Die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe.

Von

Wilhelm Specht in Königsberg (Preußen).

I.

Seit der Begründung der Darstellungstheorie endlicher Gruppen durch G. Frobenius und Th. Molien bildet die *symmetrische Gruppe* $\mathfrak{S}_n$, *die Gruppe aller Permutationen in n Symbolen* ein interessantes Beispiel für diese Theorie, das in neuerer Zeit durch Anwendungen in der Quantenmechanik noch größere Bedeutung gewann.

Als erster hat G. Frobenius ein Verfahren aufgestellt, die Charaktere der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ zu bestimmen, und dabei erkannt, daß ihre Werte sämtlich ganze rationale Zahlen sind[1]); er erhielt weiter das Resultat, daß jede Darstellung der Gruppe durch eine Ähnlichkeitstransformation auf eine Gestalt gebracht werden kann, in der die Koeffizienten der Matrizen sämtlich dem Körper der rationalen Zahlen angehören[2]). Ein Satz von W. Burnside[3]) ließ daraus sofort entnehmen, daß die Koeffizienten sogar ganz rational erhalten werden können.

Herr I. Schur[4]) führte die Untersuchungen weiter und stellte eine Methode auf, die es möglich machte, die irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe zu konstruieren; er erhielt dabei von neuem die eben erwähnten Resultate. Das Prinzip, das auch für die vorliegende Arbeit den Ausgangspunkt bildet, ist im wesentlichen folgendes:

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängige Veränderliche, $f(x)$ eine homogene Form in ihnen vom Grade m mit rationalen Koeffizienten; durch eine Permutation

$$P = \begin{pmatrix} x_\nu \\ x_{\alpha_\nu} \end{pmatrix} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

---

[1]) Vgl. G. Frobenius, Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichte Akad. Berlin 1900, S. 516.

[2]) Vgl. G. Frobenius, Über die charakteristischen Einheiten der symmetrischen Gruppe, Sitzungsberichte Akad. Berlin 1903, S. 328. (Mit F zitiert.)

[3]) Vgl. W. Burnside, On the arithmetical nature of the coefficients in a group of linear substitutions, Proceedings L. M. S. (2) 7 (1908), S. 8 (Theorem auf S. 10).

[4]) Vgl. I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen Gruppe durch lineare homogene Substitutionen, Sitzungsberichte Akad. Berlin 1908, S. 664. (Mit S_2 zitiert.)

der Veränderlichen gehe $f(x)$ in die Form $f^P(x)$ über. Unter dem *durch $f(x)$ erzeugten symmetrischen Modul* $\mathsf{M}(f(x))$ verstehe man dann den Bereich aller Formen

$$\sum_P a_P f^P(x)$$

mit rationalen Koeffizienten a_P, wobei über alle Permutationen P aus $\mathfrak{S}_n$ zu summieren ist. Bilden k linear unabhängige Formen $g_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, k)$ eine Basis dieses Moduls, so gilt für jede Permutation P:

$$g_\alpha^P(x) = \sum_\beta c_{\alpha\beta}^P g_\beta(x) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k) \tag{1}$$

mit rationalen Zahlen $c_{\alpha\beta}^P$, und man überzeugt sich leicht davon, daß die Matrizen $(c_{\alpha\beta}^P)$ eine Darstellung $\mathfrak{G}$ der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ vom Grade k liefern[5]. In der Bezeichnungsweise von Herrn I. Schur ist das System der Formen $g_\alpha(x)$ *ein Eigensystem von* $\mathfrak{S}_n$[6]; die Matrizengruppe $\mathfrak{G}$ will ich *die durch dieses Eigensystem erzeugte Darstellung von* $\mathfrak{S}_n$ nennen.

Es ist unmittelbar einleuchtend, daß der Begriff des Eigensystems noch dahin verallgemeinert werden kann, daß die Formen auch von mehreren Reihen von je n Veränderlichen gebildet sein können, die kogredient permutiert werden. Davon wird hier indes lediglich während eines Beweises Gebrauch gemacht werden.

Das Verfahren von Herrn I. Schur ist von dem soeben geschilderten ein wenig verschieden[7]; Herr I. Schur stellt zwar für jede irreduzible Darstellung einen gewissen symmetrischen Modul auf, eine Basis dieses Moduls liefert indes noch nicht die irreduzible Darstellung selbst, vielmehr hat man noch die Formen mod einem gewissen Untermodul N zu reduzieren, so daß nicht Gleichungen der Gestalt (1), sondern Kongruenzen der Form

$$g_\alpha^P(x) \equiv \sum_\beta c_{\alpha\beta}^P g_\beta(x) \pmod{\mathsf{N}}$$

entstehen.

Auf einem ganz anderen Wege gelangte Herr A. Young zu diesem Ziel der Bestimmung der irreduziblen Darstellungen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$[8]; sein Verfahren entspricht ungefähr dem von G. Frobenius

[5]) Vgl. S_2, § 3.

[6]) Vgl. I. Schur und R. Brauer, Zum Irreduzibilitätsbegriff in der Theorie der Gruppen linearer homogener Substitutionen, Sitzungsberichte Akad. Berlin 1930, S. 209.

[7]) Vgl. S_2, §§ 3—6.

[8]) Vgl. A. Young, On the quantitative substitutional analysis, Proc. L. M. S.; I. (1) **33** (1901), S. 97; II. (1) **34** (1902), S. 261; III. (2) **28** (1928), S. 285; IV. (2) **31** (1930), S. 253; V. (2) **31** (1930), S. 273; VI. (2) **34** (1932), S. 196; VII. (2) **36** (1933) S. 304. (Diese Arbeiten werden mit $Y_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, 7)$ zitiert; Y bedeutet die Gesamtheit dieser Arbeiten.) Hier kommen in der Hauptsache Y_3 und Y_4 in Betracht.

aufgestellten, das auf dem Begriff der charakteristischen Einheiten beruht[9]. Zwischen den Youngschen Arbeiten und der vorliegenden bestehen daher kaum irgendwelche Zusammenhänge außer den rein äußerlichen, die darauf beruhen, daß die hier verwendeten kombinatorischen Hilfsmittel häufig auch von Herrn A. Young, freilich zu ganz anderen Zwecken herangezogen werden. Diese Verbindungen werden an geeigneter Stelle noch genauer dargelegt werden.

Die vorliegende Arbeit macht es sich also zur Aufgabe, Eigensysteme in dem oben definierten Sinne für die irreduziblen Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ aufzustellen; es gelingt dies mit Hilfe einiger weniger Resultate aus der Theorie der Charakteristiken, die teils von G. Frobenius[10]), teils von Herrn I. Schur[11]) stammen. Mit der knappen Aufzählung dieser Dinge beschäftigt sich der nächste Abschnitt; die beiden Abschnitte III. und IV. haben die Aufstellung der symmetrischen Moduln und der Eigensysteme zum Inhalt. Der letzte Abschnitt soll noch zeigen, daß die Methode der Eigensysteme auch ganz unabhängig von der Theorie der Charakteristiken begründet werden kann. Als Hilfsmittel wird lediglich der (nicht sehr tief liegende) Satz von der vollständigen Zerfällbarkeit endlicher Substitutionsgruppen herangezogen.

II.

Um die Untersuchungen möglichst einfach zu gestalten, fasse ich in diesem Abschnitt all das aus der Theorie der Charakteristiken zusammen, was für das Folgende benötigt wird.

Ist $\mathfrak{G}$ eine Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$ mit dem Charakter χ, der der in bekannter Weise mit Hilfe der Zyklenzerlegung durch den *Typus* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ gekennzeichneten Ähnlichkeitsklasse in der Gruppe den Wert $\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}$ zuordnet, so versteht man nach Herrn I. Schur unter der *Charakteristik* der Gruppe $\mathfrak{G}$ die Funktion

$$\Phi = \sum_{(\alpha)} \frac{\chi_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots, \alpha_n!} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\alpha_2} \cdots \left(\frac{s_n}{n}\right)^{\alpha_n}$$

in n unabhängigen Veränderlichen $s_1, s_2, \ldots, s_n$, wobei man über alle Lösungen der Gleichung $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n$ in ganzen nichtnegativen Zahlen zu summieren hat[12]).

---

[9]) Vgl. F; den Zusammenhang mit Y_1 und Y_2 hat G. Frobenius hierin aufgezeigt. Vgl. auch in Y_3, S. 257. Die Aufstellung der Gruppenmatrizen zu den irreduziblen Darstellungen in Y_4 (Theorem I).

[10]) Vgl. F, §§ 4 und 5.

[11]) Vgl. S_2 und I. Schur, Dissertation Berlin 1901. (Mit S_1 zitiert.)

[12]) Vgl. S_2, § 1.

Die Anzahl der wesentlich verschiedenen[13]) irreduziblen Darstellungen ist bekanntlich gleich der Anzahl der Zerlegungen

(2) $$(\mu):\ n = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r \qquad (\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \dots \geqq \mu_r > 0)$$

von n in ganzzahlige positive Summanden[14]). Ist (μ) eine solche Zerlegung, so hat die Charakteristik einer ihr zugeordneten Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ die Gestalt:

(3) $$\Phi^{(\mu)} = |\, p_{\mu_\alpha} - \alpha + \beta \,| \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \dots, r)$$

wenn man setzt:

(4) $$p_\nu = \sum_{(\alpha)} \frac{1}{\alpha_1!\, \alpha_2! \dots \alpha_\nu!} \left(\frac{s_1}{1}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{s_2}{2}\right)^{\alpha_2} \dots \left(\frac{s_\nu}{\nu}\right)^{\alpha_\nu} \qquad (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + \nu\alpha_\nu = \nu)$$

und $p_0 = 1$, $p_{-1} = p_{-2} = \dots = 0$ [15]). Den *Grad* $f_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r}$ der Darstellung erhält man hierbei als Koeffizienten von $\frac{s_1^n}{n!}$. Es gilt für diese Zahlen folgende Rekursionsgleichung:

(5) $$f_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r} = f_{\mu_1 - 1, \mu_2, \dots, \mu_r} + f_{\mu_1, \mu_2 - 1, \dots, \mu_r} + \dots + f_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_r - 1};$$

dabei hat man, falls $\mu_\varrho = \mu_{\varrho+1}$ ist, den ϱ-ten Summanden gleich 0, außerdem bei $\mu_n = 1$ für $f_{\mu_1, \mu_2, \dots, 0}$ die Zahl $f_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{r-1}}$ zu setzen[16]). Die Bezeichnung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ für eine Darstellung mit der Charakteristik $\Phi^{(\mu)}$ halten wir durchgängig fest.

Ist (μ) eine Zerlegung (2) von n, so bilde man folgendes Zahlenschema von r Zeilen und μ_1 Spalten: in die ϱ-te Zeile schreibe man μ_ϱ Einheiten von links nach rechts, die letzten $\mu_1 - \mu_\varrho$ Stellen fülle man mit Nullen aus; die Spaltensummen $\mu_1', \mu_2', \dots, \mu_s'$ $(\mu_1' \geqq \mu_2' \geqq \dots \geqq \mu_s' > 0;\ s = \mu_1)$ geben dann offenbar wieder eine Zerlegung (μ') der Zahl n in s ganzzahlige positive Summanden. Diese neue Zerlegung nennt man nach Herrn I. Schur die zu (μ) *assoziierte Zerlegung*[17]). Man erkennt leicht, daß (μ) wieder zu (μ') assoziiert ist.

Für die Zerlegungen (μ) führe ich ferner eine Anordnung nach folgendem Gesetze ein:

(μ) soll vor (λ) stehen, wenn die erste nicht verschwindende der Differenzen

$$\mu_1 - \lambda_1,\ \mu_2 - \lambda_2,\ \mu_3 - \lambda_3,\ \dots$$

positiv ist; ich schreibe dafür kurz: $(\mu) < (\lambda)$[18]). Dieselbe Anordnung gebrauchen wir für die Charakteristiken $\Phi^{(\mu)}$, die zu den einfachen Charakteren von $\mathfrak{S}_n$ gehören: *es soll $\Phi^{(\mu)}$ vor $\Phi^{(\lambda)}$ stehen, wenn (μ) vor (λ) steht.*

---

13) „Wesentlich verschieden" bedeutet hier stets „nicht ähnlich".

14) Vgl. S_2, § 1.

15) Vgl. S_1, § 23 und S_2, § 1.

16) Vgl. S_1, § 1 Formel (3) und Y_3, S. 261 Formel (1).

17) Vgl. S_1, § 19 und F, § 5.

18) Vgl. S_2, § 1 und F, § 4.

Bekannt ist, daß die mit Hilfe der in (4) definierten Funktionen p_ν gebildete Funktion

$$p^{(\mu)} = p_{\mu_1}\, p_{\mu_2} \ldots p_{\mu_r}$$

für jede Zerlegung (μ) von n eine Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ ist, die sich folgendermaßen zerlegen läßt:

$$p^{(\mu)} = \Phi^{(\mu)} + \sum_{(\varkappa) < (\mu)} g_\varkappa\, \Phi^{(\varkappa)};$$

es treten hierin also die Charakteristik $\Phi^{(\mu)}$ genau *einmal*, sonst aber nur Charakteristiken auf, die *vor* $\Phi^{(\mu)}$ stehen[19]). Ebenso ist die Funktion

$$c^{(\lambda)} = c_{\lambda_1}\, c_{\lambda_2} \ldots c_{\lambda_s},$$

wenn

$$c_\nu = \sum_{(\alpha)} \frac{(-1)^{\alpha_2+\alpha_4+\alpha_6+\cdots}}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_\nu!}\left(\frac{s_1}{1}\right)^{\alpha_1}\left(\frac{s_2}{2}\right)^{\alpha_2}\cdots\left(\frac{s_\nu}{\nu}\right)^{\alpha_\nu} \quad (\alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + \nu\alpha_\nu = \nu)$$

gesetzt wird, für jede Zerlegung (λ) von n eine Charakteristik der Gruppe $\mathfrak{S}_n$, für die gilt:

$$c^{(\lambda)} = \Phi^{(\lambda')} + \sum_{(\varkappa) > (\lambda')} g_\varkappa\, \Phi^{(\varkappa)},$$

wobei (λ') zu (λ) assoziiert ist. $c^{(\lambda)}$ enthält demnach $\Phi^{(\lambda')}$ genau einmal, sonst aber nur Charakteristiken *nach* $\Phi^{(\lambda')}$ als Summanden[20]). Ist daher insbesondere (λ) die zu (μ) assoziierte Zerlegung, so enthalten die Charakteristiken $p^{(\mu)}$ und $c^{(\lambda)}$ allein die Charakteristik $\Phi^{(\mu)}$ als gemeinsamen Summanden[21]).

III.

Eigensysteme, die Darstellungen von $\mathfrak{S}_n$ mit den Charakteristiken $p^{(\mu)}$ und $c^{(\lambda)}$ erzeugen, können leicht angegeben werden. Ist genauer $n = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_r$ die Zerlegung (μ) von n, so bilde man mit n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ den symmetrischen Modul $\mathsf{M}(p(x))$ zu dem Monom:

(6) $p(x) = (x_1\, x_2 \ldots x_{\mu_1})^0\, (x_{\mu_1+1}\, x_{\mu_1+2} \ldots x_{\mu_1+\mu_2})^1 \ldots (x_{n-\mu_r+1}\, x_{n-\mu_r+2} \ldots x_n)^{r-1}$

vom Grade $\sum_{\varrho=1}^{r} (\varrho - 1)\,\mu_\varrho$. Nach Herrn I. Schur[22]) ist jede Basis dieses Moduls ein Eigensystem für eine Darstellung von $\mathfrak{S}_n$ mit der Charakteristik $p^{(\mu)}$. Dem Beweis hierfür liegt im wesentlichen die Tatsache zugrunde, daß jede symmetrische Funktion in den Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ die Darstellung mit der Charakteristik p_n, nämlich die Darstellung erzeugt,

---

[19]) Vgl. S_1, § 23 und S_2, § 1. Diese Formel ist noch einmal hergeleitet in Y_4, S. 263.

[20]) Vgl. S_1, § 22 und F, § 4.

[21]) Vgl. F, § 5, Formel (10).

[22]) Vgl. S_2, § 2.

die jeder Permutation die Zahl 1 zuordnet, das Monom $p(x)$ aber eine Invariante der Gruppe $\mathfrak{S}_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}$, aber keiner umfassenderen Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$ ist. $\mathfrak{S}_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}$ bedeutet dabei die Gruppe aller Permutationen von $\mathfrak{S}_n$, die die ersten μ_1 Veränderlichen, die nächsten μ_2 Veränderlichen und so fort, schließlich die letzten μ_r Veränderlichen, in diese Abteilungen getrennt, unter sich permutieren. Eine Darstellung mit der Charakteristik $p^{(\mu)}$ werde im folgenden stets mit $\mathfrak{P}^{(\mu)}$ bezeichnet.

Es bezeichne weiter $\Delta(y_1, y_2, \ldots, y_\nu)$ die bekannte Vandermondesche Determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_\nu \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{\nu-1} & y_2^{\nu-1} & \ldots & y_\nu^{\nu-1} \end{vmatrix}$$

oder was dasselbe ist, das Differenzenprodukt der in den Klammern stehenden Veränderlichen; für *eine* Veränderliche $(\nu = 1)$ setze man $\Delta(y_1) = 1$. Ist dann wieder $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s$ eine Zerlegung von n, so bilde man mit Hilfe von s Veränderlichenreihen $x_1^{(\sigma)}, x_2^{(\sigma)}, \ldots, x_n^{(\sigma)}$ $(\sigma = 1, 2, \ldots, s)$ folgendes Produkt von Differenzenprodukten:

$$(7) \qquad c(x) = \Delta(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{\lambda_1}^{(1)})\, \Delta(x_{\lambda_1+1}^{(2)}, x_{\lambda_1+2}^{(2)}, \ldots, x_{\lambda_1+\lambda_2}^{(2)}) \ldots$$
$$\ldots \Delta(x_{n-\lambda_s+1}^{(s)}\, x_{n-\lambda_s+2}^{(s)}, \ldots, x_n^{(s)})$$

vom Grade $\dfrac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_s^2 - n}{2}$ und für diese Form den symmetrischen Modul $\mathsf{M}(c(x))$. Jede Basis dieses Moduls erzeugt als Eigensystem eine Darstellung mit der Charakteristik $c^{(\lambda)}$. Wir nennen eine solche Darstellung im folgenden $\mathfrak{C}^{(\lambda)}$. Der Beweis für diese Behauptung stützt sich darauf, daß $c(x)$ eine relative (alternierende) Invariante der Gruppe $\mathfrak{S}_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s}$, aber keiner umfassenderen Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$ ist; das Differenzenprodukt $\Delta(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ erzeugt aber die Darstellung mit der Charakteristik c_n, die den geraden Permutationen die Zahl 1, den ungeraden die Zahl -1 zuordnet.

Um nun ein Eigensystem für eine Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ zu erhalten, stelle man zu der Zerlegung $n = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_r$ die assoziierte Zerlegung $n = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_s$ auf und bilde mit n Veränderlichen die Form

$$(8) \quad d(x) = \Delta(x_1, x_2, \ldots, x_{\lambda_1})\, \Delta(x_{\lambda_1+1}, x_{\lambda_1+2}, \ldots, x_{\lambda_1+\lambda_2}) \ldots$$
$$\ldots \Delta(x_{n-\lambda_s+1}\, x_{n-\lambda_s+2} \ldots x_n).$$

Beispielsweise ist für $n = 5 = 3 + 2$ diese Funktion

$$d(x) = (x_2 - x_1)(x_4 - x_3).$$

Zu der Funktion $d(x)$ bilde man den symmetrischen Modul $\mathsf{M}(d(x))$; es gilt dann der

Satz 1. *Jede Basis des Moduls* $\mathsf{M}(d(x))$ *ist Eigensystem einer irreduziblen Darstellung* $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ *von* $\mathfrak{S}_n$.

Den Beweis für diese Behauptung führe ich in drei Schritten.

1. Zunächst schicke ich eine allgemeine Bemerkung über Eigensysteme voraus, die einen Spezialfall eines Satzes darstellt, der zuerst von Herrn B. L. van der Waerden bewiesen wurde[23]). Ist

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_k(x)$$

ein Eigensystem von $\mathfrak{S}_n$, das aus Formen in $s+1$ Veränderlichenreihen $x^{(0)}, x^{(1)}, \ldots, x^{(s)}$ besteht, und die Darstellung $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{S}_n$ erzeugt, so setze man in den $f_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, k)$

$$x_\nu^{(0)} = x_\nu^{(1)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

und wähle aus den so entstehenden Formen ein System linear unabhängiger, etwa

$$g_1(x),\ g_2(x),\ \ldots,\ g_l(x).$$

Natürlich wird dabei vorausgesetzt, daß nicht alle Formen bei diesem Prozeß identisch verschwinden. Dieses System ist dann wiederum ein Eigensystem von $\mathfrak{S}_n$, und zwar erzeugt es eine Darstellung $\mathfrak{D}^*$ von $\mathfrak{S}_n$, deren irreduziblen Bestandteile mindestens in der gleichen Anzahl auch in $\mathfrak{D}$ enthalten sind[24]).

Der Vollständigkeit halber sei der Beweis für diese Aussage kurz skizziert: $f_\alpha(x)$ gehe durch die Identifizierungen $x_\nu^{(0)} = x_\nu^{(1)}$ in die Form $\varphi_\alpha(x)$ über; dabei führen die Gleichungen

$$f_\alpha^P(x) = \sum_\beta c_{\alpha\beta}^P f_\beta(x) \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, k)$$

auf die entsprechenden Beziehungen

$$(*) \qquad \varphi_\alpha^P(x) = \sum_\beta c_{\alpha\beta}^P \varphi_\beta(x).$$

Weiter sei

$$\varphi_\alpha(x) = \sum_{\varkappa=1}^{l} q_{\alpha\varkappa} g_\varkappa(x)$$

und

$$g_\varkappa^P(x) = \sum_\lambda d_{\varkappa\lambda}^P g_\lambda(x) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots, l).$$

Dann entsteht aus (*) zunächst

$$\sum_\varkappa q_{\alpha\varkappa} g_\varkappa^P(x) = \sum_{\beta,\lambda} c_{\alpha\beta}^P q_{\beta\lambda} g_\lambda(x)$$

---

[23]) Vgl. B. L. van der Waerden, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Berlin J. Springer 1932, S. 74.

[24]) In diesem Satze, ebenso bei ähnlichen Aussagen im folgenden, ist der Zusatz „abgesehen von Ähnlichkeitstransformationen" stets hinzuzudenken.

und weiter

$$\sum_{\varkappa, \lambda} q_{\alpha\varkappa} d^P_{\varkappa\lambda} g_\lambda(x) = \sum_{\beta, \lambda} c^P_{\alpha\beta} q_{\beta\lambda} g_\lambda(x).$$

Da die $g_\varkappa(x)$ linear unabhängig sind, so gilt, falls

$$(q_{\alpha\varkappa}) = Q; \quad (c^P_{\alpha\beta}) = C_P; \quad (d^P_{\varkappa\lambda}) = D_P$$

gesetzt wird:

$$Q\, D_P = C_P\, Q.$$

Es besteht also eine *Verkettung* zwischen den beiden Darstellungen $\mathfrak{D}^*$ und $\mathfrak{D}$ der Gruppe $\mathfrak{S}_n$; weil aber Q den Rang l hat, so folgt daraus in bekannter Weise, daß die Darstellung $\mathfrak{D}^*$ ganz in $\mathfrak{D}$ enthalten ist[25]).

Nun erkennt man aber sofort, daß, falls (λ) die zu (μ) assoziierte Zerlegung bedeutet, eine Basis des früher definierten symmetrischen Moduls $\mathsf{M}(c(x))$ auf dem soeben geschilderten Wege durch wiederholte Identifizierung von Veränderlichenreihen auf eine Basis des symmetrischen Moduls $\mathsf{M}(d(x))$ führt. Die durch diese Basis erzeugte Darstellung von $\mathfrak{S}_n$ kann daher nur solche irreduziblen Bestandteile enthalten, die mindestens in derselben Anzahl auch in der Darstellung $\mathfrak{C}^{(\lambda)}$ vorkommen.

2 Bilden k Formen

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x)$$

ein Eigensystem von $\mathfrak{S}_n$, das die Darstellung $\mathfrak{D}$ erzeugt, und bilden ferner l lineare Verbindungen der $f_\alpha(x)$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, k)$

$$g_\beta = \sum_{\alpha=1}^{k} a_{\beta\alpha} f_\alpha(x) \qquad (\beta = 1, 2, \ldots, l)$$

mit rationalen Koeffizienten $a_{\beta\alpha}$ wieder ein Eigensystem von $\mathfrak{S}_n$, das etwa die Darstellung $\mathfrak{D}^*$ erzeugt, so enthält $\mathfrak{D}^*$ nur irreduzible Bestandteile, die mindestens in der gleichen Anzahl auch in $\mathfrak{D}$ vorkommen. Auf dieser Tatsache beruht ja der Zerfällbarkeitsbegriff in der Theorie der Gruppen linearer Substitutionen.

Offensichtlich ist aber der symmetrische Modul $\mathsf{M}(d(x))$ ein Untermodul des Moduls $\mathsf{M}(p(x))$, so daß die Voraussetzungen der obigen Bemerkung hier gewiß erfüllt sind. Daher kann die durch eine Basis von $\mathsf{M}(d(x))$ erzeugte Darstellung von $\mathfrak{S}_n$ nur solche irreduziblen Bestandteile enthalten, die mindestens in der gleichen Anzahl auch in der Darstellung $\mathfrak{P}^{(\mu)}$ vorkommen.

3. Die durch eine Basis des symmetrischen Moduls $\mathsf{M}(d(x))$ erzeugte Darstellung $\mathfrak{D}$ der Gruppe $\mathfrak{S}_n$ enthält nach 1. nur solche irreduziblen

---

[25]) Mit einer ähnlichen Schlußweise wie die, die Herr I. Schur zum Beweise des Satzes I in seiner Arbeit: Arithmetische Untersuchungen über endliche Gruppen linearer Substitutionen, Sitzungsberichte Akad. Berlin 1906, S. 164 benutzt hat.

Bestandteile, die auch in $\mathfrak{C}^{(\lambda)}$ vorkommen, nach 2. nur solche, die auch in $\mathfrak{P}^{(\mu)}$ vorkommen. Nach der Schlußbemerkung von II. haben aber die Darstellungen $\mathfrak{C}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{P}^{(\mu)}$ nur eine Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ als gemeinsamen Bestandteil; demnach erzeugt eine Basis des Moduls $\mathsf{M}(d(x))$ eine solche irreduzible Darstellung der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$.

IV.

Es bleibt weiter die Aufgabe, für den Modul $\mathsf{M}(d(x))$ eine Basis wirklich aufzustellen. Dies gelingt auf folgendem Wege:

Man verteile die Ziffern $1, 2, \ldots, n$ auf alle möglichen Weisen auf das durch die Zerlegung (μ) charakterisierte Schema:

$$s(\mu):\quad \begin{matrix} \alpha_1\,\alpha_2 \ldots \alpha_{\mu_1} \\ \beta_1\,\beta_2 \ldots \beta_{\mu_2} \\ \vdots \quad \vdots \qquad \vdots \\ \varrho_1\,\varrho_2 \ldots \varrho_{\mu_r} \end{matrix} \tag{9}$$

derart, daß die Ziffern in den Zeilen von links nach rechts, in den Spalten von oben nach unten nur zunehmen, daß also gilt:

$$\begin{matrix} \alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{\mu_1};\ \beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_{\mu_2};\ \ldots;\ \varrho_1 < \varrho_2 < \cdots < \varrho_{\mu_r} \\ \alpha_1 < \beta_1 < \cdots < \varrho_1;\ \alpha_2 < \beta_2 < \cdots < \varrho_2;\ \ldots \end{matrix} \tag{9a}$$

und bilde für jede solche Anordnung eine analog wie (8) gebildete Form

$$d(s(\mu); x) = \Delta(x_{\alpha_1}, x_{\beta_1}, \ldots x_{\varrho_1})\,\Delta(x_{\alpha_2}, x_{\beta_2}, \ldots x_{\varrho_2}) \ldots. \tag{10}$$

Diese Formen bezeichne man in einer später noch genauer charakterisierten Reihenfolge mit $d_1(x), d_2(x), \ldots, d_k(x)$, ihre Gesamtheit kurz mit $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ [26]).

Für das oben schon einmal herangezogene Beispiel

$$n = 5 = 3 + 2$$

erhalten wir folgende fünf Schemata (9)

1 2 3	1 2 4	1 3 4	1 2 5	1 3 5
4 5	3 5	2 5	3 4	2 4

und ihnen entsprechend die fünf Formen:

$$(x_4 - x_1)(x_5 - x_2);\quad (x_3 - x_1)(x_5 - x_2);\quad (x_2 - x_1)(x_5 - x_3);$$
$$(x_3 - x_1)(x_4 - x_2);\quad (x_2 - x_1)(x_4 - x_3).$$

[26]) Ein Schema (9) ohne die Bedingung (9a) entspricht formal genau einem „tableau" in Y; die „standard tableaus" sind Schemata, die auch (9a) erfüllen. In Y bleiben die Schemata formale kombinatorische Gebilde, während sie hier durch (10), wenn man so sagen darf, mit einem konkreten Inhalt erfüllt werden. Vgl. insbesondere Y_3, S. 258.

Satz II. *Das System* $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ *ist ein Eigensystem für eine irreduzible Darstellung* $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ *von* $\mathfrak{S}_n$.

Die Anordnung der Formen $d_\varkappa(x)$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ geschehe nach folgender Regel: Zunächst ordne man die Potenzprodukte der x_ν, die in allen $d_\varkappa(x)$ überhaupt auftreten, lexikographisch nach $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_2, x_1$, d. h. man nenne

$$x_n^{\alpha_n} x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \ldots x_1^{\alpha_1} \quad \textit{höher als} \quad x_n^{\beta_n} x_{n-1}^{\beta_{n-1}} \ldots x_1^{\beta_1}$$

wenn die erste der nichtverschwindenden Differenzen

$$\alpha_n - \beta_n, \quad \alpha_{n-1} - \beta_{n-1}, \quad \ldots$$

positiv ist. Das höchste Potenzprodukt, das in $d_\varkappa(x)$ auftritt [offensichtlich das Produkt der Hauptdiagonalelemente in der Form (10) von $d_\varkappa(x)$], nennen wir das *Leitglied* von $d_\varkappa(x)$ und bezeichnen es mit $L_\varkappa$. Die $d_\varkappa(x)$ werden dann so angeordnet, daß $d_\varkappa(x)$ vor $d_\lambda(x)$ steht, wenn nach der obigen Regel $L_\varkappa$ höher als L_λ ist. Man sieht dann sofort ein, daß das Leitglied $L_\varkappa$ von $d_\varkappa(x)$ in allen dieser Form nachfolgenden Formen $d_\lambda(x)$ von $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ nicht mehr vorkommen kann. Daraus ist die lineare Unabhängigkeit der $d_\varkappa(x)$ unmittelbar zu entnehmen. Denn in einer linearen Beziehung

$$\sum_\varkappa a_\varkappa d_\varkappa(x) = 0$$

muß, da das Leitglied L_1 nur in $d_1(x)$ vorkommt, $a_1 = 0$ sein; da dann das Leitglied L_2 nur noch in $d_2(x)$ vorkommt, ist auch $a_2 = 0$. So erhält man schrittweise, daß alle Koeffizienten $a_\varkappa$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$ gleich Null sind.

Der Satz II ist demnach bewiesen, wenn die Anzahl k der Formen von $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ gerade der Grad $f_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}$ einer Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ ist. Dies ist aber eine bekannte Tatsache[27]); ich will sie aus der Rekursionsformel (5) herleiten. Offenbar kann die Ziffer n in einer Anordnung (9) der Ziffern $1, 2, \ldots, n$, die den Bedingungen (9a) genügt, nur an Enden der Zeilen und Spalten stehen. Steht etwa n am Ende der ϱ-ten Zeile (dies ist natürlich nur dann möglich, wenn $\mu_{\varrho+1} < \mu_\varrho$ ist), so erhalten wir, wenn n aus dem Schema gestrichen wird, ein Schema $s^*(\mu)$ in $n-1$ Ziffern, das zu der Zerlegung

$$n - 1 = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_{\varrho-1} + (\mu_\varrho - 1) + \ldots + \mu_r$$

gehört. Umgekehrt erhalten wir aber aus jedem zu dieser Zerlegung von $n-1$ gehörigen Schema $s^*(\mu)$, indem wir in der ϱ-ten Zeile noch n

[27]) Vgl. J. A. Schouten, Der Ricci-Kalkül, Berlin J. Springer 1924, S. 255; H. Weyl, Theorie der Darstellung kontinuierlicher halbeinfacher Gruppen durch lineare Transformationen I., Math. Zeitschr. **23**, S. 304; Y_3, Theorem II.

anfügen, ein Schema $s(\mu)$, das den Bedingungen (9 a) genügt. Daher gilt für die Anzahl $N(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r)$ der Schemata (9) die Rekursionsgleichung

$$N(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r) = N(\mu_1 - 1, \mu_2, \ldots, \mu_r) + N(\mu_1, \mu_2 - 1, \ldots, \mu_r) + \ldots + N(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r - 1),$$

wobei der ϱ-te Summand, wenn $\mu_\varrho = \mu_{\varrho+1}$ ist, durch 0, ferner für $\mu_r = 1$ die Zahl $N(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r-1}, 0)$ durch $N(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{r-1})$ zu ersetzen ist. Diese Gleichung stimmt formal genau mit der Gleichung (5) überein; da aber auch für die Anfangswerte der beiden Zahlenfolgen $N(n) = f_n = 1$ gilt, so ist allgemein

$$N(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r) = f_{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r}.$$

Mit Hilfe der Leitglieder läßt sich eine beliebige Form $f(x)$ des Moduls $\mathsf{M}(d(x))$ ohne Mühe als lineare Verbindung der $d_\varkappa(x)$ angeben. Denn ist das Leitglied von $f(x)$ etwa $a_{\lambda_1} L_{\lambda_1}$ mit einer gewissen rationalen Zahl a_1, so enthält $f(x) - a_{\lambda_1} d_{\lambda_1}(x) = f'(x)$ nur Leitglieder von niedrigerer Ordnung. Hat $f'(x)$ etwa das Leitglied $a_{\lambda_2} L_{\lambda_2}$, so enthält

$$f(x) - a_{\lambda_1} d_{\lambda_1}(x) - a_{\lambda_2} d_{\lambda_2}(x)$$

wieder nur Leitglieder niedrigerer Ordnung. Fährt man so fort, so findet man in höchstens k Schritten die Entwicklung von $f(x)$ nach den Formen des Eigensystems $\mathfrak{d}^{(\mu)}$. Nimmt man insbesondere die Formen $d_\varkappa^P(x)$ für eine beliebige Permutation P aus $\mathfrak{S}_n$, so folgt aus diesem Verfahren unmittelbar, daß in den Gleichungen

$$d_\varkappa^P(x) = \sum_{\lambda=1}^{k} c_{\varkappa\lambda}^P d_\lambda(x) \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots, k)$$

alle Koeffizienten $c_{\varkappa\lambda}^P$ ganze rationale Zahlen sind.

Für das Beispiel $n = 5 = 3 + 2$ hatten wir schon oben als Eigensystem die fünf Formen

$d_1 = (x_4 - x_1)(x_5 - x_2)$; $d_2 = (x_3 - x_1)(x_5 - x_2)$; $d_3 = (x_2 - x_1)(x_5 - x_3)$;
$d_4 = (x_3 - x_1)(x_4 - x_2)$; $d_5 = (x_2 - x_1)(x_4 - x_3)$

erhalten. Bestimmen wir beispielsweise für die erzeugenden Permutationen $P = (1, 2)$ und $Q = (1, 2, 3, 4, 5)$ der Gruppe $\mathfrak{S}_5$ die Formen $d_\varkappa^P(x)$ und $d_\varkappa^Q(x)$, so finden wir

$$\begin{array}{l|l}
d_1^P = d_1 - d_3 + d_5 & d_1^Q = -d_2 \\
d_2^P = d_2 - d_3 & d_2^Q = -d_4 \\
d_3^P = -d_3 & d_3^Q = -d_4 + d_5 \\
d_4^P = d_4 - d_5 & d_4^Q = d_1 - d_3 - d_4 + d_5 \\
d_5^P = -d_5 & d_5^Q = d_2 - d_3 - d_4 + d_5.
\end{array}$$

Daher sind diesen Elementen in der Darstellung $\mathfrak{G}^{(3,2)}$ die Matrizen

$$M_P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad M_Q = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

zugeordnet.

V.

Der letzte Abschnitt soll zeigen, daß man allein aus den Eigensystemen $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ ohne irgendeine Kenntnis von der Theorie der Charakteristiken die Behauptungen der Sätze I und II herleiten kann:

Die durch das Eigensystem $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ erzeugte Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ von $\mathfrak{S}_n$ ist irreduzibel; verschiedene Eigensysteme $\mathfrak{d}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ erzeugen wesentlich verschiedene irreduzible Darstellungen von $\mathfrak{S}_n$. D. h.: Durchläuft (μ) alle Zerlegungen von n, so erzeugen die Eigensysteme $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ ein volles System irreduzibler Darstellungen der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$.

Zum Beweise verwende ich einen Satz, der vielleicht auch für sich betrachtet, nicht ohne Interesse ist.

Es sei $n = \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_r$ $(\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \dots \geqq \mu_r > 0)$ eine Zerlegung von n. Man erhält daraus gewisse Zerlegungen von:

$$n-1 = (\mu_1 - 1) + \mu_2 + \dots + \mu_r,$$
$$n-1 = \mu_1 + (\mu_2 - 1) + \dots + \mu_r,$$
$$\dots\dots$$
$$n-1 = \mu_1 + \mu_2 + \dots + (\mu_r - 1),$$

von diesen sollen aber nur solche genommen werden; die bei dieser Schreibweise geordnet sind, d. h. die ϱ-te von diesen eben angeschriebenen Zerlegungen wird genommen, wenn $\mu_\varrho > \mu_{\varrho+1}$ ist, aber nicht, wenn $\mu_\varrho = \mu_{\varrho+1}$ ist; bei $\mu_r = 1$ verringert sich in der letzten Zerlegung die Zahl der Summanden. Die so aus der Zerlegung (μ) von n entstehenden Zerlegungen von $n-1$ mögen mit $(\mu)_1, (\mu)_2, \dots, (\mu)_t$ $(t \leqq r)$ bezeichnet und die aus (μ) abgeleiteten Zerlegungen genannt werden [28]. Ohne weiteres ist klar, daß diese Zerlegungen sämtlich voneinander verschieden sind.

---

[28]) Diese Auswahl entspricht genau der für die Rekursionsgleichung (5) für die Grade der Darstellungen; denn die dort angegebene Regel besagt nichts anderes, als daß man die nichtgeordneten Zerlegungen fortzulassen hat.

Ein Beispiel wird dies noch besser erläutern. Die Zerlegung $n = 8 = 3 + 2 + 2 + 1$ führt zunächst auf die Zerlegungen

$$\begin{aligned} n - 1 = 7 &= 2 + 2 + 2 + 1 = 3 + 1 + 2 + 1 \\ &= 3 + 2 + 1 + 1 = 3 + 2 + 2 + 0, \end{aligned}$$

von denen aber die zweite (als nicht geordnet) ausgeschlossen wird.

Nun bezeichne $\mathfrak{S}'_n$ die Untergruppe von $\mathfrak{S}_n$, die von allen den Permutationen von $\mathfrak{S}_n$ gebildet wird, die die Ziffer n in sich selbst überführen; $\mathfrak{S}'_n$ ist der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_{n-1}$ einstufig isomorph. Dann gilt der

Satz III. *Die durch das Eigensystem $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ erzeugte Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ von $\mathfrak{S}_n$ liefert in den Matrizen, die den Elementen der Untergruppe $\mathfrak{S}'_n$ zugeordnet sind, eine Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}_*$ der $\mathfrak{S}_{n-1}$; es gilt in der bekannten symbolischen Schreibweise:*

$$\mathfrak{G}^{(\mu)}_* = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}^{(\mu)_1} & \mathfrak{G}_{12} & \dots & \mathfrak{G}_{1t} \\ 0 & \mathfrak{G}^{(\mu)_2} & \dots & \mathfrak{G}_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathfrak{G}^{(\mu)_t} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

wobei $\mathfrak{G}^{(\mu)_1}, \mathfrak{G}^{(\mu)_2}, \dots, \mathfrak{G}^{(\mu)_t}$ die von den Eigensystemen $\mathfrak{d}^{(\mu)_1}, \mathfrak{d}^{(\mu)_2}, \dots, \mathfrak{d}^{(\mu)_t}$ erzeugten Darstellungen von $\mathfrak{S}_{n-1}$, $(\mu)_1, (\mu)_2, \dots, (\mu)_t$ die aus (μ) abgeleiteten Zerlegungen von $n - 1$ bedeuten [29]).

Zum Beweise betrachten wir noch einmal die Leitglieder $L_\varkappa$ der Formen $d_\varkappa(x)$ aus dem Systeme $\mathfrak{d}^{(\mu)}$. Eine Anzahl unter ihnen ist durch eine gewisse höchste Potenz $x_n^{r_1}$ der letzten Veränderlichen x_n teilbar; auf Grund der für die Formen festgelegten Reihenfolge können wir aber sofort erkennen, daß genau die ersten $f(\mu)_1$ Leitglieder durch $x_n^{r_1}$, alle anderen aber nur durch kleinere Potenzen von x_n teilbar sind. $f(\mu)_1$ bedeutet hierbei die Anzahl der Formen in dem Eigensystem $\mathfrak{d}^{(\mu)_1}$ der $\mathfrak{S}_{n-1}$, oder was dasselbe ist, die Anzahl der möglichen Schemata (9) für die Zerlegung $(\mu)_1$ von $n - 1$. Dies erkennt man leicht mit der gleichen Methode, die in IV. die Abzählung der Formen von $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ gestattete. Unter den verbleibenden Formen $d_\varkappa(x)$ haben die nächsten $f(\mu)_2$ Leitglieder, die durch die nächste mögliche Potenz $x_n^{r_2}$ teilbar sind, und so fort. Auf diese Weise werden die Formen $d_\varkappa(x)$ von $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ in t Abteilungen eingeteilt;

---

[29]) Dieser Satz ist im Grunde genommen natürlich schon in der Formel

$$\frac{\partial \Phi^{(\mu)}}{\partial s_1} = \sum_{\tau=1}^{t} \Phi^{(\mu)_\tau}$$

enthalten, die in S_2, § 1 (auf S. 666 oben) steht; hier kann freilich davon kein Gebrauch gemacht werden. Formuliert wurde Satz III aber meines Wissens noch nirgends.

die Leitglieder der τ-ten Abteilung sind sämtlich durch die gleiche Potenz $x_n^{r_\tau}$ teilbar ($\tau = 1, 2, \ldots, t$), wobei $r_1 > r_2 > \ldots > r_t \geqq 0$. $r_t = 0$ tritt ein, wenn $\mu_r = 1$ war. Entwickeln wir aber eine Form $d_\varkappa(x)$ aus der τ-ten Abteilung nach Potenzen von x_n, so sieht man aus der Gestalt von $d_\varkappa(x)$ sofort, daß der Koeffizient $d_\varkappa^*$ von $x_n^{r_\tau}$ (nur noch abhängig von $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$) gerade eine Form aus dem Eigensystem $\mathfrak{d}^{(\mu)_\tau}$ ist; man hat dazu nur die Determinante in $d_\varkappa(x)$, in der x_n vorkommt, nach der Zeile zu entwickeln, in der die Potenzen von x_n stehen. Durchläuft daher $d_\varkappa(x)$ alle Formen aus der τ-ten Abteilung, so finden wir als Koeffizienten von $x_n^{r_\tau}$ gerade alle Formen dieses Eigensystems $\mathfrak{d}^{(\mu)_\tau}$ der $\mathfrak{S}_{n-1}$ [30]).

Damit ist aber der Beweis für den Satz III fast vollendet; bilden wir nämlich für eine Permutation P' aus der Gruppe $\mathfrak{S}_n'$ zu irgendeiner Form $d_\varkappa(x)$ der τ-ten Abteilung aus $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ die Form $d_\varkappa^{P'}(x)$, so ist auch das Leitglied dieser Form gewiß durch $x_n^{r_\tau}$ teilbar. Daher kann die Entwicklung

$$d_\varkappa^{P'}(x) = \sum_\lambda a_{\varkappa\lambda}^{P'} d_\varkappa(x) \qquad (\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots k)$$

erst mit Formen der τ-ten Abteilung beginnen, die vorherstehenden Koeffizienten $x_{\varkappa\lambda}^{P'}$ sind sicherlich gleich Null. Dies zeigt, daß eine Zerfällung der angegebenen Form (11) eintritt, allerdings sagt es noch nichts über die in der Hauptdiagonale stehenden Matrizengruppen aus. Entwickelt man nun aber auf beiden Seiten nach x_n, und vergleicht man die Koeffizienten der höchsten Potenz $x_n^{r_\tau}$, so entsteht die Beziehung

$$d_\varkappa^{*P'} = \sum a_{\varkappa\lambda}^{P'} d_\lambda^*,$$

wobei rechts natürlich nur noch über die Indizes λ summiert wird, deren zugehörigen Formen $d_\lambda(x)$ zur τ-ten Abteilung gehören. Diese Beziehung ist aber genau eine der Entwicklungsformeln für das Eigensystem $\mathfrak{d}^{(\mu)_\tau}$ von $\mathfrak{S}_{n-1}$ und das Element P' dieser Gruppe. Daraus folgt, daß die Hauptdiagonale von (11) gerade die angegebene Gestalt hat.

Damit kommen wir zum Beweise der eingangs aufgestellten Behauptung. Da diese für $n = 1$ trivialerweise erfüllt ist, können wir sie für den Grad $n - 1$ schon als bewiesen voraussetzen.

Die Irreduzibilität der durch $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ erzeugten Darstellung ist offenbar dann bewiesen, wenn gezeigt werden kann, daß der symmetrische Modul $\mathsf{M}(d(x))$, der zu der Zerlegung (μ) in III. konstruiert wurde, keinen echten symmetrischen Untermodul enthält, der von Null verschiedene Elemente besitzt. Wir nehmen an, $\mathsf{M}(d(x))$ enthalte einen solchen symmetrischen Untermodul M_1; eine Basis dieses Moduls ist dann auch Eigensystem

[30]) Diese Zerlegung des Eigensystems in Abteilungen entspricht der Einteilung der Schemata (9) nach der Stellung der letzten Ziffer n; wird diese Ziffer im Schema gestrichen, so entsteht ein Schema einer abgeleiteten Zerlegung von $n - 1$.

von $\mathfrak{S}_n$ und erzeugt eine Darstellung $\mathfrak{G}_1$ dieser Gruppe. Daher ist mit einer geeigneten Ähnlichkeitstransformation

$$A^{-1}\,\mathfrak{G}^{(\mu)}\,A = \begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1 & 0 \\ \mathfrak{G}_{21} & \mathfrak{G}_2 \end{pmatrix}.$$

Da aber jede Darstellung einer endlichen Gruppe vollständig zerfällt, kann hier durch Änderung der Basis von M_1 erzielt werden, daß $\mathfrak{G}_{21} = 0$ ist; daher ist $\mathsf{M}(d(x))$ direkte Summe zweier symmetrischer Untermoduln M_1 und M_2 [31]).

Ist nun $f(x)$ ein beliebiges Element von M_1, so kann es als lineare Verbindung der $d_\varkappa(x)$ dargestellt werden

$$f(x) = \sum_\varkappa a_\varkappa d_\varkappa(x).$$

Hierbei möge a_λ der erste von Null verschiedene Koeffizient sein, das Leitglied von $f(x)$ ist dann $a_\lambda L_\lambda$. Durch eine Permutation P, die L_λ in das Leitglied L_1 der ersten Form $d_1(x)$ überführt (eine solche Permutation existiert gewiß), geht $f(x)$ in eine Form $g(x) = f^P(x)$ aus M_1 über, die das Leitglied $a_\lambda L_1$ besitzt, also in ihrer Entwicklung nach Potenzen von x_n die Gestalt hat:

$$g(x) = x_n^{r_1} g_1^*(x) + \ldots,$$

dabei ist $g_1^*(x)$ eine von Null verschiedene Form aus dem in $\mathfrak{S}_{n-1}$ symmetrischen Modul $\mathsf{M}(d^*(x))$, der der Zerlegung $(\mu)_1$ von $n-1$ entspricht. Dieser Modul ist aber nach Voraussetzung unzerlegbar, weshalb M_1 sicher Formen enthält

$$g(x) = x_n^{r_1} g_1^*(x) + \cdots$$

mit jedem beliebigen Element $g_1^*(x)$ aus $\mathsf{M}(d^*(x))$. Daraus folgt aber doch offenbar, daß die aus $\mathfrak{G}_1$ hervorgehende Darstellung $\mathfrak{G}_1^*$ für $\mathfrak{S}_n'$ mindestens die Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)_1}$ von $\mathfrak{S}_{n-1}$ als (nach Voraussetzung) irreduziblen Bestandteil enthält. Das gleiche gilt auch für die Darstellung $\mathfrak{G}_2$; die aus ihr hervorgehende Darstellung $\mathfrak{G}_2^*$ von $\mathfrak{S}_{n-1}$ enthält gleichfalls die Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)_1}$ von $\mathfrak{S}_{n-1}$. Da indes

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{G}_1^* & 0 \\ 0 & \mathfrak{G}_2^* \end{pmatrix}$$

zu der in Satz III definierten Darstellung $\mathfrak{G}_*^{(\mu)}$ von $\mathfrak{S}_{n-1}$ ähnlich ist, so kann nur eine der beiden Darstellungen $\mathfrak{G}_1^*$ und $\mathfrak{G}_2^*$ den (nach Voraussetzung) irreduziblen Bestandteil $\mathfrak{G}^{(\mu)_1}$ enthalten, weil dieser in $\mathfrak{G}_*^{(\mu)}$ nur einmal vorkommt. Also muß einer der beiden Moduln M_1 oder M_2 der

---

[31]) Daß dieser Satz wirklich nicht tief liegt, erkennt man leicht aus dem einfachen Beweis, den Herr I. Schur in seiner Arbeit: Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere, Sitzungsberichte Akad. Berlin 1905, S. 406 (Satz VII) gegeben hat.

Nullmodul sein, was in beiden Fällen der über M_1 gemachten Annahme widerspricht. Daher ist der symmetrische Modul $\mathsf{M}(d(x))$ unzerlegbar, die durch eine Basis diese Moduls, also insbesondere die durch das Eigensystem $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ erzeugte Darstellung $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ der $\mathfrak{S}_n$ irreduzibel.

Es bleibt daher nur noch zu zeigen, daß für zwei verschiedene Zerlegungen (λ) und (μ) von n die Eigensysteme $\mathfrak{d}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{d}^{(\mu)}$ wesentlich verschiedene Darstellungen $\mathfrak{G}^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{G}^{(\mu)}$ von $\mathfrak{S}_n$ erzeugen. Wären diese beiden Darstellungen ähnlich, so wären es auch die aus ihnen hervorgehenden Darstellungen $\mathfrak{G}_*^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{G}_*^{(\mu)}$ der $\mathfrak{S}_n'$, d. h. die aus (λ) und (μ) abgeleiteten Zerlegungen von $n-1$ müßten in irgendeiner Reihenfolge übereinstimmen; dann müßten sie aber gerade in der angegebenen Reihenfolge übereinstimmen, da die abgeleiteten Zerlegungen nach der in II. gegebenen Regel angeordnet sind. Das ist aber doch offensichtlich unmöglich, wenn (λ) und (μ) verschiedene Zerlegungen von n sind.

(Eingegangen am 12. Oktober 1934.)