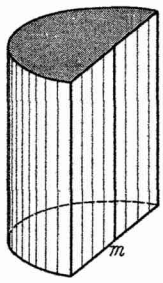

Fig. 2. Gefaserter Halbvollring.

Unter einem *gefaserten Vollring* verstehen wir einen geraden Kreiszylinder des euklidischen Raumes, der durch die zur Achse parallelen Geraden gefasert ist und dessen Grund- und Dachfläche, um einen rationalen Winkel $2\pi \frac{\nu}{\mu}$ gegeneinander verschraubt, zur Deckung gebracht sind; μ und ν sind dabei teilerfremde ganze Zahlen. Die Achse des Vollrings heißt die mittlere Faser (Fig. 1). — Bei der Schließung

[3]) Man sieht die Behauptung folgendermaßen ein. Die Umgebung einer jeden Faser H einer gefaserten Fläche ist ein durch konzentrische Kreise gefaserter Kreisring, in dem H eine innere Faser ist. Die faserbaren Flächen erhält man dann offenbar aus einem gefaserten Kreisring durch Zuordnung der beiden Randfasern. Damit ergeben sich nur die beiden oben genannten Flächen. Vgl. auch W. Threlfall, Räume aus Linienelementen, Jahresber. Deutsch. Math.-Vereinig. 42 (1932), S. 110.

[4]) Der Kürze wegen behandeln wir nur diesen Fall ausführlich. Im Falle nichtorientierbarer Randringflächen ergibt sich nichts wesentlich Neues. (Darüber vgl. Anhang S. 753.)

des Zylinders zum gefaserten Vollring setzen sich je μ achsenparallele Strecken zu einer einzigen Faser aneinander, nur die Achse bildet eine Faser für sich allein.

Wenn Grund- und Dachfläche unverschraubt einander zugeordnet sind, also die Zahl $\mu = 1$ ist, so heißt der Vollring ein *gewöhnlich gefaserter Vollring*.

V. Zu jeder Randfaser H' gibt es eine *Randfaserumgebung*, das ist eine H' enthaltende Teilmenge von inneren Fasern und Randfasern, die sich fasertreu auf einen „gefaserten Halbvollring" abbilden läßt, und zwar derart, daß die Randfasern einen Kreisring auf dem Halbvollring bilden und die Faser H' in die „mittlere" Faser dieses Kreisringes übergeht.

Unter einem *gefaserten Halbvollring* verstehen wir ein gerades euklidisches Prisma, dessen Querschnitt eine Halbkreisfläche ist und das durch Strecken parallel zu den Kanten gefasert ist. Seine Grund- und Dachfläche sind durch Translation zuzuordnen und zu identifizieren. Die Faser durch den Mittelpunkt m des Halbkreises heißt mittlere Faser (Fig. 2); die Fasern durch den berandenden Durchmesser des Halbkreises bilden einen gefaserten Kreisring. Er entspricht Randfasern des gefaserten Raumes, aus dem wir uns den gefaserten Halbvollring ausgeschnitten denken.

Fasertreu wird eine Abbildung genannt, wenn sie erstens topologisch ist und zweitens Fasern in Fasern überführt.

Wir versehen jeden Vollring mit einer bestimmten räumlichen Orientierung, die uns einen bestimmten Schraubsinn in dem Vollring liefert. Der Schraubsinn legt dann bei der Zuordnung von Grund- und Dachfläche den positiven Drehsinn eindeutig fest. Dadurch sind die Zahlen μ und ν für den orientierten Vollring innerhalb der Grenzen $0 \leqq \nu < \mu$ eindeutig bestimmt. — Zwei orientierte gefaserte Vollringe sind dann und nur dann mit Erhaltung der Orientierung fasertreu aufeinander abbildbar, wenn sie in den so normierten Zahlen μ und ν übereinstimmen.

Betrachtet man also zwei Vollringe, die sich mit Erhaltung der Orientierung fasertreu aufeinander abbilden lassen, als nicht verschieden, so ist hiernach ein gefaserter Vollring durch die Zahlen μ, ν charakterisiert. Kehrt man die Orientierung im Vollring μ, ν um, so geht er in den Vollring μ, $\mu - \nu$ über.

§ 2.

Wirbelgefaserter Raum.

Aus den berandeten gefaserten Räumen leiten wir die *wirbelgefaserten Räume* ab. Wir geben dazu auf jeder der Randringflächen des berandeten

gefaserten Raumes einen Teil der Randfasern an, die einen oder endlich viele Kreisringe auf diesen ausmachen, oder aber auch alle Fasern der betreffenden Randringflächen erschöpfen. Diese Randfasern H wollen wir je zu einem Punkte zusammenziehen, indem wir die Punkte einer Randfaser H zu einem Punkte P identifizieren[5]). Hierdurch entsteht eine neue Mannigfaltigkeit. Die Punkte P bilden darin Kurvenstücke, die wir *Wirbelstücke* nennen wollen, oder eine einzige geschlossene Kurve, eine *Wirbellinie*. Wir verfolgen dies näher an einer Randringfläche, die wir uns zum Rechteck, dem Fundamentalpolygon, aufgeschnitten denken. Im Rechteck $ABCD$ mit paarweise zugeordneten Seiten $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ und $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, das durch die Strecken parallel zu $\overrightarrow{AB}$ gefasert ist, seien endlich viele zu $\overrightarrow{AB}$ parallele Streifen ausgezeichnet, die die erwähnten Kreisringe der Randringfläche ausmachen (schraffierte Streifen der Fig. 3a).

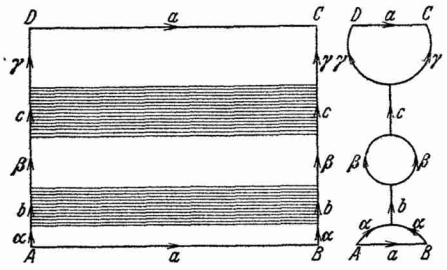

Fig. 3a.

Fig. 3b.

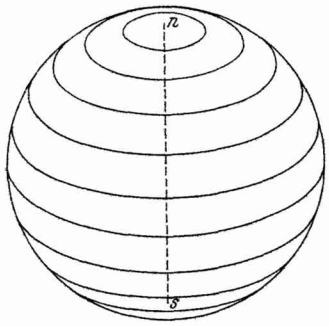

Fig. 4. Wirbelgefaserte Vollkugel.

Auf jeder Faser eines solchen Kreisringes werden die sämtlichen Punkte identifiziert. Wir erhalten durch dieses Identifizieren aus der Ringfläche endlich viele Kugelflächen, die durch Wirbelstücke miteinander verbunden sind (Fig. 3b), oder eine einzige geschlossene Wirbellinie, falls alle Fasern zu identifizieren sind.

Die aus dem berandeten gefaserten Raum entstehenden Räume sind also im allgemeinen von endlich vielen Kugelflächen und Ringflächen berandete Mannigfaltigkeiten und nur dann geschlossene Mannigfaltigkeiten, wenn man alle Fasern der Randringflächen des berandeten Raumes zu Punkten zusammenzieht. Auch der wirbelgefaserte Raum hat die Eigenschaft, daß durch jeden seiner Punkte genau eine Faser hindurchgeht mit Ausnahme nur der Punkte der Wirbelstücke oder Wirbellinien. Wir denken uns im folgenden einen wirbelgefaserten Raum, falls er orientierbar ist, stets mit einer bestimmten Orientierung versehen.

[5]) In dem präzisen Sinne, den dieser Terminus nach Seifert-Threlfall, Topologie (1934), § 8, besitzt.

Zwei wirbelgefaserte Räume sind gleich, wenn sie sich fasertreu und im Falle der Orientierbarkeit mit Erhaltung der Orientierung aufeinander abbilden lassen.

Wir erläutern die eingeführten Begriffe an zwei Beispielen.

1. *Wirbelgefaserte Vollkugel.* Man erhält sie, wenn man eine euklidische Vollkugel durch die Bahnkurven fasert, die ihre Punkte bei der Rotation um einen Durchmesser (Endpunkte n und s, Fig. 4) beschreiben. Der Durchmesser $\overline{ns}$ ist ein Wirbelstück. Der berandete gefaserte Raum, aus dem die wirbelgefaserte Vollkugel durch Identifizieren gewisser Randfasern entsteht, ist ein gewöhnlich gefaserter Vollring; auf seinem Rande ist ein gefaserter Kreisring ausgezeichnet, dessen Fasern in Punkte zusammenzuziehen sind.

2. *Wirbelvollring.* Der Wirbelvollring ist ein gerader Kreiszylinder des euklidischen Raumes, der durch die Bahnkurven seiner Punkte bei der Rotation um seine Achse gefasert ist und dessen Grund- und Dachfläche durch Parallelverschiebung zu identifizieren sind (Fig. 5). Die

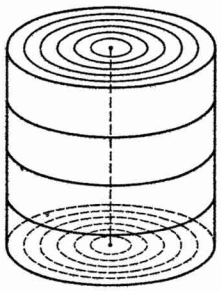

Fig. 5. Wirbelvollring.

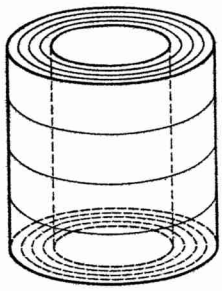

Fig. 6. Gefaserter Hohlzylinder.

Achse ist die Wirbellinie. Man erhält den Wirbelvollring auch aus einem gewöhnlich gefaserten Hohlring, das ist ein gerader, durch koaxiale Kreise gefaserter Hohlzylinder (Fig. 6), durch Identifizieren der Punkte der Fasern einer Mantelfläche.

Die Bezeichnung „Wirbellinie" ist im Anschluß an die Hydrodynamik gewählt. Die vorhergehenden Beispiele geben dazu Anlaß, da sie die Wirbellinie als Wirbellinie einer Flüssigkeitsbewegung auffassen lassen.

Weitere Beispiele, auch von geschlossenen wirbelgefaserten Mannigfaltigkeiten, folgen im § 7.

§ 3.

Zerlegungsfläche.

Einem wirbelgefaserten Raum F können wir eine *Zerlegungsfläche* f zuordnen. Wir identifizieren zu diesem Zwecke jede Faser von F (aber

nicht die Wirbellinien und auch nicht die Wirbelstücke) zu je einem Punkte. Genauer: Betrachtet man die sämtlichen Punkte einer Faser als äquivalent, so entsteht durch Identifizieren äquivalenter Punkte ein neuer „Umgebungsraum", von dem wir zeigen werden, daß er eine berandete Fläche, die sogenannte Zerlegungsfläche f von F ist. Die inneren Punkte von f entsprechen umkehrbar eindeutig den inneren Fasern von F, während einem Randpunkte entweder eine Randfaser oder ein Punkt eines Wirbelstückes oder einer Wirbellinie entspricht. Zur leichteren Bezeichnung dieses Unterschiedes ziehen wir die Randkreise von f, die Wirbellinien von F entsprechen, bzw. die Stücke von Randkreisen, die zu Wirbelstücken gehören, in den folgenden Figuren stark aus („*markieren sie*"). — Da der wirbelgefaserte Raum F aus einem berandeten gefaserten Raum $\overline{F}$ durch Identifizieren von Faserpunkten hervorgegangen ist und man das Identifizieren schrittweise vornehmen kann, ohne das Ergebnis zu ändern, so stimmen die Zerlegungsflächen von F und $\overline{F}$ als berandete Flächen überein und unterscheiden sich nur als Zerlegungsflächen durch die starke Markierung gewisser Randkurvenstücke. Daß aber aus $\overline{F}$ durch Identifizieren der Punkte auf allen Fasern in der Tat eine berandete Fläche $\bar{f}$ hervorgeht, ergibt sich daraus, daß $\overline{F}$ von lauter gefaserten Ringflächen berandet wird. Diese Randringflächen kann man mit gewöhnlich gefaserten Vollringen schließen, indem man eine Randringfläche von $\overline{F}$ mit der Randringfläche eines gewöhnlich gefaserten Vollringes fasertreu identifiziert. Es entsteht dann aus $\overline{F}$ ein geschlossener gefaserter Raum. Dieser hat eine geschlossene Fläche als Zerlegungsfläche, wie in Fas. S. 155 bewiesen worden ist. Die Verschlußringe bilden sich in punktfremde Elementarflächenstücke der Zerlegungsfläche ab (Fas. § 4). Sieht man daher von den inneren Fasern der Verschlußvollringe ab, so bleibt als Zerlegungsfläche von $\overline{F}$ eine berandete Fläche $\bar{f}$ übrig.

§ 4.

Bewertung der Zerlegungsfläche.

Ist s ein Weg der Zerlegungsfläche f, der von einem Punkt h_1 nach einem Punkt h_2 führt und die markierten Teile des Randes von f vermeidet, so kann man in dem wirbelgefaserten Raum die Faser H_1 in die Faser H_2 so deformieren, daß sie immer Faser bleibt und ihr Bildpunkt auf der Zerlegungsfläche den Weg s durchläuft. Durch den Weg s ist nicht schon eine punktweise Abbildung der Anfangsfaser H_1 auf die Endfaser H_2 bestimmt, sondern unterwegs kann sich die Faser noch beliebig in sich verschieben. Wohl aber ist die Abbildung der Anfangsfaser auf

die Endfaser bis auf eine Selbstabbildung von H_1 mit Erhaltung der Orientierung bestimmt. Ist also die Anfangsfaser orientiert, so überträgt sich die Orientierung längs des Weges s eindeutig auf die Endfaser. Ist s' ein zweiter Weg von h_1 nach h_2, so kann die Fortsetzung ein und derselben Orientierung von h_1 längs s' zu einem anderen Ergebnis führen als diejenige längs s. Dagegen stimmen die Endorientierungen überein, wenn sich s in s' auf der Zerlegungsfläche deformieren läßt. Ist insbesondere s eine geschlossene Kurve der Zerlegungsfläche, so sind die beiden Fälle möglich, daß die Orientierung der Faser bei Durchlaufung von s erhalten bleibt oder sich umkehrt. Je nachdem der erste oder zweite Fall eintritt, erteilen wir der Kurve s den *Wert* $+1$ oder -1. Da sich der Wert einer geschlossenen Kurve bei Deformation nicht ändert, so kommt jeder Wegeklasse, d. h. jedem Element der Fundamentalgruppe, ein bestimmter Wert zu. Bei aufeinander folgender Durchlaufung zweier Wege a und b, d. h. bei Produktbildung ab der den Wegen entsprechenden Elemente der Fundamentalgruppe, multiplizieren sich die zugehörigen Werte; bei Umkehrung der Durchlaufung, d. h. bei Reziprokenbildung, bleibt der Wert erhalten. Hieraus folgt, daß der Wert einer Kurve sogar schon durch die Homologieklasse bestimmt ist. Denn jede nullhomologe Kurve hat den Wert $+1$, weil das ihr entsprechende Element der Fundamentalgruppe der Kommutatorgruppe dieser Gruppe angehört, also Produkt von Kommutatoren ist, und jeder Kommutator $ab \cdot a^{-1}b^{-1}$ den Wert $+1$ hat. Man kennt daher die Bewertung aller Kurven, wenn man sie für ein fundamentales Kurvensystem (Erzeugendensystem der Fundamentalgruppe), ja sogar, wenn man sie für eine Basis der Homologiegruppe kennt.

Eine Zerlegungsfläche, in der man die Bewertung aller geschlossenen Kurven kennt, heißt eine *bewertete Zerlegungsfläche.* Beispiele solcher finden sich im § 7. Wir erwähnen noch, daß ein orientierbarer, wirbelgefaserter Raum sehr wohl eine nichtorientierbare Zerlegungsfläche haben kann und umgekehrt (Beispiel S. 745).

Jede geschlossene Kurve der Zerlegungsfläche, die einer Randkurve homolog ist, hat den Wert $+1$. Das ist klar, wenn die Randkurve nicht markiert ist, denn dann entspricht jedem Punkt der Randkurve selbst eine Faser. Diese Fasern bilden aber eine orientierbare Randringfläche in F, auf der sich die Orientierung einer Faser nicht umkehrt, also kehrt sich auch auf jeder zu einer solchen Randkurve homologen, ganz im Innern der Zerlegungsfläche verlaufenden Kurve die Faserorientierung nicht um. Da durch das Identifizieren von Punkten einer Randfaser die inneren Fasern von f nicht berührt werden, so bleibt der Wert $+1$ auch nach dem Identifizieren erhalten, gilt also für Kurven, die be-

liebigen, auch ganz oder stückweise markierten Randkurven von f homolog sind.

Die Frage, wieviele Möglichkeiten man für die Bewertung der geschlossenen Kurven einer geschlossenen Fläche hat, die bewertete Zerlegungsfläche eines geschlossenen (ohne Wirbellinien) gefaserten Raumes werden soll, ist in Fas. § 8 vollständig beantwortet worden. Bezeichnen wir die Orientierbarkeit bzw. die Nichtorientierbarkeit des gefaserten Raumes mit O bzw. N, diejenige der Zerlegungsfläche mit o bzw. n und die Henkelzahl von f mit h[6]) bzw. die Kreuzhaubenzahl mit k, so lautet das Ergebnis folgendermaßen: In den Fällen $(O\,o\,h)$, $(O\,n\,k)$, $(N\,o\,h)$ gibt es genau eine Bewertung[7]). Im Falle $(N\,n\,k)$ gibt es für $k > 2$ drei verschiedene Bewertungen, die durch die Symbole $(N\,n\,\mathrm{I}\,k)$, $(N\,n\,\mathrm{II}\,k)$, $(N\,n\,\mathrm{III}\,k)$ unterschieden werden; für $k = 2$ existiert nur $(N\,n\,\mathrm{I}\,2)$ und $(N\,n\,\mathrm{II}\,2)$, für $k = 1$ nur noch $(N\,n\,\mathrm{I}\,1)$. Im Falle $(O\,o\,h)$ sind die sämtlichen Kurven der orientierbaren Zerlegungsfläche f mit $+1$ bewertet, im Falle $(O\,n\,k)$ dagegen nur diejenigen, längs deren die Flächenorientierung erhalten bleibt.

Durch Anbringung von w Löchern mit markierten oder unmarkierten Randkreisen ändert sich an den Bewertungsmöglichkeiten nichts, da die Kurven, die ein Loch umlaufen, wie wir sahen, den Wert $+1$ haben, denselben, den sie vor Anbringung des Loches hatten, weil sie vordem nullhomolog sind.

Wir können also die topologische Struktur (Orientierbarkeitscharakter, Geschlecht, Ränderzahl) und die Bewertung der Zerlegungsfläche f eindeutig durch die Symbole

$(O\,o\,h\,w)$, $(O\,n\,k\,w)$, $(N\,o\,h\,w)$, $(N\,n\,\mathrm{I}\,k\,w)$, $(N\,n\,\mathrm{II}\,k\,w)$, $(N\,n\,\mathrm{III}\,k\,w)$

festlegen. Nicht dagegen kommt in den Symbolen die Markierung der Ränder, sowie die Lage und Art der Ausnahmepunkte (§ 5) zum Ausdruck.

§ 5.

Ausnahmefasern.

Ein orientierbarer berandeter gefaserter Raum mit fester Orientierung bestimmt für jede Faserumgebung eine Orientierung. Damit sind nach § 1 die Zahlen μ und ν für jede Faserumgebung eindeutig fesgelegt. Daß die so erhaltenen Zahlen μ, ν unabhängig von der Auswahl der Faserumgebung einer betrachteten Faser sind, liegt daran, daß man je

[6]) In Fas. wird die Henkelzahl einer orientierbaren Fläche mit p bezeichnet. Wir ersetzen diesen Buchstaben durch den jetzt üblichen h.

[7]) Zwei bewertete Flächen, die sich mit Erhaltung der Bewertung topologisch aufeinander abbilden lassen, gelten als nicht verschieden.

zwei Faserumgebungen durch eine fasertreue Deformation unter Festhaltung der mittleren Faser ineinander überführen kann (Fas. S. 164). Durch die Orientierung des Raumes sind sie für jede Faser eindeutig bestimmt[8]). Sie heißen die *charakteristischen Zahlen* der Faser. In einem nichtorientierbaren Raum läßt sich für die einzelnen Faserumgebungen keine einheitliche Orientierung festlegen. Wir orientieren dann die Faserumgebungen unabhängig voneinander, und zwar jede so, daß $0 \leqq \nu \leqq \frac{\mu}{2}$ wird[9]).

Ist $\mu > 1$, so heißt die Faser eine μ-fache Ausnahmefaser des wirbelgefaserten Raumes, für $\mu = 1$ eine gewöhnliche Faser. Die Punkte, in die sich Ausnahmefasern in der Zerlegungsfläche abbilden, heißen *Ausnahmepunkte.* In der bewerteten Zerlegungsfläche eines orientierbaren orientierten oder eines nichtorientierbaren wirbelgefaserten Raumes tragen wir diese ein und geben die charakteristischen Zahlen μ, ν an. Ausnahmefasern sind im geschlossenen wirbelgefaserten Raum ebenso wie im ohne Wirbellinien gefaserten nur in endlicher Anzahl vorhanden (Fas. S. 158).

§ 6.

Faserinvarianten.

Wir beweisen nun einen wichtigen Satz, der im wesentlichen aussagt, daß der wirbelgefaserte Raum durch seine bewertete markierte und mit ihren Ausnahmepunkten versehene Zerlegungsfläche bestimmt ist.

Hauptsatz I^0. *Es seien zwei orientierbare mit fester Orientierung versehene wirbelgefaserte berandete oder geschlossene Räume F und F' mit ihren Zerlegungsflächen f und f' gegeben. Wir setzen über die Zerlegungsflächen voraus:*

I. *Daß sie sich mit Erhaltung der Bewertung ihrer geschlossenen Kurven topologisch aufeinander abbilden lassen.*

II. *Die Randkreislinien der beiden Flächen sollen sich aufeinander so beziehen lassen, daß entsprechende die gleiche Anzahl von markierten Stücken (Wirbelstücken) enthalten, oder beide vollständig markiert sind.*

III. *Die Ausnahmepunkte sollen sich so zuordnen lassen, daß entsprechende die gleichen charakteristischen Zahlen μ, ν haben.*

Diese drei Bedingungen sind notwendig und hinreichend dafür, daß sich F und F' mit Erhaltung der Orientierung fasertreu aufeinander abbilden lassen.

---

[8]) Bei Umorientierung des gefaserten Raumes würden die Zahlen μ, ν übergehen in μ, $\mu - \nu$.

[9]) Für $\mu > 2$ ist dadurch die Orientierung jeder Faserumgebung eindeutig festgelegt.

Beweis. Daß die Bedingungen I. bis III. notwendig für die Abbildbarkeit von F und F' sind, ist klar. Wir setzen daher im folgenden voraus, daß die Zerlegungsflächen f und f' diese Bedingungen erfüllen, und beweisen die Abbildbarkeit von F und F' zunächst für eine Reihe von Spezialfällen.

1. f (und demnach f') besitze keinen Ausnahmepunkt, und es sei nur ein einziger, und zwar ein nichtmarkierter Randkreis vorhanden. f ist also die einmal gelochte orientierbare Fläche vom Geschlecht (Henkelzahl) h oder die nichtorientierbare vom Geschlecht (Kreuzhaubenzahl) k. Für diesen Fall ist der Beweis in Fas. S. 173 geführt worden. Der berandete gefaserte Raum ist dort als *Klassenraum* bezeichnet worden. Die Klassenräume sind vollständig durch die Symbole auf S. 734 charakterisiert, in denen man $w = 1$ zu setzen hat; z. B. gibt es danach für eine einmal gelochte Fläche vom Geschlecht h bzw. k eine und nur eine Bewertung von der Art, daß der zugehörige Klassenraum orientierbar ist.

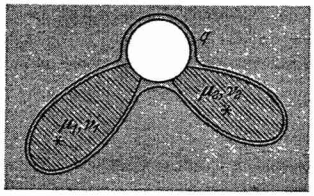

Fig. 7.

2. Die Zerlegungsfläche f sei eine Kreisscheibe mit höchstens einem Ausnahmepunkt der charakteristischen Zahlen μ, ν und unmarkiertem Rand. Der gefaserte Raum ist alsdann nach Fas. S. 162 ein orientierter gefaserter Vollring mit den charakteristischen Zahlen μ, ν.

3. f besitze einen einzigen unmarkierten Randkreis q und beliebig viele Ausnahmepunkte. Wir schneiden durch untereinander punktfremde Kurven, die von dem Randkreis q ausgehen und dort enden, je einen Ausnahmepunkt aus. In der Fig. 7 sind zwei Ausnahmepunkte gezeichnet und die ausgeschnittenen Flächenstücke sind schraffiert. Die Restfläche ist eine einmal gelochte Fläche ohne Ausnahmepunkte; der Lochrand ist in der Figur doppelt umfahren. Ihr kommt also nach 1. ein eindeutig bestimmter berandeter gefaserter Raum zu. Jedes ausgeschnittene Flächenstück, das einen Ausnahmepunkt enthält, stellt eine Kreisscheibe dar ohne Randmarkierung. Über ihr erhebt sich nach 2. ein gefaserter Vollring mit den charakteristischen Zahlen μ, ν. Man hat damit den berandeten gefaserten Raum in den Klassenraum und gefaserte Vollringe zerlegt. Und es fragt sich nur, ob man, wenn diese Teile gegeben sind, den Raum auf eindeutige Weise aus ihnen zusammensetzen kann. Die

Bausteine, nämlich der Klassenraum und die gefaserten Vollringe, haben dabei eine vorgegebene Orientierung. Der Klassenraum hat mit jedem der Vollringe einen aus Fasern bestehenden Kreisring gemeinsam. Man hat also den ersten Vollring auf den Klassenraum längs eines gefaserten Randkreisringes so aufzusetzen, daß die Orientierung der beiden Teilräume durch den gemeinsamen Kreisring hindurch kohärent[10]) ist. Wie man dabei den gemeinsamen Kreisring auf dem Klassenraum wählt, ist für den entstehenden Raum gleichgültig, da man einen von einer Ringfläche berandeten gefaserten Raum so auf sich fasertreu mit Erhaltung der Orientierung abbilden kann, daß ein beliebig gefaserter Randkreisring in einen beliebigen anderen übergeht. Das gleiche gilt für die Wahl des Kreisringes auf dem Vollring. Ferner ist für den entstehenden Raum gleichgültig, wie man die beiden Kreisringe fasertreu aufeinander abbildet, denn jede die Flächenorientierung erhaltende fasertreue Selbstabbildung der Randringfläche eines gefaserten Vollringes läßt sich fasertreu in den Vollring fortsetzen (Fas. S. 167). Danach wird ebenso der zweite Vollring auf den damit gewonnenen von einer Ringfläche berandeten Raum aufgeklebt und so fort. So werden die beiden Räume F und F' in gleicher Weise von dem gemeinsamen Klassenraum ausgehend aufgebaut.

4. Hieraus folgt der Satz für den allgemeineren Fall, daß die Zerlegungsfläche w ($\geqq 1$) Randkreise und beliebig viele Ausnahmepunkte enthält. Schließt man nämlich $w-1$ der Randkreise durch Elementarflächenstücke, so gehört zu der neuen Zerlegungsfläche nach 3. ein eindeutig bestimmter gefaserter Raum. Aus diesem leitet sich ein Raum mit der gegebenen Zerlegungsfläche ab, wenn man $w-1$ gewöhnliche Fasern ausbohrt, d. h. die inneren Fasern einer Faserumgebung fortläßt. Wie man die $w-1$ auszubohrenden Fasern und ihre Faserumgebungen wählt, das ist für den entstehenden Raum gleichgültig (Fas. S. 165).

5. Wir gehen jetzt zum allgemeinsten Fall über, wo es sich um zwei wirbelgefaserte (berandete oder unberandete) orientierbare und fest orientierte Räume F und F' handelt. Läßt man in den beiden Zerlegungsflächen f und f' die Markierungen auf den Randkreislinien fort, so erfüllen sie immer noch die Bedingungen I. bis III. Es gehört also zu ihnen nach 4. ein eindeutig bestimmter berandeter gefaserter Raum $\overline{F}$. Aus diesem leiten sich die gegebenen wirbelgefaserten Räume F und F' durch Identifizieren der Punkte der markierten Fasern ab Man hat also etwa auf der ersten Randringfläche von F die Fasern von ϱ_1 punktfremden Kreisringen, auf der zweiten die von ϱ_2 ebensolchen zu Punkten zu identifizieren usw. Unter Umständen sind auch alle Fasern einer Rand-

[10]) Seifert-Threlfall, Topologie (1934), S. 88.

ringfläche zu identifizieren. Die Fig. 8 zeigt den Fall, daß die Zerlegungsfläche drei Randkreislinien hat. Es ist $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = 2$, während die dritte Randkreislinie vollständig stark markiert ist. Außerdem sind zwei Ausnahmepunkte gezeichnet, und es wird angenommen, daß es sich um eine dreifach gelochte Ringfläche (Rechteck mit paarweiser Seitenzuordnung) handelt. — Da man den berandeten gefaserten Raum $\overline{F}$ mit Erhaltung der Orientierung fasertreu so auf sich abbilden kann, daß die Randringflächen sich in vorgegebener Weise permutieren (Fas. S. 165), so ist es für den entstehenden wirbelgefaserten Raum gleichgültig, auf welche der Randringflächen wir die Fasern von ϱ_1 Kreisringen, auf welcher die von ϱ_2 ebensolchen zu Punkten identifizieren usw., und natürlich auch wie wir die aus Fasern bestehenden Kreisringe auf den Randringflächen auswählen. Daher stimmen die beiden Räume F und F' überein.

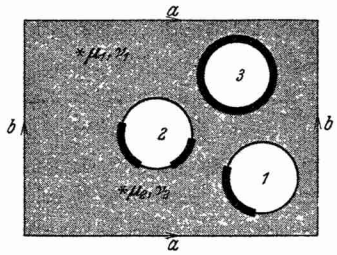

Fig. 8.

Wir wenden uns nun einem nichtorientierbaren wirbelgefaserten Raum zu. Da in ihm keine einheitliche Raumorientierung festgelegt werden kann, so lassen sich auch die Faserumgebungen nicht übereinstimmend orientieren. Wir wählen die Orientierung einer jeden Faserumgebung gemäß unserer Festsetzung von S. 735 stets so, daß $0 \leqq \nu \leqq \frac{\mu}{2}$ wird. Mit Rücksicht auf diese Festsetzung gilt der Hauptsatz I^O auch für nichtorientierbare Räume.

Hauptsatz I^N. *Zwei nichtorientierbare berandete oder unberandete wirbelgefaserte Räume F und F' lassen sich dann und nur dann fasertreu aufeinander abbilden, wenn I. sich ihre Zerlegungsflächen f und f' topologisch mit Erhaltung der Bewertung ihrer geschlossenen Kurven aufeinander abbilden lassen, wenn II. die Randkreislinien sich so aufeinander beziehen lassen, daß entsprechende gleichviel markierte Stücke tragen, und wenn III. die Ausnahmepunkte einander so zugeordnet werden können, daß entsprechende die gleichen charakteristischen Zahlen haben.*

Beweis: 1. Der Satz gilt, wenn in den Zerlegungsflächen kein Ausnahmepunkt und nur ein Randkreis vorhanden ist, der überdies nicht markiert ist. Für diesen Fall ist der Satz in Fas. S. 173 bewiesen worden. Der Raum wird als Klassenraum bezeichnet.

2. Wir beweisen den Satz für Zerlegungsflächen mit einem einzigen, und zwar unmarkierten Rand und beliebig vielen Ausnahmepunkten. Wir schneiden wie unter 3. des vorigen Beweises die Ausnahmepunkte einzeln aus; die Restfläche ist eine einfach gelochte Fläche ohne Aus-

nahmepunkte und mit bekannter Bewertung. Es gehört also zur Restfläche nach 1. ein bestimmter Klassenraum. Auf seine Randringfläche haben wir, wie beim vorigen Beweise, längs gefaserter Kreisringe die gefaserten Vollringe der Reihe nach aufzukleben, die sich über den ausgeschnittenen Flächenstücken mit je einem Ausnahmepunkt erheben. Wieder ist die Wahl der beiden aufeinander zu klebenden gefaserten Kreisringe K_1 und K_2 auf der Randringfläche des Klassenraums und des ersten gefaserten Vollrings gleichgültig. Dagegen hat man je vier wesentlich verschiedene Möglichkeiten, K_1 und K_2 aufeinander abzubilden, da über die Orientierung nichts festgesetzt ist. Zeichnet man nämlich in K_1 und ebenso in K_2 eine bestimmte Flächenorientierung und eine bestimmte Faserorientierung aus, so läßt sich K_1 und K_2 mit Erhaltung oder mit Umkehrung der Flächenorientierung bzw. Faserorientierung abbilden. Wenn man die Flächenorientierung erhält, so ist es gleichgültig, ob man die Faserorientierung erhält oder umkehrt, da man den gefaserten Vollring so fasertreu mit Erhaltung der Oberflächenorientierung auf sich abbilden (umkippen) kann, daß sich die Faserorientierung umkehrt. Ob man aber bei fester Faserorientierung die Flächenorientierung des Kreisrings erhält oder umkehrt, das ist für das Ergebnis deshalb gleichgültig, weil man einen nichtorientierbaren von einer Ringfläche berandeten gefaserten Raum so auf sich fasertreu abbilden kann, daß die Randringfläche ihre Orientierung umkehrt. Man schließt, um dies zu beweisen, die Randringfläche durch einen gewöhnlich gefaserten Vollring V, deformiert diesen fasertreu in dem nunmehr geschlossenen gefaserten Raum so, daß er auf einer geschlossenen Kurve herumgeführt wird, längs deren sich die Raumorientierung umkehrt. Nach seiner Rückkehr in die Anfangslage hat sich seine räumliche Orientierung, also auch seine Flächenorientierung umgekehrt. Entfernt man jetzt die inneren Fasern von V wieder, so erhält man die gewünschte Selbstabbildung (Fas. S. 190).

Nachdem man so aus dem Klassenraum und dem ersten Vollring in eindeutiger Weise einen neuen von einer Ringfläche berandeten Raum gewonnen hat, setzt man an diesen den zweiten Vollring an und fährt so fort. Da man F' in analoger Weise aufbauen kann und nach jedem Schritt dasselbe Ergebnis erhält, stimmen F und F' überein.

Für einen geschlossenen wirbelgefaserten Raum F ist die Bedingung II. eine Folge von I. F ist also charakterisiert durch die bewertete Zerlegungsfläche und die Zahlen μ_ϱ, ν_ϱ der Ausnahmefasern, und läßt sich somit vollständig beschreiben durch die auf S. 734 eingeführten Symbole für die bewertete Zerlegungsfläche, denen man noch die Zahlen μ_ϱ, ν_ϱ zufügt. Z. B. bezeichnet

$$(O\,o\,h\,w \mid \mu_1,\ \nu_1;\ \ldots;\ \mu_r,\ \nu_r)$$

einen eindeutig bestimmten orientierbaren gefaserten Raum mit $w \geqq 1$ Wirbellinien und $r \geqq 0$ Ausnahmefasern der charakteristischen Zahlen μ_ϱ, ν_ϱ, dessen Zerlegungsfläche orientierbar vom Geschlecht h ist. Wir erinnern daran, daß die Zahlen μ, ν bei orientierbaren Räumen die Bedingung $0 < \nu < \mu$, bei nichtorientierbaren dagegen $0 < \nu \leqq \frac{\mu}{2}$ erfüllen.

Die vorhergehenden Untersuchungen gelten nur, falls $w > 0$ ist. Treten keine Wirbellinien auf und ist der gefaserte Raum geschlossen, so ist seine Charakterisierung weniger einfach; dieser Fall ist in Fas. vollständig behandelt worden.

§ 7.

Beispiele.

Wir geben jetzt einige Beispiele wirbelgefaserter Räume und ihrer Zerlegungsflächen.

1. Die Zerlegungsfläche sei ein Elementarflächenstück mit einem Ausnahmepunkt der charakteristischen Zahlen μ, ν mit vollständig markiertem Rand (Fig. 9).

Die Bewertung der Kurven brauchen wir nicht besonders anzugeben, da alle Kurven nullhomolog sind, also mit $+1$ bewertet sind. Wäre der Rand des Elementarflächenstücks nicht markiert, so hätte man als zugehörigen orientierten gefaserten Raum (nach Fas. S. 162) einen orientierten Vollring mit der Ausnahmefaser μ, ν. Den Punkten des Randes entsprechen dabei Fasern auf der Oberfläche des Vollrings. Die Markierung des Randes gibt uns aber an, daß den Randpunkten im wirbelgefaserten Raum nicht Fasern sondern Punkte der Wirbellinien entsprechen sollen. Der wirbelgefaserte Raum geht also aus dem Vollring durch Identifizieren der einzelnen Fasern der Oberfläche zu je einem Punkte hervor. Wir denken uns wieder den gefaserten Vollring als einen geraden durch achsenparallele Strecken gefaserten Kreiszylinder, dessen Grund- und Dachfläche durch den Winkel $2\pi \frac{\nu}{\mu}$ verschraubt zugeordnet sind, und führen dort die Identifizierung von je μ eine Faser bildenden Mantellinien des Kreiszylinders zu einem Punkte durch. Man erkennt, daß man eine Linse erhält, deren Kalotten um den Winkel $2\pi \frac{\nu}{\mu}$ verdreht spiegelbildlich zur Deckung gebracht sind. Die scharfe Kante der Linse ist die Wirbellinie. Es ist dies der *wirbelgefaserte Linsenraum* (μ, ν). Die Linse ist rotationssymmetrisch zu ihrer Achse gefasert. In Fig. 10 haben wir einen ebenen Schnitt durch diese Achse gezeichnet. Für die geschlossenen wirbelgefaserten Räume haben wir auf S. 739 die Invarianten aufgestellt. Der

Fig. 9.
Linsenraum (μ, ν).

wirbelgefaserte Linsenraum ist ein orientierbarer Raum, der als Zerlegungsfläche die einfach gelochte ($w = 1$) Kugelfläche ($h = 0$) besitzt. Es existiert ein Ausnahmepunkt μ, ν. Seine Invarianten sind also:

$$(O\,o,\ h = 0,\ w = 1\,|\,\mu,\ \nu).$$

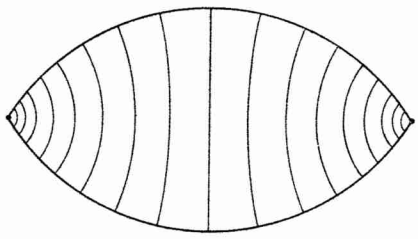

Fig. 10. Schnitt durch die (vertikale) Achse einer wirbelgefaserten Linse.

Ist $\mu = 1$, d. h. besitzt die Zerlegungsfläche keinen Ausnahmepunkt, dann sind die Kalotten der Linse unverschraubt spiegelbildlich zuzuordnen. Der Raum ist die wirbelgefaserte Hypersphäre (Zerlegungsfläche Fig. 11). Als Invarianten erhält man:

$$(O\,o,\quad h = 0,\quad w = 1\,|\,-).$$

2. Die Zerlegungsfläche sei ein Kreisring ohne Ausnahmepunkte. Da die Randkurven nach S. 733 mit $+1$ zu bewerten sind und jede ge-

Fig. 11. Hypersphäre.

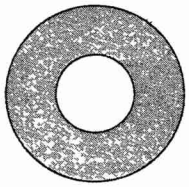

Fig. 12. Topologisches Produkt aus Kreisring und Kreislinie.

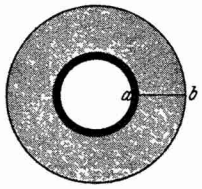

Fig. 13. Wirbelvollring.

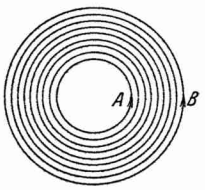

Fig. 14. Gefaserter Kreisring über $\overline{a\,b}$ der Fig. 13.

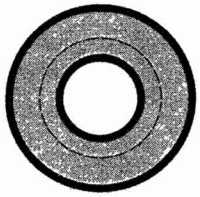

Fig. 15. Topologisches Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche (orientierbarer Henkel).

schlossene Kurve homolog einem Vielfachen einer Randkurve ist, so sind alle geschlossenen Kurven mit $+1$ zu bewerten. Die Bewertung ist mithin eindeutig gegeben.

Sind beide Randkreise unmarkiert (Fig. 12), so ist der zugehörige berandete gefaserte Raum das topologische Produkt aus Kreisring und Faser, denn dieser berandete gefaserte Raum hat zur Zerlegungsfläche einen Kreisring mit unmarkierten Rändern, und nach dem Hauptsatz gibt es nur einen Raum, der zu dieser bewerteten Zerlegungsfläche gehört.

Ist nur der innere Randkreis und zwar voll markiert, so betrachten wir einen radialen Schnitt $\overline{a\,b}$ (Fig. 13). Über ihm erhebt sich ein gefaserter Kreisring mit den Randkreisen A und B (Fig. 14). Die Faser A ist jetzt in einen Punkt zusammenzuziehen. Der Kreisring geht dadurch in eine Kreisscheibe über, die durch konzentrische Kreise gefasert ist. Da jedem solchen Radius eine gefaserte Kreisscheibe entspricht, so ist der berandete gefaserte Raum das topologische Produkt aus der gefaserten Kreisscheibe und einer Kreislinie, also ein Wirbelvollring (§ 2), dessen Zerlegungsfläche durch Fig. 13 dargestellt ist.

Markiert man beide Randkreise der Zerlegungsfläche (Fig. 15), so hat man beide Fasern A und B zu je einem Punkt zusammenzuziehen. Man erhält eine Kugelfläche, die durch Breitenkreise gefasert ist. Der entstehende Raum ist ein geschlossener wirbelgefaserter Raum, nämlich das topologische Produkt aus Kugelfläche und Kreislinie; es enthält zwei geschlossene Wirbellinien. Seine Invarianten sind:

$$(O\,o, \quad h = 0, \quad w = 2\,|\,-).$$

Man kann das eben erhaltene topologische Produkt aus Kugelfläche und Kreislinie auch folgendermaßen gewinnen. Man zerteile die Zerlegungsfläche (durch die in Fig. 15 gestrichelte Linie) in zwei Kreisringe vom Typus der Fig. 13. Der Raum zerfällt dementsprechend in zwei Wirbelvollringe, deren Oberflächen fasertreu aufeinandergesetzt sind.

3. Die Zerlegungsfläche sei eine Kreisscheibe ohne Ausnahmepunkt, deren Randkreis zur Hälfte markiert ist. In der Fig. 16 ist die topologische Kreisscheibe als Halbkreisfläche gezeichnet; der Durchmesser $\overline{n\,s}$ ist das markierte Stück. Man erhält den zugehörigen wirbelgefaserten Raum offenbar, wenn man die Halbkreisfläche um den markierten Durchmesser rotieren läßt. Die Fasern sind die Bahnkurven der Punkte. Es handelt sich also um die wirbelgefaserte Vollkugel (§ 2).

Hat man allgemein eine Zerlegungsfläche eines wirbelgefaserten Raumes, in der auf einem Randkreis ein Teilbogen markiert ist (Fig. 17), so kann man die Faserung in der Umgebung des Randkreises sich in verschiedener Weise entstanden denken, entweder wie bisher durch das Identifizieren der Punkte der entsprechenden Randfasern, oder aber man denkt sich das markierte Stück zu einem vollständig markierten Randkreis ergänzt (Fig. 18) und aus der diesem entsprechenden Wirbellinie

eine wirbelgefaserte Vollkugel ausgeschnitten. In der Zerlegungsfläche zeigt sich dies darin, daß man von der ganz markierten Kreislinie ein Elementarflächenstück mit halbmarkiertem Rand abschneidet (linker Halbkreis der Fig. 18). Es entsteht ein berandeter gefaserter Raum, der zum Rand (evtl. unter anderen Flächen) eine durch Breitenkreise gefaserte Kugelfläche hat, wie wir sie bereits in § 2 kennengelernt haben. So stellen z. B. die Fig. 19, 20 die Zerlegungsflächen eines Linsenraumes, aus dem eine Kugel ausgebohrt ist (*einfach gelochter* Linsenraum), bzw. eines topologischen Produktes aus Kreislinie und Kugelfläche, aus dem eine Kugel ausgebohrt ist (*einfach gelochtes* topologisches Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche) dar.

Fig. 16.
Wirbelgefaserte Vollkugel.

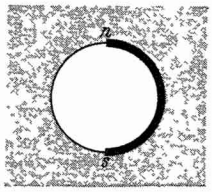

Fig. 17.

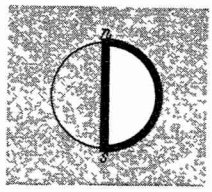

Fig. 18.

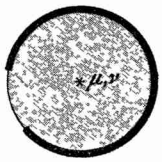

Fig. 19. Einfach gelochter Linsenraum (μ, ν)

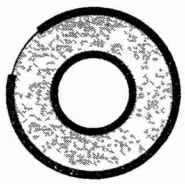

Fig. 20. Einfach gelochtes topologisches Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche (gelochter orientierbarer Henkel).

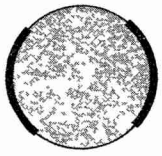

Fig. 21. Zweifach gelochte Hypersphäre (Hohlkugel)

Läßt man einen Kreisring um einen Durchmesser rotieren, so entsteht eine wirbelgefaserte Hohlkugel. Fasern sind die Bahnkurven der Punkte, Wirbelstücke die beiden im Inneren der Hohlkugel verlaufenden Strecken des Durchmessers. Die Zerlegungsfläche ist eine Kreisscheibe, von deren Rand zwei punktfremde zusammenhängende Teile markiert sind (Fig. 21). Nach Obigem ist dies aber auch die Zerlegungsfläche einer zweifach gelochten wirbelgefaserten Hypersphäre. Die wirbelgefaserte Hohlkugel und die zweifach gelochte wirbelgefaserte Hypersphäre sind nach dem Hauptsatz daher gleich, was man auch unmittelbar einsieht.

Fig. 22 stellt schließlich noch die Zerlegungsfläche einer achtfach gelochten Hypersphäre dar.

Schneidet man aus einer Zerlegungsfläche einen vollständig markierten Randkreis durch einen Kreisring heraus, so entspricht dem im Raum das Herausnehmen eines Wirbelvollrings. Wir sehen, daß jede Wirbellinie als „Umgebung" einen Wirbelvollring hat.

4. Die Zerlegungsfläche f ist die gelochte projektive Ebene; der Lochrand sei markiert, es seien keine Ausnahmepunkte vorhanden. Wir denken uns f (Fig. 23) als Kreisring, bei dem ein Randkreis markiert ist, während bei dem anderen Randkreis Diametralpunkte zu identifizieren sind. Der letzte Rand ist also auf der Fläche eine zweimal durchlaufene

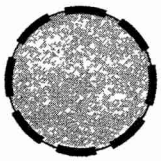

Fig. 22.
Achtfach gelochte Hypersphäre.

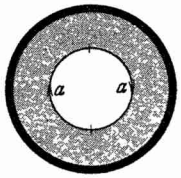

Fig. 23. a mit $+1$ bewertet = Dreidimensionales Analogon zur nichtorientierbaren Ringfläche (nichtorientierbarer Henkel), a mit -1 bewertet: Topologisches Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche (orientierbarer Henkel).

Kurve a. Zur Bewertung der Fläche genügt es, die Kurven eines Erzeugendensystems der Homologiegruppe zu bewerten (vgl. S. 733). In unserem Falle wird nun die Homologiegruppe von a erzeugt und hat die definierende Relation $2a \sim 0$. Die Bewertung der Fläche ist damit durch die Bewertung von a festgelegt. Es gibt zwei Fälle: a ist mit $+1$ oder -1 bewertet. Daß es für die gelochte ($w = 1$) projektive Ebene ($k = 1$) nur zwei Bewertungsmöglichkeiten gibt, wissen wir schon von S. 734; dort haben wir sie mit

$$(O\,n,\ k = 1,\ w = 1) \quad \text{und} \quad (N\,n\,\mathrm{I},\ k = 1,\ w = 1)$$

bezeichnet.

Sehen wir von der Diametralpunktidentifizierung des einen Randkreises zunächst ab, so ist die Zerlegungsfläche der S. 741 behandelte Kreisring (Fig. 13) mit nur einem markierten Randkreis. Als zugehörigen Raum hatten wir den Wirbelvollring gefunden. Die Fasern seiner Oberfläche (Meridiane) entsprechen den Punkten des nichtmarkierten Randes. Die gelochte projektive Ebene f geht aus dem Kreisring durch Identifizieren der Diametralpunkte des nichtmarkierten Randes hervor. Die zu f gehörigen Räume wird man also aus dem Wirbelvollring durch Identifizieren von je zwei diametral gegenüberliegenden Meridiankreisen der Oberfläche gewinnen. Das Identifizieren kann mit Erhaltung oder Umkehrung der Faserorientierung erfolgen; dies richtet sich nach der

Bewertung der Zerlegungsfläche. Ist a mit $+1$ bewertet, so geschieht es mit Erhaltung der Orientierung. Dies kommt der Identifizierung von Diametralpunkten auf den Breitenkreisen des Wirbelvollrings gleich. Der Raum ist das dreidimensionale Analogon zur nichtorientierbaren Ringfläche (Kleinschem Schlauch)[11]. Seine Invarianten sind:

$$(N\,n\,\mathrm{I},\ k = 1,\ w = 1\,|\,-).$$

Ist a mit -1 bewertet, so werden die Meridiane mit Umkehrung der Orientierung zugeordnet. Es ergibt sich das topologische Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche, das diesmal mit nur einer Wirbellinie gefasert auftritt. Seine Invarianten sind:

$$(O\,n,\ k = 1,\ w = 1\,|\,-).$$

Das so gefaserte Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche ist ein Beispiel für einen orientierbaren wirbelgefaserten Raum mit nichtorientierbarer Zerlegungsfläche.

Man kann die beiden Wirbelfaserungen des topologischen Produktes aus Kreislinie und Kugelfläche und die des wirbelgefaserten dreidimensionalen Analogons zur nichtorientierbaren Ringfläche auch aus der wirbelgefaserten Hohlkugel ableiten. Wir bezeichnen die Endpunkte der Wirbelstücke mit n, n' und s, s', wobei n und s die Punkte auf der äußeren Randkugelfläche seien, und wir orientieren die Randkugelflächen so, daß die äußere orientierte Randkugelfläche durch ähnliche Vergrößerung aus der inneren orientierten hervorgeht, wofür man auch sagen kann, daß die beiden orientierten Randkugelflächen homolog in der Hohlkugel werden.

a) Das topologische Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche.

Man erhält es aus einer Hohlkugel dadurch, daß die beiden Randkugelflächen mit Erhaltung der Orientierung aufeinander abgebildet werden. Nehmen wir in der wirbelgefaserten Hohlkugel die Zuordnung der Randkugelflächen fasertreu vor, so sind noch zwei wesentlich verschiedene Abbildungsmöglichkeiten vorhanden. Entweder fallen nämlich die Punkte n und n' (s und s') oder n und s' (n' und s) der Wirbelstücke aufeinander. Im ersten Falle ist das entstehende topologische Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche mit zwei Wirbellinien, im zweiten Falle mit einer Wirbellinie gefasert. Daß diese Faserungen mit der auf S. 742 und der oben hergeleiteten übereinstimmen, sieht man an ihren Zerlegungsflächen. Die Zerlegungsfläche der wirbelgefaserten Hohlkugel war eine Kreisscheibe mit zwei markierten Randstücken (Fig. 21). Die Identifizierung der

[11] H. Seifert, Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume, Ber. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig 83 (1931), S. 49.

Randkugelflächen in der Hohlkugel wirkt sich in der Zerlegungsfläche im Identifizieren der beiden nichtmarkierten Teile des Randes aus. Im ersten Falle erhalten wir einen Kreisring mit vollständig markierten Rändern, im zweiten eine gelochte projektive Ebene (= Möbiusband) mit vollständig markiertem Lochrand. Zur ersten Fläche gibt es aber als zugehörigen wirbelgefaserten Raum nur das mit zwei Wirbellinien gefaserte topologische Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche (S. 742). Im zweiten Falle sind zwar noch zwei Bewertungsmöglichkeiten der Zerlegungsfläche denkbar, aber nur eine bestimmt eine Wirbelfaserung des topologischen Produkts aus Kreislinie und Kugelfläche. Die andere bestimmt, wie wir sahen, das wirbelgefaserte dreidimensionale Analogon zur nichtorientierbaren Ringfläche.

b) Das dreidimensionale Analogon zur nichtorientierbaren Ringfläche.

Es geht entsprechend aus einer Hohlkugel durch Abbildung der Randkugelflächen mit Umkehrung der Orientierung hervor. Auch hier kann die fasertreue Abbildung der Kugelflächen auf zwei verschiedene Weisen vorgenommen werden. Entweder fallen dabei die Punkte n und s' (n' und s) oder n und n' (s und s') zusammen. Im ersten Falle erhält man die Wirbelfaserung des dreidimensionalen Analogons zur nichtorientierbaren Ringfläche von S. 745. Daß die Zerlegungsfläche die gelochte projektive Ebene wird, erkennt man genau wie unter a). Im zweiten Falle ergibt sich kein wirbelgefaserter Raum. Die Wirbelstücke schließen sich zu einer geschlossenen Kurve, die deshalb keine Wirbellinie sein kann, da sie keinen Wirbelvollring als „Umgebung" (vgl. S. 744) besitzt. Die „Umgebung" ist ein Kreiszylinder, der durch die Bahnkurven seiner Punkte bei der Rotation um seine Achse gefasert ist und dessen Grund- und Dachfläche mit Umkehrung der Orientierung einander zuzuordnen sind[12]).

Wir bezeichnen im folgenden das topologische Produkt aus Kreislinie und Kugelfläche kurz als *orientierbaren Henkel*, das dreidimensionale Analogon zur nichtorientierbaren Ringfläche als *nichtorientierbaren Henkel*.

§ 8.

Summenbildung.

Der Hauptsatz des § 6 setzt uns in den Stand, die topologische Struktur der wirbelgefaserten Räume vollständig zu überblicken.

Wir beschränken uns der Kürze wegen auf einen geschlossenen wirbelgefaserten Raum F, der w ($\geqq 1$) Wirbellinien enthält. Die Zerlegungsfläche f ist dann eine von w vollständig markierten Randkreisen

[12]) Über die hier auftretende Faserung vgl. Anhang.

berandete bewertete orientierbare oder nichtorientierbare Fläche von der Henkelzahl h bzw. Kreuzhaubenzahl k, die r Ausnahmepunkte auf sich trage. Wir zeichnen einen Randkreis q aus und schneiden Elementarflächenstücke, die den Randkreis q längs je eines Bogenstückes berühren und nur je einen Ausnahmepunkt enthalten, aus der Fläche heraus. Ebenso schneiden wir durch gelochte Elementarflächenstücke, die wieder an q längs eines Bogenstückes angrenzen und nur einen Randkreis enthalten, die übrigen $w-1$ Randkreise aus. Die Fig. 24 zeigt den Fall zweier Randkreise ($w=2$) und eines Ausnahmepunktes ($r=1$); die ausgeschnittenen Stücke sind schraffiert und die Fläche ist als Ringfläche (Rechteck mit identifizierten Gegenseiten) gedacht, während die Bewertung etwa dadurch festgelegt sei, daß alle geschlossenen Kurven den Wert $+1$ erhalten.

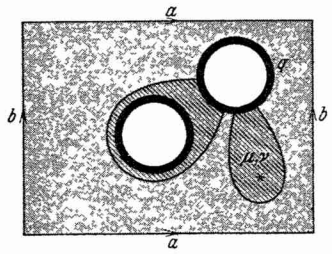

Fig. 24.

Die gegebene Zerlegungsfläche f zerfällt danach in r Zerlegungsflächen vom Typus § 7, Fig. 19, in $w-1$ Zerlegungsflächen vom Typus § 7, Fig. 20, und eine Restfläche f_0. Diese enthält keinen Ausnahmepunkt und einen einzigen Randkreis, auf dem $r+w-1$ Stücke markiert sind. F zerfällt dementsprechend in r wirbelgefaserte einfach gelochte Linsenräume $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_r$, in $w-1$ wirbelgefaserte einfach gelochte orientierbare Henkel $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_{w-1}$ und in einen $(r+w-1)$-fach gelochten wirbelgefaserten Restraum $\overline{F}_0$. Die Lochränder sind jetzt wirbelgefaserte Kugelflächen, die man mit wirbelgefaserten Vollkugeln (§ 7, Fig. 16) schließen kann. Dadurch entstehen aus den gelochten Räumen $\overline{L}_1, \ldots, \overline{L}_r$, $\overline{P}_1, \ldots, \overline{P}_{w-1}, \overline{F}_0$ geschlossene wirbelgefaserte Räume $L_1, \ldots, L_r$ (wirbelgefaserte Linsenräume, die eine Wirbellinie und eine Ausnahmefaser μ_ϱ, ν_ϱ ($\varrho = 1, \ldots, r$) enthalten), $P_1, \ldots, P_{w-1}$ (wirbelgefaserte orientierbare Henkel, die zwei Wirbellinien und keine Ausnahmefasern enthalten und alle fasertreu aufeinander abbildbar sind) und F_0 (ein mit einer einzigen Wirbellinie gefaserter Restraum ohne Ausnahmefasern). Die Zerlegungsfläche von F_0 ist eine einmal gelochte Fläche f_0, die aus f hervorgeht, wenn man alle Ausnahmepunkte und alle Randkreise bis auf einen fortläßt und die Bewertung beibehält. Sieht man davon ab, daß der eine Randkreis markiert ist, was dem Ausbohren der Wirbellinie gleichkommt, so ist der ausgebohrte, also von einer gefaserten Ringfläche berandete Raum, der so entsteht, ein Klassenraum im Sinne von Fas. S. 173.

Wir verstehen unter der topologischen Summe zweier geschlossener dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten M_1 und M_2 die geschlossene Mannig-

faltigkeit M, die man erhält, wenn man aus jeder eine kleine Kugel ausbohrt und die Ränder der kugelförmigen Löcher aufeinander auf eine der zwei, durch die Orientierungen wesentlich verschiedenen Arten, abbildet und die ineinander abgebildeten Punkte identifiziert. Sind M_1 und M_2 orientierbar und orientiert, so ist die Summenbildung eindeutig durch die Forderung bestimmt, daß die Orientierung sich durch die Randkugelfläche kohärent fortsetzen lasse.

Dann haben wir das Ergebnis gewonnen:

Satz II. *Jeder w ($\geqq 1$) Wirbellinien enthaltende wirbelgefaserte geschlossene Raum ist die topologische Summe von r (wirbelgefaserten) orientierten Linsenräumen $L_1, \ldots, L_r$, deren topologische Struktur im allgemeinen verschieden sein wird, und $w-1$ orientierbaren Henkeln $P_1, \ldots, P_{w-1}$ (die alle mit zwei Wirbellinien gefasert sind und daher fasertreu aufeinander abbildbar sind) und einem (mit einer einzigen Wirbellinie gefaserten) orientierbaren oder nichtorientierbaren Restraum F_0, der ein mit einem Wirbelvollring geschlossener Klassenraum ist.*

Der Satz II bezieht sich auf die topologische Struktur der wirbelgefaserten geschlossenen Räume als bloße Punktmannigfaltigkeiten. Die darin vorkommenden Begriffe der Summenbildung, der Linsenräume, der orientierbaren Henkel sind unabhängig von jeder Faserung definiert. Wir haben daher die auf die Faserung bezogenen Angaben in Klammern gesetzt.

Sind die Summanden einschließlich ihrer Faserung gegeben, so ist durch sie der ganze Raum eindeutig bestimmt. Man schneide nur aus jedem der Summanden eine Wirbelvollkugel heraus und bilde dann die topologische Summe, indem man die Randkugelflächen der kugelförmigen Löcher fasertreu aufeinander abbildet und ineinander abgebildete Punkte identifiziert. Wenn alle Summanden orientierbar sind, so ist F einschließlich seiner Orientierung bestimmt. Wo man in den einzelnen Summanden die Wirbelvollkugel herausnimmt und wie man zwei zugeordnete kugelförmige Ränder aufeinander abbildet, ist deshalb belanglos, weil man immer dieselbe bewertete Zerlegungsfläche, dieselben Ausnahmefasern μ_ϱ, ν_ϱ, dieselbe Zahl w der Wirbellinien erhält, die nach dem Hauptsatz von § 6 den wirbelgefaserten Raum eindeutig festlegen. Ist F nichtorientierbar, so könnte man zwei zugeordnete kugelförmige Lochränder noch mit oder ohne Erhaltung ihrer Orientierung abbilden. Unabhängig von dieser Auswahl ist aber die bewertete Zerlegungsfläche, und ebenso sind es die normierten charakteristischen Zahlen der Ausnahmefasern. Nach dem Hauptsatz ist also auch jetzt das Ergebnis der Summenbildung eindeutig.

Die topologische Struktur der wirbelgefaserten Räume ist somit einfacher als diejenige der ohne Wirbellinien gefaserten Räume, die in Fas.

untersucht wurden. Durch Anbringung einer einzigen Wirbellinie zerfällt ein im Sinne von Fas. gefaserter Raum in eine topologische Summe einfacher uns bekannter Räume, unter denen nur die Struktur des Restraumes F_0 noch einer weiteren Zerlegung bedarf (§ 9). Gewissermaßen die Umkehrung dieses Ergebnisses ist der

Satz III. *Die topologische Summe zweier geschlossener Räume, die sich mit* w ($\geqq 1$) *Wirbellinien fasern lassen, ist wieder wirbelfaserbar.*

Zum Beweise hat man nur aus den beiden Räumen je eine Wirbelvollkugel auszubohren und die beiden wirbelgefaserten Randkugelflächen aufeinander abzubilden.

Das Analogon zu Satz III für ohne Wirbellinien gefaserte geschlossene Räume (Fas. S. 229) gilt nicht. Es läßt sich im allgemeinen vielmehr die Summe von zwei ohne Wirbellinien gefaserten geschlossenen Räumen nicht ohne Wirbellinien fasern.

Nach Satz II zerfällt ein geschlossener wirbelgefaserter Raum in Linsenräume, orientierbare Henkel und einen Restraum. Alle diese Teilräume lassen sich nun mit einer einzigen Wirbellinie fasern. (Für den orientierbaren Henkel siehe S. 745). Ihr Summenraum ist also ebenfalls mit einer Wirbellinie faserbar. Damit ergibt sich

Satz IV. *Jede dreidimensionale Mannigfaltigkeit, die sich wirbelfasern läßt, läßt sich insbesondere mit nur einer Wirbellinie fasern.*

§ 9.

Der Restraum.

Wir haben einen geschlossenen wirbelgefaserten Raum mit r Ausnahmefasern und w ($\geqq 1$) Wirbellinien als Summe von r Linsenräumen und $w-1$ orientierbaren Henkeln und einem Restraum F_0 dargestellt. F_0 war ein mit einer Wirbellinie gefaserter Raum. Seine bewertete Zerlegungsfläche f_0 ist die einmal gelochte bewertete Fläche der Henkelzahl h bzw. der Kreuzhaubenzahl k. Der Rand des Loches ist markiert.

Wir werden zeigen, daß auch F_0 sich als topologische Summe einfacher bekannter Räume darstellen läßt.

I. Zunächst werde der Fall behandelt, daß f_0 orientierbar, also eine einmal gelochte Fläche der Henkelzahl h ist. Eine solche läßt sich nun als Kreisscheibe mit $2h$ angesetzten Bändern b_i ($i = 1, 2, \ldots, 2h$) darstellen. Der Rand der Fläche besteht aus einer geschlossenen Linie, dem Lochrand, fällt also mit der Wirbellinie zusammen. Fig. 25 zeigt eine gelochte Fläche der Henkelzahl 2 (Doppelringfläche). Schneiden wir die angesetzten Bänder b_i längs Kurven α_i durch. Die Fläche wird ein Elementarflächenstück, dessen Rand bis auf die $4h$ Kurvenstücke α_i', α_i''

markiert ist. α_i' und α_i'' sind die Teile des Randes, die von dem Schnitt längs α_i herrühren (vgl. Fig. 26). Nach S. 743 wissen wir, daß dies die Zerlegungsfläche einer $4h$-fach gelochten Hypersphäre ist. Aus dem Elementarflächenstück erhält man die Zerlegungsfläche f_0 zurück durch Identifizieren der Randkurvenstücke α_i' und α_i''. Den Restraum F_0 können wir uns daher als $4h$-fach gelochte Hypersphäre darstellen, bei der noch die α_i' und α_i'' entsprechenden Kugelflächen A_i' und A_i'' paarweise zu identifizieren sind. Die $4h$-fach gelochte Hypersphäre können wir nun

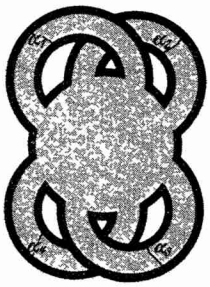

Fig. 25.

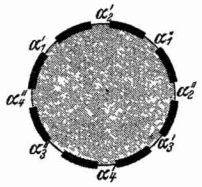

Fig. 26.

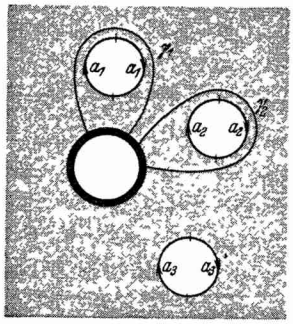

Fig. 27.

als Summe von $2h$ Hohlkugeln K_i (zweifach gelochte Hypersphären) auffassen. Dabei richten wir es so ein, daß die Hohlkugel K_i von A_i' und A_i'' berandet wird. K_i ist kein wirbelgefaserter Raum. Je nachdem in K_i die Kugelflächen A_i' und A_i'' mit Erhaltung oder Umkehrung der Orientierung zugeordnet sind, erhält man den orientierbaren bzw. nichtorientierbaren Henkel (vgl. S. 745, 746).

Wir bekommen daher: Der Restraum F_0 ist die topologische Summe aus orientierbaren und nichtorientierbaren Henkeln.

II. Ist die Zerlegungsfläche f_0 nichtorientierbar von der Kreuzhaubenzahl k, so kann man sie als gelochte Kugel mit k Kreuzhauben darstellen, also als eine Kugel mit $k+1$ Löchern, wo auf den Rändern von k der Löcher Diametralpunkte zu identifizieren sind und der Rand des letzten Loches markiert ist und der Wirbellinie entspricht. Wir teilen nun die Kugelfläche durch Kurven γ_i ($i = 1, 2, \ldots, k-1$) in k Gebiete so auf, daß in jedem genau eine Kreuzhaube liegt und jedes Gebiet als Teil seines Randes ein endliches Stück der Wirbellinie besitzt. Die Fig. 27 zeigt dies im Falle der gelochten Kugel mit drei aufgesetzten Kreuzhauben ($k = 3$). Der Lochrand ist markiert.

Schneiden wir die Kugel längs der gezogenen Kurven γ_i auf, so erhalten wir k gelochte projektive Ebenen; bei jeder ist ein Teil des Lochrandes markiert. Nach S. 744 können als zugehörige Räume je nach der

Bewertung entweder der mit einer Wirbellinie gefaserte gelochte orientierbare oder nichtorientierbare Henkel auftreten.

Auch wenn f_0 nichtorientierbar ist, gilt also der auf S. 750 für orientierbare Zerlegungsflächen ausgesprochene Satz:

Der Restraum F_0 ist die topologische Summe aus orientierbaren und nichtorientierbaren Henkeln.

Da der geschlossene wirbelgefaserte Raum topologische Summe von Linsenräumen, orientierbaren Henkeln und einem Restraum F_0 ist, so ist hiernach F in Linsenräume, orientierbare und nichtorientierbare Henkel aufgespalten. Ist F orientierbar, so kommen offenbar nichtorientierbare Henkel nicht in Frage. Ist F nichtorientierbar, so tritt mindestens ein nichtorientierbarer Henkel auf, und man kann alle orientierbaren Henkel beseitigen nach folgendem

Hilfsatz. *Die topologische Summe aus einem nichtorientierbaren und einem orientierbaren Henkel ist homöomorph der topologischen Summe zweier nichtorientierbarer Henkel.*

Beweis. Zu diesem Zwecke denken wir uns die Räume als Hohlkugeln (zweifach gelochte Hypersphären) mit den Randkugelflächen A'_O und A''_O im Falle des orientierbaren Henkels, A'_N und A''_N im Falle des nichtorientierbaren Henkels. Diese Hohlkugeln schließen sich, wenn man die Randkugelflächen A'_O und A''_O mit Erhaltung und A'_N und A''_N mit Umkehrung der Orientierung einander zuordnet, zum orientierbaren bzw. nichtorientierbaren Henkel (vgl. S. 745, 746). Die Summe können wir uns vorstellen als vierfach gelochte Hypersphären mit den Randkugelflächen A'_O, A''_O, A'_N und A''_N. Wir identifizieren nun A'_N und A''_N. Dann erhalten wir einen nichtorientierbaren Raum. Auf A'_O kleben wir eine Vollkugel auf, führen diese auf einem geschlossenen Weg, der die Orientierung umkehrt, herum und nehmen sie nun wieder heraus. Die Orientierung von A'_O hat sich dabei umgekehrt. Die Identifizierung von A'_O und A''_O muß nun also mit Umkehrung der Orientierung geschehen. Damit haben wir offenbar denselben Raum erhalten, der sich bei Summenbildung von zwei nichtorientierbaren Henkeln ergibt.

Wir müssen nun noch ermitteln, wieviel und welche der Bausteine (Linsenräume, orientierbare oder nichtorientierbare Henkel) in einem bestimmten Raum F vorkommen. F habe w Wirbellinien und r Ausnahmefasern μ_ϱ, ν_ϱ ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$). Bei dem Abbau von F zu F_0 treten r Linsenräume $(\mu_\varrho, \nu_\varrho)$ und $w - 1$ orientierbare Henkel auf (Satz II). Bei der Zerlegung von F_0 (vgl. S. 750) traten bei orientierbarer Zerlegungsfläche von F_0 (Henkelzahl h) $2h$ orientierbare oder nichtorientierbare Henkel auf. Bei nichtorientierbarer Zerlegungsfläche (Kreuzhaubenzahl k) ergaben sich k orientierbare oder nichtorientierbare Henkel.

Daraus folgt zusammen mit dem Hilfsatz

Satz V (Summensatz). *In einem geschlossenen wirbelgefaserten Raum F sei*

$w\,(\geqq 1)$ *die Anzahl der Wirbellinien,*

$r\ \geqq 0$ *die Anzahl der Ansnahmefasern,*

h bzw. k das Geschlecht der orientierbaren bzw. nichtorientierbaren Zerlegungsfläche, dann ist F topologische Summe von r Linsenräumen und $2h + w - 1$ bzw. $k + w - 1$ Henkeln, die je nach dem Orientierbarkeitscharakter von F alle orientierbar oder alle nichtorientierbar sind.

Ist F orientierbar, so ist die Struktur der Linsenräume einschließlich ihrer Orientierung durch die normierten charakteristischen Zahlen μ_ϱ, ν_ϱ mit $0 < \nu_\varrho < \mu_\varrho$ bestimmt. Dadurch ist die Summenbildung auf Grund der Forderung kohärenter Orientierung eindeutig gemacht. Bei nichtorientierbarem F kommt es auf die Orientierung der Linsenräume entsprechend der Normierung der charakteristischen Zahlen durch die Ungleichung

$$0 < \nu_\varrho \leqq \frac{\mu_\varrho}{2}$$

nicht an.

Die Fundamentalgruppe von F ist hiernach leicht zu ermitteln. Denn die Fundamentalgruppe einer topologischen Summe ist das freie Produkt der Fundamentalgruppen der Summanden[13]).

Die Fundamentalgruppe des Linsenraums $(\mu_\varrho, \nu_\varrho)$ ist die zyklische Gruppe der Ordnung μ_ϱ, die Fundamentalgruppe des Henkels die freie zyklische Gruppe. Somit gilt

Satz VI. *Die Fundamentalgruppe des geschlossenen wirbelgefaserten Raumes F ist das freie Produkt von r zyklischen Gruppen der Ordnung $\mu_\varrho\ (\varrho = 1, \ldots, r)$ und $2h + w - 1$ bzw. $k + w - 1$ freien zyklischen Gruppen.*

Die Fundamentalgruppe und damit die Homologiegruppe besteht dann und nur dann aus dem Einselement, wenn $2h + w - 1 = 0$ bzw. $k + w - 1 = 0$ ist und keine Ausnahmefasern auftreten. Daraus folgt $h = k = 0$, $w = 1$, $r = 0$. Das Symbol des gefaserten Raumes kann also nur lauten:

$$(O\,o,\ h = 0,\ w = 1\,|\,-).$$

Das ist aber die wirbelgefaserte Hypersphäre. Daher gilt

Satz VII. *Der einzige wirbelgefaserte geschlossene Raum, dessen Homologiegruppe aus dem Einselement allein besteht, ist die Hypersphäre, und diese läßt sich nur auf eine Weise wirbelfasern.*

---

[13]) H. Seifert, Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume, Ber. Sächs. Akad. d. Wiss. zu Leipzig 83 (1931), S. 36.

Es gibt also insbesondere keine wirbelfaserbaren Poincaréschen Räume. Für geschlossene wirbelfrei faserbare Räume gilt dieser Satz nicht. Denn erstens läßt sich die Hypersphäre auf unendlich viele Weisen wirbelfrei fasern und zweitens gibt es unendlich viele wirbelfrei faserbare Poincarésche Räume. Dazu gehört z. B. der sphärische Dodekaederraum. Dagegen gilt der Satz, daß unter den geschlossenen Räumen, deren Fundamentalgruppe aus dem Einselement allein besteht, die Hypersphäre der einzige ist, der sich wirbelfrei fasern läßt.

Wie die Poincaréschen Räume ein Beispiel von Räumen geben, die sich wohl ohne, aber nicht mit Wirbellinien fasern lassen, so ist die topologische Summe zweier orientierbarer Henkel ein Beispiel für einen Raum, der sich mit, aber nicht ohne Wirbellinien fasern läßt (vgl. Fas. S. 230 und diese Arbeit S. 749). Endlich ist die topologische Summe zweier Poincarés cher Räume, deren Fundamentalgruppen nicht beide zugleich aus dem Einselement allein bestehen, weder mit noch ohne Wirbellinien faserbar — nicht ohne nach Fas. S. 229 und nicht mit, weil die Fundamentalgruppe kein freies Produkt von zyklischen Gruppen oder freien Gruppen ist.

Anhang.

Wir hatten bei der Definition der berandeten gefaserten Räume durch Axiom III gefordert, daß die Randflächen orientierbare Ringflächen sind. Wir wollen nun auch berandete gefaserte Räume zulassen, für die das Axiom III dahin abgeändert wird, daß als Randflächen orientierbare und nichtorientierbare Ringflächen auftreten können. Aus solchen berandeten Mannigfaltigkeiten kann man allgemeinere gefaserte geschlossene Räume ableiten, als wie sie in der vorliegenden Arbeit erhalten werden. Es ergibt sich nichts wesentlich Neues. Wir beschränken uns darauf, nur die Ergebnisse anzugeben.

Wir ordnen jedem solchen berandeten gefaserten Raum durch Identifizieren jeder Faser zu einem Punkt eine Zerlegungsfläche zu. Es ist eine gelochte Fläche. Die Lochränder entsprechen den Randringflächen. Genau wie im § 3 können wir die Bewertung der Zerlegungsfläche einführen. Die Lochränder, die orientierbaren Randringflächen zugeordnet sind, sind wieder mit + 1 bewertet, dagegen ist die Bewertung der Lochränder, die nichtorientierbaren Ringflächen zugeordnet sind, — 1. Durch Identifizierung der Randfasern des berandeten gefaserten Raumes zu je einem Punkt erhalten wir einen geschlossenen Raum, den wir wieder als wirbelgefaserten Raum bezeichnen. Die Wirbellinien sind die aus den Randringflächen hervorgehenden geschlossenen Kurven, und zwar unterscheiden wir Wirbellinien erster und zweiter Art, je nachdem die Ring-

flächen, aus denen die Wirbellinien entstehen, orientierbar oder nichtorientierbar sind. In der Zerlegungsfläche deuten wir das Identifizieren der Randfasern wieder durch starkes Markieren der Lochränder an. Die zu einem der Lochränder homologen Kurven sind mit $+1$ oder -1 bewertet, je nachdem der betreffende Lochrand einer Wirbellinie erster oder zweiter Art entspricht. Ein mit Wirbellinien zweiter Art gefaserter Raum ist uns schon in der Faserung des nichtorientierbaren Henkels von S. 746 begegnet. Man erhielt diesen aus einer wirbelgefaserten Hohlkugel, deren Randkugelflächen so orientiert waren, daß die orientierte innere Randkugelfläche durch ähnliche Vergrößerung in die orientierte äußere übergeht, durch geeignetes fasertreues Aufeinanderkleben der Randkugelflächen mit Umkehrung der Orientierung. Seine Zerlegungsfläche wird dann offenbar ein Kreisring, wo die einem Randkreise homologen Kurven mit -1 bewertet sind.

Die Zerlegungsfläche eines geschlossenen wirbelgefaserten Raumes denken wir uns zum gelochten Fundamentalpolygon mit der Seitenfolge

$$a_1\, b_1\, a_1^{-1}\, b_1^{-1} \ldots a_h\, b_h\, a_h^{-1}\, b_h^{-1} \quad \text{bzw.} \quad a_1\, a_1 \ldots a_k\, a_k$$

aufgeschnitten. Den Wirbellinien erster und zweiter Art entsprechen die Ränder der Löcher. In Fig. 28 haben wir die Zerlegungsfläche eines

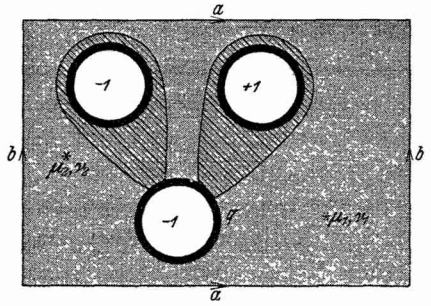

Fig. 28. In der Figur gibt $+1$ und -1 die Bewertung der betreffenden Wirbellinien an.

wirbelgefaserten Raumes gezeichnet, der eine Wirbellinie erster Art und zwei zweiter Art und zwei Ausnahmefasern der charakteristischen Zahlen μ_ϱ, ν_ϱ ($\varrho = 1, 2$) besitzt. Einen Lochrand q zeichnen wir aus. Durch Kreisringe, die keine Ausnahmepunkte enthalten, und von denen ein Randkreis ein endliches Stück auf q verläuft, schneiden wir die übrigen Lochränder aus. Ein solcher Kreisring ist, je nachdem die zu seinen Randkreisen homologen Kurven mit $+1$ oder -1 bewertet sind, die Zerlegungsfläche eines gelochten orientierbaren bzw. nichtorientierbaren Henkels (vgl. S. 744 und 745). Die Restfläche, eine einmal gelochte Fläche, ist Zerlegungsfläche eines wirbelgefaserten Raumes, der keine

Wirbellinien zweiter Art enthält, da eine zum Lochrand homologe Kurve der Seitenfolge

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_h b_h a_h^{-1} b_h^{-1} \text{ bzw. } a_1 a_1 \ldots a_k a_k$$

homolog ist, wo jede Kante zweimal auftritt, also mit + 1 bewertet ist. Man erkennt somit, daß der gesamte Raum die topologische Summe aus einem wirbelgefaserten Raum, der keine Wirbellinien zweiter Art enthält. und orientierbaren und nichtorientierbaren Henkeln ist. Damit gilt auch für diese wirbelgefaserten Räume der Satz, *daß sie topologische Summe aus Linsenräumen und orientierbaren bzw. nichtorientierbaren Henkeln sind.* Schließt man in der zum gelochten Fundamentalpolygon aufgeschnittenen Fläche alle Lochränder in eine Kurve ein, so ist diese dem Rand des Fundamentalpolygons, also der Seitenfolge

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_h b_h a_h^{-1} b_h^{-1} \text{ bzw. } a_1 a_1 \ldots a_k a_k,$$

homolog und daher mit + 1 bewertet. Nun ist diese Kurve aber auch homolog der Summe aller Lochränder und es gilt somit: *Ein wirbelgefaserter Raum enthält stets eine gerade Anzahl Wirbellinien zweiter Art.*

Die Problemstellung verdanken wir den Herren W. Threlfall und H. Seifert in Dresden, die uns auch während der Ausführung der Arbeit hilfreich zur Seite standen.

(Eingegangen am 30. August 1935.)