Zum Waringschen Problem.

Zweite Abhandlung.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

Das Hauptergebnis meiner ersten Abhandlung unter gleichem Titel[1]) war die Ungleichung (8) des Satzes IV. Diese Ungleichung bewies ich ausnahmslos für $s \geqq kK + 1$ und im Falle der Richtigkeit von

(1) $$r_2(n) = O(n^\varepsilon) \quad \text{bei jedem} \quad \varepsilon > 0$$

sogar für $s \geqq (k-2)K + 5$.

Heute werde ich sie ausnahmslos für $s \geqq (k-2)K + 5$ beweisen; die Abänderung des Beweisganges ist sogar für den Hardy-Littlewoodschen Spezialfall $P(z) = z^k$ von Nutzen[2]).

Ich bin aber keineswegs in der Lage, (1) zu beweisen; vielmehr wurde (1) nur einmal, nämlich zum Beweise von

(2) $$W(m) < D_9 m^{2a+\varepsilon} \quad \text{für} \quad m \geqq 1$$

gebraucht[3]), und (2) läßt sich direkt folgendermaßen begründen[4]).

Hierbei war $k > 2$, $a = \frac{1}{k}$, $P(z)$ ein ganzzahliges Polynom[5]) $\alpha_0 z^k + \dots + \alpha_k$ mit $\alpha_0 > 0$, $r_2(n)$ die Lösungszahl der diophantischen Gleichung

$$P(h_1) + P(h_2) = n, \quad h_1 \geqq 0, \; h_2 \geqq 0;$$

$$W(m) = \sum_{n=0}^{m} r_2^2(n).$$

1) Math. Zeitschr. 12 (1922), S. 219—247.

2) Es wird der bekannte Satz entbehrlich, daß die Anzahl der Zerlegungen von $n > 0$ in zwei Quadrate höchstens das Vierfache der Anzahl $T(n)$ der positiven Teiler von n ist.

3) Loc. cit. S. 241.

4) Der Witz ist, daß $P(u) + P(v)$ nicht notwendig reduzibel ist (nicht einmal im Körper aller Zahlen), wohl aber $P(u) - P(v)$ wegen des Faktors $u - v$.

5) Ich mache keinen Gebrauch von der alten Annahme, daß $P(z)$ für $z \geqq 0$ beständig wächst und $\geqq 0$ ist.

Aus
$$P(u)+P(v)\leqq m, \quad u\geqq 0,\ v\geqq 0,\ m\geqq 1$$
folgt offenbar
$$u\leqq D\,m^{a}, \quad v\leqq D\,m^{a},$$
wo $D=D_{24}$.

Ich beweise nunmehr (2) folgendermaßen.
$$W(m)=\sum_{\substack{h_1,h_2,h_3,h_4=0\\ 0\leqq P(h_1)+P(h_2)=P(h_3)+P(h_4)\leqq m}}^{[D\,m^a]} 1\leqq \sum_{h_2,h_4=0}^{[D\,m^a]}\ \sum_{\substack{h_1,h_3=0\\ P(h_1)-P(h_3)=P(h_4)-P(h_2)}}^{[D\,m^a]} 1.$$

Bei gegebenen h_2, h_4 mit
$$n=P(h_4)-P(h_2)\neq 0$$
hat, wenn $T(l)$ die Anzahl der positiven Teiler von $l>0$ ist,

(3) $$P(h_1)-P(h_3)=n$$

höchstens $2(k-1)\,T(|n|)$ Lösungen; denn es ist
$$P(x+y)-P(x)=y(k\,\alpha_0\,x^{k-1}+\ldots),$$
wo die Klammer rechts bei festem y den wahren Grad $k-1$ in x hat; es muß also h_1-h_3/n sein, und bei festem h_1-h_3 hat h_3 höchstens $k-1$ Werte.

$n\neq 0$ kommt für höchstens $D_{25}\,m^{2a}$ Paare h_2, h_4 mit $0\leqq h_2\leqq D\,m^a$, $0\leqq h_4\leqq D\,m^a$ vor, und wegen $|n|<D_{26}\,m$ ist die Lösungszahl von (3) jedesmal $<D_{27}\,m^{\varepsilon}$.

Für jedes der höchstens $D_{28}\,m^a$ Paare h_2, h_4 mit $0\leqq h_2\leqq D\,m^a$, $0\leqq h_4\leqq D\,m^a$, $P(h_4)-P(h_2)=0$ hat (3), jetzt mit $n=0$, höchstens $D_{29}\,m^a$ Lösungen mit $0\leqq h_1\leqq D\,m^a$.

Daher ist
$$W(m)<D_{25}\,m^{2a}\,D_{27}\,m^{\varepsilon}+D_{28}\,m^a\,D_{29}\,m^a<D_9\,m^{2a+\varepsilon}.$$

Göttingen, den 8. Juni 1929.

(Eingegangen am 9. Juni 1929.)