Werk

Titel: Über gekoppelte Axiomensysteme in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen.

Autor: Klein, F.

Jahr: 1933

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0037|log13

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Über gekoppelte Axiomensysteme in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen.

Von

Fritz Klein-Barmen in Wuppertal.

Einleitung.

In verschiedenen Arbeiten[1]) habe ich einige Probleme aus dem Gebiet der abstrakten Verknüpfungen behandelt; dabei verstehe ich unter einer abstrakten Verknüpfung eine solche, bei der von jeder inhaltlichen Bedeutung der verknüpften Elemente und der verknüpfenden Operationen abgesehen wird. Hiernach sind z. B. die Theorie der abstrakten Gruppen und die moderne abstrakte Algebra Zweige der angegebenen Disziplin.

Gegenstand der früheren Arbeiten wie auch der vorliegenden ist die Untersuchung von Axiomensystemen, die die formal darstellbaren Eigenschaften einiger im Gebiet der gesamten Mathematik bedeutungsvollen Verknüpfungen zum Ausdruck bringen. Diese Verknüpfungen treten entweder paarweise, und dann durch ein distributives Gesetz miteinander verbunden, oder einzeln auf. Als wichtige Realisierungen der paarweise auftretenden Verknüpfungen sind anzusehen die Disjunktion $\mathfrak{D}(a, b)$ und die Konjunktion $\mathfrak{K}(a, b)$ der Aussagen a und b, die Vereinigung $V(a, b)$ und der Durchschnitt $D(a, b)$ der Mengen a und b, das Maximum $\max(a, b)$ und das Minimum $\min(a, b)$ der reellen Zahlen a und b, das kleinste gemeinschaftliche Vielfache $v(a, b)$ und der größte gemeinschaftliche Teiler $t(a, b)$ der natürlichen Zahlen a und b. Wichtige Realisierungen der an zweiter Stelle genannten Verknüpfungen stellen die gewöhnliche Addition und Multiplikation dar, wobei die verknüpften Elemente natür-

[1]) Einige distributive Systeme in Mathematik und Logik, Jahresber. d. D. Math. Ver. **38** (1929), S. 35—40; Zur Theorie der abstrakten Verknüpfungen, Math. Ann. **105** (1931), S. 308—323 (Abkürzung: A. V. I); Über einen Zerlegungssatz in der Theorie der abstrakten Verknüpfungen, Math. Ann. **106** (1932), S. 114—130 (Abkürzung: A. V. II).

Bei dieser Gelegenheit spreche ich Herrn A. Schmidt in Göttingen, der das Manuskript der vorliegenden Arbeit vor der Drucklegung eingesehen hat, für eine Reihe von Abänderungsvorschlägen meinen besten Dank aus.

liche Zahlen, aber auch gewisse algebraische Bereiche, z. B. bei der Multiplikation Ideale, sein können[2]).

Insbesondere soll im folgenden gezeigt werden, daß die Axiomensysteme, die zur Erklärung der eben beschriebenen Verknüpfungen dienen, zu je zweien *gekoppelt* sind. Dabei nenne ich zwei Axiomensysteme A und B gekoppelt, wenn in jeder Menge, deren Elemente sich dem System A gemäß verknüpfen lassen, dem System B genügende Verknüpfungen konstruiert werden können und umgekehrt. Ebenfalls mögen derartig voneinander abhängige Verknüpfungen gekoppelt heißen. Eine bedeutsame Rolle bei der Lösung dieses Äquivalenzproblems spielt der bereits in A. V. II aufgestellte Zerlegungssatz, der den zugrunde gelegten Axiomensystemen entsprechend in drei verschiedenen Fassungen auftritt. Es ist bemerkenswert, daß dieser Satz das von allen materialen Bestandteilen befreite formal-logische Gerüst des Hauptsatzes der elementaren Zahlen- und Idealtheorie darstellt, da er bei passender inhaltlicher Deutung der Elemente und Verknüpfungen in den letzteren übergeht[3]).

§ 1.

Allgemeine Bemerkungen über zwei- und dreigliedrige Beziehungen.

1. Gleichheit und Ungleichheit. Daß das Element a gleich dem Element b bzw. ungleich dem Element b ist[4]), werde durch $a = b$ bzw. $a \neq b$ ausgedrückt. Axiome:

I, 1. Aus $a = b$ und $b = c$ folgt $a = c$.

---

[2]) Vgl. A. V. I, § 2 und A. V. II, § 1.

[3]) Schon Dedekind ist bestrebt, bei der Theorie der Moduln und Ideale eine Trennung zwischen dem formalen Apparat und dem inhaltlichen Kern herbeizuführen; vgl. Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl. (1894), Suppl. XI, S. 493 ff. (Abk.: Z. XI); Dedekind, Über eine Erweiterung des Symbols (a, b) in der Theorie der Moduln, Ges. Werke II (1931), Abh. XXVI, S. 59—85 (Abk.: W. XXVI); Derselbe, Über Zerlegungen von Zahlen durch ihre größten gemeinsamen Teiler, Ges. Werke II, Abh. XXVIII, S. 103—147 (Abk.: W. XXVIII); Derselbe, Über die von drei Moduln erzeugte Dualgruppe, Ges. Werke II, Abh. XXX, S. 236—271 (Abk.: W. XXX). Von neueren Arbeiten sei erwähnt: W. Krull, Zur Theorie der zweiseitigen Ideale in nichtkommutativen Bereichen, Math. Zeitschr. 28 (1928), S. 481—503.

[4]) Über das logische Verhältnis zwischen Identität und Verschiedenheit einerseits, Gleichheit und Ungleichheit andererseits ist folgendes zu bemerken. Die zuerst genannten Begriffe, ohne die kein formaler Apparat möglich ist und die darum selbst nicht rein formaler Natur sind, können in der Hauptsache nur inhaltlich, anschaulich, intuitiv eingeführt werden. Im Gegensatz dazu sind die an zweiter Stelle genannten Begriffe durchaus formal konstruierte. Die trotz aller Wesensverschiedenheit bestehende Verwandtschaft zwischen den zuerst und zuletzt genannten Begriffen beruht darauf, daß sich Identität und Verschiedenheit in ihren

I, 2. In bezug auf zwei beliebige[5]) Elemente a und b gilt genau eine der Beziehungen $a = b$ und $a \neq b$.

I, 3. Für jedes Element a gilt $a = a$.

I, 4. Aus $a = b$ folgt $b = a$.

2. Zweigliedrige Beziehungen. Daß das Element a zu dem Element b in der Beziehung R steht, werde durch aRb ausgedrückt. *Bereich* der Beziehung R heiße die Menge der geordneten Paare (a, b), für die aRb gilt. Axiome[6]):

II, 1. Aus $a = a'$ und aRb folgt $a'Rb$.

II, 2. Aus $b = b'$ und aRb folgt aRb'.

Zwei zweigliedrige Beziehungen R und S sind identisch, wenn sie in ihren Bereichen übereinstimmen.

3. Verknüpfungen. Das Ergebnis der Verknüpfung der Elemente a und b einer Menge M werde mit $a \circ b$ bezeichnet. Daß das Verknüpfungsergebnis wieder der Menge M angehört, werde durch

$$a \circ b = c \tag{1}$$

ausgedrückt. Zur Vermeidung von Mißverständnissen werde darauf hingewiesen, daß das Element c auf Grund der Eigenschaften der Gleichheitsbeziehung *eindeutig* durch (1) bestimmt ist. *Bereich* der Verknüpfung $\circ$ heiße die Menge der geordneten Tripel $(a, b; c)$, für die (1) gilt. Axiome:

III, 1. Aus $a = a'$ folgt $a \circ b = a' \circ b$.

III, 2. Aus $b = b'$ folgt $a \circ b = a \circ b'$.

Zwei Verknüpfungen $\cup$ und $\frown$ sind identisch, wenn sie in ihren Bereichen übereinstimmen.

4. Wir geben noch eine spezielle zweigliedrige Beziehung an, für die also die Axiome I, 1 bis I, 4 und II, 1 bis II, 2 verbindlich sind; die Aufstellung spezieller Verknüpfungen, für die entsprechend die Axiome I, 1 bis I, 4 und III, 1 bis III, 2 verbindlich sind, macht den Hauptteil der Arbeit aus.

---

formalen Eigenschaften vollständig wie Gleichheit und Ungleichheit verhalten. Das macht auch erklärlich, daß vielfach nicht zwischen Identität und Gleichheit bzw. Verschiedenheit und Ungleichheit zu unterschieden werden braucht.

Zu beachten ist ferner, daß die Gleichheit eine Vorzugsstellung vor den übrigen formal konstruierten Beziehungen einnimmt, insofern nämlich die letzteren erst relativ zur Gleichheit definiert werden, wie die Axiome II, 1 und II, 2, III, 1 und III, 2 zeigen. So hat auch die Eindeutigkeit einer Zuordnung erst Sinn in bezug auf eine vorgegebene Gleichheitsbeziehung. Vgl. A. V. I, § 1.

[5]) Ist von „beliebigen" Elementen die Rede, so können sich die Elementsymbole sowohl auf dasselbe als auch auf verschiedene Elemente beziehen.

[6]) Ersichtlich genügen auch die Beziehungen der Gleichheit und Ungleichheit den Axiomen II, 1 und II, 2, so daß also kein Widerspruch mit den Axiomen I, 1 bis I, 4 vorliegt.

Beziehung zwischen Teil und Ganzem. Daß b Teil von a ist, werde durch $a \succ b$ ausgedrückt. Axiome:

IV, 1. Aus $a \succ b$ und $b \succ c$ folgt $a \succ c$.

IV, 2. Aus $a \succ b$, $b \succ a$ folgt $a = b$ und umgekehrt.

§ 2.

Die A-Menge.

Die Elemente a, b, ... einer Menge M seien einer Gleichheitsbeziehung und einer Verknüpfung fähig. Das Ergebnis der Verknüpfung der Elemente a und b werde mit ab bezeichnet. Der näheren Beschreibung der Verknüpfung dient das folgende System von Axiomen[7]), Lehrsätzen und Erklärungen.

I. Sind a und b zwei beliebige Elemente, so gibt es ein Element c, so daß gilt $ab = c$.

II. Für zwei beliebige Elemente a und b gilt $ab = ba$.

III. Für drei beliebige Elemente a, b und c gilt

$$(ab)c = a(bc).$$

IV. Aus $ab = ab'$ folgt $b = b'$.

V. Es gibt ein Element e, so daß für jedes a gilt[8])

$$ae = a.$$

VI. Aus $ab = e$ folgt $a = b = e$.

VII. Es gibt nur endlich viele Elemente x und y, die bei festem a der Gleichung $xy = a$ genügen.

Erklärung. Das durch II, IV und V eindeutig bestimmte Element e heiße *ausgezeichnetes* Element oder *Einheitselement*.

Hinsichtlich der Unabhängigkeit der Axiome I bis VII gilt folgendes:

IV ist von allen übrigen Axiomen unabhängig.

Beweis: M sei eine endliche Menge reeller Zahlen. ab bedeute $\max(a, b)$. Dann sind die Axiome I bis III und V bis VII erfüllt; die kleinste Zahl der Menge ist das ausgezeichnete Element. IV ist dagegen nicht in Kraft, denn aus

$$\max(a, b) = \max(a, b')$$

folgt nicht notwendigerweise $b = b'$.

---

[7]) Axiome werden auch weiterhin durch römische Ziffern kenntlich gemacht.

[8]) Es gibt also zu jedem a mindestens ein b, z. B. $b = ae$, so daß gilt $a = b$. Dann folgt aber in § 1 das Reflexivitätsgesetz der Gleichheit (I, 3) aus den Gesetzen der Transitivität (I, 1) und Symmetrie (I, 4).

V und VI sind von allen übrigen Axiomen unabhängig.

Beweis: M sei die Menge der natürlichen Zahlen, die größer als 1 sind; ab bedeute das gewöhnliche Produkt.

VI ist von allen übrigen Axiomen unabhängig.

Beweis: M sei eine endliche abelsche Gruppe mit mehr als einem Element, z. B. ein Restklassensystem; ab bedeute die Verknüpfung der Elemente a und b in der Gruppe.

VII ist von allen übrigen Axiomen unabhängig.

Beweis: M sei die Menge der reellen Zahlen r, für die im Sinn der Arithmetik $0 < r \leqq 1$ gilt. ab bedeute das gewöhnliche Produkt von a und b. Dann sind die Axiome I bis VI erfüllt; 1 ist das ausgezeichnete Element. VII ist dagegen nicht in Kraft, denn für $a < 1$ hat die Gleichung $xy = a$ unendlich viele Lösungen (x, y), da für jedes x mit $a < x < 1$ stets ein der Gleichung genügendes y vorhanden ist.

Erklärung. Die Gleichung $a = bc$ sei mit $a > b$, also auch mit $a > c$ gleichbedeutend. a heiße *Oberelement* von b und c, jedes der letzteren *Unterelement* von a.

Die Beziehung $>$ ist vom Typus der zwischen Teil und Ganzem bestehenden Relation[9]); für jedes a gilt insbesondere $a > a$ und $a > e$. Darüber hinaus kommen ihr die in den nachstehenden Sätzen ausgesprochenen Eigenschaften zu.

Satz 1. Sind a und b zwei beliebige Elemente, so gibt es ein Element c, z. B. $c = ab$, so daß gilt $c > a$ und $c > b$; es gilt also stets

$$ab > a, \quad ab > b.$$

Satz 2. Aus $a_1 > b_1$ und $a_2 > b_2$ folgt

$$a_1 a_2 > b_1 b_2.$$

Satz 3. Ist $a > b$ und $a \mp b$, so hat b weniger Unterelemente als a.

Beweis: Jedes Unterelement von b ist auch Unterelement von a. Umgekehrt ist a nicht Unterelement von b.

---

[9]) Daß z. B. das Axiom IV, 2 (§ 1) gilt, ergibt sich so:

Aus

$$a > b, \text{ d. h. } a = bx$$

und

$$b > a, \text{ d. h. } b = ay$$

folgt

$$a = axy,$$

also nach IV, V und VI

$$xy = e, \quad x = y = e, \quad a = b.$$

Anmerkung. Erwähnung verdient die nachstehende, hier aber nicht weiter benötigte Folgerung: Ist $a \neq e$ und b beliebig, so hat b weniger Unterelemente als ab. Wegen $ab > b$ und $ab \neq b$ sind nämlich die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt.

Satz 4. Ist $a \neq e$, so gibt es mindestens ein von e verschiedenes Unterelement p von a, das genau zwei Unterelemente, nämlich e und p, aufweist.

Beweis: Unter allen von e verschiedenen Unterelementen von a sei p eines mit einem Minimum von Unterelementen. Wegen VII gibt es derartige Elemente. Hätte nun p mehr als zwei Unterelemente, so gäbe es ein von e und p verschiedenes Unterelement von p, das Unterelement von a wäre und nach Satz 3 weniger Unterelemente als p hätte.

Erklärung. Hat für $a \neq e$ die Gleichung $xy = a$ nur die sicher vorhandene Lösung $x = e$, $y = a$ bzw. $x = a$, $y = e$, d. h. besitzt a nur die Unterelemente e und a, so heiße a *Primelement*.

Der Satz 4 besagt dann, daß jedes von e verschiedene a mindestens ein Primelement als Unterelement hat. Primelemente sind also vorhanden, sobald die Anzahl der Elemente von M größer als 1 ist.

Satz 5. Für jedes von e verschiedene a existiert mindestens eine Darstellung von der Form

$$a = p_1 \cdots p_n,$$

wo die Elemente $p_1, \ldots, p_n$ Primelemente sind.

Beweis: Nach Satz 4 und IV gilt

$$a = p_1 a_1, \; a \neq a_1.$$

Ist $a_1 \neq e$, so verfährt man mit a_1 entsprechend. Das damit eingeleitete Verfahren kommt wegen Satz 3 nach einer endlichen Anzahl von Schritten zum Abschluß.

Erklärung. Hat das Gleichungssystem

$$a = xy, \quad b = xz$$

nur die sicher vorhandene Lösung

$$x = e, \quad y = a, \quad z = b,$$

d. h. ist e das einzige Element, das sowohl Unterelement von a als auch von b ist, so heiße a *fremd* zu b, also auch b fremd zu a.

e ist zu jedem Element fremd. Ist p Primelement und a beliebig, so gilt entweder $a > p$, oder a und p sind fremd zueinander. Zwei verschiedene Primelemente sind fremd zueinander.

VIII. Ist ab Oberelement von c, und ist c zu einem der Elemente a und b fremd, so ist c Unterelement des anderen.

Dieses Axiom ist von allen vorhergehenden unabhängig.

Beweis: Es sei g eine von 1 verschiedene natürliche Zahl. Die Menge M bestehe aus 1 und allen Potenzen von g mit natürlichen Exponenten, mit Ausnahme von g selbst. $a\,b$ bedeute das gewöhnliche Produkt von a und b. Bei dieser Interpretation sind die Axiome I bis VII erfüllt; $1\cdot$ ist das ausgezeichnete Element. VIII ist aber nicht durchweg in Kraft. Es sei nämlich

$$a = g^2, \quad b = g^4, \quad c = g^3.$$

Dann gilt $a\,b = c^2$, d. h. $a\,b \succ c$; ferner hat das Gleichungssystem

$$a = x\,y, \quad c = x\,z$$

die einzige Lösung

$$x = 1, \quad y = a, \quad z = c,$$

so daß c fremd zu a ist. Es ist aber nicht $b \succ c$.

Die Axiome I bis VIII sind miteinander verträglich.

Beweis: M sei die Menge der natürlichen Zahlen mit der gewöhnlichen Multiplikation als Verknüpfung.

Erklärung. Eine Menge mit einer den Axiomen I bis VIII genügenden Elementverknüpfung heiße A-Menge.

Satz 6. Ist a fremd zu b und fremd zu c, so ist a auch fremd zu $b\,c$.

Beweis: Es sei a nicht fremd zu bc. Dann gibt es ein Element x, so daß gilt

$$a \succ x, \quad b\,c \succ x, \quad x \neq e. \tag{2}$$

Nach Satz 4 gibt es ein Primelement p, das Unterelement von x ist, so daß also stattfindet

$$a \succ p, \quad b\,c \succ p.$$

Nun gilt entweder $b \succ p$, oder b und p sind fremd zueinander. Im ersten Fall wäre p gemeinsames Unterelement von a und b und im zweiten Fall nach VIII gemeinsames Unterelement von a und c; beides verstößt gegen die Voraussetzung [10]).

Satz 7. Sind $p, p_1, \ldots, p_m$ Primelemente und gilt

$$p_1 \cdots p_m \succ p,$$

so ist p gleich mindestens einem p_μ.

Beweis: Es sei $p \neq p_m$, also p fremd zu p_m. Nach VIII folgt

$$p_1 \cdots p_{m-1} \succ p.$$

[10]) Ohne Verwendung des Begriffs des Primelements läßt sich (2) so widerlegen: Entweder ist b fremd zu x, oder b und x haben ein von e verschiedenes gemeinsames Unterelement. Im ersten Fall folgt $c \succ x$, also c nicht fremd zu a; im zweiten Fall ist b nicht fremd zu a. Beides widerspricht der Voraussetzung.

Ist dann $p \neq p_{m-1}$, so folgt weiter

$$p_1 \cdots p_{m-2} \succ p.$$

Das Schlußverfahren bricht dadurch ab, daß sich einmal $p = p_u$ ergibt.

Satz 8. Sind $p_1, \ldots, p_m$; $q_1, \ldots, q_n$ Primelemente und gilt

$$p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_n,$$

so stimmt die Gesamtheit der p_u mit der Gesamtheit der q_v überein.

Beweis: Nach Satz 7 ist p_m gleich mindestens einem q_v; es sei etwa $p_m = q_n$. Wegen IV folgt

$$p_1 \cdots p_{m-1} = q_1 \cdots q_{n-1},$$

so daß entsprechend weiter geschlossen werden kann.

Die Vereinigung der Sätze 5 und 8 ergibt den für die Elemente einer A-Menge geltenden Zerlegungssatz, nämlich

Satz 9. Für jedes von e verschiedene a gilt

$$a = p_1^{\delta_1} \cdots p_n^{\delta_n}, \tag{3}$$

wobei $p_1, \ldots, p_n$ verschiedene Primelemente, $\delta_1, \ldots, \delta_n$ natürliche Zahlen sind und p^δ angibt, daß p genau δ-mal mit sich selbst verknüpft werden soll; diese Darstellung — sie möge als *kanonische* bezeichnet werden — ist eindeutig, wenn von der Reihenfolge der Elemente abgesehen wird.

Satz 10. Für ein Element a mit der kanonischen Darstellung (3) durchläuft der Ausdruck

$$p_1^{\varepsilon_1} \cdots p_n^{\varepsilon_n} \tag{4}$$

die Gesamtheit aller Unterelemente, wenn unabhängig voneinander jedes ε_v die zugehörige Reihe $0, 1, \ldots, \delta_v$ durchläuft, wobei $p_v^0 = e$ zu setzen ist. Die Anzahl aller Unterelemente von a ist somit $\prod_{v=1}^{n} (\delta_v + 1)$.

Beweis: Jedes Element (4) ist Unterelement von a. Umgekehrt ist jedes von e verschiedene Unterelement von a in der Form (4) enthalten. Wäre letzteres nämlich nicht der Fall für ein Unterelement u, so müßte u entweder ein nicht der Reihe $p_1, \ldots, p_n$ angehörendes Primelement als Unterelement besitzen oder aber ein solches, etwa p_v, das in einer höheren als der δ_v-ten Potenz vorhanden wäre. Beides widerspricht der Eindeutigkeit der kanonischen Darstellung von a.

Bei geeigneter Interpretation gilt der Satz auch für $a = e$.

Satz 11. Ist mindestens eins der Elemente a und b von e verschieden, und stellt

$$p_1, \ldots, p_m$$

die Gesamtheit der Primelemente dar, deren jedes Unterelement von mindestens einem der Elemente a und b ist, gilt demgemäß

$$a = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m} \qquad (\alpha_\mu \geqq 0),$$

$$b = p_1^{\beta_1} \dots p_m^{\beta_m} \qquad (\beta_\mu \geqq 0),$$

so findet statt

$$a\,b = p_1^{\alpha_1 + \beta_1} \dots p_m^{\alpha_m + \beta_m}.$$

Bei geeigneter Interpretation gilt der Satz auch für $a = b = e$.

Satz 12. Eine A-Menge besteht entweder aus einem einzigen oder aus unendlich vielen Elementen, und zwar sind beide Möglichkeiten realisiert.

Beweis:. α) Die aus der Zahl 1 bestehende Menge M stellt eine A-Menge dar, wenn die gewöhnliche Multiplikation als Verknüpfungsvorschrift genommen wird.

β) Die Anzahl der Elemente von M sei endlich, etwa gleich n mit $n > 1$; $a_1, \dots, a_n$ seien die verschiedenen Elemente. Das Element $a_1 \dots a_n$ gehört der Menge an; die Bezeichnung kann so gewählt werden, daß gilt

$$a_1 \dots a_n = a_n.$$

Daraus folgt nach V und IV

$$a_1 \dots a_{n-1} = e,$$

also nach VI

$$a_1 = \dots = a_{n-1} = e.$$

Daß auch $a_n = e$ ist, ergibt sich so: Entweder gilt

$$a_n a_n = a_n$$

oder

$$a_n a_n = e.$$

Jede dieser Gleichungen zieht aber $a_n = e$ nach sich.

§ 3.

Die B-Menge.

Wie in § 2 seien die Elemente der zugrunde gelegten Menge M einer Gleichheitsbeziehung und einer Verknüpfung fähig. Das Ergebnis der Verknüpfung der Elemente a und b werde mit $a \circ b$ bezeichnet. Der näheren Beschreibung der Verknüpfung dient das folgende System von Axiomen, Lehrsätzen und Erklärungen.

I. Sind a und b zwei beliebige Elemente, so gibt es ein Element c, so daß gilt

$$a \circ b = c.$$

II. Für zwei beliebige Elemente a und b gilt

$$a \circ b = b \circ a.$$

III. Für drei beliebige Elemente a, b und c gilt

$$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c).$$

IV. Für jedes Element a gilt

$$a \circ a = a.$$

V. Es gibt ein Element e, so daß für jedes a gilt

$$a \circ e = a.$$

VI. Es gibt nur endlich viele Elemente x und y, die bei festem a der Gleichung $x \circ y = a$ genügen.

Erklärung. Das durch II und V eindeutig bestimmte Element e heiße *ausgezeichnetes* Element oder *Einheitselement.*

Hinsichtlich der Unabhängigkeit der Axiome I bis VI gilt folgendes:

IV ist von allen übrigen Axiomen unabhängig.

Beweis: M sei die Menge der natürlichen Zahlen. $a \circ b$ bedeute das gewöhnliche Produkt von a und b, so daß 1 das ausgezeichnete Element ist.

V ist von allen übrigen Axiomen unabhängig.

Beweis: M sei die Menge der von 1 verschiedenen Teiler einer von 1 verschiedenen natürlichen Zahl. $a \circ b$ bedeute $v(a, b)$.

VI ist von allen übrigen Axiomen unabhängig.

Beweis: Es sei ϱ eine feste reelle Zahl. M sei die Menge der reellen Zahlen r, für die im Sinn der Arithmetik gilt $r \geqq \varrho$. Unter $a \circ b$ werde $\max(a, b)$ verstanden, so daß ϱ das ausgezeichnete Element ist.

Erklärung. Die Gleichung $a = b \circ c$ sei mit $a \succ b$, also auch mit $a \succ c$ gleichbedeutend[11]). a heiße *Oberelement* von b und c, jedes der letzteren *Unterelement* von a.

Die Beziehung $\succ$ ist vom Typus der zwischen Teil und Ganzem bestehenden Relation[12]); für jedes a gilt insbesondere $a \succ a$ und $a \succ e$. Darüber hinaus kommen ihr die in den nachstehenden Sätzen ausgesprochenen Eigenschaften zu.

Satz 1. Sind a und b zwei beliebige Elemente, so gibt es ein Element c, z. B. $c = a \circ b$, so daß gilt $c \succ a$ und $c \succ b$; es gilt also stets

$$a \circ b \succ a,\ a \circ b \succ b.$$

---

[11]) An Stelle der Definitionsgleichung $a = b \circ c$ kann auch wie in A. V. II, § 1 die formal einfachere $a = a \circ b$ genommen werden.

[12]) Daß z. B. das Axiom IV, 2 (§ 1) gilt, ergibt sich so: aus

$$a \succ b, \text{ d. h. } a = b \circ x$$

und

$$b \succ a, \text{ d. h. } b = a \circ y$$

folgt nach IV

$$a \circ b = b \circ x = a,\ a \circ b = a \circ y = b.$$

Satz 2. Aus $a_1 \succ b_1$ und $a_2 \succ b_2$ folgt

$$a_1 \circ a_2 \succ b_1 \circ b_2;$$

insbesondere folgt aus $a \succ b$ und $a \succ c$ stets

$$a \succ b \circ c.$$

Satz 3. Ist $a \succ b$ und $a \neq b$, so hat b weniger Unterelemente als a.

Beweis: Vgl. § 2, Satz 3.

Satz 4. Ist $a \neq e$, so gibt es mindestens ein von e verschiedenes Unterelement p von a, das genau zwei Unterelemente aufweist, nämlich e und p.

Beweis: Vgl. § 2, Satz 4.

Erklärung. Hat für $a \neq e$ die Gleichung $x \circ y = a$ nur die sicher vorhandene Lösung $x = e$, $y = a$ bzw. $x = a$, $y = e$, d. h. besitzt a nur die Unterelemente e und a, so heiße a *Primelement.*

Der Satz 4 besagt dann, daß jedes von e verschiedene a mindestens ein Primelement als Unterelement hat.

Zu dem Satz 5 des § 2, der wesentlich von dem dortigen Eindeutigkeitsaxiom IV abhängt, gibt es kein Analogon.

Erklärung. Hat das Gleichungssystem

$$a = x \circ y, \quad b = x \circ z$$

nur die sicher vorhandene Lösung

$$x = e, \quad y = a, \quad z = b,$$

d. h. ist e das einzige Element, das sowohl Unterelement von a als auch von b ist, so heiße a *fremd* zu b, also auch b fremd zu a.

e ist zu jedem Element fremd. Ist p Primelement und a beliebig, so gilt entweder $a \succ p$, oder a und p sind fremd zueinander. Zwei verschiedene Primelemente sind fremd zueinander.

VII. Ist $a \circ b$ Oberelement von c, und ist c zu einem der Elemente a und b fremd, so ist c Unterelement des anderen.

Dieses Axiom ist von allen vorhergehenden unabhängig.

Beweis: p, q und r seien verschiedene Primzahlen. M bestehe aus den im Sinn der Arithmetik gebildeten Zahlen

$$a = pq, \quad b = pr, \quad c = qr, \quad d = pqr$$

und dem ausgezeichneten Element $e = 1$. Unter $x \circ y$ werde $v(x, y)$ verstanden. Dann sind die Axiome I bis VI in Geltung; $x \succ y$ besagt, daß x Vielfaches von y ist. VII ist aber nicht durchweg in Kraft, denn obwohl

$$a \circ b \succ c$$

gilt, ist c sowohl fremd zu a als auch fremd zu b.

Der Unabhängigkeitsbeweis kann auch mit der etwas komplizierter gebauten Menge geführt werden, die im Anschluß an Satz 5 Verwendung

findet. Die Feststellung, daß bereits *drei* Primzahlen zur Herstellung einer geeigneten Menge ausreichen, verdanke ich Herrn A. Schmidt.

Satz 5. Ist a fremd zu b und fremd zu c, so ist a auch fremd zu $b \circ c$.

Beweis: Vgl. § 2, Satz 6.

Der Satz 5 ist nicht mit VII gleichwertig. Zwar folgt dieser Satz, wie eben angegeben, aus I bis VII; umgekehrt ist aber VII, wie sofort gezeigt werden soll, keine Folge von I bis VI und Satz 5. Offenbar genügt es, eine Menge zu konstruieren, für die I bis VI und Satz 5 in Kraft sind, während VII nicht erfüllt wird[13]). Es seien p, q, r und s verschiedene Primzahlen. M bestehe aus den im Sinn der Arithmetik gebildeten Zahlen

$$a = pr, \quad b = qs, \quad c = qrs, \quad d = pqrs$$

und dem ausgezeichneten Element $e = 1$. Unter $x \circ y$ werde $v(x, y)$ verstanden. Dann sind die Axiome I bis VI in Geltung. Daß auch Satz 5 gilt, zeigt eine vollständige Aufzählung der Paare fremder Elemente. e ist fremd zu allen Elementen; a ist nur fremd zu e, b und c; b ist nur fremd zu e und a; c ist nur fremd zu e und a; d ist nur zu e fremd. In allen nach dieser Übersicht möglichen Fällen ist Satz 5 in Kraft. Dagegen wird VII nicht erfüllt; trotzdem nämlich $a \circ b \succ c$ stattfindet und c fremd zu a ist, gilt nicht $b \succ c$, sondern $c \succ b$.

Erklärung. Ist in der Menge aller Unterelemente von a genau ein Primelement vorhanden — dasselbe sei mit p bezeichnet —, so heiße a *Primärelement* über p.

Der Grund zur Bildung dieses Begriffes, der eine natürliche Weiterentwicklung des Begriffs des Primelements darstellt, liegt in seiner Bedeutung für die Formulierung des in M gültigen Zerlegungssatzes[14]).

Satz 6. Ist a Primärelement über p, $a \succ b$ und $b \neq e$, dann ist auch b Primärelement über p.

Beweis: Wäre b nicht Primärelement über p, so gäbe es ein von p verschiedenes Primelement q, so daß gilt $b \succ q$, also $a \succ q$, was unzulässig ist.

Folgerung. α) Ist a Primärelement über p und b ein beliebiges Element, so sind entweder a und b fremd zueinander, oder die a und b

[13]) Das leistet die dem vorhergehenden Unabhängigkeitsbeweis zugrunde gelegte Menge nicht, denn dort ist a zwar fremd zu b und fremd zu c, es ist aber nicht a fremd zu $b \circ c$, so daß Satz 5 nicht gilt.

[14]) Vermittelst derselben Definition läßt sich auch in einer A-Menge der Begriff des Primärelements aufstellen; doch ist bei einer solchen Menge diese Einführung überflüssig, da zur Formulierung des Zerlegungssatzes der Begriff des Primelements vollständig ausreicht.

gemeinsamen und von e verschiedenen Unterelemente sind Primärelemente über p.

β) Primärelemente über verschiedenen Primelementen sind fremd zueinander; zueinander fremde Primärelemente gehören zu verschiedenen Primelementen.

Satz 7. Sind a und b Primärelemente über p, dann ist auch $a \circ b$ Primärelement über p.

Beweis: Es ist $a \circ b \neq e$. Wäre $a \circ b$ nicht Primärelement über p, so gäbe es ein von p verschiedenes Primelement q, so daß gilt $a \circ b > q$. Diese Beziehung kann nicht stattfinden, da q fremd zu a und b, also nach Satz 5 auch fremd zu $a \circ b$ ist.

Satz 8. Ist c Primärelement über p, sind a und b fremd zueinander und gilt $a \circ b > c$, so ist c Unterelement von genau einem der Elemente a und b.

Beweis: Nach Satz 6, Folgerung α) sind a und c entweder fremd zueinander oder haben p als gemeinsames Unterelement. Dasselbe gilt in bezug auf b und c. So ergeben sich hinsichtlich des Verhaltens von c zu a und b vier Möglichkeiten, von denen aber die beiden folgenden ausscheiden: Wegen Satz 5 kann c nicht zugleich fremd zu a und b sein; ferner kann p auch nicht gemeinsames Unterelement von a, b und c sein. c muß also zu genau einem der Elemente a und b fremd und nach VII Unterelement des anderen sein.

Satz 9. Ist b Primärelement über p, sind die Elemente

$$a_1, \ldots, a_n \qquad (n > 1) \tag{5}$$

zu je zweien fremd und gilt

$$a_1 \circ \ldots \circ a_n > b,$$

so ist b Unterelement von genau einem der Elemente (5).

Satz 10. Es seien $b_1, \ldots, b_m$ Primärelemente über nicht notwendigerweise verschiedenen Primelementen. Es seien die Elemente (5) zu je zweien fremd. Gilt dann

$$a_1 \circ \ldots \circ a_n > b_1 \circ \ldots \circ b_m,$$

so ist jedes b_μ Unterelement von genau einem der Elemente (5).

Satz 11. Es seien $p_1, \ldots, p_l$ verschiedene Primelemente; es sei a_λ Primärelement über p_λ für $\lambda = 1, \ldots, l$. Es seien $q_1, \ldots, q_m$ verschiedene Primelemente; es sei b_μ Primärelement über q_μ für $\mu = 1, \ldots, m$. Gilt dann

$$a_1 \circ \ldots \circ a_l = b_1 \circ \ldots \circ b_m,$$

so stimmt die Gesamtheit der a_λ mit der Gesamtheit der b_μ überein; d. h. die Darstellung

$$a = a_1 \circ \ldots \circ a_l \tag{6}$$

des Elements a, wobei die a_i Primärelemente über verschiedenen Primelementen sind, ist, abgesehen von der Anordnung, eindeutig, wenn sie überhaupt möglich ist.

VIII. Wenn $a \neq e$ und a kein Primärelement ist, gibt es zwei von a verschiedene Elemente b und c, so daß gilt $a = b \circ c$.

Dieses Axiom ist von allen vorhergehenden unabhängig.

Beweis: α, β', β'' und γ seien verschiedene Punkte. M habe zu Elementen die Punktmengen

$$(\alpha), \quad (\alpha, \beta'), \quad (\alpha, \beta''), \quad (\alpha, \beta', \beta''), \quad (\alpha, \beta', \beta'', \gamma).$$

$a \circ b$ bedeute $V(a, b)$. Bei dieser Interpretation sind die Axiome I bis VII in Kraft; (α) ist ausgezeichnetes Element; (α, β') und (α, β'') sind Primelemente. VIII ist nicht in Kraft, denn für das Element

$$a = (\alpha, \beta', \beta'', \gamma),$$

das von e verschieden und kein Primärelement ist, gibt es keine Darstellung

$$a = b \circ c, \quad a \neq b, \quad a \neq c.$$

Satz 12. Jedes von e verschiedene Element a läßt sich in der Form (6) darstellen.

Beweis: Ist a Primärelement, so gilt der Satz. Ist a kein Primärelement, so gibt es nach VIII eine Zerlegung

$$a = b \circ c, \quad a \neq b, \quad a \neq c;$$

nach Satz 3 haben dabei b und c weniger Unterelemente als a. Wie vorher mit a wird nun mit b und c verfahren. Nach einer endlichen Anzahl von Schritten entsteht auf diese Weise eine Gleichung von der Form

$$a = a_1 \circ \ldots \circ a_n,$$

wobei die a_ν Primärelemente sind, allerdings nicht notwendigerweise über verschiedenen Primelementen. Nach Satz 7 lassen sich aber alle Primärelemente über demselben Primelement zu einem Primärelement zusammenfassen, womit eine Zerlegung (6) erreicht ist.

Die Vereinigung der Sätze 11 und 12 ergibt den für die Elemente von M geltenden Zerlegungssatz, nämlich

Satz 13. Jedes von e verschiedene Element a läßt sich eindeutig in der Form (6) darstellen, wenn von der Anordnung abgesehen wird.

IX. Sind a und b verschiedene Primärelemente über demselben Primelement, so gilt entweder $a \succ b$ oder $b \succ a$.

Dieses Axiom ist von allen vorhergehenden unabhängig.

Beweis: α, β, γ' und γ'' seien verschiedene Punkte. M habe zu Elementen die Punktmengen

$$(\alpha), \quad (\alpha, \beta), \quad (\alpha, \beta, \gamma'), \quad (\alpha, \beta, \gamma''), \quad (\alpha, \beta, \gamma', \gamma'').$$

$a \circ b$ bedeute $V(a, b)$. Bei dieser Interpretation sind die Axiome I bis VII in Kraft; (α) ist ausgezeichnetes Element; (α, β) ist Primelement; die übrigen Elemente sind Primärelemente über (α, β), so daß auch dem nichts über Primärelemente aussagenden Axiom VIII nicht widersprochen wird. IX ist jedoch nicht in Kraft, denn es gilt weder

$$(\alpha, \beta, \gamma') \succ (\alpha, \beta, \gamma'')$$

noch

$$(\alpha, \beta, \gamma'') \succ (\alpha, \beta, \gamma').$$

Satz 14. Für ein Primärelement a über p ist charakteristisch, daß sich die Unterelemente nach der Beziehung $\succ$ linear ordnen lassen, und zwar kann die Bezeichnung so gewählt werden, daß gilt

$$p^{(\delta)} \succ \ldots \succ p^{(1)} \succ p^{(0)},$$

wobei jedes Element nur einmal vorkommt, δ eine natürliche Zahl und

$$p^{(\delta)} = a, \quad p^{(1)} = p, \quad p^{(0)} = e$$

ist.

Beweis: Daß die angegebene Bedingung hinreichend ist, folgt aus der Erklärung des Primärelements; die Notwendigkeit folgt aus IX.

Satz 15. Für jedes von e verschiedene a gilt

$$a = p_1^{(\delta_1)} \circ \ldots \circ p_n^{(\delta_n)}, \tag{7}$$

wobei $p_1, \ldots, p_n$ verschiedene Primelemente und $\delta_1, \ldots, \delta_n$ natürliche Zahlen sind; diese Darstellung — sie möge als *kanonische* bezeichnet werden — ist eindeutig, wenn von der Reihenfolge der Elemente abgesehen wird.

Beweis: Satz 13 und 14.

Satz 16. Für ein Element a mit der kanonischen Darstellung (7) durchläuft der Ausdruck

$$p_1^{(\varepsilon_1)} \circ \ldots \circ p_n^{(\varepsilon_n)} \tag{8}$$

die Gesamtheit aller Unterelemente, wenn unabhängig voneinander jedes ε_ν die zugehörige Reihe $0, 1, \ldots, \delta_\nu$ durchläuft. Die Anzahl aller Unterelemente von a ist somit $\prod_{\nu=1}^{n} (\delta_\nu + 1)$.

Beweis: Jedes Element (8) ist Unterelement von a. Umgekehrt kann kein Unterelement u von a andere Primelemente wie a enthalten, auch kann u kein Primärelement $p_\nu^{(\varepsilon_\nu)}$ mit $\varepsilon_\nu \succ \delta_\nu$ enthalten. Bei kanonischer Darstellung ist u also von der Form (8).

Satz 17. Ist mindestens eins der Elemente a und b von e verschieden, und stellt

$$p_1, \ldots, p_m$$

die Gesamtheit der Primelemente dar, deren jedes Unterelement von mindestens einem der Elemente a und b ist, gilt demgemäß

$$a = p_1^{(\alpha_1)} \circ \ldots \circ p_m^{(\alpha_m)} \qquad (\alpha_u \geqq 0),$$

$$b = p_1^{(\beta_1)} \circ \ldots \circ p_m^{(\beta_m)} \qquad (\beta_\mu \geqq 0),$$

so findet statt

$$a \circ b = p_1^{(\delta_1)} \circ \ldots \circ p_m^{(\delta_m)}$$

mit

$$\delta_u = \max(\alpha_u, \beta_u) \qquad (\mu = 1, \ldots, m).$$

Bei geeigneter Interpretation gilt der Satz auch für $a = b = e$.

Der Beweis ergibt sich vermittelst der Sätze 13 und 7 dieses Paragraphen und der nach Axiom IX für $\alpha \geqq \beta$ bestehenden Gleichung

$$p^{(\alpha)} \circ p^{(\beta)} = p^{(\alpha)}.$$

X. Über jedem Primelement gibt es beliebig viele Primärelemente. Dieses Axiom ist von allen vorhergehenden *unabhängig*.

Beweis: M sei die Menge der Teiler einer von 1 verschiedenen natürlichen Zahl. $a \circ b$ bedeute $v(a, b)$.

Die Axiome I—X sind miteinander *verträglich*.

Beweis: M habe zu Elementen 1 und alle Zahlen g^n, wenn g eine von 1 verschiedene positive ganze Zahl ist und n die Reihe der natürlichen Zahlen durchläuft. $a \circ b$ bedeute $v(a, b)$.

Erklärung. Eine Menge mit einer den Axiomen I—X genügenden Elementverknüpfung heiße B-Menge.

§ 4.

Die B′-Menge.

Die Elemente der zugrunde gelegten Menge M seien einer Gleichheitsbeziehung und *zweier* Verknüpfungen fähig. Das Ergebnis der Verknüpfung der Elemente a und b werde mit $a \smile b$ bzw. $a \frown b$ bezeichnet. Der näheren Beschreibung der Verknüpfungen dient das folgende System von Axiomen, Lehrsätzen und Erklärungen[15]). Eingehend sind diese Verknüpfungen in A. V. II behandelt, so daß an dieser Stelle nur so viel darüber gebracht zu werden braucht, wie zur Erreichung des eingangs gesetzten Zieles erforderlich ist.

I. Sind a und b zwei beliebige Elemente, so gibt es ein Element c, so daß gilt

$$a \smile b = c,$$

[15]) Ein ähnliches Axiomensystem ist Gegenstand einer Untersuchung von Herrn K. Menger, vgl. dessen Bemerkungen zu Grundlagenfragen IV, Jahresber. d. Deutschen Math. Ver. 37 (1928), S. 309 ff.

und ein Element d, so daß gilt

$$a \cap b = d.$$

II. Für zwei beliebige Elemente a und b gilt

$$a \cup b = b \cup a, \qquad a \cap b = b \cap a.$$

III. Für drei beliebige Elemente a, b und c gilt

$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c), \qquad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c).$$

IV. Aus $a \cup b = a$ folgt $a \cap b = b$ und umgekehrt.

V. Für drei beliebige Elemente a, b und c gilt

$$(a \cup b) \cap c = (a \cap c) \cup (b \cap c).$$

VI. Für jedes Element a gilt $a \cup a = a$.

VII. Es gibt ein Element e, so daß für jedes a gilt $a \cup e = a$.

VIII. Es gibt nur endlich viele Elemente x und y, die bei festem a der Gleichung $x \cup y = a$ genügen.

Erklärung. Das durch VII gekennzeichnete und durch II eindeutig bestimmte Element e heiße *ausgezeichnetes* Element oder *Einheitselement.*

Erklärung. Die Gleichung $a = b \cup c$ sei mit $a \succ b$, also auch mit $a \succ c$ gleichbedeutend. a heiße *Oberelement* von b und c, jedes der letzteren *Unterelement* von a.

Die Beziehung $\succ$ besitzt dieselben Eigenschaften wie die in § 3 erklärte; insbesondere gelten die dortigen Sätze 1—4.

Erklärung. Hat für $a \neq e$ die Gleichung $x \cup y = a$ nur die sicher vorhandene Lösung $x = e$, $y = a$ bzw. $x = a$, $y = e$, d. h. besitzt a nur die Unterelemente e und a, so heiße a *Primelement.*

Erklärung. Hat das Gleichungssystem

$$a = x \cup y, \qquad b = x \cup z$$

nur die sicher vorhandene Lösung

$$x = e, \qquad y = a, \qquad z = b,$$

d. h. ist e das einzige Element, das sowohl Unterelement von a als auch von b ist, so heiße a *fremd* zu b, also auch b fremd zu a.

Satz. Ist $a \cup b$ Oberelement von c, und ist c zu einem der Elemente a und b fremd, so ist c Unterelement des anderen.

Der Beweis dieses Satzes (vgl. A. V. II, § 4, Satz 16), der sowohl in einer A-Menge als auch in einer B-Menge unbeweisbar ist, beruht wesentlich auf dem distributiven Gesetz V, dessen Bedeutung für den Aufbau des Systems damit in ein helles Licht gerückt wird.

Hiermit ist der Anschluß an § 3 erreicht, so daß auch der dortige Satz 5 gilt.

Erklärung. Ist in der Menge aller Unterelemente von a genau ein Primelement vorhanden — dasselbe sei mit p bezeichnet —, so heiße a *Primärelement* über p.

Es gelten also die Sätze 6—11 des § 3.

IX. Wenn $a \neq e$ und a kein Primärelement ist, gibt es zwei von a verschiedene Elemente b und c, so daß gilt $a = b \cup c$.

Es gelten also die Sätze 12 und 13 des § 3.

X. Sind a und b verschiedene Primärelemente über demselben Primelement, so gilt entweder $a > b$ oder $b > a$.

Es gelten also die Sätze 14—16 des § 3. Der Satz 17 des § 3 ist ebenfalls in Kraft, daneben das auf die Verknüpfung $\cap$ bezügliche Gegenstück; beide lassen sich zu dem folgenden Satz zusammenfassen:

Ist mindestens eins der Elemente a und b von e verschieden, und stellt

$$p_1, \ldots, p_m$$

die Gesamtheit der Primelemente dar, deren jedes Unterelement von mindestens einem der Elemente a und b ist, gilt demgemäß

$$a = p_1^{(\alpha_1)} \cup \ldots \cup p_m^{(\alpha_m)} \qquad (\alpha_\mu \geqq 0),$$

$$b = p_1^{(\beta_1)} \cup \ldots \cup p_m^{(\beta_m)} \qquad (\beta_\mu \geqq 0),$$

so findet statt

$$a \cup b = p_1^{(\delta_1)} \cup \ldots \cup p_m^{(\delta_m)} \tag{9}$$

$$a \cap b = p_1^{(\varepsilon_1)} \cup \ldots \cup p_m^{(\varepsilon_m)} \tag{9'}$$

mit

$$\delta_\mu = \max(\alpha_\mu, \beta_\mu), \quad \varepsilon_\mu = \min(\alpha_\mu, \beta_\mu) \qquad (\mu = 1, \ldots, m).$$

Bei geeigneter Interpretation gilt der Satz auch für $a = b = e$.

Zum Beweis der Gleichung (9') ist das distributive Gesetz heranzuziehen.

XI. Über jedem Primelement gibt es beliebig viele Primärelemente.

Daß dieses Axiom von den vorhergehenden unabhängig als auch damit verträglich ist, wird ähnlich wie bei einer B-Menge gezeigt.

Erklärung. Eine Menge mit zwei den Axiomen I—XI genügenden Elementverknüpfungen heiße B'-Menge.

Zum Abschluß dieses Paragraphen mögen noch einige Sätze Erwähnung finden, die, obwohl sie zur Lösung des eingangs gestellten Problems nicht benötigt werden, zur Klärung der zwischen den Verknüpfungen $\cup$ und $\cap$ bestehenden Verwandtschaftsverhältnisse beitragen. Überdies sind diese Sätze für die Dedekindsche Theorie der Moduln und Ideale von Bedeutung; insbesondere stellt der erste derselben die Gültigkeit des nicht postulierten dualen Gegenstücks zu V fest. Es sei noch bemerkt, daß zur Herleitung dieser Sätze nicht alle hier vorausgesetzten Axiome erforderlich sind.

1. Für drei beliebige Elemente a, b und c gilt[16])

$$(a \cap b) \cup c = (a \cup c) \cap (b \cup c).$$

Beweis: Für $a = b = e$ ist der Satz richtig. Ist mindestens eins der Elemente a, b und c von e verschieden, und stellt

$$p_1, \ldots, p_m$$

die Gesamtheit der Primelemente dar, deren jedes Unterelement von mindestens einem der Elemente a, b und c ist, gilt demgemäß

$$a = p_1^{(\alpha_1)} \cup \ldots \cup p_m^{(\alpha_m)} \qquad (\alpha_\mu \geqq 0),$$

$$b = p_1^{(\beta_1)} \cup \ldots \cup p_m^{(\beta_m)} \qquad (\beta_\mu \geqq 0),$$

$$c = p_1^{(\gamma_1)} \cup \ldots \cup p_m^{(\gamma_m)} \qquad (\gamma_\mu \geqq 0),$$

so findet statt

$$(a \cap b) \cup c = p_1^{(\delta_1)} \cup \ldots \cup p_m^{(\delta_m)},$$

$$(a \cup c) \cap (b \cup c) = p_1^{(\varepsilon_1)} \cup \ldots \cup p_m^{(\varepsilon_m)}$$

mit

$$\delta_\mu = \max [\min (\alpha_\mu, \beta_\mu), \gamma_\mu],$$

$$\varepsilon_\mu = \min [\max (\alpha_\mu, \gamma_\mu), \max (\beta_\mu, \gamma_\mu)].$$

Wegen der Gleichheit der rechts stehenden Ausdrücke ist damit die Behauptung bewiesen.

2. Für drei beliebige Elemente a, b und c gilt[17])

$$(a \cup c) \cap (b \cup c) = c \cup [a \cap (b \cup c)],$$

$$(a \cap c) \cup (b \cap c) = c \cap [a \cup (b \cap c)].$$

Die Richtigkeit dieser dual sich entsprechenden Formeln ergibt sich dadurch, daß man die rechten Seiten auf Grund der distributiven Gesetze umformt.

3. Für drei beliebige Elemente a, b und c gilt[18])

$$[a \cup (b \cap c)] \cap (b \cup c) = [a \cap (b \cup c)] \cup (b \cap c).$$

Es ist beachtenswert, daß zum Beweis dieses Satzes nur eines der beiden distributiven Gesetze herangezogen zu werden braucht.

4. Ist a beliebig, so bedingen sich die Gleichungen[19])

$$b = b \cup c, \tag{10}$$

$$b \cap (a \cup c) = (b \cap a) \cup c \tag{11}$$

gegenseitig.

---

[16]) W. XXVIII, S. 110.
[17]) Z. XI, S. 499 und W. XXVIII, S. 110—111.
[18]) W. XXVIII, S. 115 und W. XXX, S. 239.
[19]) Z. XI, S. 498 und W. XXX, S. 239.

Beweis: Aus (10) folgt (11), wie sich aus

$$(b \cap a) \cup c = (b \cup c) \cap (a \cup c)$$

unter Berücksichtigung von (10) ergibt. Aus (11) folgt (10), wie sich aus den für zwei beliebige Elemente x und y geltenden Beziehungen

$$b \succ b \cap x, \qquad y \cup c \succ c$$

für

$$x = a \cup c, \qquad y = b \cap a$$

unter Berücksichtigung von (11) ergibt.

Das duale Gegenstück dieses Satzes erhält man, wenn man b mit c vertauscht.

§ 5.

Die Koppelung der Axiomensysteme.

Nach diesen Vorbereitungen ist das Äquivalenzproblem schnell erledigt. Die Behandlung geschieht in der Weise, daß innerhalb jeder der betrachteten Mengen geeignete Verknüpfungen erklärt werden derart, daß jeweils die den beiden anderen Mengen unterlegten Axiome befriedigt werden. Auf den im allgemeinen leicht zu erbringenden Nachweis, daß dabei den Axiomen des § 1 und den jeweils in Frage kommenden speziellen Axiomen der §§ 2—4 genügt wird, gehen wir nur an einer Stelle näher ein.

1. Jede B′-Menge ist offenbar hinsichtlich der Verknüpfung $\cup$ eine B-Menge. Umgekehrt läßt sich jede B-Menge folgendermaßen zu einer B′-Menge ausbauen. Ist mindestens eins der Elemente a und b von e verschieden, und stellt

$$p_1, \ldots, p_m$$

die Gesamtheit der Primelemente dar, deren jedes Unterelement von mindestens einem der Elemente a und b ist, gilt demgemäß

$$a = p_1^{(\alpha_1)} \circ \ldots \circ p_m^{(\alpha_m)} \qquad (\alpha_\mu \geqq 0),$$

$$b = p_1^{(\beta_1)} \circ \ldots \circ p_m^{(\beta_m)} \qquad (\beta_\mu \geqq 0),$$

so werde gesetzt

$$a \cup b = p_1^{(\delta_1)} \circ \ldots \circ p_m^{(\delta_m)},$$

$$a \cap b = p_1^{(\varepsilon_1)} \circ \ldots \circ p_m^{(\varepsilon_m)}$$

mit

$$\delta_\mu = \max(\alpha_\mu, \beta_\mu), \quad \varepsilon_\mu = \min(\alpha_\mu, \beta_\mu) \qquad (\mu = 1, \ldots, m);$$

im Falle $a = b = e$ werde gesetzt

$$e \cup e = e \cap e = e.$$

Es gilt also, wie es auch sein muß,

$$a \cup b = a \circ b.$$

2. Jede B′-Menge, also auch jede B-Menge, kann folgendermaßen als A-Menge interpretiert werden. Unter denselben Voraussetzungen wie soeben werde gesetzt[20])

$$a\,b = p_1^{(\alpha_1 + \beta_1)} \cup \ldots \cup p_m^{(\alpha_m + \beta_m)}, \quad e\,e = e.$$

Daß z. B. das Axiom VIII des § 2 in Kraft ist, ergibt sich wie folgt. Es sei

$$c = p_1^{(\gamma_1)} \cup \ldots \cup p_m^{(\gamma_m)} \qquad (\gamma_\mu \geqq 0).$$

Ist nun $a\,b$ Oberelement von c, so gilt

$$\gamma_\mu \leqq \alpha_\mu + \beta_\mu \qquad (\mu = 1, \ldots, m).$$

Ist ferner c fremd zu a, so haben c und a keine gemeinsamen Unterelemente außer e, d. h. wenn $\gamma_\mu > 0$ ist, ist $\alpha_\mu = 0$. Folglich gilt für alle Exponenten

$$\gamma_\mu \leqq \beta_\mu,$$

so daß c Unterelement von b ist.

Umgekehrt kann folgendermaßen jede A-Menge als B′-Menge und damit auch als B-Menge interpretiert werden. Ist mindestens eins der Elemente a und b von e verschieden, und stellt

$$p_1, \ldots, p_m$$

die Gesamtheit der Primelemente dar, deren jedes Unterelement von mindestens einem der Elemente a und b ist, gilt demgemäß

$$a = p_1^{\alpha_1} \ldots p_m^{\alpha_m} \qquad (\alpha_\mu \geqq 0),$$

$$b = p_1^{\beta_1} \ldots p_m^{\beta_m} \qquad (\beta_\mu \geqq 0),$$

so werde gesetzt

$$a \cup b = p_1^{\delta_1} \ldots p_m^{\delta_m},$$

$$a \cap b = p_1^{\varepsilon_1} \ldots p_m^{\varepsilon_m}$$

mit

$$\delta_\mu = \max(\alpha_\mu, \beta_\mu), \quad \varepsilon_\mu = \min(\alpha_\mu, \beta_\mu) \qquad (\mu = 1, \ldots, m);$$

im Fall $a = b = e$ werde gesetzt

$$e \cup e = e \cap e = e.$$

3. Gekoppelte Verknüpfungen hängen vermöge eines distributiven Gesetzes zusammen; es besteht nämlich der Satz:

Für drei beliebige Elemente a, b und c gilt

$$a(b \cup c) = a\,b \cup a\,c \quad \text{und} \quad a(b \cap c) = a\,b \cap a\,c.$$

---

[20]) Die Existenz von $p_\mu^{(\alpha_\mu + \beta_\mu)}$ gewährleistet XI in § 4.

Zum Beweise setze man

$$a = p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m} \qquad (\alpha_\mu \geqq 0),$$
$$b = p_1^{\beta_1} \dots p_m^{\beta_m} \qquad (\beta_\mu \geqq 0),$$
$$c = p_1^{\gamma_1} \dots p_m^{\gamma_m} \qquad (\gamma_\mu \geqq 0)$$

und berücksichtige

$$\alpha_\mu + \max(\beta_\mu, \gamma_\mu) = \max(\alpha_\mu + \beta_\mu, \alpha_\mu + \gamma_\mu),$$
$$\alpha_\mu + \min(\beta_\mu, \gamma_\mu) = \min(\alpha_\mu + \beta_\mu, \alpha_\mu + \gamma_\mu).$$

Noch einige Bemerkungen. Die Eigenschaft, Einheitselement bzw. Primelement bzw. Primärelement zu sein, kommt einem Element absolut zu, d. h. unabhängig davon, ob M im Sinne der hier dargelegten Koppelung als A-, B- oder B'-Menge aufgefaßt wird; p^δ und $p^{(\delta)}$ bedeuten also dasselbe Element. In gleicher Weise gelten auch die Beziehungen absolut: a ist Oberelement von b bzw. b ist Unterelement von a, a und b sind fremd zueinander. Während jedoch die Verknüpfungen $\bigcirc$ und $\smile$ identisch sind, gilt im allgemeinen nur

$$ab \succ a \smile b,$$

wobei

$$ab = a \smile b$$

dann und nur dann stattfindet, wenn a und b fremd zueinander sind.

(Eingegangen am 3. August 1931.)