Werk

Titel: Beschränkte divergente Folgen und reguläre Matrizen

Autor: Raff, H.,

Ort: Berlin

Jahr: 1933

PURL: https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0036|log4

Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

Beschränkte divergente Folgen und reguläre Matrizen.

Von

Hermann Raff in Tübingen.

Einleitung und Inhaltsübersicht.

Unter einer *regulären Matrix* wird eine Matrix

$$A = (a_{n\nu}) = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0\nu} & \cdots \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1\nu} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n0} & a_{n1} & \cdots & a_{n\nu} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

verstanden, deren Elemente folgenden Bedingungen genügen:

1. Die Folge der Glieder jeder einzelnen Spalte ist eine Nullfolge, oder bei beliebigem, festgehaltenem ν strebt

$$a_{n\nu} \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

2. Die Reihen aus den Absolutbeträgen der Glieder einer Zeile sind konvergent und haben beschränkte Summen, d. h.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| < K \quad \text{für alle } n.$$

3. Die Reihensummen aus den Gliedern einer Zeile streben mit wachsender Zeilennummer gegen 1, also

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\right) \to 1 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Ist nun (s_n) eine gegebene Folge und konvergiert $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ zum Werte t_n, so wird die Folge (t_n) die A-Transformation von (s_n) genannt. Falls $\lim_{n\to\infty} t_n = t$ existiert, sagt man, (s_n) sei zum Werte t limitiert.

O. Toeplitz[1]) und I. Schur[2]) haben bewiesen, daß die genannten Bedingungen notwendig und hinreichend sind, um aus $s_n \to s$ auf die Konvergenz der transformierten Folge (t_n) zum selben Grenzwerte schließen zu können.

Derselbe Satz gilt auch, wenn die Bedingung 2 ersetzt wird durch die ersichtlich gleichwertige:

2a. Es existiert ein endlicher $\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|\right)$,

eine Bedingung, die sich bei späteren Formulierungen als sehr handlich erweist. Damit ist begründet:

I. Eine Matrix, die den Bedingungen 1, 2a und 3 genügt, soll eine *reguläre Matrix* genannt werden.

II. Unter der *Norm einer regulären* Matrix wird der durch

$$N = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|\right)$$

definierte Wert verstanden.

Jeder regulären Matrix kommt also eine eindeutig bestimmte Norm $\geqq 1$ zu, und es gibt reguläre Matrizen beliebiger Norm $\geqq 1$.

Als *Kern einer beschränkten Folge* bezeichnet man den kleinsten konvexen abgeschlossenen Bereich, der sämtliche Häufungspunkte dieser Folge enthält[3]). Der Kern einer konvergenten Folge besteht demnach aus einem einzigen Punkt, dem Grenzwert der Folge.

Wir untersuchen nun die *A-Transformationen vorgelegter divergenter beschränkter Folgen*, wenn zur Konkurrenz alle regulären Matrizen einer Norm $N \leqq K$ ($K \geqq 1$ vorgegeben) zugelassen sind, und wollen besonders Aufschluß über die Lage der Häufungspunkte der Transformierten erhalten. Die Existenz der Folge mit den Gliedern $t_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ ist in diesem Falle wegen der absoluten Konvergenz der rechtsstehenden Reihen gesichert.

In § 1 wird die Limitierung von Folgen mit genau zwei Häufungspunkten behandelt. In § 2 werden Folgen untersucht, die drei, nicht in einer Geraden liegende Häufungswerte haben. Der Inhalt dieses Paragraphen ist allerdings für die Gewinnung der Sätze des § 5 nicht notwendig, da die in § 1 erhaltenen Resultate als Voraussetzung für den später zu machenden Induktionsschluß genügen. Aber bei drei und mehr

---

[1]) O. Toeplitz, Über lineare Mittelbildungen, Prace matematyczno-fizyczne 22 (1911), S. 113—119.

[2]) I. Schur, Über lineare Transformationen in der Theorie der unendlichen Reihen, Journal für die reine und angewandte Mathematik **151** (1921), S. 79—111.

[3]) K. Knopp, Zur Theorie der Limitierungsverfahren I, Math. Zeitschr. **31** (1929), S. 97—127, bes. S. 113—115.

Häufungspunkten treten die zu beweisenden Tatsachen in einer Gestalt auf, die von der Struktur der entsprechenden Formeln in § 1 wesentlich verschieden ist und die einen anderen Beweisgang bedingt. § 3 enthält Sätze über Folgen, deren Häufungspunkte in den Ecken eines konvexen p-Ecks liegen. Das gewonnene Resultat wird in § 4 auf Folgen ausgedehnt, deren *Kern* ein konvexes p-Eck ist. Schließlich kommen in § 5 allgemeine Sätze über beliebige beschränkte Folgen und als Teilresultat der Kernsatz von K. Knopp [4]) in einer Spezialisierung auf reguläre Matrizen.

§ 1.

Folgen mit genau zwei Häufungspunkten $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$.

Vorgelegt sei eine beschränkte Folge (s_n), die genau zwei Häufungspunkte, $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$, besitzt. (s_n) kann auf beliebig viele Arten in zwei Teilfolgen $(\sigma_\lambda^{(1)})$ und $(\sigma_\lambda^{(2)})$ zerlegt werden, so daß $(\sigma_\lambda^{(1)})$ gegen $a^{(1)}$, $(\sigma_\lambda^{(2)})$ gegen $a^{(2)}$ strebt und jedes Glied von (s_n) in genau einer der beiden Folgen vorkommt. Um die n-te Zeile einer regulären Matrix $(a_{n\nu})$ der Eigenschaft zu finden, daß $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right)$ gegen einen vorgegebenen Wert z strebt, greift man aus (s_n) zwei Glieder $s_{\nu'}$ und $s_{\nu''}$ heraus, deren Indizes größer als die Zeilennummer n sind. Weiter soll $s_{\nu'}$ bei der oben genannten Zerlegung zu $(\sigma_\lambda^{(1)})$, $s_{\nu''}$ zu $(\sigma_\lambda^{(2)})$ gehören. Dann setzt man

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{z - a^{(2)}}{a^{(1)} - a^{(2)}} & \text{für } \nu = \nu', \\ \dfrac{a^{(1)} - z}{a^{(1)} - a^{(2)}} & \text{für } \nu = \nu'', \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man erkennt leicht, daß $(a_{n\nu})$ regulär ist und die Norm

$$N(z) = \frac{|z - a^{(1)}| + |z - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|}$$

besitzt. Da weiter

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu = \frac{z - a^{(2)}}{a^{(1)} - a^{(2)}} s_{\nu'} + \frac{a^{(1)} - z}{a^{(1)} - a^{(2)}} s_{\nu''} = z \frac{s_{\nu'} - s_{\nu''}}{a^{(1)} - a^{(2)}} + \frac{a^{(1)} s_{\nu''} - a^{(2)} s_{\nu'}}{a^{(1)} - a^{(2)}}$$

und die rechte Seite für $n \to \infty$ gegen z strebt, ist damit eine reguläre Matrix der verlangten Art gefunden.

Wir beweisen noch einen später gebrauchten

Hilfssatz. (s_n) sei beschränkt, $(a_{n\nu})$ sei regulär und habe die Norm N und $(t_n) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right)$ strebe gegen den Wert t. Dann gibt es

[4]) K. Knopp, Zur Theorie der Limitierungsverfahren, a. a. O.

reguläre Matrizen beliebiger Norm $N^* > N$, die (s_n) zum selben Werte limitieren.

Beweis. Nach dem Satze von Bolzano-Weierstraß besitzt die Ausgangsfolge mindestens einen Häufungspunkt $a^{(0)}$. $(\sigma_\lambda^{(0)})$ sei eine zum Werte $a^{(0)}$ konvergente Teilfolge von (s_n). Dem Gliede $\sigma_\lambda^{(0)}$ komme in der ursprünglichen Folge die Nummer n_λ zu. In der n-ten Zeile der gegebenen Matrix werden jetzt zwei Glieder, $a_{n\nu_{1n}}$ und $a_{n\nu_{2n}}$, herausgegriffen, die ihrem Absolutbetrag nach kleiner als $\frac{1}{2n}$ sind, deren zweite Indizes unter den n_λ vorkommen und größer als n sind. Die Matrix $(a_{n\nu}^*)$ mit

$$a_{n\nu}^* = \begin{cases} \frac{1}{2}(N^* - N), & \text{falls } \nu = \nu_{1n}, \\ -\frac{1}{2}(N^* - N), & \text{falls } \nu = \nu_{2n}, \\ a_{n\nu} & \text{sonst} \end{cases}$$

ist regulär und hat die Norm N^*. (s_n) wird durch $(a_{n\nu}^*)$ zum Werte t limitiert, falls $(t_n) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right)$ gegen t strebt; denn

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^* s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu - a_{n\nu_{1n}} s_{\nu_{1n}} - a_{n\nu_{2n}} s_{\nu_{2n}} + \frac{1}{2}(N^* - N)(s_{\nu_{1n}} - s_{\nu_{2n}})$$

strebt nach den Voraussetzungen über $s_{\nu_{1n}}$, $s_{\nu_{2n}}$ und $(a_{n\nu})$ gegen t.

Bisher ist bewiesen:

Besitzt (s_n) die einzigen Häufungspunkte $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$, so ist (s_n) nach Vorgabe einer beliebigen Konstanten $K \geqq 1$ zu jedem Werte der abgeschlossenen Ellipse

$$\text{(I)} \qquad \frac{|z - a^{(1)}| + |z - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|} \leqq K$$

durch reguläre Matrizen beliebiger Norm $N \geqq K$ limitierbar. Für $K = 1$ wird unter (I) natürlich die Strecke $a^{(1)} \ldots a^{(2)}$ verstanden.

Weiterhin gilt:

(s_n) ist zu keinem außerhalb der Ellipse (I) *gelegenen Wert durch reguläre Matrizen einer Norm $N \leqq K$ limitierbar.*

Denn ist $(a_{n\nu})$ eine reguläre Matrix, strebt $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ mit unbegrenzt wachsendem n gegen den Wert z^* und ist

$$(1) \qquad \frac{|z^* - a^{(1)}| + |z^* - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|} > K$$

(z^* kann dabei von $a^{(2)}$ verschieden gedacht werden), so gilt, wenn $a_{n\nu} = a_{n\lambda}^{(\varkappa)}$ gesetzt wird, falls bei obiger Zerlegung $s_\nu = \sigma_\lambda^{(\varkappa)}$ ist ($\varkappa = 1$ oder 2),

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(1)} \sigma_\lambda^{(1)} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(2)} \sigma_\lambda^{(2)} \to z^* \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

deshalb auch, wie man leicht erkennt,

$$(z^* - a^{(1)}) \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(1)} + (z^* - a^{(2)}) \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(2)} \to 0 \quad \text{für } n \to \infty.$$

Eine der links stehenden Reihen, etwa die erste, kann nach der Bedingung 3 für reguläre Matrizen für unendlich viele n ihrem Absolutbetrag nach $\geqq \frac{1}{4}$ gedacht werden. Für diese n wird mit Hilfe einer Nullfolge (ε_n)

$$q_n = \frac{\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(2)}}{\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(1)}} = \frac{a^{(1)} - z^*}{z^* - a^{(2)}} + \frac{\varepsilon_n}{(z^* - a^{(2)}) \sum a_{n\lambda}^{(1)}}$$

gesetzt. Da

$$\frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|}{\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\right|} \geqq \frac{\left|\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(1)}\right| + \left|\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(2)}\right|}{\left|\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(1)} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(2)}\right|} = \frac{1 + |q_n|}{|1 + q_n|},$$

da weiter der Limes dieser rechten Seite für die genannte Teilfolge der n existiert und gleich $\frac{|z^* - a^{(1)}| + |z^* - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|}$ ist, so gilt

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|}{\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\right|} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \geqq \frac{|z^* - a^{(1)}| + |z^* - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|}.$$

Nach (1) ist also die Norm der transformierenden regulären Matrix größer als K. Insgesamt ist jetzt bewiesen:

Satz. *Ist (s_n) eine Folge mit den einzigen Häufungspunkten $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$, z beliebig, so ist (s_n) zu diesem Werte durch reguläre Matrizen jeder Norm $N^* \geqq N(z)$ limitierbar, wo*

$$N(z) = \frac{|z - a^{(1)}| + |z - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|}$$

ist. Keine reguläre Matrix geringerer Norm leistet dasselbe.

§ 2.

Folgen mit drei, nicht in einer Geraden liegenden Häufungspunkten.

1. *Definition einer gewissen Punktmenge.*

In § 1 war zu einem gegebenen Punktepaar $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ und zu einem festen, von nun an ζ genannten Werte z eine Konstante $N(z) \geqq 1$ bestimmt worden, die fortan Z heißen soll. Also ist

$$Z = \frac{|\zeta - a^{(1)}| + |\zeta - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|}. \tag{1}$$

Z ist eine in ζ stetige Funktion.

Mit Hilfe von (1) wird nun für festes $\zeta \neq a^{(3)}$ die Funktion

$$\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \tag{2}$$

gebildet. Diese ist stetig in z. Weiterhin ist (2) bei festem z stetig in $\zeta \neq a^{(3)}$ und genügt folgenden Beziehungen:

$$\lim_{\zeta \to a^{(3)}} \frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} = +\infty, \text{ falls } z \neq a^{(3)} \text{ ist.} \tag{a}$$

$$\lim_{\zeta \to \infty} \frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} = 2\,\frac{|z-a^{(3)}|}{|a^{(1)}-a^{(2)}|}+1. \tag{b}$$

Bei variablem z und festem $\zeta \neq a^{(3)}$ gilt entsprechend:

$$\lim_{z \to \infty} \frac{1}{|z|}\,\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} = \frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|}. \tag{c}$$

Wir fassen nun ζ als Parameter auf und fragen, für welche Werte z und ζ die Funktion (2) den Wert 1 hat. $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ sollen dabei nicht in einer Geraden liegen.

In der Abschätzung

$$\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \geqq \frac{|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \geqq 1$$

stehen genau dann beide Gleichheitszeichen, wenn entweder $z = a^{(3)}$ und dann ζ beliebig, aber von $a^{(3)}$ verschieden ist, oder wenn $Z = 1$, ζ also auf der Strecke $a^{(1)} \ldots a^{(2)}$, und z auf der Strecke $\zeta \ldots a^{(3)}$ liegt. Somit gilt:

Die Gesamtheit der Punkte z, für welche die Funktion (2) bei geeigneter Wahl von ζ den Wert 1 annehmen kann, ist identisch mit den Punkten des Dreiecks $a^{(1)}\,a^{(2)}\,a^{(3)}$.

Ist nun eine Konstante $K > 1$ gegeben, so betrachten wir die Menge aller z, für die bei festgehaltenem $\zeta \neq a^{(3)}$

$$\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \leqq K \tag{I}$$

ist. (I) stellt ein abgeschlossenes, konvexes Gebiet dar, das symmetrisch zur Strecke $\zeta \ldots a^{(3)}$ liegt. Die Randkurve ist eine algebraische Kurve vierter Ordnung.

Zuerst wird gezeigt werden, daß die für die Elemente einer beliebigen Punktmenge $\{\zeta\}$ $(\zeta \neq a^{(3)})$ konstruierten *Bereiche* (I) *gleichmäßig beschränkt* sind; das soll heißen:

Es läßt sich eine Konstante $R = R(K) > 0$ finden, so daß

$$\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} > K \text{ für alle } |z-a^{(3)}| > R \text{ und alle } \zeta. \tag{II}$$

Wegen (b) ist nämlich für hinreichend großes $|\zeta - a^{(3)}|$

$$(3) \qquad \frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} > 2\,\frac{|z-a^{(3)}|}{|a^{(1)}-a^{(2)}|}, \text{ z. B. für } |\zeta-a^{(3)}| \geqq r,$$

andrerseits ist für $|\zeta - a^{(3)}| < r$

$$(4) \qquad \frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} > \frac{|z-a^{(3)}|}{r}.$$

Aus (3) und (4) ergibt sich die Behauptung, denn

$$\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} > K, \text{ falls } |z-a^{(3)}| > R = \operatorname{Max}\left\{K\,\frac{|a^{(1)}-a^{(2)}|}{2};\ Kr\right\}.$$

Wählt man jetzt eine in der ganzen Ebene dichte Menge $\{\zeta\}$ $(\zeta \neq a^{(3)})$, so ist durch (I) eine Menge nicht leerer Punktmengen definiert. Wir bilden die Summe $\mathfrak{S}$ dieser Bereiche und gewinnen nötigenfalls unter Hinzunahme der Randpunkte von $\mathfrak{S}$ eine wegen (II) beschränkte, abgeschlossene Menge

$$\mathfrak{M}^{(3)} = \mathfrak{M}^{(3)}(K; \{\zeta\}; a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}) = \mathfrak{M}^{(3)}(K).$$

Die Bereiche (I) sollen die *Elementarbereiche von* $\mathfrak{M}^{(3)}$ heißen.

2. $\mathfrak{M}^{(3)}$ *ist perfekt und unabhängig von der speziellen Wahl von* $\{\zeta\}$; $\mathfrak{M}^{(3)}$ ist also mit Hilfe einer abzählbaren, überall dichten Menge in abzählbar vielen Schritten zu finden.

$\{\zeta\}$ und $\{\eta\}$ seien beliebige, überall dichte Mengen mit von $a^{(3)}$ verschiedenen Elementen, $\mathfrak{M}^{(3)} = \mathfrak{M}^{(3)}(K; \{\zeta\})$ und $\mathfrak{N}^{(3)} = \mathfrak{N}^{(3)}(K; \{\eta\})$ nach obigem Verfahren konstruiert; H bedeute die dem Werte η nach (1) zugeordnete Konstante.

Jeder Punkt von $\mathfrak{M}^{(3)}$ ist Häufungsstelle innerer Punkte von Elementarbereichen dieser Menge.

Für *innere Punkte* der Bereiche (I) ist dies trivial.

Ist aber z_r *Randpunkt* eines Elementarbereiches, dann gilt in (I) bei geeignetem ζ für $z = z_r$ das Gleichheitszeichen. Die Punkte

$$(5) \qquad z = z_r - \tau(z_r - a^{(3)}) \qquad (0 < \tau < 1)$$

haben den Häufungspunkt z_r und sind innere Punkte des für das betreffende ζ definierten Gebietes, da für sie

$$\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \leqq (1-\tau)\,\frac{Z\,|z_r-a^{(3)}|+|z_r-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} + \tau < K.$$

Jeder weitere Punkt z von $\mathfrak{M}^{(3)}$ gehört nicht zu $\mathfrak{S}$, ist jedoch Häufungsstelle innerer Punkte dieser Menge. Da $\mathfrak{M}^{(3)}$ hiernach *in sich dicht*, nach Voraussetzung aber *abgeschlossen* ist, so ist sie *perfekt*. Dasselbe gilt auch für $\mathfrak{N}^{3}$.

Die inneren Punkte von Elementarbereichen von $\mathfrak{M}^{(3)}$ sind stets innere Punkte gewisser Elementarbereiche von $\mathfrak{N}^{(3)}$. Denn zu jedem solchen Punkte z_i von $\mathfrak{M}^{(3)}$ gibt es ein ζ, so daß

$$\frac{Z\,|z_i-a^{(3)}|+|z_i-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|}=K-\delta \qquad (\delta>0).$$

Wegen der Stetigkeit von (2) in ζ und weil $\{\eta\}$ überall dicht ist, existieren demnach gewisse $\eta \neq a^{(3)}$, für die

$$\frac{H\,|z_i-a^{(3)}|+|z_i-\eta|}{|\eta-a^{(3)}|}<K.$$

Weil $\mathfrak{M}^{(3)}$ und $\mathfrak{N}^{(3)}$ perfekt sind, ist hiernach jeder Punkt von $\mathfrak{M}^{(3)}$ auch Punkt von $\mathfrak{N}^{(3)}$, $\mathfrak{M}^{(3)}$ *also Teilmenge von* $\mathfrak{N}^{(3)}$. Ebenso zeigt man, daß $\mathfrak{N}^{(3)}$ *Teilmenge von* $\mathfrak{M}^{(3)}$ ist; damit ist die *Identität von* $\mathfrak{M}^{(3)}$ *und* $\mathfrak{N}^{(3)}$ bewiesen.

3. *K und K′ seien Konstanten mit* $1\leqq K<K'$, $\mathfrak{M}^{(3)}=\mathfrak{M}^{(3)}(K;a^{(1)},a^{(2)},a^{(3)})$, $\mathfrak{N}^{(3)}=\mathfrak{N}^{(3)}(K';a^{(1)},a^{(2)},a^{(3)})$ *die nach* **1.** *konstruierten Mengen,* wobei unter $\mathfrak{M}^{(3)}(1)$ eventuell die Punkte des Dreiecks $a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}$ zu verstehen sind. *Dann liegt* $\mathfrak{M}^{(3)}$ *total in* $\mathfrak{N}^{(3)}$.

Wegen **2.** kann unter $\{\zeta\}$ die Gesamtheit der Punkte der Ebene mit Ausnahme von $a^{(3)}$ verstanden werden.

Eine Funktionenmenge $\Phi(z,p)$ (p Element der Parametermenge $\mathfrak{P}$, einer Menge komplexer Zahlen) heiße *im Punkte* z_0 *gleichgradig stetig* auf der Parametermenge, wenn $\Phi(z,p)$ für jedes p in z_0 und ein und derselben Umgebung definiert ist und wenn nach Vorgabe von $\varepsilon>0$ ein nur von ε und z_0, nicht aber von p abhängiges $\delta>0$ angegeben werden kann, so daß ist

$$|\Phi(z,p)-\Phi(z_0,p)|<\varepsilon \quad \text{für} \quad |z-z_0|<\delta. \tag{6}$$

In diesem Sinn ist die durch (2) definierte Funktionenmenge auf der Parametermenge $|\zeta-a^{(3)}|\geqq r>0$ gleichgradig stetig. Da nämlich

$$\lim_{\zeta\to\infty}\frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|}=L^{(2)}=\frac{2}{|a^{(1)}-a^{(2)}|}>0, \tag{7}$$

so gilt nach Wahl von $r>0$

$$\frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|}<2L^{(2)} \quad \text{für} \quad |\zeta-a^{(3)}|\geqq R\geqq r>0. \tag{8a}$$

Für $|\zeta-a^{(3)}|\leqq R$ ist weiter $Z+1$ beschränkt, z. B. $<M$, somit

$$\frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|}<\frac{M}{r}, \quad \text{falls} \quad r\leqq|\zeta-a^{(3)}|\leqq R. \tag{8b}$$

(8a) und (8b) bedeuten: Nach Vorgabe von $\varepsilon > 0$ und $r > 0$ ist

$$\text{(III)} \quad \left| \frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} - \frac{Z\,|z_0-a^{(3)}|+|z_0-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \right| \leqq |z-z_0| \cdot \frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|} < \varepsilon,$$

falls $|\zeta - a^{(3)}| \geqq r$ und $|z - z_0| < \varepsilon h^{(3)}$ ist.

$h^{(3)}$, die Abkürzung für $\operatorname{Min}\left\{\frac{1}{2L^{(2)}}; \frac{r}{M}\right\}$, nennen wir die Konstante der gleichgradigen Stetigkeit der Funktionenmenge (2) für die Parametermenge $|\zeta - a^{(3)}| \geqq r > 0$.

Ist speziell $K = 1$, nach Voraussetzung also $\mathfrak{M}^{(3)}$ identisch mit den Punkten des Dreiecks $a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)}$, so gibt es nach **1.** zu jedem Punkt z' des Dreiecks ein ζ, so daß

$$\frac{Z\,|z'-a^{(3)}|+|z'-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} = 1$$

ist. z' ist demnach innerer Punkt des für dasselbe ζ konstruierten Elementarbereiches von $\mathfrak{N}^{(3)}$.

K wird nun größer als 1 *gedacht.* Jeder Punkt z' von $\mathfrak{M}^{(3)}$ ist Häufungsstelle von Werten z, die zu Elementarbereichen von $\mathfrak{M}^{(3)}$ gehören. Dabei darf z' von $a^{(3)}$ verschieden vorausgesetzt werden. Beschränken wir uns mit z zuerst auf eine Umgebung $|z - z'| < \frac{1}{2}|z' - a^{(3)}|$ von z', so ist

$$\text{(9)} \quad \frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \geqq \frac{|z'-a^{(3)}|-|z-z'|}{|\zeta-a^{(3)}|} > K + K',$$

falls $|\zeta - a^{(3)}| < r = \frac{|z'-a^{(3)}|}{2(K+K')}$ ist. Wegen der gleichgradigen Stetigkeit von (2) auf $|\zeta - a^{(3)}| \geqq r$ gehört jeder solche Punkt z und damit auch z' mit einer δ-Umgebung ($\delta = \operatorname{Min}\{(K'-K)h^{(3)}; \frac{1}{2}|z'-a^{(3)}|\}$) zu $\mathfrak{N}^{(3)}$. *z' ist also innerer Punkt von* $\mathfrak{N}^{(3)}$.

4. *Jedem nicht zum Dreieck $a^{(1)} a^{(2)} a^{(3)}$ gehörigen Punkte $z^{(3)}$ kommt eindeutig eine Konstante $N^{(3)}(z^{(3)}) > 1$ zu, so daß $z^{(3)}$ Randpunkt der Menge $\mathfrak{M}^{(3)} = \mathfrak{M}^{(3)}(N^{(3)}(z^{(3)}); a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ ist, die nach* **1.** *mit Hilfe einer überall dichten Menge $\{\zeta\}$ zu bilden ist. Es ist*

$$\text{(IV)} \quad \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z\,|z^{(3)}-a^{(3)}|+|z^{(3)}-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} = N^{(3)}(z^{(3)}).$$

Beweis. (IV) bedeutet wegen der Stetigkeit von (2) in ζ und weil $\{\zeta\}$ überall dicht, daß nach Wahl von $\varepsilon > 0$

$$\text{(IVa)} \quad \frac{Z\,|z^{(3)}-a^{(2)}|+|z^{(3)}-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} < N^{(3)}(z^{(3)}) + \varepsilon \text{ für unendlich viele } \zeta,$$

und daß

$$\text{(IVb)} \quad \frac{Z\,|z^{(3)}-a^{(3)}|+|z^{(3)}-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \geqq N^{(3)}(z^{(3)}) \text{ für alle } \zeta.$$

Wir zeigen nun zuerst:

A. *In jeder Umgebung von $z^{(3)}$ liegen innere Punkte von $\mathfrak{M}^{(3)}$.*

Zu jedem Gliede einer Nullfolge mit positiven Gliedern ε_n wird ein ζ_n bestimmt, so daß (IVa) erfüllt ist. Ein etwaiger Häufungswert dieser ζ_n sei ζ genannt.

a) *Ist kein solcher (endlicher) Häufungswert vorhanden,* so gilt wegen (b) und (7)

$$L^{(2)}|z^{(3)}-a^{(3)}|+1=N^{(3)}(z^{(3)}).$$

$N^{(3)}(z^{(3)})$ ist dabei größer als 1, da $L^{(2)}|z^{(3)}-a^{(3)}|>0$ ist. Für jedes

$$z_\tau=z^{(3)}-\tau(z^{(3)}-a^{(3)}) \qquad (0<\tau<1) \tag{10}$$

ist nun

$$L^{(2)}|z_\tau-a^{(3)}|+1=L^{(2)}|z^{(3)}-a^{(3)}|+1-\tau L^{(2)}|z^{(3)}-a^{(3)}|.$$

Nach (b) existiert also ein ζ und eine Konstante $r_\tau>0$, so daß

$$\frac{Z\cdot|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|}<N^{(3)}(z^{(3)}) \quad \text{für} \quad |z-z_\tau|<r_\tau. \tag{Va}$$

b) *Ist ein Häufungswert ζ vorhanden,* so ist, wenn Z die ihm nach (1) zugeordnete Konstante bedeutet, wie in **1.** gezeigt,

$$\frac{Z|z^{(3)}-a^{(3)}|+|z^{(3)}-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|}=N^{(3)}(z^{(3)})>1. \tag{11}$$

Für die Punkte (10) folgt dann genau wie in **2.**:

$$\frac{Z|z_\tau-a^{(3)}|+|z_\tau-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|}\leqq N^{(3)}(z^{(3)})-\tau(N^{(3)}(z^{(3)})-1)<N^{(3)}(z^{(3)}). \tag{Vb}$$

Nach (Va) und (Vb) liegen also, da die Punkte z_τ den Häufungspunkt $z^{(3)}$ besitzen, in jeder Umgebung von $z^{(3)}$ innere Punkte gewisser Elementarbereiche von $\mathfrak{M}^{(3)}$, also innere Punkte von $\mathfrak{M}^{(3)}$. — Weiter gilt:

B. *In jeder Umgebung von $z^{(3)}$ liegen äußere Punkte von $\mathfrak{M}^{(3)}$.*

$$z_\tau=z^{(3)}+\tau(z^{(3)}-a^{(3)}) \qquad (\tau>0) \tag{12}$$

sind solche äußeren Punkte von $\mathfrak{M}^{(3)}$. Wegen (IVb) ist nämlich

$$\frac{Z|z_\tau-a^{(3)}|+|z_\tau-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|}\geqq\frac{Z|z^{(3)}-a^{(3)}|+|z^{(3)}-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|}+\tau(N^{(3)}(z^{(3)})-1). \tag{13}$$

Durch Wahl von τ beschränken wir uns auf $|z_\tau-z^{(3)}|<\frac{1}{4}|z^{(3)}-a^{(3)}|$ und legen hier ein $z_\tau\neq z^{(3)}$ fest. Wegen (9) ist

$$\frac{Z|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|}>2N^{(3)}(z^{(3)}), \tag{VIa}$$

$$\text{falls} \quad |\zeta-a^{(3)}|<\frac{|z^{(3)}-a^{(3)}|}{4N^{(3)}} \quad \text{und} \quad |z-z^{(3)}|<\frac{1}{2}|z^{(3)}-a^{(3)}|.$$

Wegen der gleichgradigen Stetigkeit von (2) auf $|\zeta - a^{(3)}| \geqq r = \frac{|z^{(3)} - a^{(3)}|}{4N^{(3)}}$ gilt für $|\zeta - a^{(3)}| \geqq r$ und $|z - z_\tau| < \tau(N^{(3)} - 1)h^{(3)}$ bei Benutzung von (13)

$$\text{(VIb)} \qquad \frac{\mathsf{Z}|z - a^{(3)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} > N^{(3)}(z^{(3)}).$$

Nach (VIa) und (VIb) hat z_τ von $\mathfrak{S}$ und damit von $\mathfrak{M}^{(3)}$ einen Mindestabstand δ, wo $\delta = \operatorname{Min}\left\{\tau(N^{(3)} - 1)h^{(3)}; \frac{|z^{(3)} - a^{(3)}|}{4}\right\}$ ist.

Aus A. und B. folgt, daß $z^{(3)}$ *Randpunkt der Menge* $\mathfrak{M}^{(3)}(N^{(3)}(z^{(3)}))$ ist, da in jeder Umgebung von $z^{(3)}$ sowohl innere als auch äußere Punkte von $\mathfrak{M}^{(3)}$ liegen.

5. *Zwei Eigenschaften der Funktion* $N^{(3)}(z^{(3)})$.

A. *Stetigkeit.* (IV) wird, weil sich zu jedem z^* von $a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}$ ein ζ angeben läßt, so daß

$$\frac{\mathsf{Z}|z^* - a^{(3)}| + |z^* - \zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} = 1$$

ist, sinngemäß durch die Festsetzung

$$N^{(3)}(z^*) = 1$$

erweitert.

Ist z^* ein beliebiger Punkt dieser Art, dann gilt wegen der Stetigkeit von (2) nach Vorgabe von $\varepsilon > 0$ für unendlich viele ζ aus $\{\zeta\}$

$$\frac{\mathsf{Z}|z - a^{(3)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} < 1 + \varepsilon, \quad \text{falls} \quad |z - z^*| < \delta \qquad (\delta > 0).$$

Für dieselben z ist, weil der links stehende Ausdruck $\geqq 1$,

$$1 \leqq \underset{\{\zeta\}}{\operatorname{fin}} \frac{\mathsf{Z}|z - a^{(3)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} < 1 + \varepsilon.$$

Ist aber $z^{(3)}$ äußerer Punkt des Dreiecks $a^{(1)}a^{(2)}a^{(3)}$, so beschränken wir uns zunächst auf die Umgebung $|z - z^{(3)}| < \frac{|z^{(3)} - a^{(3)}|}{4}$ von $z^{(3)}$.

Dann gilt (VIa). $h^{(3)}$ sei ebenso bestimmt wie früher, ε beliebig klein positiv gegeben, daß schon $\varepsilon h^{(3)} < \frac{1}{2}|z^{(3)} - a^{(3)}|$. Nach (IVa) und wegen der gleichgradigen Stetigkeit ist somit für geeignetes ζ

$$\text{(14)} \qquad \frac{\mathsf{Z}|z - a^{(3)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} < N^{(3)}(z^{(3)}) + \varepsilon, \quad \text{falls} \quad |z - z^{(3)}| < \frac{\varepsilon}{2}h^{(3)},$$

deshalb

$$\text{(15a)} \quad N^{(3)}(z) = \underset{\{\zeta\}}{\operatorname{fin}} \frac{\mathsf{Z}|z - a^{(3)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} < N^{(3)}(z^{(3)}) + \varepsilon, \quad \text{falls} \quad |z - z^{(3)}| < \frac{\varepsilon}{2}h^{(3)}.$$

z' sei nun ein fester Punkt der $\frac{\varepsilon}{2}h^{(3)}$-Umgebung von $z^{(3)}$; er liegt mit

einer $\frac{\varepsilon}{2} h^{(3)}$-Umgebung in dem Kreise $|z - z^{(3)}| < \frac{1}{2}|z^{(3)} - a^{(3)}|$. Der ihm zugewiesene Funktionswert sei $N^{(3)}(z')$. z' spielt dann dieselbe Rolle wie eben $z^{(3)}$, also gilt speziell, weil $|z' - z^{(3)}| < \frac{\varepsilon}{2} h^{(3)}$,

$$(15\text{b}) \qquad N^{(3)}(z^{(3)}) = \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z\,|z^{(3)} - a^{(3)}| + |z^{(3)} - \zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} < N^{(3)}(z') + \varepsilon.$$

(15a) und (15b) machen aber gerade die Behauptung aus.

B. $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{N^{(3)}(z)}{|z|} = \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z+1}{|\zeta - a^{(3)}|}$ *existiert als positiver Wert.*

Die Existenz der rechten Seite folgt aus der Existenz des unter dem Finiszeichen stehenden Ausdrucks für $\zeta = a^{(3)} + 1$. Weiter ist, wenn $L^{(2)}$ dieselbe Bedeutung wie in (7) hat,

$$\frac{Z+1}{|\zeta - a^{(3)}|} \geqq \begin{cases} \frac{1}{2} L^{(2)}, & \text{falls} \quad |\zeta - a^{(3)}| \geqq R, \\ \frac{2}{R}, & \text{falls} \quad |\zeta - a^{(3)}| \leqq R, \end{cases}$$

also auch

$$\operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z+1}{|\zeta - a^{(3)}|} \geqq \operatorname{Min}\left\{\frac{L^{(2)}}{2}; \frac{2}{R}\right\} > 0.$$

Wegen (IVb) ist nun weiter für jedes $\zeta \neq a^{(3)}$

$$\frac{1}{|z|} \cdot \frac{Z\,|z - a^{(3)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} \geqq \frac{N^{(3)}(z)}{|z|},$$

deshalb bei festem ζ wegen (c) auch der Limes der linken Seite nicht kleiner als der Limes superior der rechten, somit

$$(16\text{a}) \qquad \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z+1}{|\zeta - a^{(3)}|} \geqq \overline{\lim_{z\to\infty}} \frac{N^{(3)}(z)}{|z|}.$$

Aus (IVa) erhalten wir schließlich nach Wahl von $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{|z|} \cdot \frac{Z\,|z - a^{(3)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} < \frac{1}{|z|}\left(N^{(3)}(z) + \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ für mindestens ein } \zeta \neq a^{(3)}.$$

Der Limes inferior der rechten Seite existiert als endlicher Wert, da nach (16a) die Existenz des Limes superior gesichert ist. Es gibt also gewisse z von genügend großem Absolutwert und zu jedem dieser z ein ζ, so daß

$$\frac{1}{|z|} \cdot \frac{Z\,|z - a^{(3)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} < \lim_{z\to\infty} \frac{N^{(3)}(z)}{|z|} + \varepsilon$$

ist. Da

$$\frac{1}{|z|} \cdot \frac{Z\,|z - a^{(3)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} \geqq \frac{Z+1}{|\zeta - a^{(3)}|}\left\{1 - \frac{1}{|z|} \cdot \frac{|\zeta| + |a^{(3)}|}{Z+1}\right\}$$

und der Faktor von $\frac{1}{|z|}$

$$\frac{|\zeta|+|a^{(3)}|}{Z+1} \leqq \begin{cases} \dfrac{2}{L^{(2)}} & \text{für } |\zeta| \geqq R, \\ \dfrac{R+|a^{(3)}|}{2} & \text{für } |\zeta| \leqq R, \end{cases}$$

so ist für alle z von hinreichend hohem Absolutbetrag

$$\frac{1}{z}\,\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \geqq \vartheta\,\frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|},$$

wo ϑ einen beliebig nahe an 1 gelegenen, vorgebbaren festen echten Bruch bedeutet. Deshalb gilt auch

$$\vartheta \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|} < \varlimsup_{z\to\infty} \frac{N^{(3)}(z)}{|z|} + \varepsilon. \tag{16b}$$

Nach (16a) und (16b) ist dann, wie aus den Eigenschaften von ε und ϑ folgt,

$$\operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|} \leqq \varliminf_{z\to\infty} \frac{N^{(3)}(z)}{|z|} \leqq \varlimsup_{z\to\infty} \frac{N^{(3)}(z)}{|z|} \leqq \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z+1}{|\zeta-a^{(3)}|}.$$

Das ist aber gerade die Behauptung.

6. *Jede Folge (s_n) mit den drei nicht in einer Geraden liegenden Häufungspunkten $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$ ist nach Vorgabe einer Konstanten $K \geqq 1$ zu jedem Werte der nach* **1.** *konstruierten Menge $\mathfrak{M}^{(3)} = \mathfrak{M}^{(3)}(K; a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar*, wobei $\mathfrak{M}^{(3)} = \mathfrak{M}^{(3)}(1)$ eventuell die Punkte von $a^{(1)}\,a^{(2)}\,a^{(3)}$ bedeutet.

Jede vorgelegte Folge (s_n) der genannten Eigenschaft kann auf beliebig viele Arten in drei Teilfolgen $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ zerlegt werden, so daß jedes Glied von (s_n) in genau einer der Folgen $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ vorkommt und $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ gegen $a^{(\varkappa)}$ strebt $(\varkappa = 1, 2, 3)$. Für den weiteren Beweis trennen wir in die Unterfälle $K = 1$ und $K > 1$.

a) $K = 1$. Jeder Punkt z von $a^{(1)}\,a^{(2)}\,a^{(3)}$ kann in der Form

$$z = \frac{\lambda_1 a^{(1)} + \lambda_2 a^{(2)} + \lambda_3 a^{(3)}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3} \tag{17}$$

dargestellt werden, wo $\lambda_\varkappa$ nicht negativ und $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 > 0$ ist. Zur Bestimmung der n-ten Zeile einer regulären Matrix, die das Verlangte leistet, wählt man in (s_n) drei Glieder $s_{\nu_{1n}}, s_{\nu_{2n}}, s_{\nu_{3n}}$ aus, deren Indizes größer als n sind und die der Bedingung genügen, daß $s_{\nu_{\varkappa n}}$ zu $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ gehört. Dann setzt man

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_\varkappa}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}, & \text{falls } \nu = \nu_{\varkappa n} \quad (\varkappa = 1, 2, 3), \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{18}$$

$(a_{n\nu})$ ist regulär, hat die Norm 1, und es strebt nach (17)

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\, s_\nu = \frac{\lambda_1 s_{\nu_{1n}} + \lambda_2 s_{\nu_{2n}} + \lambda_3 s_{\nu_{3n}}}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \longrightarrow z.$$

b) $K > 1$. Nach dem Vorangehenden und nach dem Hilfssatz des § 1 ist (s_n) zu jedem Werte z des Dreiecks $a^{(1)}\,a^{(2)}\,a^{(3)}$ durch reguläre Matrizen jeder Norm $1 \leqq N \leqq K$ limitierbar.

(σ'_λ) sei die nach Aussonderung von $(\sigma_\lambda^{(3)})$ aus (s_n) übrig bleibende Folge mit den Häufungspunkten $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$.

Ist für z bei geeigneter Wahl von ζ

$$\frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|} \leqq K, \tag{19}$$

dann gibt es nach dem Satze des vorigen Paragraphen eine reguläre Matrix $(a'_{n\lambda})$ der Norm Z, mit deren Hilfe (σ'_λ) zum Werte ζ limitierbar ist. Man wählt nun in (s_n) ein Glied $s_{\nu_{3n}}$ aus, das zu $(\sigma_\lambda^{(3)})$ gehört und dessen Index $> n$ ist, und setzt

$$a_{n\nu} = \begin{cases} a'_{n\lambda}\,\dfrac{z-a^{(3)}}{\zeta-a^{(3)}}, & \text{falls } s_\nu \text{ das } \lambda\text{-te Glied von } (\sigma'_\lambda), \\ \dfrac{\zeta-z}{\zeta-a^{(3)}}, & \text{falls } \nu = \nu_{3n}, \\ 0\ , & \text{sonst.} \end{cases} \tag{20}$$

Diese Matrix $(a_{n\nu})$ ist regulär und hat die Norm

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|\right) = \frac{Z\,|z-a^{(3)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(3)}|}.$$

Weiter strebt nach den Voraussetzungen über $(a'_{n\lambda})$ und $s_{\nu_{3n}}$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\, s_\nu = \frac{z-a^{(3)}}{\zeta-a^{(3)}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a'_{n\lambda}\,\sigma'_\lambda + \frac{\zeta-z}{\zeta-a^{(3)}}\, s_{\nu_{3n}}$$

mit wachsendem n gegen z.

Existiert aber zu z kein ζ, so daß eine Beziehung (19) besteht, so greifen wir eine gegen z strebende Punktfolge $(z^{(m)})$ heraus, für deren Glieder eine Beziehung (19) gilt (vgl. (10)). Wie eben bewiesen, gibt es zu jedem $z^{(m)}$ reguläre Matrizen $(a_{n\nu}^{(m)})$ der Norm K, so daß $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(m)} s_\nu\right) \longrightarrow z^{(m)}$ strebt. Aus $(a_{n\nu}^{(m)})$ wird nun eine Zeile ausgewählt, für die

1. $|a_{n\nu}^{(m)}| < \frac{1}{m}$ für $\nu \leqq m$; 2. $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}^{(m)}| - K\right| < \frac{1}{m}$;

3. $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(m)} - 1\right| < \frac{1}{m}$ und 4. $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(m)} s_\nu - z^{(m)}\right| < \frac{1}{m}$.

Eine solche Zeile von $(a_{n\nu}^{(m)})$ gibt die m-te Zeile der Matrix $(a_{m\nu}^{*})$; diese ist regulär, hat die Norm K, und es strebt $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{m\nu}^{*} s_\nu\right)$ gegen z. Damit ist die Behauptung bewiesen.

7. *Die Folge (s_n) mit den drei nicht in einer Geraden liegenden Häufungspunkten $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ ist zu keinem außerhalb $\mathfrak{M}^{(3)}(K; a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ gelegenen Wert durch reguläre Matrizen einer Norm $N \leqq K$ limitierbar $(K \geqq 1)$.*

(s_n) wird in drei Teilfolgen $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ $(\varkappa = 1, 2, 3)$ zerlegt, so daß jedes Glied von (s_n) in genau einer dieser Folgen vorkommt und $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ gegen $a^{(\varkappa)}$ strebt. Ist $(a_{n\nu})$ eine reguläre Matrix, so können die Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}$ mit Hilfe dieser Zerlegung je in drei absolut konvergente Reihen $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}$ zerlegt werden, indem man $a_{n\nu} = a_{n\lambda}^{(\varkappa)}$ setzt, falls s_ν das λ-te Glied der Teilfolge $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ ist $(\varkappa = 1, 2$ oder $3)$.

Aus $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right) \to z$ folgt dann

$$\frac{a^{(1)} \sum a_{n\lambda}^{(1)} + a^{(2)} \sum a_{n\lambda}^{(2)} + a^{(3)} \sum a_{n\lambda}^{(3)}}{\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)} + \sum a_{n\lambda}^{(3)}} \to z \quad \text{für} \quad n \to \infty. \tag{21}$$

Wir treffen zunächst die Voraussetzung:

A. *Es existiere eine $\delta > 0$, so daß für eine Teilfolge der n*

$$\left| \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(1)} + \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(2)} \right| \geqq \delta > 0, \tag{22}$$

setzen für diese n

$$\zeta_n = \frac{a^{(1)} \sum a_{n\lambda}^{(1)} + a^{(2)} \sum a_{n\lambda}^{(2)}}{\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)}} \quad \text{und} \quad q_n = \frac{\sum a_{n\lambda}^{(3)}}{\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)}} \tag{23}$$

und finden, nachdem Zähler und Nenner von (21) durch $\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)}$ dividiert sind, daß $\frac{\zeta_n + q_n a^{(3)}}{1 + q_n}$ gegen z strebt.

(ζ_n) ist beschränkt, besitzt also nach dem Satze von Bolzano-Weierstraß einen Häufungspunkt ζ, dem in (1) ein Z zugeordnet ist. Diejenige Folge, die nach Aussonderung von $(\sigma_\lambda^{(3)})$ aus (s_n) übrigbleibt, nennen wir (σ_ν'). Es sei

$$a_{n\nu}' = \frac{a_{n\lambda}^{(\varkappa)}}{\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)}}, \quad \text{falls } \sigma_\nu' \text{ das } \lambda\text{-te Glied von } (\sigma_\lambda^{(\varkappa)}) \quad (\varkappa = 1, 2).$$

Da mit der Matrix $(a_{n\nu})$ auch $(a_{n\nu}')$ regulär ist und da $\sum a_{n\nu}' \sigma_\nu'$ den Häufungspunkt ζ hat, ist

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \frac{\sum |a_{n\lambda}^{(1)}| + \sum |a_{n\lambda}^{(2)}|}{|\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)}|} \geqq Z.$$

Dieselbe Aussage gilt sogar für den unteren Limes.

Wegen (21) besitzt auch $\frac{\zeta + q_n a^{(3)}}{1+q_n}$ den Häufungspunkt z, und daraus folgt, daß q_n den Häufungspunkt $\frac{\zeta - z}{z - a^{(3)}}$ hat. Da

$$\frac{\sum |a_{n\nu}|}{|\sum a_{n\nu}|} = \frac{\sum |a_{n\lambda}^{(1)}| + \sum |a_{n\lambda}^{(2)}| + \sum |a_{n\lambda}^{(3)}|}{|\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)} + \sum a_{n\lambda}^{(3)}|} \geqq \frac{|q_n| + \frac{\sum |a_{n\lambda}^{(1)}| + \sum |a_{n\lambda}^{(2)}|}{|\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)}|}}{|1+q_n|},$$

so gilt, wie man leicht erkennt,

$$\text{(VIIa)} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \right) \geqq \frac{\mathsf{Z}\,|z - a^{(3)}| + |z-\zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} > K.$$

B. *Strebt aber* $\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \sum a_{n\lambda}^{(2)} \to 0$, *also* $\sum a_{n\lambda}^{(3)} \to 1$ *für* $n \to \infty$, so setzt man

$$\sum a_{n\lambda}^{(2)} = -\sum a_{n\lambda}^{(1)} + \varepsilon_n \qquad (\varepsilon_n \to 0).$$

Aus (21) folgt dann, daß $\sum a_{n\lambda}^{(1)}$ gegen $\frac{z - a^{(3)}}{a^{(1)} - a^{(2)}}$ strebt. Da

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \geqq \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{n\lambda}^{(1)}| + \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{n\lambda}^{(2)}| + \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{n\lambda}^{(3)}| \geqq 2\,\frac{|z - a^{(3)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|} + 1 + \varepsilon_n',$$

wo ε_n' gegen 0 strebt, so findet man aus der Voraussetzung

$$\operatorname{fin}_{\{\zeta\}} \frac{\mathsf{Z}\,|z - a^{(3)}| + |z-\zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|} > K$$

mit Hilfe von (b) auch in diesem Fall

$$\text{(VIIb)} \qquad \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \right) > K.$$

Durch (VIIa) und (VIIb) ist die Behauptung bewiesen.

Wir fassen die Resultate zusammen in dem

Satz. *Besitzt* (s_n) *genau die drei nicht in einer Geraden liegenden Häufungspunkte* $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}$, *so ist* (s_n) *zu einem beliebigen Wert* z *durch reguläre Matrizen jeder Norm* $N \geqq N^{(3)}(z)$ *limitierbar, wo*

$$N^{(3)}(z) = \operatorname{fin}_{\{\zeta\}} \frac{\mathsf{Z}\,|z - a^{(3)}| + |z-\zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|}$$

ist. Keine reguläre Matrix geringerer Norm leistet dasselbe.

8. $\mathfrak{M}^{(3)}(K; a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ *ist unabhängig von der Reihenfolge der* $a^{(\varkappa)}$ *und ist ein konvexes abgeschlossenes Gebiet.*

Weil $\mathfrak{M}^{(3)}(K; a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)})$ genau die Punkte darstellt, zu denen (s_n) durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar ist, kann $\mathfrak{M}^{(3)}$ von der Reihenfolge der $a^{(\varkappa)}$ nicht abhängen.

Weil $\mathfrak{M}^{(3)}$ perfekt, ist nur noch zu zeigen, daß sämtliche Punkte der Verbindungsstrecke zweier innerer Punkte z_1 und z_2 von $\mathfrak{M}^{(3)}$ innere Punkte von $\mathfrak{M}^{(3)}$ sind. Zu z_1 und z_2 gibt es nämlich nach **3.**, **4.** und **6.**

reguläre Matrizen $(a_{n\nu}^{(1)})$ und $(a_{n\nu}^{(2)})$, beide von einer Norm kleiner als K, so daß, wenn (s_n) die Ausgangsfolge mit den Häufungspunkten $a^{(1)}$, $a^{(2)}$, $a^{(3)}$ ist, $\sum a_{n\nu}^{(1)} s_\nu$ gegen z_1 und $\sum a_{n\nu}^{(2)} s_\nu$ gegen z_2 strebt. Jeder Punkt der Verbindungsstrecke $z_1 \dots z_2$ ist dargestellt durch $z = z_1 + \tau(z_2 - z_1)$ $(0 < \tau < 1)$, also strebt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu = \sum [a_{n\nu}^{(1)} + \tau (a_{n\nu}^{(2)} - a_{n\nu}^{(1)})] s_\nu \to z.$$

Die Norm der regulären Transformationsmatrix $(a_{n\nu}^{(1)} + \tau(a_{n\nu}^{(2)} - a_{n\nu}^{(1)}))$ ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \right) \leqq (1-\tau) \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum |a_{n\nu}^{(1)}| \right) + \tau \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum |a_{n\nu}^{(2)}| \right) < K,$$

z demnach innerer Punkt von $\mathfrak{M}^{(3)}(K)$.

§ 3.

Die Ecken eines konvexen p-Ecks seien die Häufungspunkte von (s_n).

Untersucht man Folgen, deren Häufungspunkte die Ecken eines konvexen Vierecks sind, so gewinnt man analog entsprechende Resultate. Dies legt einen Induktionsschluß auf Folgen nahe, deren Häufungspunkte in den Ecken eines konvexen p-Ecks liegen.

1. *Definition einer Punktmenge* $\mathfrak{M}^{(p)}$.

Im Satze des letzten Paragraphen war jedem z durch

$$N^{(3)}(z) = \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z\,|z - a^{(3)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(3)}|}$$

eine Konstante zugeordnet. Denken wir uns nun $\zeta^{(4)}$ statt z, $Z^{(4)}$ statt $N^{(3)}(z)$, $\zeta^{(3)}$ für ζ und $Z^{(3)}$ für Z geschrieben, so kann als *Induktionsvoraussetzung* benützt werden:

Jedem $\zeta^{(p)}$ ist nach Vorgabe des konvexen $(p-1)$-Ecks $a^{(1)} \dots a^{(p-1)}$ durch

$$Z^{(p)} = \operatorname*{fin}_{\{\zeta^{(p-1)}\}} \frac{Z^{(p-1)}\,|\zeta^{(p)} - a^{(p-1)}| + |\zeta^{(p)} - \zeta^{(p-1)}|}{|\zeta^{(p-1)} - a^{(p-1)}|} \tag{1}$$

ein Wert zugewiesen. $\{\zeta^{(p-1)}\}$ bezeichnet eine überall dichte Menge mit der Einschränkung $\zeta^{(p-1)} \neq a^{(p-1)}$, $Z^{(p-1)}$ ist durch die entsprechende Formel erklärt, wo der Buchstabe p um eine Einheit kleiner zu denken ist, falls $p \geqq 4$. Unter $Z^{(3)}$ ist der Wert $\frac{|\zeta^{(3)} - a^{(1)}| + |\zeta^{(3)} - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|}$ zu verstehen. $Z^{(p)} = 1$ gilt genau dann, wenn $\zeta^{(p)}$ Punkt des $(p-1)$-Ecks $a^{(1)} \dots a^{(p-1)}$ ist. $Z^{(p)}$ ist stetig in $\zeta^{(p)}$, und $\frac{Z^{(p)}}{|\zeta^{(p)}|}$ strebt für $\zeta^{(p)} \to \infty$ dem positiven endlichen Grenzwert $L^{(p-1)} = \operatorname*{fin}_{\{\zeta^{(p-1)}\}} \frac{Z^{(p-1)} + 1}{|\zeta^{(p-1)} - a^{(p-1)}|}$ zu.

Die entsprechenden Tatsachen sind in § 2 für $p = 4$ bewiesen. Ohne Verwechslungen befürchten zu müssen, können wir in den folgenden Abschnitten statt $\zeta^{(p)}$ einfach ζ, statt $Z^{(p)}$ Z schreiben.

$a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ seien die Eckpunkte eines konvexen p-Ecks. Für jedes $\zeta \neq a^{(p)}$ kann mit Hilfe von (1) die Funktion

$$\frac{Z\,|z-a^{(p)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(p)}|} \tag{2}$$

gebildet werden. Weil Z in ζ stetig, ist (2) für festes z stetig in $\zeta \neq a^{(p)}$. Jede Funktion (2) ist stetig in z, und es gilt:

$$\lim_{\zeta \to a^{(p)}} \frac{Z\,|z-a^{(p)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(p)}|} = \infty, \quad \text{falls } z \neq a^{(p)}. \tag{a}$$

$$\lim_{\zeta \to \infty} \frac{Z\,|z-a^{(p)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(p)}|} = L^{(p-1)}\,|z-a^{(p)}|+1 \tag{b}$$

existiert nach der Induktionsvoraussetzung über $\frac{Z}{|\zeta|}$.

$$\lim_{z \to \infty} \frac{Z\,|z-a^{(p)}|+|z-\zeta|}{|z|\,|\zeta-a^{(p)}|} = \frac{Z+1}{|\zeta-a^{(p)}|} \qquad (\zeta \neq a^{(p)}). \tag{c}$$

Ähnlich wie im entsprechenden Fall für drei Punkte zeigt man:

Die Gesamtheit der Punkte z, für welche die Funktion (2) bei geeigneter Wahl von ζ den Wert 1 annehmen kann, ist identisch mit den Punkten des konvexen p-Ecks $a^{(1)}\,a^{(2)} \ldots a^{(p)}$.

Man bestimme nun alle z, für die bei gegebenem $K > 1$ und $\zeta \neq a^{(p)}$

$$\frac{Z\,|z-a^{(p)}|+|z-\zeta|}{|\zeta-a^{(p)}|} \leqq K \tag{I}$$

ist. (I) stellt ein abgeschlossenes Gebiet dar. Wie in § 3, **1.** zeigt man, daß die für irgendeine Punktmenge $\{\zeta\}$ definierten Bereiche (I) gleichmäßig beschränkt sind. Man hat im Beweise nur $\frac{2}{|a^{(1)}-a^{(2)}|}$ durch den nach Voraussetzung existierenden, positiven Wert

$$L^{(p-1)} = \operatorname*{fin}_{\{\zeta^{(p-1)}\}} \frac{Z^{(p-1)}+1}{|\zeta^{(p-1)}-a^{(p-1)}|},$$

im übrigen die obern Indizes 3 sinnentsprechend durch p, 2 durch $p-1$ zu ersetzen.

Wählt man jetzt eine in der ganzen Ebene dichte Menge $\{\zeta\}$ $(\zeta \neq a^{(p)})$, so ist dafür in (I) eine Menge nicht leerer Punktmengen definiert. Wir bilden ihre Summe $\mathfrak{S}$ und gewinnen nötigenfalls unter Hinzunahme der Randpunkte von $\mathfrak{S}$ eine beschränkte abgeschlossene Menge

$$\mathfrak{M}^{(p)} = \mathfrak{M}^{(p)}(K; \{\zeta\}; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)}) = \mathfrak{M}^{(p)}(K; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)}).$$

Die Bereiche (I) heißen die *Elementarbereiche der Menge* $\mathfrak{M}^{(p)}$. — Nun gilt

2. $\mathfrak{M}^{(p)}$ *ist perfekt und unabhängig von der Wahl von* $\{\zeta\}$.

3. *K und K' seien Konstanten mit* $1 \leqq K < K'$, *ferner* $\mathfrak{M}^{(p)} = \mathfrak{M}^{(p)}(K; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)})$ *und* $\mathfrak{N}^{(p)} = \mathfrak{N}^{(p)}(K'; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)})$ *die nach* **1.** *konstruierten Mengen, wobei unter* $\mathfrak{M}^{(p)}(1; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)})$ *eventuell die Punkte des konvexen p-Ecks* $a^{(1)}\, a^{(2)} \ldots a^{(p)}$ *zu verstehen sind. Dann liegt* $\mathfrak{M}^{(p)}$ *total in* $\mathfrak{N}^{(p)}$.

4. *Jedem nicht zum konvexen Polygon* $a^{(1)}\, a^{(2)} \ldots a^{(p)}$ *gehörigen Punkte* $z^{(p)}$ *kommt eindeutig ein* $N^{(p)}(z^{(p)}) > 1$ *zu, so daß* $z^{(p)}$ *Randpunkt der nach* **1.** *gebildeten Menge* $\mathfrak{M}^{(p)} = \mathfrak{M}^{(p)}(N^{(p)}(z^{(p)}); a^{(1)}, \ldots, a^{(p)})$ *ist. Es ist*

$$N^{(p)}(z^{(p)}) = \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z\,|z^{(p)} - a^{(p)}| + |z^{(p)} - \zeta|}{|\zeta - a^{(p)}|}. \tag{IV}$$

5. *Zwei Eigenschaften der Funktion* $N^{(p)}(z)$.

A. *Stetigkeit.*

B. $$\lim_{z\to\infty} \frac{N^{(p)}(z)}{|z|} = \lim_{z\to\infty} \left[\frac{1}{|z|} \cdot \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z\,|z - a^{(p)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(p)}|}\right] = \operatorname*{fin}_{\{\zeta\}} \frac{Z+1}{|\zeta - a^{(p)}|}$$

existiert als positiver endlicher Wert.

Die Beweise zu **2.** bis **5.** stehen vollständig in den entsprechenden Abschnitten des § 2. Nur hat man zu ersetzen: (7) durch

$$\lim_{\zeta\to\infty} \frac{Z}{|\zeta|} = \operatorname*{fin}_{\{\zeta^{(p-1)}\}} \frac{Z^{(p-1)} + 1}{|\zeta^{(p-1)} - a^{(p-1)}|} = L^{(p-1)}, \tag{7}$$

Wendungen wie „Dreieck $a^{(1)}\, a^{(2)}\, a^{(3)}$“ durch „konvexes Polygon $a^{(1)}\, a^{(2)} \ldots a^{(p)}$“ und die oberen Indizes 2 und 3 durch $p-1$ und p.

Damit ist der die Funktion $N^{(p)}(z)$ betreffende Induktionsbeweis vollendet, da die für $p-1$ vorausgesetzten, für die Werte 2 und 3 bewiesenen Beziehungen nun auch für den Wert p gelten.

6. *Jede Folge* (s_n), *deren Häufungspunkte die Ecken eines konvexen p-Ecks* $a^{(1)} \ldots a^{(p)}$ *sind, ist nach Vorgabe einer Konstanten* $K \geqq 1$ *zu jedem Werte der nach* **1.** *konstruierten Menge* $\mathfrak{M}^{(p)}(K; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)})$ *durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar,* wobei $\mathfrak{M}^{(p)}(1; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)})$ die Punkte des konvexen p-Ecks $a^{(1)} \ldots a^{(p)}$ bedeutet.

Als weitere *Induktionsvoraussetzung* wird benützt, daß eine Folge (s_n) mit den Häufungspunkten in den Ecken eines konvexen $(p-1)$-Ecks zu einem beliebigen Werte ζ durch reguläre Matrizen der Norm Z limitierbar ist, wo Z in (1) definiert ist. Für $p = 3$ ist diese Voraussetzung als richtig erwiesen.

Jede Folge der genannten Art kann in p Teilfolgen $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ zerlegt werden, so daß jedes Glied von (s_n) in genau einer dieser Folgen vorkommt und $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ gegen $a^{(\varkappa)}$ strebt $(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$. Wie in § 2 behandeln wir die Fälle $K = 1$ und $K > 1$ getrennt.

a) $K = 1$. z ist also Punkt des p-Ecks $a^{(1)} \ldots a^{(p)}$.

Jeder Punkt des Polygons $a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(p)}$ läßt sich in der Form

$$z = \frac{\lambda_1 a^{(1)} + \lambda_2 a^{(2)} + \ldots + \lambda_p a^{(p)}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p} \tag{17}$$

darstellen, wobei alle $\lambda_\varkappa \geqq 0$ sind und $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p > 0$ ist[5]).

Man wähle nun aus (s_n) p Glieder $s_{\nu_{\varkappa n}}$ $(\varkappa = 1, 2, \ldots, p)$ aus, deren Indizes größer als n sind und die der Bedingung genügen, daß $s_{\nu_{\varkappa n}}$ zu $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ gehört. Dann setzt man

$$a_{n\nu} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_\varkappa}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p} & \text{für } \nu = \nu_{\varkappa n}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{18}$$

$(a_{n\nu})$ ist regulär, hat die Norm 1, und nach (17) strebt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu = \frac{\lambda_1 s_{\nu_{1n}} + \lambda_2 s_{\nu_{2n}} + \ldots + \lambda_p s_{\nu_{pn}}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_p} \longrightarrow z.$$

b) $K > 1$. (σ'_λ) sei jetzt die nach Aussonderung von $(\sigma_\lambda^{(p)})$ aus (s_n) übrig bleibende Folge mit den Häufungswerten $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p-1)}$. Der weitere Beweis ist nur unwesentlich von dem in § 2, 6. verschieden und wird deshalb unterdrückt.

7. *Die Folge (s_n), deren Häufungspunkte in den Ecken eines konvexen p-Ecks liegen, ist zu keinem außerhalb $\mathfrak{M}^{(p)}(K; a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)})$ liegenden Wert durch reguläre Matrizen einer Norm $N \leqq K$ limitierbar $(K \geqq 1)$.*

Wie in 6. wird (s_n) in p Teilfolgen $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ zerlegt. Ähnlich wie in § 2, 7. werden die Reihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}$ mit Hilfe dieser Zerlegung je in p absolut konvergente Reihen $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}$ geteilt, indem man $a_{n\nu} = a_{n\lambda}^{(\varkappa)}$ setzt, falls s_ν das λ-te Glied von $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$ ist $(\varkappa = 1, 2, \ldots$ oder $p)$.

Aus $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right) \longrightarrow z$ folgt dann

$$\frac{\sum_{\varkappa=1}^{p} a^{(\varkappa)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}}{\sum_{\varkappa=1}^{p} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}} \longrightarrow z \quad \text{für } n \longrightarrow \infty. \tag{21}$$

---

[5]) Wesentlich weitergehende Sätze dieser Art finden sich in E. Steinitz, Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme, Journal für die reine und angewandte Mathematik **143** (1913), S. 128–175.

Induktionsvoraussetzung ist, daß eine Folge (s_n) mit den Häufungspunkten in den Ecken eines konvexen $(p-1)$-Ecks $a^{(1)} \dots a^{(p-1)}$ durch reguläre Matrizen der Norm $K\ (\geqq 1)$ genau zu den Punkten von $\mathfrak{M}^{(p-1)}(K; a^{(1)}, \dots, a^{(p-1)})$ limitierbar ist. In § 3 ist dies für $p = 4$ gezeigt.

Wir treffen nun die Einschränkung:

A. *Es existiere ein* $\delta > 0$, *so daß für eine Teilfolge der* n

$$\left| \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} \right| \geqq \delta. \tag{22}$$

Man setzt

$$\zeta_n = \frac{\sum_{\varkappa=1}^{p-1} a^{(\varkappa)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}}{\sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}} \quad \text{und} \quad q_n = \frac{\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(p)}}{\sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}} \tag{23}$$

und findet, nachdem Zähler und Nenner in (21) durch $\sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}$ dividiert sind, daß $\frac{\zeta_n + q_n}{1 + q_n}$ gegen z strebt.

(ζ_n) ist beschränkt, besitzt also einen Häufungspunkt ζ, dem in (1) ein Z zugewiesen ist. Diejenige Folge, die nach Aussonderung von $(\sigma_\lambda^{(p)})$ aus (s_n) übrig bleibt, nennt man (σ'_μ). Man setzt $a'_{n\mu} = \frac{a_{n\lambda}^{(\varkappa)}}{\sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}}$, falls σ'_μ das λ-te Glied von $(\sigma_\lambda^{(\varkappa)})$. Da mit der Matrix $(a_{n\nu})$ auch $(a'_{n\mu})$ regulär ist und und da $\sum_{\mu=0}^{\infty} a'_{n\mu} \sigma'_\mu$ den Häufungspunkt ζ hat, ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{n\lambda}^{(\varkappa)}|}{\left| \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=1}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} \right|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\sum_{\mu=0}^{\infty} |a'_{n\mu}|}{\left| \sum_{\mu=0}^{\infty} a'_{n\mu} \right|} \geqq Z.$$

Wegen (21) besitzt auch $\frac{\zeta + q_n}{1 + q_n}$ den Häufungsqunkt z, und daraus folgt, daß q_n den Häufungspunkt $\frac{\zeta - z}{z - a^{(p)}}$ hat. Die Beziehung

$$\frac{\Sigma |a_{n\nu}|}{|\Sigma a_{n\nu}|} = \frac{\sum_{\varkappa=1}^{p} \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{n\lambda}^{(\varkappa)}|}{\left| \sum_{\varkappa=1}^{p} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} \right|} \geqq \left(\frac{\Sigma |a'_{n\mu}|}{|\Sigma a'_{n\mu}|} + |q_n| \right) : (1 + q_n)$$

ergibt, wie man leicht erkennt, schließlich

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' a_{n\nu} \right) \geqq \frac{Z\,|z - a^{(p)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(p)}|} > K. \tag{VII a}$$

B. *Strebt aber* $\sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} \to 0$, *also* $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(p)} \to 1$ *für* $n \to \infty$, so wird

$$\varrho_n = \sum_{\varkappa=1}^{p-2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} = -\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(p-1)} + \varepsilon_n$$

gesetzt. (21) ist dann identisch damit, daß

$$\sum_{\varkappa=1}^{p-1} a^{(\varkappa)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} \to z - a^{(p)}$$

strebt. Wir nehmen nun an, daß ein $\delta > 0$ gefunden werden kann, so daß für unendlich viele n $\varrho_n \geqq \delta$ ist. Dann kann durch ϱ_n dividiert, also

$$\varrho_n \left\{ \frac{\sum_{\varkappa=1}^{p-2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} \cdot a^{(\varkappa)}}{\sum_{\varkappa=1}^{p-2} \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}} - a^{(p-1)} \right\} = z - a^{(p)} + \varepsilon_n$$

gesetzt werden. Die Folge der Brüche dieser Klammer ist beschränkt, besitzt also einen Häufungspunkt $\zeta^{(p-1)}$.

Falls $\zeta^{(p-1)} \neq a^{(p-1)}$, hat ϱ_n den Häufungspunkt $\frac{z - a^{(p)}}{\zeta^{(p-1)} - a^{(p-1)}}$.

Unter Benutzung der Induktionsvoraussetzung gilt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = \sum_{\varkappa=1}^{p-1} \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{n\lambda}^{(\varkappa)}| + \sum_{\lambda=0}^{\infty} |a_{n\lambda}^{(p)}| \geqq |\varrho_n| \, (Z^{(p-1)} + 1) + 1 + \varepsilon_n',$$

also nach (b)

$$\text{(VII b)} \quad \overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \right) \geqq \lim_{\zeta \to \infty} \frac{Z \, |z - a^{(p)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(p)}|} \geqq N^{(p)}(z) > K.$$

Falls aber $\zeta^{(p-1)} = a^{(p-1)}$, ist $z = a^{(p)}$. Dem Punkte $a^{(p)}$ ist in Erweiterung von (IV) die Konstante $N^{(p)}(z) = 1$ zugewiesen. Jede reguläre Matrix (also speziell jede, die (s_n) zum Werte $a^{(p)}$ limitiert) hat eine Norm $\geqq 1$, so daß die Behauptung auch in diesem Fall gilt.

Strebt aber ϱ_n gegen 0, so kann angenommen werden, daß wenigstens eine der Reihen $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)}$ $(1 \leqq \varkappa \leqq (p-2))$ für unendlich viele n ihrem absoluten Wert nach $\geqq \delta > 0$ ist. Denn sonst wäre $z = a^{(p)}$, und man könnte genau so schließen wie oben.

Wir setzen nun dasjenige $a^{(\varkappa)}$, für welches unendlich oft $\left| \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda}^{(\varkappa)} \right| \geqq \delta > 0$ ist, gleich $b^{(p-1)}$, die übrigen Werte $a^{(1)}, \ldots, a^{(p-1)}$ der Reihe nach gleich $b^{(1)}, \ldots, b^{(p-2)}$. Nach der Induktionsvoraussetzung ist

$$\mathfrak{M}^{(p-1)}(K; a^{(1)}, \ldots, a^{(p-1)}) = \mathfrak{M}^{(p-1)}(K; b^{(1)}, \ldots, b^{(p-1)})$$

die Gesamtheit der Punkte, zu denen eine Folge mit den Häufungspunkten $a^{(1)}, \ldots, a^{(p-1)}$ vermittels regulärer Matrizen der Norm K limitierbar ist. z als äußerer Punkt von $\mathfrak{M}^{(p)}(K; a^{(1)}, \ldots, a^{(p)})$ ist auch äußerer Punkt von $\mathfrak{M}^{(p)}(K; b^{(1)}, \ldots, b^{(p-1)}, a^{(p)})$. Somit gilt

$$\text{(VII c)} \quad \overline{\lim_{n \to \infty}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \right) > K.$$

Durch die Formeln (VII) ist die Behauptung vollständig bewiesen.

Satz. *Ist* (s_n) *eine Folge, deren Häufungspunkte die Ecken eines konvexen* p*-Ecks* $a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(p)}$ $(p \geqq 3)$ *sind, so ist sie zu einem beliebigen Wert* $z^{(p)}$ *durch reguläre Matrizen jeder Norm* $N \geqq N^{(p)}(z^{(p)})$ *limitierbar, wo* $N^{(p)}(z^{(p)})$ *aus* (IV) *zu entnehmen ist. Keine reguläre Matrix geringerer Norm leistet dasselbe.*

8. Genau wie in § 2, 8. weist man nach, daß $\mathfrak{M}^{(p)}(K; a^{(1)}, \dots, a^{(p)})$ *von der Reihenfolge der* $a^{(\varkappa)}$ *unabhängig* ist und *ein konvexes abgeschlossenes Gebiet* darstellt.

§ 4.

(s_n) besitze den polygonalen Kern $\mathfrak{K}^{(p)}$.

Die Aussage, (s_n) besitze den polygonalen Kern $\mathfrak{K}^{(p)}$, bedeutet: Der kleinste konvexe Bereich, der sämtliche Häufungspunkte von (s_n) enthält, ist das Polygon $a^{(1)} \dots a^{(p)}$. Man zeigt leicht:

Besitzt (s_n) *einen polygonalen Kern mit der Ecke* a, *so ist* a *notwendig Häufungsstelle von* (s_n).

Wir betrachten nun eine Folge (s_n), deren *Kern das konvexe* p*-Eck* $\mathfrak{K}^{(p)} = a^{(1)} a^{(2)} \dots a^{(p)}$ $(p \geqq 2)$ ist; (s_n) habe aber neben den Eckpunkten von $\mathfrak{K}^{(p)}$ weitere Häufungspunkte. Ist $K \geqq 1$ gegeben, so ist (s_n) zu jedem Punkte des nach § 3, **1.** gebildeten Bereichs $\mathfrak{M}^{(p)}(K; \mathfrak{K}^{(p)}) = \mathfrak{M}^{(p)}(K; a^{(1)}, \dots, a^{(p)})$ durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar.

(σ'_μ) sei eine Teilfolge von (s_n), die genau die Häufungspunkte $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(p)}$ hat. Nach dem Satze des § 3 gibt es eine reguläre Matrix $(a'_{n\mu})$ der Norm K, so daß, falls z zu $\mathfrak{M}^{(p)}$ gehört, $\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} a'_{n\mu} \sigma'_\mu\right)$ gegen z strebt. Setzt man

$$a_{n\nu} = \begin{cases} a'_{n\mu}, & \text{falls } s_\nu \text{ das } \mu\text{-te Glied von } (\sigma'_\mu) \text{ ist,} \\ 0, & \text{falls } s_\nu \text{ nicht zu } (\sigma'_\mu) \text{ gehört,} \end{cases}$$

so ist $(a_{n\nu})$ regulär, hat die Norm K, und $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right)$ strebt gegen z.

Wir zeigen noch: Wenn $(t_n) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right)$ gegen z strebt, hat die reguläre Matrix $(a_{n\nu})$ mindestens die Norm $N^{(p)}(z)$.

Es sei eine reguläre Matrix $(a_{n\nu})$ und eine außerhalb $\mathfrak{M}^{(p)}$ liegende Stelle z_0 bekannt, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ gegen z_0 für $n \to \infty$ strebt.

z_0 habe von $\mathfrak{M}^{(p)}$ den Abstand d. Für alle $|z - z_0| \leqq \frac{d}{2}$ ist dann

$$N^{(p)}(z) = \underset{\{\zeta\}}{\underline{\text{fin}}} \frac{Z\,|z - a^{(p)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(p)}|} \geqq K + \delta \qquad (\delta > 0). \tag{1}$$

M sei irgendeine für hinreichend großes n gültige Schranke von $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}|a_{n\nu}|\right)$. Der Kern von (s_n) wird in ein achsenparalleles Quadrat eingeschlossen, dessen Rand von $\mathfrak{R}^{(p)}$ einen Abstand $\geqq \frac{d}{4}$ hat, hierauf dieses Quadrat durch Parallelen gleichen Abstands in Quadrate $\mathfrak{q}$ geteilt, deren Seitenlänge kleiner als $\frac{d}{8M}$ ist. Weiter sollen keine zwei der Werte $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}$ im selben Quadrat liegen.

Je eines der Quadrate, die den Punkt $a^{(\varkappa)}$ enthalten, wird markiert und $\mathfrak{q}_\varkappa$ genannt $(1 \leqq \varkappa \leqq p)$. In jedem weiteren, Punkte von $\mathfrak{R}^{(p)}$ enthaltenden Quadrat wird ein Punkt $a^{(\varkappa)}$ von $\mathfrak{R}^{(p)}$ willkürlich festgelegt $(p+1 \leqq \varkappa \leqq v)$. So erhalten wir insgesamt v Punkte. Alle Punkte, deren Abstand von $\mathfrak{R}^{(p)}$ nicht größer als $\frac{d}{4M}$ ist, lassen sich mit Hilfe eines geeigneten $a^{(\varkappa)}$ in der Form darstellen:

$$z = a^{(\varkappa)} + d^{(\varkappa)}, \quad \text{wo} \quad |d^{(\varkappa)}| < \frac{d}{2M}.$$

Von einer Nummer ν_0 ab sind sämtliche s_ν solche Punkte, also gilt dafür

$$s_\nu = a^{(\varkappa)} + d_\nu^{(\varkappa)} \quad \text{mit} \quad |d_\nu^{(\varkappa)}| < \frac{d}{2M}. \tag{2}$$

Bezeichnet man wieder $a_{n\nu}$ mit $a_{n\mu}^{(\varkappa)}$, falls s_ν das μ-te Glied der Folge (s_n) ist, das in (2) mit Hilfe von $a^{(\varkappa)}$ dargestellt ist, so ist

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\nu_0} a_{n\nu} s_\nu + \sum_{\varkappa=1}^{v} a^{(\varkappa)} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n\mu}^{(\varkappa)} + \sum_{\varkappa=1}^{v} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n\mu}^{(\varkappa)} d_\mu^{(\varkappa)}.$$

Die Reihe $\sum_{\varkappa=1}^{v} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n\mu}^{(\varkappa)} d_\mu^{(\varkappa)}$ konvergiert absolut für jedes n, ihr Wert sei ϑ_n $\left(|\vartheta_n| < \frac{d}{2}\right)$. ϑ sei ein Häufungspunkt der Folge (ϑ_n). Demnach besitzt $\sum_{\varkappa=1}^{v} a^{(\varkappa)} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n\mu}^{(\varkappa)}$ den Häufungswert $z_0 - \vartheta$. Nach § 3, (17) werden jetzt die $a^{(\varkappa)}$ $(p+1 \leqq \varkappa \leqq v)$ durch

$$a^{(\varkappa)} = \frac{\lambda_1^{(\varkappa)} a^{(1)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)} a^{(p)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)}} \qquad (\lambda_\pi^{(\varkappa)} \geqq 0;\ \lambda_1^{(\varkappa)} + \lambda_2^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)} > 0) \tag{3}$$

dargestellt. Dann haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{\varkappa=1}^{v} a^{(\varkappa)} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n\mu}^{(\varkappa)} &= \sum_{\varkappa=1}^{v} \sum_{\pi=1}^{p} \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)} a^{(\pi)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)}} \sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n\mu}^{(\varkappa)} \\ &= \sum_{\pi=1}^{p} a^{(\pi)} \sum_{\varkappa=1}^{v} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)} a_{n\mu}^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)}}. \end{aligned} \tag{4}$$

Wir bilden nun eine Matrix (b_{nm}), indem wir unter Verwendung von (3) jede Spalte von $(a_{n\nu})$ in die p Spalten

$$\frac{\lambda_1^{(\varkappa)} a_{n\mu}^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)}+\ldots+\lambda_p^{(\varkappa)}}, \ldots, \frac{\lambda_p^{(\varkappa)} a_{n\mu}^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)}+\ldots+\lambda_p^{(\varkappa)}}$$

zerlegen. Man bestimmt hierauf die beiden ganzen Zahlen ν und π aus

$$m = p\cdot\nu + \pi - 1 \qquad (0 < \pi \leqq p),$$

dann $\varkappa$, mit dessen Hilfe s_ν in (2) dargestellt ist, und setzt

$$b_{nm} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_\pi^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)}+\ldots+\lambda_p^{(\varkappa)}} a_{n\mu}^{(\varkappa)}, & \text{falls } \nu > \nu_0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \tag{5}$$

Wegen

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \geqq \sum_{\nu=\nu_0+1}^{\infty} |a_{n\nu}| = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=1}^{\nu}\sum_{\pi=1}^{p} \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)}+\ldots+\lambda_p^{(\varkappa)}} |a_{n\mu}^{(\varkappa)}| = \sum_{m=0}^{\infty} |b_{nm}|$$

darf umgeordnet und zusammengefaßt werden. Man erkennt dann leicht, daß (b_{nm}) regulär ist und daß die Norm von (b_{nm}) gleich der von $(a_{n\nu})$ ist.

Nun wird eine Folge (s_m^*) mittels des oben bestimmten π festgelegt durch

$$s_m^* = \begin{cases} a^{(\pi)}, & \text{falls } \nu > \nu_0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases} \tag{6}$$

Die Reihen $\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} s_m^*$ konvergieren absolut, also ist beliebige Umordnung möglich und nach Konstruktion von (b_{nm})

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} s_m^* = \sum_{\pi=1}^{p} a^{(\pi)} \sum_{\varkappa=1}^{\nu}\sum_{\mu=0}^{\infty} a_{n\mu}^{(\varkappa)} \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)}+\ldots+\lambda_p^{(\varkappa)}}.$$

Wegen (4) besitzt $\sum b_{nm} s_m^*$ den Häufungspunkt $z_0 - \vartheta$. Auf (s_m^*) können wir den Satz des § 4 anwenden; unter Beachtung von (1) ergibt sich dann $\left(|\vartheta| \leqq \frac{d}{2}\right)$

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|\right) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{m=0}^{\infty} |b_{nm}|\right) \geqq K + \delta.$$

Damit ist bewiesen:

Satz. *Eine Folge (s_n) mit dem Kerne $\mathfrak{K}^{(p)}$ ist genau zu den Punkten der Menge $\mathfrak{M}^{(p)}(K; \mathfrak{K}^{(p)})$ durch reguläre Matrizen der Norm K $(K \geqq 1)$ limitierbar.*

Wir beweisen noch den

Satz. *Wenn der Kern $\mathfrak{K}^{(q)}$ im Kern $\mathfrak{K}^{(p)}$ liegt, d. h. jeder Punkt von $\mathfrak{K}^{(q)}$ auch Punkt von $\mathfrak{K}^{(p)}$ ist (p und q beide $\geqq 2$ ganz), dann liegt $\mathfrak{M}^{(q)}(K; \mathfrak{K}^{(q)})$ in $\mathfrak{M}^{(p)}(K; \mathfrak{K}^{(p)})$ $(K \geqq 1)$.*

Beweis. Besitzt (s_n) den Kern $\mathfrak{K}^{(q)}$ und ist z ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{M}^{(q)}(K; \mathfrak{K}^{(q)})$, so existiert eine reguläre Matrix (b_{nm}) der Norm K und eine Folge (s_m^*), die als Häufungspunkte die Ecken von $\mathfrak{K}^{(q)}$ hat, und es strebt $\sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} s_m^*$ gegen z. Die Punkte $b^{(\varkappa)}$, die Eckpunkte von $\mathfrak{K}^{(q)}$, stellen wir jetzt nach § 3, (17) unter den dort genannten Voraussetzungen über die λ mit Hilfe der Eckpunkte $a^{(1)}, \ldots, a^{(p)}$ von $\mathfrak{K}^{(p)}$ dar als

$$b^{(\varkappa)} = \frac{\lambda_1^{(\varkappa)} a^{(1)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)} a^{(p)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)}} \qquad (1 \leqq \varkappa \leqq q).$$

Dann ist

$$\sum_{\varkappa=1}^{q} b^{(\varkappa)} \sum_{\mu=0}^{\infty} b_{n\mu}^{(\varkappa)} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} s_m^* = \sum_{\pi=1}^{p} a^{(\pi)} \sum_{\varkappa=1}^{q} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)}} b_{n\mu}^{(\varkappa)}.$$

Man bestimmt nun $\mu, \pi, \varkappa$ als ganze Zahlen aus m durch

$$m = pq \cdot \mu + p(\varkappa - 1) + (\pi - 1) \quad (0 < \pi \leqq p;\ 0 < \varkappa \leqq q)$$

und setzt

$$S_m^* = a^{(\pi)}; \qquad B_{nm} = \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)}} b_{n\mu}^{(\varkappa)};$$

(B_{nm}) ist regulär. Wegen der Voraussetzung über die λ ist Umordnung möglich und

$$\sum_{m=0}^{\infty} |B_{nm}| = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=1}^{q} \sum_{\pi=1}^{p} \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)}} |b_{n\mu}^{(\varkappa)}| = \sum_{m=0}^{\infty} |b_{nm}|.$$

Weiterhin gilt, daß

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_{nm} S_m^* = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=1}^{q} \sum_{\pi=1}^{p} \frac{\lambda_\pi^{(\varkappa)}}{\lambda_1^{(\varkappa)} + \ldots + \lambda_p^{(\varkappa)}} a^{(\pi)} b_{n\mu}^{(\varkappa)} = \sum_{m=0}^{\infty} b_{nm} s_m^*$$

mit wachsendem n gegen z strebt. Also ist *eine* Folge und damit *jede* Folge mit dem Kerne $\mathfrak{K}^{(p)}$ zum Werte z mittels regulärer Matrizen der Norm K limitierbar. Jeder Punkt von $\mathfrak{M}^{(q)}$ ist demnach Punkt von $\mathfrak{M}^{(p)}$.

§ 5.

Beliebige Kerne.

Die beschränkte divergente Folge (s_n) besitze den beliebigen nicht polygonalen Kern $\mathfrak{K}$. Dieser ist Grenzbereich polygonaler Gebiete[6]), d. h. es läßt sich eine Folge von Polygonen $\mathfrak{P}_n$ angeben, so daß nach Wahl von $\varepsilon > 0$ für alle hinreichend großen Nummern n der Abstand jedes

[6]) L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie I, 2. Aufl. 1921, S. 89.

Punktes des einen der Bereiche $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{P}_n$ vom andern Bereich kleiner als ε ist. Wir schreiben dies abgekürzt:

$$|\mathfrak{P}_n \mathfrak{R}| < \varepsilon, \quad \text{falls} \quad n > n_0(\varepsilon).$$

Aus $|\mathfrak{P}_n \mathfrak{R}| < \varepsilon$ und $|\mathfrak{P}_m \mathfrak{R}| < \varepsilon$ folgt $|\mathfrak{P}_n \mathfrak{P}_m| < 2\varepsilon$ (m und n fest).

Aus $|\mathfrak{P}_n \mathfrak{R}| < \varepsilon$ für $n > n_0$ folgt $|\mathfrak{P}_n \mathfrak{P}_{n+k}| < 2\varepsilon$ für $n > n_0$, $k \geqq 1$ ganz.

Wir ziehen nur solche Polygone in Betracht, deren Eckpunkte zu $\mathfrak{R}$ gehören. Wegen der Konvexität von $\mathfrak{R}$ sind diese Polygone echte Teilmengen von $\mathfrak{R}$. Folgen solcher Polygone nennen wir *innere Polygonfolgen von* $\mathfrak{R}$.

Wir bilden eine innere, $\mathfrak{R}$ approximierende Polygonfolge wie folgt: $\mathfrak{R}$ wird mit einem Netz von Quadraten der Seitenlänge $\frac{1}{n}$ (n positiv ganz) überdeckt, in jedem Quadrate, das Punkte von $\mathfrak{R}$ enthält, wird ein zu $\mathfrak{R}$ gehöriger Punkt markiert und der kleinste, diese Punkte umschließende konvexe Bereich bestimmt. So erhält man ein ganz in $\mathfrak{R}$ liegendes Polygon $\mathfrak{P}_n$, und es ist

$$|\mathfrak{P}_n \mathfrak{R}| < \frac{2}{n}.$$

Zu einer gegebenen, $\mathfrak{R}$ approximierenden, inneren Polygonfolge $(\mathfrak{P}_n)$ wird eine weitere innere Polygonfolge $(\mathfrak{P}^{(n)})$ bestimmt: $\{\mathfrak{p}_n\}$ sei die Menge der Eckpunkte von $\mathfrak{P}_n$; wir bilden

$$\{\mathfrak{p}_1\} + \{\mathfrak{p}_2\} + \ldots + \{\mathfrak{p}_n\}$$

und dann den kleinsten konvexen Bereich, der diese endlich vielen Punkte umschließt, ein Polygon $\mathfrak{P}^{(n)}$. $(\mathfrak{P}^{(n)})$ ist eine innere, $\mathfrak{R}$ approximierende Polygonfolge. Jedes Glied $\mathfrak{P}^{(n)}$ enthält die durch die vorangehenden Glieder der Folge gegebenen Bereiche. $\mathfrak{P}^{(n)}$ enthält auch $\mathfrak{P}_n$, und nach Wahl von $\varepsilon > 0$ ist n_0 angebbar, so daß

$$|\mathfrak{P}^{(n)} \mathfrak{R}| < \varepsilon \quad \text{für} \quad n > n_0(\varepsilon).$$

1. *Definition einer Punktmenge* $\mathfrak{M}(K; (\mathfrak{P}^{(n)}))$.

$K \geqq 1$ sei gegeben. Wir bestimmen die dem Polygon $\mathfrak{P}^{(n)}$ in den vorangehenden Paragraphen zugeordnete Menge $\mathfrak{M}^{(n)}(K; \mathfrak{P}^{(n)})$ (n braucht hier nicht die Eckenzahl von $\mathfrak{P}^{(n)}$ zu sein). Nach dem zweiten Satz des § 4 ist damit eine „monoton wachsende" Folge von Bereichen $\mathfrak{M}^{(n)}(K; \mathfrak{P}^{(n)})$ definiert. Diese Mengenfolge ist beschränkt, weil $\mathfrak{M}^{(n)}(K; \mathfrak{P}^{(n)})$ die Gesamtheit der Punkte darstellt, zu denen eine Folge mit dem Kerne $\mathfrak{P}^{(n)}$ durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar ist, und weil, wenn die Norm von $(a_{n\nu})$ nicht größer als K und wenn $|s_n| < M$,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu \right| \right) \leqq M \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| \right) \leqq M \cdot K.$$

Also gibt es zu der Mengenfolge $(\mathfrak{M}^{(n)}(K; \mathfrak{P}^{(n)}))$ einen nach Hinzunahme der Randpunkte abgeschlossenen, konvexen beschränkten *Grenzbereich*[7]) $\mathfrak{M}(K; (\mathfrak{P}^{(n)}))$.

2. *Die Folge* (s_n) *mit dem Kerne* $\mathfrak{K}$ *ist zu jedem Werte* z *von* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(K; (\mathfrak{P}^{(n)}))$ *durch reguläre Matrizen der Norm* K *limitierbar.*

Jeder innere Punkt z von $\mathfrak{M}$ gehört ja samt einer δ-Umgebung $(\delta > 0)$ zu $\mathfrak{M}$, also enthalten die Gebiete $\mathfrak{M}^{(n)}$ hinreichend hoher Nummer den Punkt z mit einer vollen $\frac{\delta}{2}$-Umgebung im Innern. Der Folge (s_n) wird jetzt $(s_n^{(\varkappa)})$ zugeordnet: $\varepsilon_\varkappa > 0$ sei zunächst fest. Fast alle Glieder von (s_n) haben von $\mathfrak{K}$ einen Abstand kleiner als $\frac{\varepsilon_\varkappa}{4K}$. Also gilt für $\nu \geqq \nu_\varkappa$

(1) $s_\nu = a_m + \varepsilon_\nu^{(\varkappa)}$, wo $|\varepsilon_\nu^{(\varkappa)}| < \frac{\varepsilon_\varkappa}{2K}$ und a_m Punkt, möglichst Ecke von $\mathfrak{P}^{(n_k)}$.

Mit Hilfe dieses $\varepsilon_\nu^{(\varkappa)}$ definiert man $s_\nu^{(\varkappa)}$ durch

$$(2) \qquad s_\nu^{(\varkappa)} = \begin{cases} s_\nu - \varepsilon_\nu^{(\varkappa)}, & \text{falls } \nu \geqq \nu_\varkappa, \\ 0 \quad , & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Folge ist zu jedem Werte von $\mathfrak{M}^{(n_\varkappa)}$ durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar, also gibt es eine reguläre Matrix $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$ der Norm K, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu^{(\varkappa)}$ gegen z strebt. Weiter gilt:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\nu_\varkappa - 1} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu + \sum_{\nu=\nu_k}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu^{(\varkappa)} + \sum_{\nu=\nu_\varkappa}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} \varepsilon_\nu^{(\varkappa)}$$

besitzt den Häufungspunkt $z + \varepsilon^{(\varkappa)} \left(|\varepsilon^{(\varkappa)}| < \frac{\varepsilon_\varkappa}{2} \right)$. Mit $\varepsilon_\varkappa \to 0$ strebt aber auch $\varepsilon^{(\varkappa)}$ gegen Null. Ähnlich wie in § 2, **6.** zeigt man nun, daß es eine reguläre Matrix $(a_{n\nu})$ der Norm K gibt, für die

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu \right) = z$$

ist, w. z. b. w.

Ist jedoch z Randpunkt von $\mathfrak{M}$, so bestimmen wir eine gegen z strebende Folge innerer Punkte $z_\varkappa$ von $\mathfrak{M}$. Zu jedem $z_\varkappa$ gibt es eine reguläre Matrix $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$ der Norm K, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu$ gegen $z_\varkappa$ strebt; genau wie oben folgt dann, daß es auch eine reguläre Matrix $(a_{n\nu})$ derselben Norm gibt, mit deren Hilfe (s_n) zum Werte z limitierbar ist.

3. *Ist* $(a_{n\nu})$ *eine reguläre Matrix,* $\mathfrak{K}$ *der Kern von* (s_n), z *äußerer Punkt von* $\mathfrak{M}(K; \mathfrak{K})$ *und strebt* $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ *gegen* z, *so ist die Norm von* $(a_{n\nu})$ *größer als* K.

[7]) L. Bieberbach, a. a. O.

Denn hat z den Abstand d von $\mathfrak{M}(K;(\mathfrak{P}^{(n)}))$, so enthält die $\frac{d}{2}$-Umgebung von z nur äußere Punkte von $\mathfrak{M}(K;(\mathfrak{P}^{(n)}))$. $(s_\nu^{(\varkappa)})$ sei wie oben für ein festes $\varepsilon_\varkappa$ in $0<\varepsilon_\varkappa<\frac{d}{2M}$ gebildet. Dann strebt

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu=\sum_{\nu=0}^{\nu_\varkappa-1} a_{n\nu}s_\nu+\sum_{\nu=\nu_\varkappa}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu^{(\varkappa)}+\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}\varepsilon_\nu^{(\varkappa)}$$

gegen z. Für eine Teilfolge der n ist somit

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu^{(\varkappa)}\Big)=z-\varepsilon^{(\varkappa)};\qquad |\varepsilon^{(\varkappa)}|<\frac{d}{2}.$$

$z-\varepsilon^{(\varkappa)}$ liegt samt einer $\frac{d}{2}$-Umgebung im Äußern von $\mathfrak{M}(K;(\mathfrak{P}^{(n)}))$ und von jedem $\mathfrak{M}^{(n)}(K;\mathfrak{P}^{(n)})$. Auf $(a_{n\nu})$ und $(s_\nu^{(\varkappa)})$ kann der erste Satz des § 4 angewandt werden, also ist die Norm dieser Matrix größer als K, da $(s_\nu^{(\varkappa)})$ den polygonalen Kern $\mathfrak{P}^{(n_\varkappa)}$ besitzt.

$\mathfrak{M}(K;(\mathfrak{P}^{(n)}))$ stellt somit genau die Werte dar, zu denen (s_n) durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar ist, ist demnach unabhängig von der speziellen Wahl der Polygonfolge $(\mathfrak{P}^{(n)})$.

Für $K=1$ ist $\mathfrak{M}$ identisch mit dem Kerne $\mathfrak{K}$, d. h. die Punkte von $\mathfrak{K}$ machen genau die Werte aus, zu denen eine Folge (s_n) mit dem Kern $\mathfrak{K}$ durch reguläre Matrizen der Norm 1 limitierbar ist.

4. $\mathfrak{M}(K;\mathfrak{K})$ *liegt total in* $\mathfrak{M}'(K';\mathfrak{K})$, *falls* $1\leqq K<K'$.

z_0 sei irgendein Punkt von $\mathfrak{M}(K)$, dann gibt es eine reguläre Matrix $(a_{n\nu})$ der Norm K, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}s_\nu$ gegen z_0 strebt. $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ seien zwei verschiedene Häufungspunkte von (s_n). Durch Wahl von r und φ ist dann jedes z in der Form

$$z=z_0+r\cdot e^{i\varphi}\cdot\frac{1}{a^{(1)}-a^{(2)}}$$

darstellbar. Nun bestimmt man in der n-ten Zeile von $(a_{n\nu})$ zwei Glieder $a_{n\nu_{1n}}$ und $a_{n\nu_{2n}}$, deren Absolutbetrag kleiner als $\frac{1}{n}$, deren zweite Indizes größer als n und so beschaffen sind, daß

$$|s_{\nu_{1n}}-a^{(1)}|<\frac{1}{n}\quad\text{und}\quad |s_{\nu_{2n}}-a^{(2)}|<\frac{1}{n}$$

ist. Diese beiden Glieder werden ersetzt durch

$$a^*_{n\nu_{1n}}=r\cdot e^{i\varphi}\frac{1}{a^{(1)}-a^{(2)}}\quad\text{und}\quad a^*_{n\nu_{2n}}=-r\cdot e^{i\varphi}\frac{1}{a^{(1)}-a^{(2)}},$$

wo r und φ noch zu bestimmende Werte sind. Die umgeformte Matrix ist regulär, und ihre Norm ist $K+\frac{2r}{|a^{(1)}-a^{(2)}|}$. Da nach den Voraus-

setzungen über $(a_{n\nu})$, ν_{1n} und ν_{2n} die Folge $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{*} s_\nu$ gegen $z_0 + re^{i\varphi}$ strebt, ist (s_n) zu jedem Punkte von

$$|z - z_0| \leqq (K' - K)\frac{|a^{(1)} - a^{(2)}|}{2}$$

durch reguläre Matrizen der Norm K' limitierbar. Nach Definition von $\mathfrak{M}'(K'; \mathfrak{K})$ ist also z innerer Punkt dieser Menge $\mathfrak{M}'$; das war aber die Behauptung.

5. *Jedem Punkte z ist nach Angabe eines Kerns $\mathfrak{K}$ eine Konstante $N(z) \geqq 1$ zugeordnet, so daß jede Folge (s_n) mit dem Kerne $\mathfrak{K}$ durch reguläre Matrizen der Norm $N(z)$ zu diesem Werte limitierbar ist und keine reguläre Matrix geringerer Norm dasselbe leistet. Für Punkte von $\mathfrak{K}$ ist $N(z) = 1$.*

$N(z)$ wird gefunden, indem man zu den Gliedern $\mathfrak{P}^{(n)}$ einer wie oben konstruierten inneren, $\mathfrak{K}$ approximierenden Polygonfolge die durch die Sätze der vorangehenden Paragraphen eindeutig bestimmten Konstanten $N^{(n)}(z)$ festlegt. Der Polygonfolge $(\mathfrak{P}^{(n)})$ entspricht eine monoton fallende Zahlenfolge $(N^{(n)}(z))$ mit der unteren Schranke 1. Und zwar ist $N^{(n+1)}(z) \leqq N^{(n)}(z)$ weil $\mathfrak{P}^{(n)}$ in $\mathfrak{P}^{(n+1)}$, also $\mathfrak{M}^{(n)}(N^{(n)}(z); \mathfrak{P}^{(n)})$ in $\mathfrak{M}^{(n+1)}(N^{(n)}(z); \mathfrak{P}^{(n+1)})$ liegt. Somit existiert

$$\lim_{n\to\infty} N^{(n)}(z) = N(z).$$

Daß dieser Limes von der Wahl der inneren Polygonfolge nicht abhängt, werden wir später zeigen. Zunächst beweisen wir:

a) *Es gibt eine reguläre Matrix der Norm $N(z)$, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ gegen z strebt.*

Für $n \geqq n_\varkappa$ ist

$$|\mathfrak{P}^{(n)}\mathfrak{K}| < \frac{1}{2 \cdot \varkappa \cdot N(z)}.$$

Man bestimmt wie früher zu (s_n) eine Folge $(s_\nu^{(\varkappa)})$ mit dem Kerne $\mathfrak{P}^{(n_\varkappa)}$, weiterhin die Konstante $N^{(\varkappa)}(z)$, die dem Punkte z und dem Polygon $\mathfrak{P}^{(n_\varkappa)}$ in § 3, (IV) zugewiesen ist, und setzt unter Benutzung eines $\delta_\varkappa \geqq 0$

$$N^{(\varkappa)}(z) = N(z) + \delta_\varkappa \qquad (\delta_\varkappa \to 0 \text{ für } \varkappa \to \infty).$$

Nach dem ersten Satze des § 4 gibt es eine reguläre Matrix $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$ der Norm $N^{(\varkappa)}(z)$, für die $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu^{(\varkappa)}$ gegen z strebt, also hat

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu = \sum_{\nu=0}^{\nu_\varkappa - 1} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu + \sum_{\nu=\nu_\varkappa}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu^{(\varkappa)} + \sum_{\nu=\nu_\varkappa}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} \varepsilon_\nu^{(\varkappa)}$$

den Häufungspunkt $z + \varepsilon^{(\varkappa)}\left(\varepsilon^{(\varkappa)} < \frac{1}{2\varkappa}\right)$. In der genannten Matrix $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$

denken wir uns durch eventuelles Streichen von Zeilen erreicht, daß für die $\varkappa$-te Zeile folgende vier Bedingungen erfüllt sind:

1. $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\varkappa\nu}^{(\varkappa)} - 1\right| < \frac{1}{\varkappa}$;
2. $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{\varkappa\nu}^{(\varkappa)}| - N^{(\varkappa)}(z)\right| < \frac{1}{\varkappa} + \delta_\varkappa$;
3. $|a_{\varkappa\nu}^{(\varkappa)}| < \frac{1}{\varkappa}$, falls $\nu \leqq \varkappa$;
4. $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\varkappa\nu}^{(\varkappa)} s_\nu - (z + \varepsilon^{(\varkappa)})\right| < \frac{1}{\varkappa}$.

Schließlich bildet man die Matrix $(a_{\varkappa\nu})$, deren $\varkappa$-te Zeile die eben genannte $\varkappa$-te Zeile von $(a_{\varkappa\nu}^{(\varkappa)})$ ist; diese leistet das Verlangte.

b) *Ist $(a_{n\nu})$ regulär, (s_n) eine Folge mit dem Kerne $\mathfrak{K}$ und strebt $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ gegen z, so ist die Norm von $(a_{n\nu})$ nicht kleiner als $N(z)$.*

Ist $N(z) = 1$, so ist nichts zu zeigen. $N(z)$ wird also größer als 1 gedacht.

ζ sei ein fester Punkt, $(b_{n\nu})$ sei regulär und habe eine Norm kleiner als $N(z)$. $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n\nu} s_\nu\right)$ strebe gegen ζ. ζ ist dann innerer Punkt von $\mathfrak{M}(N(z))$, somit auch innerer Punkt aller $\mathfrak{M}^{(n)}(N(z); \mathfrak{P}^{(n)})$ hinreichend hoher Nummer n, wenn $\mathfrak{P}^{(n)}$ dieselbe Bedeutung wie früher hat.

Da $N^{(n)}(z) \geqq N(z)$, kann z als Randpunkt von jedem $\mathfrak{M}^{(n)}(N^{(n)}(z); \mathfrak{P}^{(n)})$ nicht innerer Punkt des für $N(z)$ bestimmten Bereichs $\mathfrak{M}^{(n)}(N(z); \mathfrak{P}^{(n)})$, also auch nicht innerer Punkt des Grenzbereichs $\mathfrak{M}(N(z))$ sein. z ist demnach von jedem ζ der genannten Art verschieden; die Norm regulärer Matrizen, mit deren Hilfe (s_n) zum Werte z limitierbar ist, ist somit mindestens $N(z)$.

Nach a) und b) ist die Konstante $N(z)$ auch dadurch eindeutig bestimmt, daß sie die untere Grenze der Normen aller regulärer Matrizen $(a_{n\nu})$ angibt, für die $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ gegen z strebt. $N(z)$ hängt deshalb von der Polygonfolge $(\mathfrak{P}^{(n)})$ nicht ab.

Da demnach $\mathfrak{M}(1) \equiv \mathfrak{K}$, kommt jedem äußeren Punkte von $\mathfrak{K}$ ein $N(z) > 1$ zu.

Insgesamt ist damit bewiesen:

Hauptsatz I. *Ist (s_n) eine beschränkte divergente Folge mit dem Kerne $\mathfrak{K}$, so ist sie zu einem beliebig vorgegebenen Werte z durch reguläre Matrizen jeder Norm $N \geqq N(z)$ limitierbar, wenn $N(z)$ definiert ist als*

$$\frac{|z - a^{(1)}| + |z - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|}, \quad \textit{falls } \mathfrak{K} \textit{ die Strecke } a^{(1)} \ldots a^{(2)},$$

$$\inf_{\{\zeta\}} \frac{\sum |z - a^{(p)}| + |z - \zeta|}{|\zeta - a^{(p)}|}, \quad \textit{falls } \mathfrak{K} \textit{ das konvexe Polygon } a^{(1)} a^{(2)} \ldots a^{(p)},$$

und, wenn $\mathfrak{K}$ eine andere Gestalt hat, unter Zuhilfenahme einer inneren, $\mathfrak{K}$ approximierenden Polygonfolge, als

$$\lim_{n\to\infty} N^{(n)}(z) = N(z).$$

Keine reguläre Matrix geringerer Norm leistet dasselbe. Für Punkte von $\mathfrak{K}$ ist $N(z) = 1$, für äußere Punkte von $\mathfrak{K}$ ist $N(z) > 1$.

Daraus ziehen wir sofort als Folgerung:

Hauptsatz II. *(s_n) sei eine beschränkte divergente Folge mit dem Kerne $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{A}$ eine beschränkte, abgeschlossene, nicht leere Menge. Die obere Grenze der für die Elemente z von $\mathfrak{A}$ bestimmten $N(z)$ sei N^* genannt. Dann lassen sich reguläre Matrizen $(a_{n\nu})$ jeder Norm $N \geqq N^*$ so angeben, daß die Transformationen von (s_n) genau die Punkte von $\mathfrak{A}$ zu Häufungspunkten haben. Keine reguläre Matrix geringerer Norm leistet dasselbe.*

Beweis. Jede Menge $\mathfrak{A}$ ist Summe einer höchstens abzählbaren Menge $\mathfrak{Z}$ und deren Ableitung. Nach dem Hauptsatze I gibt es zu jedem Element $z^{(\varkappa)}$ von $\mathfrak{Z}$ eine reguläre Matrix $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$ der Norm N^*, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu$ gegen $z^{(\varkappa)}$ strebt. Durch Streichen von Zeilen sei erreicht, daß für die n-te Zeile von $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$ gilt

1. $|a_{n\nu}^{(\varkappa)}| < \frac{1}{n}$ für $\nu \leqq n$;
2. $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}^{(\varkappa)}| - N^*\right| < \frac{1}{n}$;
3. $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} - 1\right| < \frac{1}{n}$;
4. $\left|\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^{(\varkappa)} s_\nu - z^{(\varkappa)}\right| < \frac{1}{n}$.

Als n-te Zeile von $(a_{n\nu})$ wird die n-te Zeile von $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$ genommen, wo $\varkappa$ noch zu bestimmen ist. Zu diesem Zweck wird erst die natürliche Zahl m festgelegt, für die

$$m(m-1) \leqq 2n < m(m+1)$$

und dann, je nachdem $\mathfrak{Z}$ eine endliche Menge von k Elementen oder eine unendliche Menge ist,

$$\varkappa \equiv n - \frac{m(m-1)}{2} \pmod{k} \quad \text{bzw.} \quad \varkappa = n - \frac{m(m-1)}{2}$$

gesetzt. Die so konstruierte Matrix $(a_{n\nu})$ ist regulär, hat die Norm N^*, und die Folge mit den Gliedern $t_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ hat sämtliche Punkte von $\mathfrak{A}$ zu Häufungspunkten.

Denn in $(a_{n\nu})$ kommen aus jeder Matrix $(a_{n\nu}^{(\varkappa)})$ unendlich viele Zeilen zur Verwendung, nämlich alle, deren Nummer von der Form $n = \varkappa + \frac{m(m-1)}{2}$ ist, wo m eine natürliche Zahl größer als $\varkappa$ ist. Also ist jeder Punkt von $\mathfrak{Z}$ und damit auch jeder Punkt von $\mathfrak{A}$ Häufungspunkt von (t_n). — Weiter gilt:

Kein äußerer Punkt ζ von $\mathfrak{A}$ ist Häufungspunkt von (t_n), da ζ von jedem $z^{(\varkappa)}$ einen Abstand $\geqq \delta > 0$ hat.

Noch ist zu zeigen, daß jede reguläre Matrix $(a_{n\nu})$, die das Verlangte leistet, mindestens die Norm N^* hat. Weil $\mathfrak{A}$ abgeschlossen, gibt es einen Punkt z^* von $\mathfrak{A}$, für den $N(z^*) = N^*$ ist. Hat nun $\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right)$ den Häufungspunkt z^*, so gibt es eine Teilfolge $(t_n^*) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}^* s_\nu\right)$, die gegen z^* strebt. Da $(a_{n\nu}^*)$ mit $(a_{n\nu})$ regulär ist, so kann Hauptsatz I angewandt werden, die Norm von $(a_{n\nu}^*)$ ist also nicht kleiner als $N(z)$, somit

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}|\right) \geqq \overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}^*|\right) \geqq N^*,$$

w. z. b. w.

In dem Hauptsatze II ist enthalten:

Ist (s_n) eine beschränkte divergente Folge mit dem Kerne $\mathfrak{K}$, $(a_{n\nu})$ eine reguläre Matrix der Norm $K \geqq 1$, so liegt der Kern von $(t_n) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right)$ stets in $\mathfrak{M}(K; \mathfrak{K})$.

Für $K = 1$ erhält man den auf Matrizen spezialisierten *Kernsatz von Knopp*[8]) mit notwendigen und hinreichenden Bedingungen:

Ist $(a_{n\nu})$ eine reguläre Matrix, (s_n) eine beschränkte divergente Folge mit dem Kerne $\mathfrak{K}$, so ist notwendig und hinreichend dafür, daß der Kern $\mathfrak{K}$ den Kern der Folge $(t_n) = \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu\right)$ enthält,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} |a_{n\nu}| = 1.$$

Teilbereiche der in Frage stehenden Mengen $\mathfrak{M}(K; \mathfrak{K})$ können gefunden werden, indem man Punktepaare $a^{(1)}$ und $a^{(2)}$ auswählt, die zu $\mathfrak{K}$ gehören, und die Ellipsen

$$\frac{|z - a^{(1)}| + |z - a^{(2)}|}{|a^{(1)} - a^{(2)}|} \leqq K; \qquad a^{(1)} \neq a^{(2)}$$

bestimmt. Der kleinste, diese Ellipsen umschließende konvexe Bereich besteht dann nur aus Werten, zu denen (s_n) durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar ist.

Leider ergab sich in den vorliegenden Untersuchungen für den Fall, daß $K > 1$ und $\mathfrak{K}$ nicht eine Strecke $a^{(1)} \ldots a^{(2)}$ ist, keine parameterfreie Darstellung der Bereiche $\mathfrak{M}$. Voll befriedigend ist nur noch der Fall, daß $\mathfrak{K}$ ein Kreis ist.

$$\mathfrak{K} \equiv \mathfrak{k} : |z - z_0| \leqq r;\ r > 0.$$

[8]) K. Knopp, a. a. O.

Besitzt (s_n) den Kern $\mathfrak{k}$, ist also $\overline{\lim_{n\to\infty}}|s_\nu - z_0| = r$, ist weiter $(a_{n\nu})$ regulär und von der Norm $K \geqq 1$ und hat $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} s_\nu$ den Häufungspunkt z, so hat $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}(s_\nu - z_0)$ den Häufungswert $z - z_0$; dann ist

$$|z - z_0| \leqq \overline{\lim_{n\to\infty}} \left| \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu}(s_\nu - z_0) \right| \leqq r K,$$

z somit im Kreise

$$\mathfrak{k}' : |z - z_0| \leqq r K$$

gelegen. (s_n) ist aber zu jedem Randpunkte z' dieses Kreises durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar, denn z' ist Randpunkt der Ellipse

$$\frac{\left|z - z_0 - \frac{1}{K}(z_0 - z')\right| + \left|z - z_0 + \frac{1}{K}(z_0 - z')\right|}{2|z_0 - z'|} \leqq 1,$$

wie man durch Einsetzen erkennt, also schon jede Teilfolge von (s_n) mit den Häufungspunkten $z_0 + \frac{z_0 - z'}{K}$ und $z_0 - \frac{z_0 - z'}{K}$ zum Werte z' limitierbar.

(s_n) mit dem Kerne $\mathfrak{k}$ ist demnach genau zu den Punkten von $\mathfrak{k}'$ durch reguläre Matrizen der Norm K limitierbar, d. h.

$$\mathfrak{k}' \equiv \mathfrak{M}(K; \mathfrak{k}).$$

(Eingegangen am 22. Juni 1931.)