## Werk

**Titel:** Homologiegruppe berandeter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten

**Autor:** Seifert, H.,

**Ort:** Berlin

**Jahr:** 1932

**PURL:** https://resolver.sub.uni-goettingen.de/purl?266833020_0035|log36

## Kontakt/Contact

Digizeitschriften e.V.
SUB Göttingen
Platz der Göttinger Sieben 1
37073 Göttingen

info@digizeitschriften.de

# Homologiegruppe berandeter dreidimensionaler Mannigfaltigkeiten.

Von

H. Seifert in Leipzig.

---

Satz. *In einer dreidimensionalen orientierbaren berandeten Mannigfaltigkeit $\bar{R}$, deren Rand aus $r$ (orientierbaren) Flächen vom Geschlecht $p_1, p_2, \ldots, p_r$ besteht, ist die Bettische Zahl der Dimension* 1 *größer oder gleich* $p_1 + p_2 + \cdots + p_r$.

Beweis. Wenn alle Randflächen Kugelflächen sind, so ist der Satz trivial. Wenn dagegen eine Fläche, sagen wir die erste, $f_1$ ein Geschlecht $p_1 > 0$ hat, so gibt es auf $f_1$ eine doppelpunktfreie geschlossene Kurve $b$ von der Art, daß das Element der Homologiegruppe von $\bar{R}$, das diese Kurve repräsentiert, unendliche Ordnung hat. Die Kurve $b$ ist also weder einfach noch mehrfach durchlaufen nullhomolog. — Um das Vorhandensein einer solchen Kurve nachzuweisen, betrachten wir auf $f_1$ zwei konjugierte Rückkehrschnitte $a$ und $b$, das sind zwei doppelpunktfreie geschlossene Kurven, die sich in genau einem Punkt überkreuzen (genauer einen Punkt gemein haben und auf $f_1$ die Schnittpunktzahl $\pm 1$ besitzen). Wir zeigen, daß, wenn $a$ als Element der Homologiegruppe von $\bar{R}$ endliche Ordnung hat, etwa die Ordnung $\alpha$, so daß $\alpha a \sim 0$ mit $\alpha > 0$ ist, dann $b$ sicher unendliche Ordnung in $\bar{R}$ hat. Daß $\alpha a \sim 0$ in $\bar{R}$ ist, besagt, daß es eine Flächenkette (orientierten Flächenkomplex) $\bar{C}$ in $\bar{R}$ gibt, die die geschlossene Kurve $\alpha a$ zum Rande hat. Nimmt man eine weitere orientierbare berandete Mannigfaltigkeit $\bar{R}^*$ hinzu, die sich von $\bar{R}$ nur durch die Orientierung unterscheidet, und identifiziert man entsprechende Randflächenstücke von $\bar{R}$ und $\bar{R}^*$, so entsteht aus $\bar{R}$ „durch Verdoppelung" eine unberandete orientierbare Mannigfaltigkeit $R$. Dem Flächenkomplex $\bar{C}$ entspricht in $\bar{R}^*$ ein Flächenkomplex $\bar{C}^*$, der den Rand $-\alpha a$ hat, also zusammen mit $\bar{C}$ eine geschlossene Flächenkette $C$ liefert. Die Schnittpunktzahl der Kurve $b$ mit $C$ in der Mannigfaltigkeit $R$ beträgt $\pm\alpha$; denn der zu $a$ konjugierte

Rückkehrschnitt $b$ schneidet die Flächenkette $C$ genau $\alpha$ mal in seinem einzigen Schnittpunkt mit der Kurve $a$. Ist nun $\beta$ eine beliebige ganze Zahl $\neq 0$, so hat die Kurve $\beta b$ daher mit der Flächenkette $C$ die Schnittpunktzahl $\beta\alpha \neq 0$. $\beta b$ kann also nicht nullhomolog in $R$ sein, denn nach einem bekannten Satze ist die Schnittpunktzahl einer geschlossenen nullhomologen Kurve mit jeder geschlossenen Flächenkette in einer dreidimensionalen orientierbaren Mannigfaltigkeit immer 0. Erst recht kann dann $\beta b$ nicht in $\bar{R}$ nullhomolog sein. Von zwei konjugierten Rückkehrschnitten der Fläche $f_1$ hat also mindestens einer als Element der Homologiegruppe unendliche Ordnung.

Nachdem die Existenz der Kurve $b$ feststeht, wird $b$ mit einem schmalen Streifen auf $f_1$ umgeben. Dies bereitet keine Schwierigkeiten, da wir uns in der kombinatorischen Topologie befinden, die Kurve $b$ also ein doppelpunktfreier Kantenzug auf $f_1$ ist. Der Streifen ist ein Kreisring, der mit einem ebensolchen Kreisring auf der Oberfläche eines Elementarraumstückes identifiziert wird. Anschaulich gesprochen: Es wird eine zylindrische Platte mit ihrem schmalen Rand auf den Streifen von $f_1$ gesetzt. Dadurch entsteht eine berandete Mannigfaltigkeit $\bar{R}'$, deren Homologiegruppe um (mindestens) eine freie Erzeugende ärmer ist als die von $\bar{R}$.[1]) Jede geschlossene Kette der Dimension 1 von $\bar{R}'$ ist nämlich homolog einer solchen, die schon in der Teilmannigfaltigkeit $\bar{R}$ liegt, und es gibt eine Kette $b$, die in $\bar{R}$ unendliche Ordnung hat und in $\bar{R}'$ nullhomolog wird. Die Bettische Zahl der Dimension 1 von $\bar{R}'$ ist also um (mindestens) eine Einheit kleiner als die von $\bar{R}$. Während beim Übergang von $\bar{R}$ zu $\bar{R}'$ die Randflächen $f_2, \ldots, f_r$ ungeändert geblieben sind, ist $f_1$ in eine Randfläche $f_1'$ von $\bar{R}'$

[1]) Genauer ist die Homologiegruppe von $\bar{R}'$ *genau* um eine freie Erzeugende ärmer. Sie entsteht nämlich aus der Homologiegruppe von $\bar{R}$ durch Nullsetzen des Elementes $b$ unendlicher Ordnung. Das folgt aus dem Lemma: $K'$ und $K''$ seien zwei zusammenhängende Teilkomplexe eines $n$-dimensionalen Komplexes $K$, so daß jedes $i$-dimensionale Element von $K$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ mindestens einem der Komplexe $K'$ und $K''$ angehört. Der Durchschnitt $D$ von $K'$ und $K''$, der sicher nicht leer ist, sei ebenfalls zusammenhängend. $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'$, $\mathfrak{K}''$, $\mathfrak{D}$ seien die Fundamentalgruppen von bzw. $K$, $K'$, $K''$, $D$. Wählt man den Anfangspunkt für die geschlossenen Wege in $D$, so ist jeder fundamentale Weg von $D$ zugleich fundamentaler Weg von $K'$ und $K''$. Somit entspricht jedem Element von $\mathfrak{D}$ ein Element von $\mathfrak{K}'$ und ebenso ein Element von $\mathfrak{K}''$. *Dann ist $\mathfrak{K}$ eine Quotientengruppe des freien Produktes $\mathfrak{K}' \cdot \mathfrak{K}''$ von $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$. Man erhält $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{K}' \cdot \mathfrak{K}''$, wenn man je zwei Elemente von $\mathfrak{K}'$ und $\mathfrak{K}''$, die demselben Element von $\mathfrak{D}$ entsprechen, zusammenfallen läßt.* — Für die Homologiegruppen 1. Dimension folgt hieraus der gleiche Satz, nur hat man für freies Produkt direktes Produkt zu sagen. In unserem Falle ist $K = \bar{R}'$, $K' = \bar{R}$, $K''$ ist die längs des Kreisringes $D$ aufgesetzte Platte. Der Beweis des Lemmas befindet sich in der Arbeit des Verfassers: Konstruktion dreidimensionaler geschlossener Räume, Ber. Sächs. Akad. d. Wiss. 83 (1931), S. 33.

übergegangen. Das Geschlecht von $f_1'$ ist nur noch $p_1 - 1$, denn $f_1$ entsteht aus $f_1$ durch Aufschneiden längs des Rückkehrschnittes $b$ und Schließen mit zwei Kreisflächen. Auf $\overline{R}'$ wird dasselbe Verfahren angewendet wie auf $\overline{R}$, bis man nach $p_1 + p_2 + \ldots + p_r$ Schritten zu einer Mannigfaltigkeit gelangt, die nur noch von Kugelflächen berandet wird. Da deren Bettische Zahl der Dimension 1 $\geqq 0$ ist, so ist die von $\overline{R}$ $\geqq p_1 + p_2 + \ldots + p_r$, q. e. d.

H. Kneser hat mit anderen Hilfsmitteln den folgenden Spezialfall des vorstehenden Satzes bewiesen[2]):

Eine berandete dreidimensionale Mannigfaltigkeit, deren erste Bettische Zahl den Wert Null hat, während alle Torsionszahlen erster Dimension ungerade sind, hat nur sphärische Randflächen.

---

[2]) H. Kneser, Eine Bemerkung über dreidimensionale Mannigfaltigkeiten, Gött. Nachr. 1925, S. 128.

(Eingegangen am 13. November 1931.)