Werk

Titel: Über Knoten und Zöpfe mit gleichsinniger Verdrillung

Autor: Bankwitz, C.

Ort: Berlin

Jahr: 1936

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0040|log47

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über Knoten und Zöpfe mit gleichsinniger Verdrillung.

Von

C. Bankwitz.

Die folgenden Zeilen beschäftigen sich mit der Frage, wann zwei gleichsinnig verdrillte geschlossene Zöpfe denselben Knoten bestimmen. Und zwar wird gezeigt, daß ein solcher Knoten eine Projektion mit weniger als $\frac{3}{2}g$ Doppelpunkten besitzt, wo g der Grad seines L-Polynoms ist. Insbesondere läßt sich sofort erkennen, ob ein gleichsinnig verdrillter Zopf ein Kreis ist.

Der Zopf sei aus f Fäden gebildet (Fig. 1). Die Fäden seien von oben nach unten gerichtet; von links nach rechts werde immer überkreuzt. Zwecks einer geeigneten Darstellung schicken wir folgende Überlegung voraus:

Wir fassen den Zopf als eine Gesamtheit von gerichteten „Strecken" (einfachen Kurvenbögen) und Doppelpunkten auf. Jede Strecke wird von zwei Doppelpunkten begrenzt. Die Doppelpunkte treten nur als Endpunkte von Strecken auf. Die Strecken teilen wir in f Abteilungen ein. Die erste Abteilung wird von den Strecken gebildet, die an den linken Teil der Projektionsebene angrenzen. Die zweite Abteilung wird von den Strecken gebildet, die an Strecken der ersten Abteilung anstoßen usf. Die Doppelpunkte, in denen Strecken der ν-ten und $(\nu+1)$ten Abteilung zusammenstoßen, sollen auf dem ν-ten „Balken" B_ν liegen. Wir haben also insgesamt $(f-1)$ Balken B_ν, auf sie sind sämtliche Doppelpunkte des Zopfes verteilt.

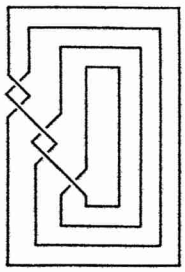

Fig. 1.

Über die Verteilung der Doppelpunkte auf den Balken dürfen folgende Annahmen gemacht werden:

1. *Auf jedem Balken liegen mindestens zwei Überkreuzungen.*

2. *Liegen auf einem Balken genau zwei Überkreuzungen, dann dürfen auf den benachbarten Balken mindestens vier Überkreuzungen angenommen werden*[1]).

[1]) Auf diesen Satz wurde bereits in K. Reidemeister, Knotentheorie (Ergebnisse d. Math. I) S. 14 verwiesen.

3. *Die Anzahl n der Doppelpunkte und $f-1$ sind beide gerade oder ungerade.*

Zu 1. Liegt auf einem Balken keine Überkreuzung, dann erhalten wir eine Verkettung von mindestens zwei Kurven. Liegt auf B_α genau eine Überkreuzung D, dann können wir sie abbauen. Dabei vermindern sich n und f um je eins. Der Zopf bleibt gleichsinnig verdrillt.

Wir können den geschlossenen Zopf nämlich so deformieren, daß die Balken B_ν mit $\nu < \alpha$ nur oberhalb von D, die Balken B_ν mit $\nu > \alpha$ nur unterhalb von D Überkreuzungen haben. D_1 sei die erste Überkreuzung von $B_{\alpha-1}$, D_2 die letzte von $B_{\alpha+1}$. Die Strecken $D_1 D$ und $D_2 D$ können dann durch die Strecke $D_1 D_2$ ersetzt werden (Fig. 2).

Zu 2. Auf B_α sollen genau zwei Überkreuzungen liegen (D_1 und D_2).

a) Die Überkreuzungen D_1, D_2 dürfen nicht unmittelbar aufeinanderfolgen; sonst entsteht eine Verkettung zweier Kurven.

b) Den Stücken $D_1 D_2$ und $D_2 D_1$ des Balkens B_α entsprechen 2 Stücke des Balkens $B_{\alpha+1}$ ($B_{\alpha-1}$). Auf jedem dieser Stücke muß mehr

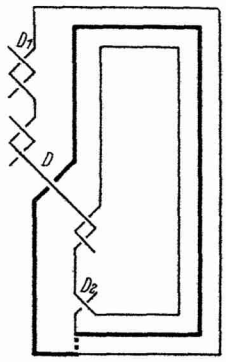

Fig. 2.

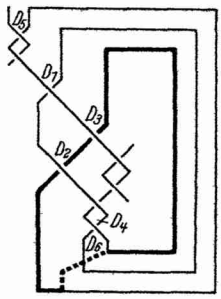

Fig. 3.

als ein Doppelpunkt liegen, andernfalls können wir reduzieren. Es möge etwa auf dem $D_1 D_2$ entsprechenden Stück von $B_{\alpha+1}$ nur ein Doppelpunkt D_3 liegen. (Fig. 3). Der Knoten kann so deformiert werden, daß für die Balken B_ν mit $\nu \leqq \alpha$ der Doppelpunkt D_2 die letzte, für die Balken B_ν mit $\nu > \alpha$ D_3 die erste Überkreuzung ist. D_4 sei die letzte Überkreuzung auf $B_{\alpha+1}$, D_5 die erste auf $B_{\alpha-1}$. Den aus den Stücken $D_4 D_3 + D_3 D_2 + D_2 D_5$ zusammengesetzten Knotenteil, der wegen der gleichsinnigen Verdrillung in D_2 und D_3 entweder beidemal unterkreuzt oder beidemal überkreuzt, können wir ersetzen durch $D_4 D_6 + D_6 D_5$; D_6 liegt auf $B_{\alpha+1}$ unterhalb von D_4 (Fig. 3).

Damit verschwinden die Doppelpunkte D_2 und D_3 und der Faden $(\alpha+2)$; dafür kommt nur ein neuer Doppelpunkt D_6 hinzu. Der Knoten bleibt gleichsinnig verdrillt.

Ähnliches gilt für die anderen Möglichkeiten.

Auf $B_{\alpha+1}(B_{\alpha-1})$ liegen also mindestens $2+2=4$ Überkreuzungen, andernfalls kann reduziert werden.

Zu 3. Wir betrachten einen offenen Zopf, der aus f gleichgerichteten Fäden gebildet wird (Fig. 1). Die Fäden werden am oberen Ende von links nach rechts mit $1,\ldots,f$ bezeichnet. Sie liegen am unteren Ende in einer Reihenfolge, die durch eine bestimmte Anordnung $\nu_1,\ldots,\nu_f$ der Zahlen $1,\ldots,f$ bestimmt sein möge.

Gehen wir zum geschlossenen Zopf über! Die unteren Enden der Fäden werden den oberen in der Lage von links nach rechts zugeordnet. Soll ein einziger Knoten entstehen, dann muß die Zuordnung

$$\begin{matrix} 1, 2, \ldots, f \\ \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_f \end{matrix}$$

einen einzigen Zyklus bilden. Nach einem bekannten Satz der Gruppentheorie läßt sich ein Zyklus mit ungerader Elementenanzahl darstellen durch eine gerade Anzahl von Transpositionen und ein Zyklus mit gerader Elementenanzahl durch eine ungerade Anzahl von Transpositionen. Eine Transposition bedeutet bei unserem Zopf die Vertauschung zweier Fäden. Dabei entsteht immer eine ungerade Anzahl von Doppelpunkten.

Aus unseren Annahmen folgt nun, daß wir auf jedem Balken durchschnittlich mindestens 3 Überkreuzungen annehmen dürfen, im ganzen jedenfalls mindestens $3f-3 \leqq n_{\min}$; im ungünstigsten Falle liegen nämlich auf den Balken abwechselnd 2 und 4 Doppelpunkte, und zwar auf B_1 und B_{f-1} je 2. Die Gesamtanzahl wäre in diesem Fall $n'=6(\frac{1}{2}f-1)+2=3f-4$ Doppelpunkte. Da hier $f-1$ ungerade ist, muß nach 3. auch n ungerade sein; wir müssen also um einen einzigen Knoten zu erhalten, noch mindestens eine Überkreuzung hinzufügen; also ist $n_{\min} \geqq n'+1=3f-3$.

Um die in der Einleitung angekündigte Abschätzung zu erhalten ziehen wir den von mir vermuteten und kürzlich von W. Burau[2]) bewiesenen Satz heran, daß für gleichsinnig verdrillte geschlossene Zöpfe $g=n-f+1$ ist, wo g der Grad des L-Polynoms dieses Knotens ist. Hieraus und aus $n \geqq 3(f-1)$ bei den reduzierten Projektionen folgt $\frac{2}{3}n \leqq g$, also ist die Minimalanzahl der Überkreuzungen einer gleichsinnig verdrillten Zopfprojektion des Knotens $n_{\min} \leqq \frac{3}{2}g$. Für f folgt

[2]) W. Burau, Über Zopfgruppen und gleichsinnig verdrillte Verkettungen. Hamb. Abh. 11 (1935) S. 179.

aus $f \leqq \frac{1}{3} n + 1$ und der Abschätzung für n die Abschätzung $f_{\min} \leqq \frac{1}{2} g + 1$.

Bei der Gruppe des Kreises ist $g = 0$, also $n_{\min} = 0$; $f_{\min} = 1$. Die Doppelpunkte irgendeiner gleichsinnig verdrillten Projektion des Kreises lassen sich schon durch die in Annahme 1. angeführte Reduktion beseitigen, da $n - f + 1 = 0$ ist, d. h. auf jedem Balken genau eine Überkreuzung liegt.

Bei der Gruppe der Kleeblattschlinge ist $g = 2$, also wie bekannt $n_{\min} = 3$ und $f_{\min} = 2$. Aus 3. folgt übrigens, daß der Grad g des L-Polynoms gleichsinnig verdrillter Zöpfe gerade ist.

(Eingegangen am 21. Juni 1935).