Werk

Label: Chapter

Ort: Berlin

Jahr: 1935

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0039|log15

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

I. Existenz- und Eindeutigkeitssätze.

§ 1.

Eindeutige Lösungen.

Satz 1. In dem nichtlinearen Integralgleichungssystem[4])

$$(4)\quad \psi_i(s) + \int_B K_i(s,t)\, f_i(t, \psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))\, dt = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

seien die $K_i(s,t)$ brauchbar unstetige Kerne und die $f_i(s, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ für alle dem Bereich B angehörigen Punkte s und alle reellen Werte der $u_1, u_2, \ldots, u_n$ stetige Funktionen, die den Lipschitzbedingungen

$$(5a)\quad [f_i(s, u_1, \ldots, u_n) - f_i(s, v_1, \ldots, v_n)]^2 \leqq k_i^2 [(u_1 - v_1)^2 + \ldots + (u_n - v_n)^2]$$

genügen, wobei die k_i von s, u_1, v_1, $\ldots$, u_n, v_n unabhängige positive Zahlen sind, für die

$$(5b)\quad \sum_{i=1}^{n} k_i^2 = k^2 < \lambda_1^2$$

ist. Dabei ist λ_1 der kleinste der Eigenwerte der Kerne

$$\overline{K}_i(s,t) = \int_B K_i(s,r)\, K_i(t,r)\, dr.$$

Dann gibt es genau n in B stetige Funktionen $\psi_i(s)$, die die Gleichungen (4) identisch in s erfüllen[5]).

1. Existenzbeweis.

$$p_{i1}(s),\ p_{i2}(s),\ \ldots;\ q_{i1}(s),\ q_{i2}(s),\ \ldots$$

seien das E. Schmidtsche „vollständige normierte Orthogonalsystem des unsymmetrischen Kernes" $K_i(s,t)$, $0 < \lambda_{i1} \leqq \lambda_{i2} \leqq \ldots$ die zugehörigen Eigenwerte, die ja positiv angenommen werden dürfen[6]).

---

[4]) Das Gleichungssystem

$$G_i(s, \varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)) + \int_B K_i(s,t)\, F_i(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))\, dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

läßt sich durch eine Substitution auf die Form (4) bringen, wenn das gewöhnliche System

$$G_i(s, u_1, \ldots, u_n) = v_i$$

für beliebige $v_1, v_2, \ldots, v_n$ eine Lösung hat; vgl. Hammerstein, loc. cit. 1, S. 118. Das System (4) läßt sich nicht durch „Aneinanderfügen der Kerne" auf eine einzige Integralgleichung zurückführen, wie das bei linearen Integralgleichungen der Fall ist. Diese Reduktion beruht wesentlich auf der Additivität linearer Funktionalausdrücke.

[5]) Unter Lösungen sind im folgenden, wenn nicht ausdrücklich anders vermerkt, immer reelle Lösungen zu verstehen. Ebenso sind alle vorkommenden Funktionen $K_i(s,t)$, f_i usw. als reelle anzusehen.

[6]) E. Schmidt, Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen I. Math. Annalen, S. 461 u. f.

Mit Hilfe eines einfachen Iterationsverfahrens erkennt man, daß das Gleichungssystem

$$(6)\qquad c_{i\varrho} + \frac{1}{\lambda_{i\varrho}} \int_B f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} c_{1\sigma} p_{1\sigma}(t), \ldots, \sum_{\sigma=1}^{N} c_{n\sigma} p_{n\sigma}(t)\Big) q_{i\varrho}(t)\, dt = 0 \qquad \begin{pmatrix} i = 1, 2, \ldots, n \\ \varrho = 1, 2, \ldots, N \end{pmatrix}$$

für jede natürliche Zahl N Lösungen besitzt. Sind nämlich ${}^0c_{1\varrho}, \ldots, {}^0c_{n\varrho}$ $n \cdot N$ beliebige reelle Zahlen, so werden die Systeme ${}^\varkappa c_{i\varrho}$ für alle natürlichen Zahlen $\varkappa$ sukzessive durch folgende Gleichungen definiert:

$$(7)\qquad {}^\varkappa c_{i\varrho} = -\frac{1}{\lambda_{i\varrho}} \int_B f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} {}^{\varkappa-1}c_{1\sigma} p_{1\sigma}, \ldots, \sum_{\sigma=1}^{N} {}^{\varkappa-1}c_{n\sigma} p_{n\sigma}\Big) q_{i\varrho}\, dt \qquad (\varkappa = 1, 2, \ldots).$$

Mit Hilfe der Besselschen Ungleichung ergibt sich dann:

$$\sum_{\varrho=1}^{N} \lambda_{i\varrho}^2 ({}^{\varkappa+1}c_{i\varrho} - {}^\varkappa c_{i\varrho})^2 \leqq \int_B \Big[f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} {}^\varkappa c_{1\sigma} p_{1\sigma}, \ldots\Big) - f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} {}^{\varkappa-1}c_{1\sigma} p_{1\sigma}, \ldots\Big)\Big]^2 dt.$$

Berücksichtigt man (5a), so erhält man

$$\sum_{\varrho=1}^{N} \lambda_{i\varrho}^2 ({}^{\varkappa+1}c_{i\varrho} - {}^\varkappa c_{i\varrho})^2 \leqq k_i^2 \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} ({}^\varkappa c_{\sigma\varrho} - {}^{\varkappa-1}c_{\sigma\varrho})^2.$$

Beachtet man noch, daß $\lambda_{i\varrho} \geqq \lambda_1$, so erhält man durch Summation über i nach (5b)

$$(8)\qquad \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} ({}^{\varkappa+1}c_{i\varrho} - {}^\varkappa c_{i\varrho})^2 \leqq \frac{k^2}{\lambda_1^2} \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} ({}^\varkappa c_{\sigma\varrho} - {}^{\varkappa-1}c_{\sigma\varrho})^2.$$

Mit den Bezeichnungen $\sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} ({}^\varkappa c_{i\varrho} - {}^{\varkappa-1}c_{i\varrho})^2 = {}^\varkappa C^2$ und $\frac{k}{\lambda_1} = \alpha$ schreibt sich (8)

$$ {}^{\varkappa+1}C \leqq \alpha \cdot {}^\varkappa C.$$

Wegen $\alpha < 1$ konvergiert die Reihe $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} {}^\varkappa C$. Da nun $|{}^\varkappa c_{i\varrho} - {}^{\varkappa-1}c_{i\varrho}| \leqq {}^\varkappa C$ ist, konvergieren die Reihen $\sum_{\varkappa=1}^{\infty} ({}^\varkappa c_{i\varrho} - {}^{\varkappa-1}c_{i\varrho})$ absolut, es existieren also die Grenzwerte

$$c_{i\varrho} = \lim_{\varkappa \to \infty} {}^\varkappa c_{i\varrho}$$

und aus (7) ergibt sich, daß diese $n \cdot N$ Zahlen Lösungen des Systems (6) sind. Für jede natürliche Zahl N kann also eine Lösung dieses Systems bestimmt werden. Mit Hilfe der Besselschen Ungleichung entnimmt man (6) die Abschätzung

$$(9)\qquad \sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho} c_{i\varrho})^2 \leqq \int_B f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} c_{1\sigma} p_{1\sigma}(t), \ldots\Big)^2 dt.$$

Aus der Voraussetzung (5a) erkennt man leicht, daß es zu jeder positiven Zahl ε eine Konstante $a = a(\varepsilon)$ gibt, derart, daß für alle Punkte s in B und alle reellen Werte der $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$(10)\qquad f_i(s, u_1, \ldots, u_n)^2 \leqq a + (k_i^2 + \varepsilon)(u_1^2 + \ldots + u_n^2)$$

wird. Dies ergibt zusammen mit (9)

$$\sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho}\, c_{i\varrho})^2 \leqq a \int_B dt + (k_i^2 + \varepsilon) \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} c_{\sigma\varrho}^2. \tag{11}$$

Ist ε so klein gewählt, daß $\sum_{i=1}^{n} (k_i^2 + \varepsilon) = k^2 + n\varepsilon < \lambda_1^2$ wird, so erhält man aus der letzten Ungleichung durch Summation über i

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{N} c_{i\varrho}^2 \leqq \frac{n a \int_B dt}{1 - \frac{k^2 + n\varepsilon}{\lambda_1^2}} = C, \tag{12}$$

wo C eine von N unabhängige Zahl ist. Die Ungleichung (11) lehrt dann, daß auch für die Summen $\sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho}\, c_{i\varrho})^2$ eine von N unabhängige obere Schranke existiert. Daraus fließt nun der ausgesprochene Existenzsatz, denn es gilt folgendes

Lemma: Hat das „approximierende" Gleichungssystem (6) für eine wachsende Folge von natürlichen Zahlen N Lösungen $c_{i\varrho}^{(N)}$ und gibt es eine von N unabhängige Zahl C_1, so daß für alle Zahlen N der Folge

$$\sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho}\, c_{i\varrho}^{(N)})^2 \leqq C_1^2 \tag{13}$$

ist, so gibt es n stetige Funktionen $\psi_1(s), \ldots, \psi_n(s)$, die das Integralgleichungssystem (4) identisch in s erfüllen[7]).

---

[7]) Es gilt auch folgende Umkehrung dieses Lemmas: Ist $\Psi_1(s), \Psi_2(s), \ldots, \Psi_n(s)$ ein Lösungssystem von (4) und hat das lineare System

$$\psi_i(s) + \int_B K_i(s, t) \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial u_k} (t, \Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t))\, \psi_k(t)\, dt = 0$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

keine Nullösungen $\psi_i(s)$, so gibt es zwei Zahlen N_1 und C_1, so daß für jedes $N > N_1$ das Gleichungssystem (6) reelle Lösungen $c_{i\varrho}^{(N)}$ besitzt, für die die Ungleichung (13) gilt. Man beweist dies mit Hilfe der E. Schmidtschen Theorie über die Lösbarkeit von nichtlinearen Integralgleichungen im Kleinen, vgl. loc. cit. 2. Es gilt nur zu beachten, daß das Gleichungssystem (6) äquivalent ist mit dem System

$$\psi_i^{(N)}(s) + \int_B (K_i(s, t) - \varepsilon_i^{(N)}(s, t))\, f_i(t, \psi_1^{(N)}, \ldots, \psi_n^{(N)})\, dt = 0,$$

wo

$$\psi_i^{(N)}(s) = \sum_{\varrho=1}^{N} c_{i\varrho}^{(N)} p_{i\varrho}(s) \quad \text{und} \quad \varepsilon_i^{(N)}(s, t) = K_i(s, t) - \sum_{\varrho=1}^{N} \frac{p_{i\varrho}(s)\, q_{i\varrho}(t)}{\lambda_{i\varrho}}$$

gesetzt ist, und daß $\int_B \varepsilon_i^{(N)}(s, t)^2\, dt$ gleichmäßig in s gegen 0 konvergiert.

Zum Beweise erkläre man für alle Zahlen N der Folge die Funktionen

$$\psi_i^{(N)}(s) = \sum_{\varrho=1}^{N} c_{i\varrho}^{(N)} p_{i\varrho}(s) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{14}$$

Aus dem Entwicklungssatz für quellenmäßig dargestellte Funktionen ergibt sich

$$\begin{aligned} R_i^{(N)}(s) &= \psi_i^{(N)}(s) + \int_B K_i(s,t)\, f_i\big(t, \psi_1^{(N)}(t), \ldots, \psi_n^{(N)}(t)\big)\, dt \\ &= \sum_{\varrho=N+1}^{\infty} \frac{p_{i\varrho}(s)}{\lambda_{i\varrho}} \int_B f_i\big(t, \psi_1^{(N)}(t), \ldots, \psi_n^{(N)}(t)\big)\, q_{i\varrho}(t)\, dt. \end{aligned} \tag{15}$$

Schwarzsche und Besselsche Ungleichung liefern also

$$|R_i^{(N)}(s)| \leqq \left\{ \sum_{\varrho=N+1}^{\infty} \left(\frac{p_{i\varrho}(s)}{\lambda_{i\varrho}}\right)^2 \int_B f_i^2\, dt \right\}^{1/2}. \tag{16}$$

Aus der Voraussetzung (13) folgt nun die gleichmäßige Beschränktheit der $\psi_i^{(N)}(s)$; denn aus

$$\begin{aligned} |\psi_i^{(N)}(s)| = \left| \sum_{\varrho=1}^{N} \lambda_{i\varrho} c_{i\varrho}^{(N)} \frac{p_{i\varrho}(s)}{\lambda_{i\varrho}} \right| &\leqq \left\{ \sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho} c_{i\varrho}^{(N)})^2 \left(\frac{p_{i\varrho}}{\lambda_{i\varrho}}\right)^2 \right\}^{1/2} \\ &\leqq C_1 \left\{ \sum_{\varrho=1}^{N} \left(\frac{p_{i\varrho}}{\lambda_{i\varrho}}\right)^2 \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

ergibt sich wegen der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe $\sum_{\varrho=1}^{\infty} \left(\frac{p_{i\varrho}}{\lambda_{i\varrho}}\right)^2$ die Existenz einer von N unabhängigen Zahl C_2, für die

$$|\psi_i^{(N)}(s)| \leqq C_2 \tag{17}$$

ist. Beachtet man noch die Stetigkeit der Funktionen f_i, so zeigt (16) also, daß die Reste $R_i^{(N)}(s)$ gleichmäßig für alle s in B gegen 0 konvergieren.

Die Funktionenfolgen

$$\omega_i^{(N)}(s) = \int_B K_i(s,t)\, f_i\big(t, \psi_1^{(N)}(t), \ldots, \psi_n^{(N)}(t)\big)\, dt$$

sind gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig in B. Das ergibt die Schwarzsche Ungleichung, wenn man (17) und die Stetigkeit der iterierten Kerne beachtet. Es gibt also eine Teilfolge $\omega_i^{(N^*)}$ dieser Funktionen, die gleichmäßig für alle s in B gegen stetige Grenzfunktionen konvergieren. Dann müssen, wie aus der gleichmäßigen Konvergenz der $R_i^{(N)}(s)$ gegen Null folgt, auch die $\psi_i^{(N^*)}(s)$ gleichmäßig gegen stetige Grenzfunktionen $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_n(s)$ konvergieren, die Lösungen des Gleichungssystems (4) sind.

2. Eindeutigkeitsbeweis.

Das Gleichungssystem (4) möge zwei Lösungssysteme haben: $\psi_i^{(1)}(s)$ und $\psi_i^{(2)}(s)$. Setzt man

(18) $$\Psi_i(s) = \psi_i^{(2)}(s) - \psi_i^{(1)}(s) \quad \text{und}$$

$$f_i(s, \psi_1^{(1)} + u_1, \ldots, \psi_n^{(1)} + u_n) - f_i(s, \psi_1^{(1)}, \ldots, \psi_n^{(1)}) = F_i(s, u_1, \ldots, u_n),$$

so erhält man durch Subtraktion der beiden für $\psi_i^{(1)}$ und $\psi_i^{(2)}$ aufgeschriebenen Gleichungen

(19) $$\Psi_i(s) + \int_B K_i(s, t) F_i(t, \Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t))\, dt = 0.$$

Das Gleichungssystem (4) hat also dann und nur dann eine von $\psi_1^{(1)}, \ldots, \psi_n^{(1)}$ verschiedene Lösung, wenn das Gleichungssystem (19) ein von $\Psi_1(s) = \Psi_2(s) = \ldots = \Psi_n(s) = 0$ (für alle s in B) verschiedenes Lösungssystem besitzt.

Wenn es ein Lösungssystem $\Psi_1, \ldots, \Psi_n$ von (19) gibt, so läßt es sich durch die gleichmäßig konvergenten Reihen $\Psi_i(s) = \sum_{\varrho=1}^{\infty} C_{i\varrho}\, p_{i\varrho}(s)$ darstellen. Die Fourier-Koeffizienten $C_{i\varrho}$ haben dabei nach (19) die Gestalt

(20) $$C_{i\varrho} = -\frac{1}{\lambda_{i\varrho}} \int_B F_i(t, \Psi_1(t), \ldots, \Psi_n(t))\, q_{i\varrho}(t)\, dt \quad (\varrho = 1, 2, \ldots).$$

Es ist also nach der Besselschen Ungleichung

(21) $$\sum_{\varrho=1}^{\infty} (\lambda_{i\varrho} C_{i\varrho})^2 \leqq \int_B F_i(t, \Psi_1, \ldots, \Psi_n)^2\, dt.$$

Aus der Voraussetzung (5a) folgt

$$F_i(s, u_1, \ldots, u_n)^2 \leqq k_i^2 (u_1^2 + \ldots + u_n^2).$$

Somit ist wegen (21)

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} (\lambda_{i\varrho} C_{i\varrho})^2 \leqq k_i^2 \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{\infty} C_{\sigma\varrho}^2$$

und durch Summation über i erhält man daraus

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{\infty} (\lambda_{i\varrho} C_{i\varrho})^2 \leqq k^2 \sum_{\sigma=1}^{n} \sum_{\varrho=1}^{\infty} C_{\sigma\varrho}^2.$$

Das ist wegen $k^2 < \lambda_1^2 \leqq \lambda_{i1}^2 \leqq \lambda_{i2}^2 \leqq \ldots$ nur möglich, wenn alle Fourier-Koeffizienten $C_{i\varrho}$ verschwinden, die Funktionen $\Psi_1(s), \ldots, \Psi_n(s)$ also identisch Null sind. Dieser Eindeutigkeitssatz ergibt auch, daß jedes der Systeme (6) genau ein Lösungssystem besitzt; denn die $c_{i\varrho}^{(N)}$ sind die Fourier-Koeffizienten sämtlicher Lösungen des Systems

$$\psi_i(s) + \int_B \Big(\sum_{\varrho=1}^{N} \frac{p_{i\varrho}(s)\, q_{i\varrho}(t)}{\lambda_{i\varrho}} \Big) f_i(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))\, dt = 0.$$

Da für dieses System die Voraussetzungen (5a) und (5b) erfüllt sind, besitzt es genau ein Lösungssystem $\psi_i^{(N)}(s)$; die Fourier-Koeffizienten dieser Lösungsfunktion in der Entwicklung $\psi_i^{(N)}(s) = \sum_{\varrho=1}^{N} c_{i\varrho}^{(N)} p_{i\varrho}(s)$ sind daher eindeutig bestimmt.

Ohne Beweis sei hier noch angeführt:

Zusatz zu Satz 1: Der Satz 1 bleibt gültig, wenn statt (5b) die etwas weniger einschränkende Voraussetzung

$$\frac{k_1^2}{\lambda_{11}^2} + \frac{k_2^2}{\lambda_{21}^2} + \ldots + \frac{k_n^2}{\lambda_{n1}^2} < 1 \tag{5b'}$$

erfüllt ist.

Die Funktionen $f_i(s, u_1, \ldots, u_n)$ mögen nun die Lipschitzbedingungen (5a) erfüllen, die zweite Voraussetzung (5b) sei aber verletzt. Dann gilt der

Satz 2: Genügen die stetigen Funktionen $f_i(s, u_1, \ldots, u_n)$ den Lipschitzbedingungen (5a), so ist die Anzahl der Lösungen des nichtlinearen Integralgleichungssystems (4) gleich der Anzahl der Lösungen eines endlichen transzendenten Gleichungssystems.

Beweis: Laut bekannten Eigenschaften der Eigenwerte kann man Indizes $m_1, m_2, \ldots, m_n$ finden, für die

$$\lambda_{im_i} \leqq k < \lambda_{im_i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, wo k die in (5a) genannte Zahl ist[8]). [λ_{i0} ist dabei gleich Null zu setzen].

Setzt man nun

$$K_i^{(m_i)}(s, t) = K(s, t) - \sum_{\varrho=1}^{m_i} \frac{p_{i\varrho}(s)\, q_{i\varrho}(t)}{\lambda_{i\varrho}},$$

so hat nach Satz 1 das Gleichungssystem

$$\Psi_i(s) + \int_B K_i^{(m_i)}(s, t) f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{m_1} a_{1\sigma} p_{1\sigma}(t) + \Psi_1(t), \ldots\Big) dt = 0 \tag{22}$$

bei beliebiger Wahl der Konstanten $a_{i\varrho}$ genau ein Lösungssystem $\Psi_1(s) = \Psi_1(s, a_1, \ldots, a_n), \ldots, \Psi_n(s) = \Psi_n(s, a_1, \ldots, a_n)$. Jedes Lösungssystem $a_{i\varrho}$ der $n \cdot (m_1 + \ldots + m_n)$ transzendenten Gleichungen

$$a_{i\varrho} + \frac{1}{\lambda_{i\varrho}} \int_B f_i\Big(t, \sum_{=1}^{m_1} a_{1\sigma} p_{1\sigma}(t) + \Psi_1(t, a_1, \ldots, a_n), \ldots\Big) q_{i\varrho}(t)\, dt = 0 \tag{23}$$

$$(\varrho = 1, 2, \ldots, m_i)$$

[8]) Haben einige der Kerne $K_i(s, t)$ nur endlich viele Eigenwerte, so haben die entsprechenden Unbekannten $\psi_i(s)$ nur endlich viele von Null verschiedene Koeffizienten $c_{i\varrho}$. Für solche Kerne gilt also der Satz 2.

führt, wie man durch Multiplikation mit $p_{i\varrho}(s)$ und Addition zu (22) unmittelbar erkennt, auf eine Lösung von (4). Zu verschiedenen Wertesystemen $a_{i\varrho}$ gehören verschiedene Lösungen ψ_i von (4). Umgekehrt gehört zu jedem Lösungssystem ψ_i von (4) genau ein Lösungssystem von (22) und (23), da die $a_{i\varrho}$ die ersten Fourier-Koeffizienten der ψ_i sind und die Funktionen Ψ_i erhalten werden durch

$$\Psi_i(s) = \psi_i(s) - \sum_{\varrho=1}^{m_i} a_{i\varrho}\, p_{i\varrho}(s).$$

Da das Gleichungssystem (22) nur eine Lösung besitzt, gehören zu verschiedenen Systemen ψ_i auch verschiedene Systeme $a_{i\varrho}$.

Unter den Voraussetzungen (5a) und (5b) ist das Gleichungssystem (4) eindeutig lösbar. Unser Existenzbeweis verlangte jedoch die Auswahl einer konvergenten Teilfolge aus der Folge der Näherungslösungen. Eine solche Auswahl ist jedoch nicht nötig, vielmehr strebt die Folge der Näherungslösungen als ganze gegen das Lösungssystem $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$. Eine leichte Rechnung, die ebenso geführt wird, wie im Falle einer Gleichung mit einer Unbekannten (s. Hammerstein, loc. cit. 1, S. 153) zeigt nämlich, daß es zwei von s und N unabhängige Konstante M_1 und M_2 gibt, so daß der Unterschied zwischen der eindeutig bestimmten Lösung von (4) und der Näherung abgeschätzt wird durch

$$\sum_{i=1}^{n} |\psi_i(s) - \psi_i^{(N)}(s)| \leqq M_1 \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\varrho=N+1}^{\infty} \left(\frac{p_{i\varrho}(s)}{\lambda_{i\varrho}} \right)^2 \right\}^{1/2} + \frac{M_2}{\lambda_{N+1}}.$$

Dabei ist $\lambda_N = \mathrm{Min}\,(\lambda_{1N}, \lambda_{2N}, \ldots, \lambda_{nN})$ gesetzt. Insbesondere ergibt sich daraus, daß die $\psi_i^{(N)}(s)$ gleichmäßig für alle s in B gegen die $\psi_i(s)$ konvergieren.

§ 2.

Funktionen, die nicht stärker wachsen als lineare.

Satz 3. In dem Gleichungssystem

$$\psi_i(s) + \int_B K_i(s,t)\, f_i(t, \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t))\, dt = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

seien die $K_i(s,t)$ brauchbar unstetige Kerne und die stetigen Funktionen $f_i(s, u_1, \ldots, u_n)$ mögen den Bedingungen

$$|f_i(s, u_1, \ldots, u_n)| \leqq a + k_{i1}|u_1| + k_{i2}|u_2| + \ldots + k_{in}|u_n| \tag{24a}$$

genügen, wobei die k_{i1} von $s, u_1, \ldots, u_n$ unabhängige positive Zahlen sind, für die

$$(k_{i1}^2 + k_{i2}^2 + \ldots + k_{in}^2)(M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2) < 1 \tag{24b}$$

ist. (Dabei ist

$$M_i^2 = \int_B \int_B K_i(s,t)^2\, ds\, dt$$

gesetzt.) Dann gibt es n in B stetige Funktionen $\psi_i(s)$, die die Gleichungen (4) identisch in s erfüllen.

Beweis: Für die Eigenwerte und Eigenfunktionen der Kerne $K_i(s,t)$ seien die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen beibehalten. Mit Hilfe der Schwarzschen Ungleichung folgert man aus der Voraussetzung (24a), daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine positive Zahl $a_1 = a_1(\varepsilon)$ gibt, so daß für s in B und alle reellen Werte der $u_1, u_2, \ldots, u_n$

$$f_i(s, u_1, \ldots, u_n)^2 \leqq a_1 + (k_{i1}^2 + \ldots + k_{in}^2 + \varepsilon)(u_1^2 + \ldots + u_n^2)$$

wird. Man wähle ε so klein, daß

$$k_i^2 = k_{i1}^2 + k_{i2}^2 + \ldots + k_{in}^2 + \varepsilon < \frac{1}{M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2}$$

ausfällt, dann ist für jedes System von reellen Zahlen $d_{i\varrho}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$; $\varrho = 1, 2, \ldots, N$), die den Ungleichungen $|d_{i\varrho}| \leqq d$ genügen,

$$(25)\quad \int_B \Big[f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} d_{1\sigma}\frac{p_{1\sigma}}{\lambda_{1\sigma}}, \ldots, \sum_{\sigma=1}^{N} d_{n\sigma}\frac{p_{n\sigma}}{\lambda_{n\sigma}}\Big)\Big]^2 dt \leqq a_1 \int_B dt + k_i^2 \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\sigma=1}^{N}\Big(\frac{d_{\nu\sigma}}{\lambda_{\nu\sigma}}\Big)^2$$
$$\leqq a_2 + d^2 k_i^2 (M_1^2 + M_2^2 + \ldots + M_n^2).$$

Somit wird nach der Schwarzschen Ungleichung

$$\Big| \int f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} d_{1\sigma}\frac{p_{1\sigma}}{\lambda_{1\sigma}}, \ldots\Big) q_{i\varrho}(t)\, dt \Big| \leqq \Big\{ \int_B f_i^2\, dt \Big\}^{1/2}$$
$$\leqq d\, k_i \sqrt{M_1^2 + \ldots + M_n^2}\Big(1 + \frac{a_2}{d^2 k_i^2 (M_1^2 + \ldots + M_n^2)}\Big)^{1/2}.$$

Wegen $k_i^2 (M_1^2 + \ldots + M_n^2) < 1$ kann man also d unabhängig von i und N so groß wählen, daß die linke Seite der letzten Ungleichung kleiner als d ausfällt. Somit sind die in den $d_{i\varrho}$ stetigen $n \cdot N$ Funktionen

$$(26)\qquad D_{i\varrho} = d_{i\varrho} + \int_B f_i\Big(t, \sum_{\sigma=1}^{N} d_{1\sigma}\frac{p_{1\sigma}}{\lambda_{1\sigma}}, \ldots\Big) q_{i\varrho}(t)\, dt$$

positiv für $\qquad d_{i\varrho} = d, \quad |d_{k\sigma}| \leqq d \qquad (k, \sigma \neq i, \varrho),$

negativ für $\qquad d_{i\varrho} = -d, \quad |d_{k\sigma}| \leqq d \qquad (k, \sigma \neq i, \varrho).$

Daraus folgt, z. B. nach dem Brouwerschen Verschiebungssatze[9]), daß das Gleichungssystem $D_{i\varrho} = 0$ mindestens ein reelles Lösungssystem $d_{i\varrho}$ besitzt. Setzt man $d_{i\varrho} = \lambda_{i\varrho} c_{i\varrho}^{(N)}$ in (26) ein, so erkennt man, daß das

[9]) Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl. Math. Annalen 70, S. 161—165.

Gleichungssystem $D_{i\varrho} = 0$ identisch wird mit dem approximierenden System (6). Dieses besitzt also auch unter der Voraussetzung (24) für jede natürliche Zahl N eine Lösung. Die Besselsche Ungleichung und Abschätzung (25) liefern:

$$\sum_{\varrho=1}^{N} (\lambda_{i\varrho}\, c_{i\varrho}^{(N)})^2 = \sum_{\varrho=1}^{N} d_{i\varrho}^2 \leqq \int_B f_i\Big(t,\ \sum_{\sigma=1}^{N} c_{1\sigma}^{(N)} p_{1\sigma}(t),\ \ldots\Big)^2 dt \leqq a_2 + d^2.$$

Es sind also alle Voraussetzungen des Lemmas in § 1 erfüllt, woraus die Richtigkeit des behaupteten Satzes folgt.

Daß die Voraussetzung (24) nicht genügt, um die Eindeutigkeit der Lösung zu beweisen, ist klar. Selbst wenn alle Funktionen $f_i(s, u_1, \ldots, u_n)$ in sämtlichen Variabeln beschränkt sind, ist das System (4) im allgemeinen nicht eindeutig lösbar. Das sieht man am leichtesten folgendermaßen ein: Sei $n = 1$, $g(s, u)$ eine beschränkte Funktion, $g(s, 0) = 0$ und λ eine beliebige reelle Konstante. Dann hat die Gleichung

$$\psi(s) + \lambda \int_B K(s, t)\, g(t, \psi(t))\, dt = 0$$

gewiß die Lösung $\psi(s) \equiv 0$. Im Abschnitt II wird aber bewiesen werden, daß diese Gleichung für mindestens einen reellen Parameterwert λ_0 eine nicht identisch verschwindende Lösung besitzt, wenn der Kern gewisse Voraussetzungen erfüllt. Wählt man also die beschränkte Funktion $f(s, u) = \lambda_0 g(s, u)$, so ist die Gleichung

$$\psi(s) + \int_B K(s, t)\, f(t, \psi(t))\, dt = 0$$

gewiß nicht eindeutig lösbar.

Ist die Voraussetzung (24a) erfüllt, (24b) aber verletzt, so kann man ebenso verfahren wie im Beweise zu Satz 2. Es gibt Indizes $m_1, m_2, \ldots, m_n$, so daß

$$k_{i1}^2 + k_{i2}^2 + \ldots + k_{in}^2 < \frac{1}{\sum_{\varrho=m_1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{1\varrho}^2} + \ldots + \sum_{\varrho=m_n}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{n\varrho}^2}}$$

wird. Ebenso wie in § 1 wird dann bewiesen, daß alle Lösungen ψ_i des Systems (4) dadurch gewonnen werden, daß man zu jeder Lösung Ψ_i von (22) die Lösungen $a_{i\varrho}$ des endlichen transzendenten Gleichungssystems (23) bestimmt.

§ 3.

Anwendung auf die nichtlineare Randwertaufgabe.

Satz 4. Das beschränkte Gebiet B der x, y-Ebene und die auf seinem Rande definierte stetige Funktion $f(s)$ seien so beschaffen, daß

für sie die erste Randwertaufgabe der Potentialtheorie eindeutig lösbar ist. $G(x, y; \xi, \eta)$ sei die zu B gehörige Greensche Funktion, $F(x, y, u, u_1, u_2)$ eine für x, y in B und alle reellen Werte von u, u_1, u_2 stetige Funktion.

Dann hat die nichtlineare Differentialgleichung

$$\Delta u = F(x, y, u, u'_x, u'_y) \tag{27}$$

eine Lösung, die auf dem Rande von B die Werte $f(s)$ annimmt, wenn eine der beiden folgenden Voraussetzungen über F erfüllt ist:

Für x, y, in B und für alle reellen Werte der u, u_1, u_2 ist

α)

$$|F(x, y, u, u_1, u_2)| \leqq a + k|u| + k_1|u_1| + k_2|u_2| \tag{28a}$$

und

$$(k^2 + k_1^2 + k_2^2)(M^2 + M_1^2 + M_2^2) < 1 \tag{28b}$$

oder β)

$$[F(x, y, u, u_1, u_2) - F(x, y, v, v_1, v_2)]^2 \leqq k^2[(u-v)^2 + (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2] \tag{29a}$$

und

$$k^2(M^2 + M_1^2 + M_2^2) < 1. \tag{29b}$$

(Dabei ist

$$M^2 = \iint_B \iint_B G\ (x, y; \xi, \eta)^2\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta,$$

$$M_1^2 = \iint_B \iint_B G'_x(x, y; \xi, \eta)^2\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta,$$

$$M_2^2 = \iint_B \iint_B G'_y(x, y; \xi, \eta)^2\, dx\, dy\, d\xi\, d\eta$$

gesetzt.) Im Falle β) hat die Aufgabe eine und nur eine Lösung.

Ist Voraussetzung (28a) oder (29a) erfüllt, (28b) bzw. (29b) dagegen nicht, so ist die Anzahl der Lösungen im Falle α) nicht kleiner, im Falle β) genau gleich der Anzahl der Lösungen eines endlichen transzendenten Gleichungssystems.

Beweis: Ist $f(x, y)$ eine in B stetige Funktion, so läßt sich die Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} \Delta v &= f(x, y) && \text{in } B \\ v &= 0 && \text{auf dem Rande von } B \end{aligned} \tag{30}$$

in der Form

$$v(x, y) = -\iint_B G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{31}$$

schreiben und es ist nach bekannten Formeln

$$(31)\qquad \begin{aligned} v'_x(x, y) &= -\iint_B G'_x(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \\ v'_y(x, y) &= -\iint_B G'_y(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \end{aligned}$$

Umgekehrt folgen aus den Gleichungen (31) die Gleichungen (30). Ist $u_0(x, y)$ die Potentialfunktion, die auf dem Rande von B die Werte $f(s)$ annimmt, so ist die Randwertaufgabe (27) äquivalent mit dem System von nichtlinearen Integralgleichungen für die gesuchten Funktionen $u(x, y)$, $u_1(x, y)$, $u_2(x, y)$:

$$(32)\qquad \begin{aligned} u(x, y) &+ \iint_B G(x, y; \xi, \eta) F(\xi, \eta; u(\xi, \eta) + u_0(\xi, \eta), u_1 + u'_{0x}, \\ &\qquad u_2 + u'_{0y})\, d\xi\, d\eta = 0, \\ u_1(x, y) &+ \iint_B G'_x F\, d\xi\, d\eta = 0, \\ u_2(x, y) &+ \iint_B G'_y F\, d\xi\, d\eta = 0; \end{aligned}$$

denn $U(x, y) = u(x, y) + u_0(x, y)$ mit den Ableitungen $U'_x = u_1(x, y) + u'_{0x}(x, y)$, $U'_y = u_2 + u'_{0y}$ befriedigt die Gleichung (27) und nimmt am Rande die Werte $f(s)$ an. Nach Satz 3 und Zusatz zu Satz 1 ist das System (32) lösbar, wenn die Bedingungen (28) oder (29) erfüllt sind, in letzterem Falle eindeutig lösbar. Das endliche transzendente Gleichungssystem, das die Entscheidung über die Lösungsanzahl liefert, wenn (28b) oder (29b) nicht erfüllt ist, ist nach den Ausführungen im Beweis zu Satz 2 leicht abzuleiten.

Für einseitig beschränkte Funktionen F können die Voraussetzungen (28) noch verallgemeinert werden. Wir beschränken uns dabei auf die Randbedingungen $f(s) = 0$ am ganzen Rande, auf die die allgemeine erste Randwertaufgabe zurückgeführt werden kann, dadurch, daß man von der gesuchten Funktion die Potentialfunktion subtrahiert, die am Rande die vorgeschriebenen Randwerte annimmt. Mit Hilfe des Satzes 4 beweist man dann den

Zusatz zu Satz 4: Die Gleichung (27) hat eine am Rande verschwindende reelle Lösung, wenn eine der folgenden vier Voraussetzungen erfüllt ist:

Für x, y in B und alle reellen Werte von u_1, u_2 ist:

$\alpha)$ $\quad 0 \leqq F(x, y, u, u_1, u_2) \leqq a_1 - ku + k_1|u_1| + k_2|u_2|$ für $u \leqq 0$;

$\beta)$ $\quad 0 \geqq F(x, y, u, u_1, u_2) \geqq -a_1 - ku - k_1|u_1| - k_2|u_2|$ „ $u \geqq 0$;

$$\gamma)\begin{cases} -a_2 \leqq F(x, y, u, u_1, u_2) & ,, \quad u \geqq 0, \\ -a_2 \leqq F(x, y, u, u_1, u_2) \leqq \quad a_1 - ku + k_1|u_1| + k_2|u_2| & ,, \quad u \leqq 0; \end{cases}$$

$$\delta)\begin{cases} a_2 \geqq F(x, y, u, u_1, u_2) \geqq -a_1 - ku - k_1|u_1| - k_2|u_2| & ,, \quad u \geqq 0, \\ a_2 \geqq F(x, y, u, u_1, u_2) & ,, \quad u \leqq 0. \end{cases}$$

a_1, a_2 sind dabei beliebige positive Konstanten; die positiven Konstanten k, k_1, k_2 genügen (28b).

Beweis: Der Beweis wird unter den Voraussetzungen α) und γ) geführt, für β) und δ) verläuft er ebenso. Zum Beweise der ersten Behauptung setze man:

$$\overline{F}(x, y, u, u_1, u_2) = \begin{cases} F(x, y, u, u_1, u_2) & \text{für } u \leqq 0, \\ F(x, y, 0, u_1, u_2) & \text{für } u \geqq 0. \end{cases}$$

Dann genügt $\overline{F}$ den Voraussetzungen des Satzes 4, und es ist durchweg $\overline{F} \geqq 0$; somit gibt es eine Lösung von

$$\Delta \bar{u} = \overline{F}(x, y, \bar{u}, \bar{u}'_x, \bar{u}'_y),$$

die auf dem Rande von B verschwindet. Aus $\overline{F} \geqq 0$ folgt, wie bekannt ist, $\bar{u}(x, y) \leqq 0$ für x, y in B. Da für $u \leqq 0$ $\overline{F} = F$ ist, löst $\bar{u}(x, y)$ auch die ursprüngliche Aufgabe.

Zum Beweise der zweiten Behauptung setze man

$$\overline{F}(x, y, u, u_1, u_2) = F(x, y, u + u_0(x, y), u_1 + u'_{0x}(x, y), u_2 + u'_{0y}(x, y)) + a_2.$$

Für jede stetige Funktion $u_0(x, y) \leqq 0$ ist $\overline{F}$ eine Funktion, die der Voraussetzung α) mit anderen Konstanten genügt. Die Gleichung

$$\Delta \bar{u} = \overline{F}(x, y, \bar{u}, \bar{u}'_x, \bar{u}'_y)$$

hat also eine auf dem Rande von B verschwindende Lösung $\bar{u}(x, y)$. Ist nun $u_0(x, y)$ so gewählt, daß

$$\Delta u_0 = a_2 \quad \text{in } B,$$
$$u_0 = 0 \quad \text{am Rande von } B,$$

so löst $u(x, y) = \bar{u}(x, y) - u_0(x, y)$ die ursprüngliche Aufgabe.

Dieser Zusatz beweist, daß z. B. die erste Randwertaufgabe für die Gleichung

$$\Delta u = p(x, y, u, u'_x, u'_y)\, e^u$$

eine Lösung besitzt, wenn die für $u \leqq 0$ positive Funktion $p(x, y, u, u_1, u_2)$ in u, u_1, u_2 weniger wächst als eine lineare Funktion.

Der Satz 4 mit seinem Zusatz ist in seiner Gültigkeit natürlich nicht auf die zweidimensionale Randwertaufgabe beschränkt, sondern gilt allgemein für die n-dimensionale erste Randwertaufgabe[10]).

Schließlich sei noch bemerkt, daß die Voraussetzung (24) in Satz 3 durch analoge Bedingungen wie im Zusatz zu Satz 4 ersetzt werden kann, wenn die Kerne $K_i(s, t)$, oder einige unter ihnen in B durchweg von einerlei Vorzeichen sind.

§ 4.

Allgemeine Funktionalgleichungen.

Die bisher abgeleiteten Existenz- und Eindeutigkeitssätze gelten nicht nur für die behandelten Integral- und Differentialgleichungen, sondern auch für allgemeinere Funktionalgleichungen.

Σ bezeichne das Feld der in dem beschränkten Gebiet B definierten Funktionen $\varphi(s)$, die mit ihren stetigen Ableitungen bis zur n-ten Ordnung unter der absoluten Schranke $N > 0$ liegen. Ist dann

$$\psi(s) = S(s;\ \varphi)$$

eine für s in B und φ in Σ definierte eindeutige Funktionaltransformation, die stetig ist von der n-ten Ordnung[11]) und Σ in einen kompakten Teil Σ' von sich überführt (d. h. jede beschränkte Folge aus Σ' enthält eine nebst ihren Ableitungen bis zur n-ten Ordnung konvergente Teilfolge), so hat die Gleichung

$$\psi(s) = S(s;\ \psi) \tag{33}$$

mindestens eine Lösung $\psi(s)$ in Σ.

---

[10]) Vgl. A. Hammerstein, Die erste Randwertaufgabe für nichtlineare Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Sitzungsber. d. Berl. Math. Ges., XXX. Jahrg. — Der Existenzsatz, der dort für die eindimensionale Randwertaufgabe $y'' = f(x, y, y')$, $y(0) = y(\pi) = 0$ bewiesen wird, fordert die Beschränktheit von $f(x, y, y')$ in y', während das nach unserem Satz 4 nicht erforderlich ist. Für Funktionen mit beschränkten Ableitungen wird dort nur die Eindeutigkeit der Lösung bewiesen, während unser Satz zugleich die Existenz beweist.

[11]) D. h. zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta = \delta(\varepsilon)$, so daß für

$$\operatorname*{Max}_{s \text{ in } B} (|\varphi_1 - \varphi_2| + |\varphi_1' - \varphi_2'| + \ldots + |\varphi_1^{(n)} - \varphi_2^{(n)}|) < \delta$$

die Differenz

$$|S(s;\ \varphi_1) - S(s;\ \varphi_2)| < \varepsilon$$

wird für alle s in B. Das Symbol $\varphi^{(i)}$ steht an Stelle aller Ableitungen i-ter Ordnung.

Dieser Fixpunktsatz rührt in dieser Fassung von Caccioppoli her und läßt sich leicht mit Hilfe des analogen für n-dimensionale Räume gültigen Brouwerschen Fixpunktsatzes beweisen[12]).

Mit Hilfe dieses Satzes lassen sich die bisher abgeleiteten Existenz- und Eindeutigkeitssätze weitgehend verallgemeinern:

Satz 5: Sei $\psi(s) = S(s; \varphi)$ eine für s in B und φ in Σ definierte eindeutige Funktionaltransformation, die stetig ist in dem Sinne, daß, wenn $\varphi_i(s)$ eine Folge ist, die gleichmäßig in B gegen $\varphi(s)$ konvergiert, die Funktionen $\psi_i(s) = S(s; \varphi_i)$ mit ihren Ableitungen $\psi_i^{(1)}(s), \ldots, \psi_i^{(n)}(s)$ gleichmäßig gegen $\psi(s) = S(s; \varphi)$, bzw. $\psi^{(1)}(s), \ldots, \psi^{(n)}(s)$ konvergieren. Ferner seien für s in B

$$|\psi^{(\nu)}(s)| \leqq A + M \cdot \operatorname*{Max}_{s \text{ in } B} |\varphi(s)| \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n) \tag{34}$$

und die $\psi, \psi^{(1)}, \ldots, \psi^{(n)}$ gleichgradig stetig für gleichmäßig beschränkte φ. Dann hat die Funktionalgleichung

$$u(s) = S[s; F(s, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})] \tag{35}$$

eine in Σ gelegene Lösung $u(s)$, wenn die Funktion $F(s, u, u_1, \ldots, u_n)$ für s in B und alle reellen Werte der $u, u_1, \ldots, u_n$ stetig ist und

$$|F(s, u, u_1, \ldots, u_n)| \leqq a + k|u| + k_1|u_1| + \ldots + k_n|u_n| \tag{36a}$$

ist, wobei die positiven Konstanten $M, k, k_1, \ldots, k_n$ der Bedingung

$$(k + k_1 + \ldots + k_n) M = q < 1 \tag{36b}$$

genügen[13]).

Beweis: Die Transformation

$$\psi(s) = S^*(s; \varphi) = S[s, F(s, \varphi, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})]$$

ist stetig in dem Sinne, daß, wenn $\varphi_i(s), \varphi_i^{(1)}(s), \ldots, \varphi_i^{(n)}(s)$ gleichmäßig in B gegen $\varphi(s), \varphi^{(1)}(s), \ldots, \varphi^{(n)}(s)$ konvergieren, die Funktionen

$$\psi_i(s) = S^*(s; \varphi_i)$$

---

[12]) Caccioppoli, Un teorema generale sull' existenza di elementi uniti in una trasformazione funzionale. Rend. Acc. Lincei (6) vol. 11, S. 794 u. f. und Sugli elementi uniti delle transformazioni funzionali. Ebenda vol. 13, S. 498 u. f.

[13]) Vgl. Caccioppoli, l. c. Dort wird dieser Satz bewiesen, jedoch nur für Funktionen, die *schwächer* wachsen als lineare, für die also

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{F(s, u, u_1, \ldots, u_n)}{\omega} = 0,$$

wo $\omega = \sqrt{u^1 + u_1^2 + \ldots + u_n^2}$ ist.

gleichmäßig mit ihren Ableitungen $\psi_i^{(1)}, \ldots, \psi_i^{(n)}$ gegen $\psi(s) = S^*(s; \varphi)$ bzw. $\psi^{(1)}(s), \ldots, \psi^{(n)}(s)$ konvergieren. Ferner ist für

$$|\varphi(s)| \leqq N, |\varphi^{(1)}| \leqq N, \ldots, |\varphi^{(n)}| \leqq N$$

nach (34) und (36)

$$|\psi^{(\nu)}(s)| \leqq A + M \operatorname*{Max}_{s \text{ in } B} |F(s, \varphi, \varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(n)})|$$

$$\leqq A + M[a + N(k + k_1 + \ldots + k_n)] \leqq A_1 + qN \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Für genügend große N ist also $|\psi| < N$, $|\psi^{(1)}| < N, \ldots, |\psi^{(n)}| < N$. Außerdem ist jede Folge $\psi_i, \psi_i^{(1)}, \ldots, \psi_i^{(n)}$ gleichgradig stetig nach Voraussetzung, also wegen der gleichmäßigen Beschränktheit kompakt. Die Transformation S^* erfüllt somit die Voraussetzungen des Fixpunktsatzes, es gibt also eine in Σ gelegene Lösung der Gleichung

$$u(s) = S^*(s; u) = S(s; F(s, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})).$$

Ist insbesondere $S(s; \varphi) = A(s) + T(s; \varphi)$, wo $T(s; \varphi)$ homogen linear in φ ist, so gelingt es auch, den Eindeutigkeitssatz zu übertragen. Dieser Fall ist der für die Anwendungen allein wichtige.

Satz 6. Ist das in Satz 5 definierte Funktional

$$S(s; \varphi) = A(s) + T(s; \varphi),$$

wo $A(s)$ von φ unabhängig ist und $T(s; \varphi)$ homogen linear in φ ist, so hat die Gleichung

$$u(s) = S[s; F(s, u, u^{(1)}, \ldots, u^{(n)})] \tag{35}$$

genau eine Lösung in Σ, wenn $F(s, u, u_1, \ldots, u_n)$ die Lipschitzbedingungen

$$|F(s, u, u_1, \ldots, u_n) - F(s, v, v_1, \ldots, v_n)| \leqq k|u - v| + k_1|u_1 - v_1| + \ldots + k_n|u_n - v_n| \tag{37a}$$

erfüllt und die positiven Konstanten k_ν der Bedingung

$$(k + k_1 + \ldots + k_n) M = q < 1 \tag{37b}$$

genügen.

Beweis: Aus der Voraussetzung (37a) ergibt sich sofort, daß

$$|F(s, u, u_1, \ldots, u_n)| \leqq a + k|u| + k_1|u_1| + \ldots + k_n|u_n|$$

ist mit der Konstanten $a = \operatorname*{Max}_{s \text{ in } B} |F(s, 0, 0, \ldots, 0)|$. Wegen (37b) genügt also F den Voraussetzungen des Satzes 5, die Gleichung (35) hat also mindestens eine Lösung $u_1(s)$ in Σ. Sei $u_2(s)$ eine weitere Lösung in Σ, dann ist

$$\begin{aligned} u_2(s) - u_1(s) &= T[s; F(s, u_2, u_2^{(1)}, \ldots, u_2^{(n)})] \\ &\quad - T[s; F(s, u_1, u_1^{(1)}, \ldots, u_1^{(n)})] \\ &= T[s; F(s, u_2, \ldots) - F(s, u_1, \ldots)]. \end{aligned}$$